

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 103003/B/2022/421000283731

**SIMULÁCIA STOCHASTICKÝCH PROCESOV**  
**HROMADNEJ OBSLUHY**

Bakalárska práca

2022

Laura Richweisová

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 103003/B/2022/421000283731

**SIMULÁCIA STOCHASTICKÝCH PROCESOV**  
**HROMADNEJ OBSLUHY**

Bakalárska práca

Študijný program:	Manažérske rozhodovanie
Študijný odbor:	Ekonómia a manažment
Školiace pracovisko:	Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Vedúci záverečnej práce:	doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

2022

Laura Richweisová

## **ABSTRAKT**

RICHWEISOVÁ, Laura: *Simulácia stochastických procesov hromadnej obsluhy*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Marian Reiff, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2022, 32 s.

Záverečná bakalárska práca je vypracovaná na tému „Simulácia stochastických procesov hromadnej obsluhy“. Cieľom záverečnej práce bolo modelovanie stochastického procesu pomocou simulačných modelov vo vybranom softvéri. Jednotlivé časti záverečnej bakalárskej práce boli zamerané na stručnú analýzu súčasného stavu riešenej problematiky doma a v zahraničí, najmä z hľadiska charakteristiky základných pojmov z teórie hromadnej obsluhy vrátane oblasti aplikácie teórie hromadnej obsluhy. V ďalšej časti bakalárskej práce sme sa venovali simulácii a simulačným modelom teórie hromadnej obsluhy s dôrazom na simuláciu stochastických procesov hromadnej obsluhy. Výsledkom práce bolo spracovanie prípadovej štúdie v programe SIMUL8 a spracovali sme výslednú simuláciu s názvom Sklad materiálu. Zároveň sme navrhli postup riešenia v dvoch variantoch. Z hľadiska výsledku riešenia sme vyhodnotili ako úspešnejší navrhnutý druhý variant simulácie.

### **Kľúčové slová:**

Simulácia, Stochastické procesy, Hromadná obsluha, Prípadová štúdia.

## **ABSTRACT**

RICHWEISOVÁ, Laura: *Simulation of Stochastic Processes of Queueing Systems*. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economy Informatics; Department of Operations Research and Econometrics. - Bachelor thesis supervisor: doc. Ing. Marian Reiff, PhD. – Bratislava: FEI UE, 2022, 32 p.

The focus of the bachelor thesis is on simulation of stochastic process in area of queueing systems. The objective of the thesis is stochastic process modeling with use of simulation models software tools. The first part of the thesis contains brief literature review from both domestic and international sources with focus on queueing systems theory basic terms as well as on the field of its basic application concepts. In the next section, basic theoretical concepts' description is followed by overview of simulation models of the queueing systems theory with main focus on stochastic process simulation of queueing systems. Important output of the thesis is preparation of case study named „Material Warehouse“ with use of SIMUL8 software. As a result, two possible solutions were proposed while the second proposed solution was evaluated as a preferable alternative.

### **Keywords:**

Simulation; stochastic processes; queueing systems; case study.

## ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE



Ekonomická univerzita v Bratislave  
Fakulta hospodárskej informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Laura Richweisová  
**Študijný program:** manažérske rozhodovanie  
(Jednoodborové štúdium,  
bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** ekonómia a manažment  
**Typ záverečnej práce:** Bakalárska záverečná práca  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský  
**Sekundárny jazyk:** anglický  
**Názov:** Simulácia stochastických procesov  
**Anotácia:** Modelovanie stochastického procesu pomocou simulačných modelov  
vo vybranom softvéri.

**Vedúci:** doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

**Katedra:** KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI

**Vedúci katedry:** prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

**Dátum zadania:** 27.03.2021

**Dátum schválenia:** 28.04.2022

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

vedúci katedry

## **PREHLÁSENIE**

Čestne vyhlasujem, že bakalársku prácu „Simulácia stochastických procesov hromadnej obsluhy“ som spracovala samostatne, s využitím literatúry, ktorej prehľad som uviedla v zozname literatúry.

V Bratislave 6. 5. 2022

.....

## **POĎAKOVANIE**

Týmto by som veľmi rada poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. Ing. Marianovi Reiffovi, PhD. za cenné rady a pripomienky pri vedení mojej práce a tiež svojej rodine za podporu pri písaní práce.

## OBSAH

ÚVOD .....	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí .....	10
1.1 Charakteristika základných pojmov z teórie hromadnej obsluhy .....	10
<i>Oblasti aplikácie teórie hromadnej obsluhy .....</i>	<i>11</i>
<i>Obslužný systém hromadnej obsluhy .....</i>	<i>12</i>
<i>Metódy teórie hromadnej obsluhy.....</i>	<i>13</i>
1.2 Analytické modely teórie hromadnej obsluhy .....	13
1.3 Simulačné modely teórie hromadnej obsluhy .....	16
1.4 Charakteristika simulácie .....	16
2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania .....	22
3 Výsledky práce a diskusia .....	23
3.1 Údajová základňa pre modelovanie systému hromadnej obsluhy .....	23
3.2 Prípadová štúdia v programe SIMUL8 .....	23
<i>Navrhovaný postup riešenia.....</i>	<i>27</i>
Záver .....	31
Použitá literatúra .....	32

## ÚVOD

V živote každého človeka sa denne vyskytujú situácie, ktoré sú radostné ale aj menej radostné. K tým prvým patria napríklad zdravie, šťastie, narodenie dieťaťa, ukončenie štúdia na univerzite. K tým druhým možno zaradiť problémy so zdravím, v rodine, v škole ale aj problémy takého druhu ako je čakanie u lekára, v obchode, na vydanie obeda, ale aj na skúšku atď. Sú to väčšinou nepríjemné situácie, a preto je vhodné sa zamyslieť, prečo je tomu tak. Príčin môže byť viacero nedostatok lekárov, určitých služieb, zlá organizácia a nevhodné manažérske rozhodovania, väčší dopyt ako ponuka atď. Ekonómia a vedci sa nad tým dlhodobo zamýšľali najmä z hľadiska optimalizácie využívania jednotlivých spôsobov, možností a zdrojov. To bol aj jeden z dôvodov vzniku teórie a modelov hromadnej obsluhy na začiatku 20. storočia, je súčasťou operačného výskumu. V súvislosti s modelmi hromadnej obsluhy sa využívajú simulačné metódy a najčastejšie využívaná metóda operačného výskumu je simulácia.

Záverečná bakalárska práca je venovaná problematike stochastických procesov hromadnej obsluhy. Jedným zo zámerov pri jej písaní bolo modelovanie stochastického procesu pomocou simulačných modelov vo vybranom softvéri. Z hľadiska štruktúry bakalárskej práce sme v prvej časti uskutočnili stručný prehľad riešenej problematiky doma a v zahraničí, s dôrazom na objasnenie základných pojmov a skutočností z teórie hromadnej obsluhy a simulácie. V ďalšej časti sa zaoberáme praktickými aspektami jednotlivých teoretických prístupov. Využili sme nato simulačný softvér SIMUL8, ktorý je jedným z najrozšírenejších softvérových produktov pre dynamickú simuláciu procesov realizovaných v praxi podnikov. Zamerali sme sa na otázku skladu materiálu a v poslednej časti práce sme navrhli variantné riešenie tejto otázky. Okrem uvedenej časti sú súčasťou obsahu bakalárskej práce aj cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania, ako aj abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku.

# 1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

## 1.1 Charakteristika základných pojmov z teórie hromadnej obsluhy

Teória hromadnej obsluhy (ďalej THO) skúma systémy, v ktorých dochádza k realizácii obsluhy požiadaviek prichádzajúcich do systému hromadnej obsluhy. Pri skúmaní objektov pomocou modelov hromadnej obsluhy (MHO) je často cieľom meranie vzájomných väzieb medzi základnými ukazovateľmi charakterizujúcimi kvalitu a efektívnosť systému hromadnej obsluhy (SHO) a nájdenie optimálneho prevádzkového režimu vzhľadom na zvolené kritérium. Optimalizáciou prevádzkového režimu systému hromadnej obsluhy je možné spravidla podstatne znížiť možnosť vzniku frontov, popr. znížiť celkové straty z dôvodu čakania. Treba sa zaoberať aj ekonomickou stránkou problému. Zníženie pravdepodobnosti vzniku čakania je obvykle spojené s rozšírením kapacity obslužného zariadenia. Preto je nutné stanoviť optimálny vzťah medzi stratami z čakania požiadaviek na obsluhu a medzi nákladmi na zvýšenie kapacity obsluhy. Vyčíslenie strát či nákladov vznikajúcich v závislosti na prevádzkových režimoch skúmaného systému obsluhy nie je v mnohých prípadoch jednoduchou záležitosťou.

„Systém hromadnej obsluhy sa skladá z jedného alebo viacerých obslužných kanálov (staníc obsluhy), ktoré obsluhujú prúd požiadaviek vstupujúcich do systému. Vo väčšine prípadov nastáva pritom situácia, v ktorej kanály nie sú schopné ihneď uspokojovať požiadavky a tie buď musia opustiť systém bez obsluhy, alebo čakať vo fronte na uvoľnenie kanálu“.<sup>1</sup>

Teória hromadnej obsluhy vznikla najmä z dôvodu predvídať správanie systémov poskytujúci určité služby, tak aby dochádzalo k ich skvalitňovaniu. Jej zakladateľom bol dánsky matematik Agner Krarup Erlang (1878-1929). Ako prvý vo svete kto sa vedecky zaoberal problematikou telefónnych sietí. Roku 1909 publikoval svoje prvé dielo *The Theory of Probabilities and Telephone Conversation* (Teória pravdepodobnosti a telefónnej konverzácie). Prišiel k názoru, že telefónny systém je charakterizovaný Poissonovým rozdelením prichádzajúcich hovorov. V roku 1917 Erlang publikoval výnimočnú prácu *Solution of some Problems in Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchange* (Riešenie niektorých problémov v teórii pravdepodobnosti významných v automatickej telefónnej výmene). V práci uviedol vzorec pre stratové a

---

<sup>1</sup> UNČOVSKÝ, L.: Stochastické modely operačnej analýzy ALFA, Bratislava 1980, vysokoškolská učebnica číslo Š 13214/1978-32. str. 81.

čakacie časy, ktorý je veľmi známy v teórii telefónnych ústrední. Známy je tzv. Erlangov vzorec pre pravdepodobnosť straty, ktorý určuje pomer volajúcich, ktorí sa snažia dovolať v čase, keď je sieť preťažená volajúcimi.

Významný v THO bol prínos Davida Kendalla, vytvoril klasifikáciu modelov hromadnej obsluhy. V roku 1953 zaviedol klasifikáciu typu A/B/C, vyjadrujúcu základné charakteristiky modelu.

Významnou skutočnosťou pre oblasť THO bola tzv. Littleova formula v roku 1969. Potom nasledovali roky 1986, kedy bolo publikované prvé číslo odborného časopisu *The Journal of Queueing System*, a rok 1995, v ktorom sa konalo prvé medzinárodné sympóziu THO. Následne ďalšie významné osobnosti, poznáme napríklad Tore Olaus Engset, Conny Palm, Thornton Fry, Edward Charles Molina, Felix Pollaczek, Andrey Kolmogorov, Alexander Khinchin, ktorí ďalej rozpracovali teóriu hromadnej obsluhy.

### *Oblasti aplikácie teórie hromadnej obsluhy*

Existuje mnoho oblastí aplikácie teórie hromadnej obsluhy. Z najznámejších je možné spomenúť oblasť, kde sa táto teória začala využívať, a tou je telefónna konverzácia. Prvá práca na tému reálnej teórie obsluhy vznikla v roku 1909 vďaka A.K. Erlangovi, ktorý pracoval v kodanskej telefónnej spoločnosti. Venoval sa otázkam optimálneho počtu telefónnych liniek tak, aby ústredňa zvládla frekvenciu prichádzajúcich hovorov. V každom modeli THO je podľa neho potrebné definovať, čo sa považuje za príchod, obsluhu, front. Pre telefónne hovory to nemusí byť hneď jasné. Pri podrobnejšom posúdení však môžeme zistiť, že príchody sú vlastne prichádzajúce hovory a interval medzi nimi dokumentuje prichádzajúce požiadavky. Dĺžka hovoru potom určuje čas danej obsluhy. Frekvenciu hovorov môže byť problematické merať, pretože sa môže ozvať obsadzovací tón a volajúci sa tak vôbec nespojí s ústredňou. Obsluhu predstavujú telefónne linky a „frontom“ je súbor nedokončených hovorov. Telefonovanie predstavovalo jedinú oblasť aplikácie THO až do obdobia 50. rokov 20. storočia. Môžeme to dokumentovať letiskovou prevádzkou, kedy sa sleduje využitie štartovacej dráhy na pristátie a vzlietanie lietadiel. Zdá sa, že pri tejto otázke ja jasné, čo predstavuje základné súčasti a charakteristiky systému pre aplikáciu niektorých techník THO. Zákazníkmi sú tiež lietadlá, obsluhou rozumieme štartovaciu dráhu a na čakačke sú lietadlá čakajúce na pristátia alebo odlet. Schopnosť analytika určiť tieto a ďalšie základné charakteristiky modelu je základnou podmienkou pred riešením akéhokoľvek problému teórie hromadnej obsluhy.

Oblasť aplikácie tejto teórie je veľá, väčšina z nich bola dobre uvedená v odbornej literatúre v oblasti teórie pravdepodobnosti, operačného výskumu, manažmentu.

### *Obslužný systém hromadnej obsluhy*

Teória hromadnej obsluhy je časťou aplikovanej matematiky, ktoré skúma činnosť systémov, v ktorých sa opakovane vyskytujú požiadavky vykonať postupnosť operácií, ktoré sú čo do vzniku a okamihu výskytu spravidla náhodné.

Cieľom teórie hromadnej obsluhy je návrh a optimalizácia systému alebo sietí systémov hromadnej obsluhy a v neposlednom rade analýza existujúcich systémov a návrh ich optimalizácie. Analytickými, alebo simulačnými metódami získame sledované charakteristiky, ako napr. priemerná dĺžka čakania, stratený čas zákazníkov, ktorí čakajú v rade, priemerná doba zotrvania zákazníka v systéme, vytáženosť linky, atď.

Systémy hromadnej obsluhy sú schématicky znázornené na obrázku 1. Do systému prichádzajú zákazníci opakovane v čase (teda nie tí istí) a buď sú prijatí do obslužného systému a zaradení do frontu, alebo sú odmietnutí z dôvodu naplnenia kapacity zásobníka. Systém obsahuje jednu alebo niekoľko paralelných obslužných liniek, v ktorých je obsluhované vždy iba určité množstvo zákazníkov. Spôsob radenia do frontu a výber zákazníkov na obsluhu (tzv. frontový režim) môže byť rôzny.

THO vychádza predovšetkým z poznatkov zo štatistiky a z teórie pravdepodobnosti. Patrí do operačného výskumu, matematického modelovania a optimalizácie. Základnou jednotkou systémov hromadnej obsluhy je obslužný systém. Ten je zložený z trojice zákazník-linka-obsluha. „Prevažná časť systémov obsluhy má stochastický charakter. Deterministické situácie sa v praxi vyskytujú len celkom výnimočne. Preto aj teória hromadnej obsluhy sa zakladá na aplikácií počtu pravdepodobností.“<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> UNČOVSKÝ, L.: c. d. str. 82.

## *Metódy teórie hromadnej obsluhy*

Teória hromadnej obsluhy je založená na vyhľadávaní závislostí medzi charakterom vstupu požiadaviek, produktivitou liniek a efektívnosťou obsluhy. Na základe týchto znalostí môžeme zlepšiť činnosť systému pomocou zameraných zmien. Pri optimalizácii systému sú vždy proti sebe dva ciele: čo najvyššie využitie linky a minimalizácia straty času zákazníkov. Ak poznáme závislosť nastavenia systému a výsledných skúmaných charakteristík, potom sa z hľadiska prevádzkovateľa, ale aj vo väzba na zákazníka môžeme správne rozhodnúť a optimalizovať svoje správanie.

Možno konštatovať, že existujú dve metódy skúmania systémov hromadnej obsluhy:

**Analytické metódy** – výsledkom je funkčná závislosť vstupných a výstupných požiadaviek. Nevýhodou je, že analytické metódy je možné použiť len pre triedu špecifických procesov. Ak sú významne narušené predpoklady matematického modelu, je vhodné využívať simulačné metódy.

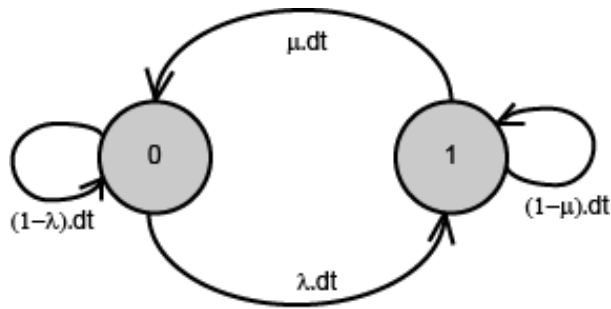
**Simulačné metódy** – systém nahradíme simulačným modelom s rovnakými pravdepodobnostnými charakteristikami a funkčnosť mnohonásobne simulujeme na modeli. Jednotlivé charakteristiky výstupu nahradíme bodovým odhadom, napr. strednú hodnotu priemerom, pravdepodobnosť stavu relatívnej frekvencie atď.

### **1.2 Analytické modely teórie hromadnej obsluhy**

Vzhľadom na zameranie práce uvádzame vzorku modelov THO. Podrobnejšie sú modely THO popísané v literatúre UNČOVSKÝ, L.: Stochastické modely operačnej analýzy ALFA, Bratislava 1980, vysokoškolská učebnica číslo Š 13214/1978-32, Úvod do operačného výskumu II. Ivan Brezina, Juraj Pekár, Bratislava, 2019 (viď Použitá literatúra).

#### **M/M/1/0**

Markovský obslužný systém s jednou linkou. Nepripúšťame tvorbu frontu. V prípade, že je linka obsadená, odchádzajú ostatní zákazníci neobslužení.



Obrázok č. 1

M/M/1/0 - graf diferenciálnych prechodov.

Zákazníci prichádzajú v Poissonovskom toku s intenzitou  $\lambda$ . Dĺžka obsluhy je náhodná veličina s exponenciálnym rozdelením, priemerná dĺžka obsluhy je  $1/\mu$ .

Stav systému je popísaný celkovým počtom zákazníkov (front + obsluha). Pre dané parametre systému sú limitné pravdepodobnosti prípustných stavov:

$$p_0 = \mu\lambda + \mu$$

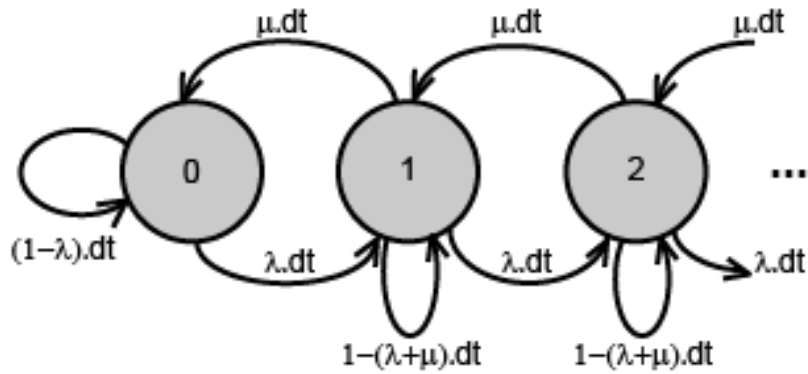
$$p_1 = \lambda + \mu = p_1 + p;$$

$$p = \mu\lambda$$

Tieto hodnoty určujú rozdelenie pravdepodobnosti stavov 0 a 1. Z neho je možné odvodiť všetky ostatné charakteristiky ustáleného stavu. Pravdepodobnosť, že stratíme zákazníka, z dôvodu, že je linka obsadená sa rovná  $p_1$ . Vyťaženosť systému je definovaná ako stredná hodnota počtu obsadených liniek delená celkovým počtom liniek, tzn. v našom prípade je to priamo pravdepodobnosť  $p_1$ .

### M/M/1/∞

Markovský obslužný systém s jednou linkou. Front zákazníkov čakajúcich na obsluhu je neobmedzený.



Obrázok č. 2

### M/M/1/∞-graf diferenciálnych prechodov

Zákazníci prichádzajú v Poissonovskom toku s intenzitou  $\lambda$ . Dĺžka obsluhy je náhodná veličina s exponenciálnym rozdelením, priemerná dĺžka obsluhy je  $1/\mu$ .

Systém nie je stabilizovaný, ak v priemere prichádza viac zákazníkov, ako je linka schopná obslúžiť, t. j.  $\lambda \geq \mu$ ! Potom pravdepodobnosti počtu zákazníkov nekonvergujú a nemá zmysel hľadať ustálené charakteristiky. Označme  $p_k(t)$  pravdepodobnosť, že je v čase  $t$  v systéme  $k$  zákazníkov. V ustálenom systéme tieto pravdepodobnosti konvergujú k hodnote  $p_k$ , nezávislej od počtu zákazníkov na začiatku pozorovania  $t_0$ .

$$p_k = p_0 (\mu\lambda)^k$$

$$p_0 = 1 - \mu\lambda$$

Tak ako pri ostatných markovských modeloch, je účelné prepísať dvojparametrické vzťahy pomocou jediného parametra. Tým sa zjednodušia problémy optimalizácia systému.

### M/M/n/r

Markovský systém hromadnej obsluhy s  $n$  linkami a obmedzený front. Interval medzi prichádzajúcimi zákazníkmi aj dĺžka obsluhy sú modelované náhodnými veličinami s exponenciálnym rozdelením.

Označme  $p_k(t)$  pravdepodobnosť, že je v čase  $t$  v systéme  $k$  zákazníkov. V ustálenom systéme tieto pravdepodobnosti konvergujú k hodnote  $p_k$ , nezávislej od počtu zákazníkov na začiatku pozorovania  $t_0$ .

### 1.3 Simulačné modely teórie hromadnej obsluhy

Simulačné modely používame na analýzu komplexných systémov, ktoré nespĺňajú predpoklady systémov riešiteľných analyticky. V dopravných systémoch je matematická simulácia často jediným možným spôsobom analýzy.

Ich výhodou je, že umožňujú modelovať často neobvyklé situácie, študovať dynamiku systémov.

K ich nevýhodám patrí, že môžu existovať jednoduchšie techniky na riešenie daného problému, pretože simulácia komplexných systémov vyžadujú značné množstvo vstupných dát. Pre správne použitie simulačných programov musíme chápať ich princípy a predpoklady.

Simulácia môže byť buď orientovaná na čas – simulácia s pevným časovým krokom, alebo orientovaná na udalosť – simulácia s premenným časovým krokom. Pre jednoduché modely používame väčšinou simuláciu orientovanú na udalosť, zatiaľ čo komplexnejšie modely s množstvom nastaviteľných parametrov sú simulácie s pevným (veľmi malým) časovým krokom.

„Simulačné metódy pri riešení modelov hromadnej obsluhy vychádzajú práve z toho, že jednotlivé náhodné premenné a procesy možno generovať pomerne jednoducho a reálnu štruktúru i dynamiku príslušného simulovaného objektu možno nahradiť štruktúrou simulačného modelu, ktorého dynamika sa dá vyjadriť pomocou náhodných čísel.“<sup>3</sup>

### 1.4 Charakteristika simulácie

Ako sme už uviedli niektoré zložitejšie systémy hromadnej obsluhy je problematické a často až nemožné riešiť analytickým spôsobom. Existuje však aj iná možnosť skúmania modelovaného systému a to je simulácia. Je však vhodné posúdiť, akej miery je možné daný problém riešiť analyticky, ako sa analytický a simulačný postup odlišujú a či sú postupy v nesúlade, alebo sa môžu dopĺňať. Na základe vzťahov závislých od parametrov  $\lambda$  a  $\mu$  môžeme analyticky určiť niektoré dôležité charakteristiky, ako strednú hodnotu počtu jednotiek v systéme, pravdepodobnosť vytvorenia čakačky strednú dobu čakania, využitie

---

<sup>3</sup> UNČOVSKÝ, L.: c. d. str. 194.

zariadenia a pod. Tieto vzťahy však platia iba pre stabilizované správanie. Pre iné typy rozdelenia a zložitejšie systémy je často analytické riešenie modelov hromadnej obsluhy nie je možné. Simulačný prístup znamená imitovať alebo simulovať v správnej časovej postupnosti príchody jednotiek a ich obsluhy podľa pravdepodobnostných zákonov. Registrujú sa pritom hodnoty, ktoré sa využívajú na výpočet potrebných charakteristík. Informácie získavané simuláciou sú numerického charakteru a nemajú teda tvar formulácie, do ktorých je možné dosadiť parametre konkrétnych rozdelení (ako je to pri analytickom prístupe). Okrem toho modely poskytujú iba odhady stredných hodnôt, respektíve rozptylov, a tak tu vzniká otázka presnosti výsledkov v závislosti od dĺžky činnosti programu. Môžeme konštatovať, že simulačný postup použijeme najmä vtedy, ak modely obsahujú veľký počet premenných a ich funkcií, ktoré sa po intervaloch môžu meniť vtedy, ak premenné podliehajú rôznym typom rušivých vplyvov náhodného charakteru s rôznymi typmi rozdelenia a väzieb. Zároveň sú modely tvorené prepojením čiastkových modelov rôznymi operáciami a popri kombinácii predchádzajúcich postupov existujú určité obmedzenia pre priebeh premenných v modeloch a obmedzenia pre kombináciu modelov.

Simulácia predstavuje numerickú metódu štúdia zložitých pravdepodobnostných dynamických systémov pomocou experimentovania s počítačovým modelom. Z tohto konštatovania je zrejmé, že hlavné problémy, ktoré vznikajú v súvislosti s realizáciou modelov vo forme programov, sú zachytenie štruktúry modelu, získavanie hodnôt náhodných veličín a zachytenie dynamických vlastností modelov. K tomu pristupujú niektoré ďalšie otázky ako experimentovanie s modelom, alebo spracovanie a výstup výsledkov vo vhodnej forme. Ich programovanie však obvykle nerobí žiadne problémy. Zmena modelu do programovej formy je závislé hlavne od konkrétneho modelu.

V počítači teda vytvoríme kópiu (model) reálneho systému alebo procesu (výrobného procesu, logistického alebo obslužného systému). Na vytvorenom modeli potom sledujeme celkové chovanie systému, ale aj konkrétne výkonnostné parametre systému alebo jeho citlivosť na zmeny vstupných parametrov. V modeli môžeme experimentovať a vyskúšať si, čo by sa stalo, keby sme v reálnom systéme urobili nejaké zmeny.

Simulácia nám môže pomôcť nájsť optimálny variant riešenia, alebo rozhodnúť, či je potrebné napríklad zaobstarat' nový stroj alebo rozšíriť početnosť personálu. Simulácia „vdýchne“ život vývojovým diagramom, animuje prevádzku, call-centrum alebo akýkoľvek iný proces, operáciu po operácii a udalosť po udalosti.

Výsledky simulácie umožňujú vyhodnotiť efekty navrhnutých zmien ešte skôr, ako začneme „míňať“ peniaze za ich realizáciu. Na simuláciu je potrebný simulačný softvér. Vďaka

výkonu, flexibilitu a jednoduchému použitiu sa simulačný softvér stáva populárnym a účinným nástrojom nielen vo výrobe, ale aj v oblasti služieb a v ďalších odvetviach ako sú napríklad call-centrá, bankové a poisťovacie inštitúcie, zdravotníctvo alebo doprava.

V procese konštrukcie simulačného modelu rozlišujeme niekoľko hlavných etáp. Každá z nich má mnoho spoločných charakteristík so všeobecnou problematikou konštrukcie modelov kvantitatívneho charakteru. Pri použití simulačných techník sa však vyskytnú niektoré špecifické otázky.

Postup tvorby modelov je nasledovný:

1. Analýza problému – zhrnutie zadaných a hľadaných údajov, vymedzenie problému, stanovenie cieľa výskumu pomocou modelových experimentov, zber a spracovanie informácií, formulácia matematického modelu, odhady parametrov.
2. Výber metódy riešenia.
3. Realizácia modelu na počítači – zobrazenie reality v simulačnom modeli.
4. Výber prostriedkov na realizáciu modelu – úvahy o efektívnosti simulačnej metódy, porovnanie nákladov pri rôznom spôsobe riešenia.
5. Programovanie.
6. Príprava experimentu – príprava vstupných údajov.
7. Priebeh pokusu – výpočet požadovaných údajov.
8. Hodnotenie – aplikácia výsledkov na skutočnosť, overenie správnosti modelu, navrhovanie experimentov s modelom, prípadné zlepšenie modelu, celková analýza výsledkov.

Ako sme už uviedli simuláciu možno definovať ako numerickú metódu založenú na vykonávaní experimentov na počítači s určitými typmi matematických modelov. Simuláciu môžeme aj širšie charakterizovať. Napríklad z hľadiska, akým spôsobom simuláciu vykonávame, teda na akom prístroji (ak ide o simulácie ekonomických procesov, vystačíme s osobným počítačom).

Simulačné postupy sa ale zameriavajú tiež na oblasť mimo ekonómie. Ide napríklad o prípravu ľudí v určitých zručnostiach a znalostiach. Používajú sa na to cvičné simulátory (napríklad pri výcviku kozmonautov, pilotov, vodičov a pod.).

Ďalšou významnou disciplínou, v ktorej sa často využíva simulácia, sú podnikové hry. Tie sa v modernej teórii podniku stávajú dôležitým prostriedkom výučby a výchovy manažérov. Pre (ekonomická hra). V rámci zadanej ekonomickej situácie ide o riešenie konfliktu a výsledok akcií jedného hráča obvykle závisí od konania ďalších účastníkov hry.

Simuláciu je vhodné použiť najmä z týchto dôvodov:

- Umožňuje pomerne ľahko „prekonať“ problémy pri riešení zložitých úloh. Pomocou nej je možné riešiť zložité dynamické a stochastické modely.
- Umožňuje skúmanie správania sa systémov v reálnom čase.
- Nahrádza analytické riešenie, ktoré síce existuje, ale prekračuje dané matematické schopnosti.
- Môže overiť riešenie získané iným spôsobom. Napríklad overenie analytického riešenia založeného na zjednodušených predpokladoch. Pozorovanie činnosti simulačného modelu môže viesť k lepšiemu pochopeniu reálneho systému, na to stačí aj vytvorenie simulačného modelu.
- Zvyčajne si vyžaduje komplexnejší pohľad na daný systém.

Simulácia má však aj určité slabšie stránky:

- Je to pomerne nákladný prostriedok na štúdium systému a tvorba simulačného modelu je často zdĺhavá.
- Je to numerická metóda, a tak riešenie určitého problému neumožňuje riešiť podobné problémy. Pre akékoľvek zmeny parametrov je potom potrebné realizovať iné nové riešenie.

Simulácia dynamického správania systému veľmi súvisí so zachytením času v modeli, čo je pravdepodobne najdôležitejšie rozhodnutie pri tvorbe simulačného modelu.

Ak simulovaný čas dosahuje všetky hodnoty, potom tieto modely sú so spojitým časom. V inom prípade nadobúda čas simulácie hodnôt z dopredu určenej diskkrétnej množiny a vtedy ide o modely s diskrétnym časom.

Iným prípadom riešenia času v simulácii je, či sa stav modelu podlieha zmene priebežne alebo len v určitých okamihoch. O simulácii diskrétnych udalostí hovoríme vtedy, ak nesledujeme správanie modelu v kontinuálnom čase, ale len v dôležitých okamihoch (udalostiach). Tieto následne vplyvajú na ďalší vývoj simulácie. Rozhodnutie o spôsobe

zohľadnenia času a zmena stavov v simulačnom modeli určuje následne aj typ použitého matematického aparátu (pozri tabuľku č. 1).

**Tabuľka č. 1: Použitie matematického aparát v závislosti na typu mode**

<i>stavy / čas</i>	<b>spojitý</b>	<b>diskrétna</b>
<b>spojité</b>	diferenciálna rovnica	Diferenčná rovnica
<b>diskrétna</b>	Simulácia diskrétnych udalostí	Markovove reťazce

## **2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania**

V súlade so zadaním záverečnej bakalárskej práce bolo hlavným cieľom práce modelovania stochastického procesu pomocou simulačných modelov vo vybranom softvéri. Uvedený cieľ sme sa snažili naplniť dvoma čiastkovými cieľmi a to vybrať vhodnú oblasť na praktickú aplikáciu vyplývajúcej zo zadania bakalárskej práce vrátane príslušného programu na skúmanie a spracovať prípadovú štúdiu.

Hlavný cieľ sme konkretizovali aplikáciou v rámci teórie a simulácie hromadnej obsluhy, prípadovú štúdiu sme spracovali v programe SIMUL8 pre oblasť Sklad materiálu. Pri písaní bakalárskej práce sme podľa zamerania a zadania témy práce použili takú metodológiu, aby sme získali potrebné poznatky o skúmanej problematike a tiež viaceré všeobecné vedecké metódy. Metódu poznávania sme použili pri spracovaní teoretickej časti práce, pri praktickej časti najmä modelovania, simuláciu a experiment.

### 3 Výsledky práce a diskusia

Táto časť bakalárskej práce je najmä zameraná na riešenie prípadovej štúdie v rámci programu SIMUL8 a to simulácia podnikového procesu „Sklad materiálu“.

#### 3.1 Údajová základňa pre modelovanie systému hromadnej obsluhy

Pri modelovaní systému hromadnej obsluhy je potrebné posúdiť najmä vzájomné väzby jednotlivých prvkov systému, spôsob a mechanizmus jeho obsluhy, čas trvania obsluhy ako aj štatistickú analýzu jednotlivých prvkov systému. Zvyčajne je to spojené aj so štatistickým testovaním základnej hypotézy o predpokladanom spôsobe analyzovaného systému. Ďalším krokom je sumarizácia potrebných údajov a požiadaviek pre model. Všeobecne môžeme konštatovať, že vstupné požiadavky predstavujú stochastický proces, pretože požiadavky, ktoré prichádzajú do systému obsluhy zvyčajne v náhodných okamihoch a tak trvanie intervalov medzi nimi predstavuje hodnoty spojitých náhodných veličín.

„Stochastické modely pracujú s náhodnými premennými, ktoré možno číselne určiť metódami matematickej štatistiky. Bez uplatnenia týchto metód hrozí často nebezpečenstvo, že výsledky riešenia modelu budú zaťažené takou veľkou chybou, že jeho praktické použitie bude ohrozené.“<sup>4</sup>

Pri modelovaní SHO je potrebné popísať aj čas trvania obsluhy vo väzbe na jednotlivé požiadavky. Na čas obsluhy vplýva viacero náhodných faktorov, a tak ho tiež možno pokladať za náhodnú veličinu (s exponenciálnym rozdelením).

#### 3.2 Prípadová štúdia v programe SIMUL8

**Program SIMUL8** je softvérový nástroj pre dynamické modelovanie a simulácia podnikových procesov na báze diskkrétnej simulácie udalostí. Program bol vyvinutý firmou SIMUL8 Corporation v Severnej Virgínii v USA. Program je k dispozícii iba v anglickom jazyku. Modelovanie umožňuje používateľom vytvoriť pravdivú aj flexibilnú simuláciu.

---

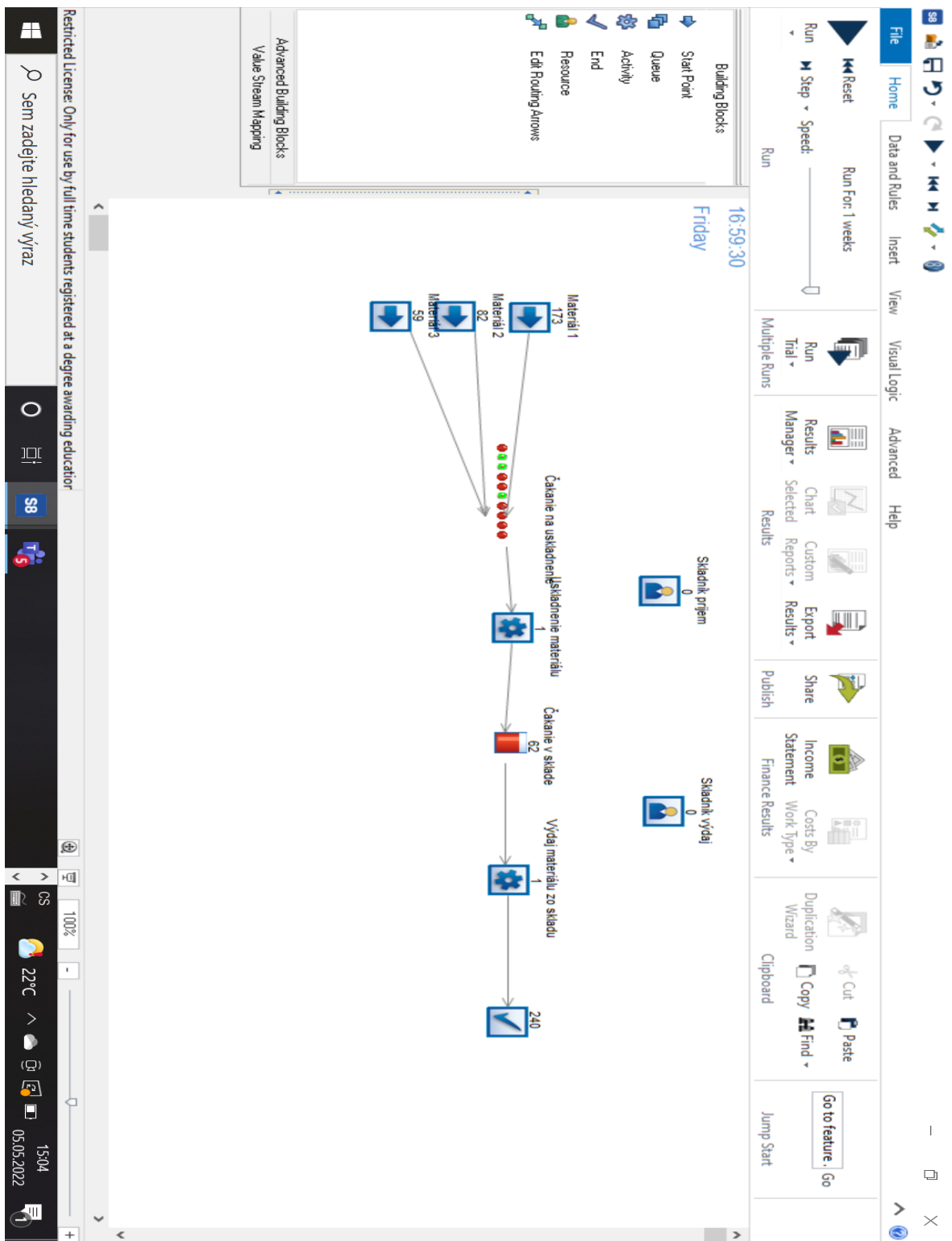
<sup>4</sup> UNČOVSKÝ, L.: c. d. str. 198.

SIMUL8 sa snaží simulačné modely vytvoriť jednoduché a pochopiteľné a používa na to „userfriendly“ rozhranie. Pri diskretnej simulácii nenastávajú zmeny v systéme priebežne, ale len v okamihu výskytu kľúčových udalostí (napr. príchod novej zákazky, dokončenie výrobku, atď.). Pomocou programu SIMUL8 je možné „stvorit“ ako celkový pohľad na systém v podniku, ako aj animáciu priebehu udalostí. Simulačný model je potom možné využiť k orientácii v podnikových procesoch a ich možnému zlepšovaniu.

Najskôr uvedieme fungovanie skladu materiálu. Materiál vstupuje do systému pomocou entity **Prívoz materiálu do skladu**. Materiál je v simulácii zastúpený tromi položkami, ktoré sú do skladu dodávané. **Je to materiál 1, materiál 2 a materiál 3**. Materiál 1 prichádza do skladu podľa exponenciálneho rozdelenia s priemerom 15 min, materiál 2 tiež s exponenciálnym rozdelením, ale strednou hodnotou 30 min. Materiál 3 je viazaná fixným rozdelením s hodnotou 40 min. a je to **tzv. prioritný materiál**. To znamená, že keď do skladu vstúpi materiál 3 súčasne s akoukoľvek inou položkou materiálu, je najskôr obslužená práve položka s materiálom číslo 3. Pri príchode iba materiálu 1 a materiál 2 sa uskladnenie riadi metódou FIFO (obsluha v poradí podľa príchodu do systému). Po príchode do skladu čaká materiál na uskladnenie. Uskladnenie sa uskutočňuje s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 7 min a je zaisťované skladníkom, ktorý je definovaný v simulácii ako skladník príjem. **Skladník** je ľudský zdroj, ktorý je priradený na uskladnenie materiálu.

Po uskladnení materiál je v sklade, kde je pripravený na výdaj. Výdaj zo skladu sa riadi priemernou hodnotou 10 min. Potom, čo je materiál vydaný zo skladu skladníkom výdaj, opúšťa sledovaný systém a ďalej sa ním nezaobráme. Ako časový úsek, počas ktorého budeme simuláciu sledovať, sme zvolili týždenný interval, ktorý som zopakovala v intervale 500 krát.

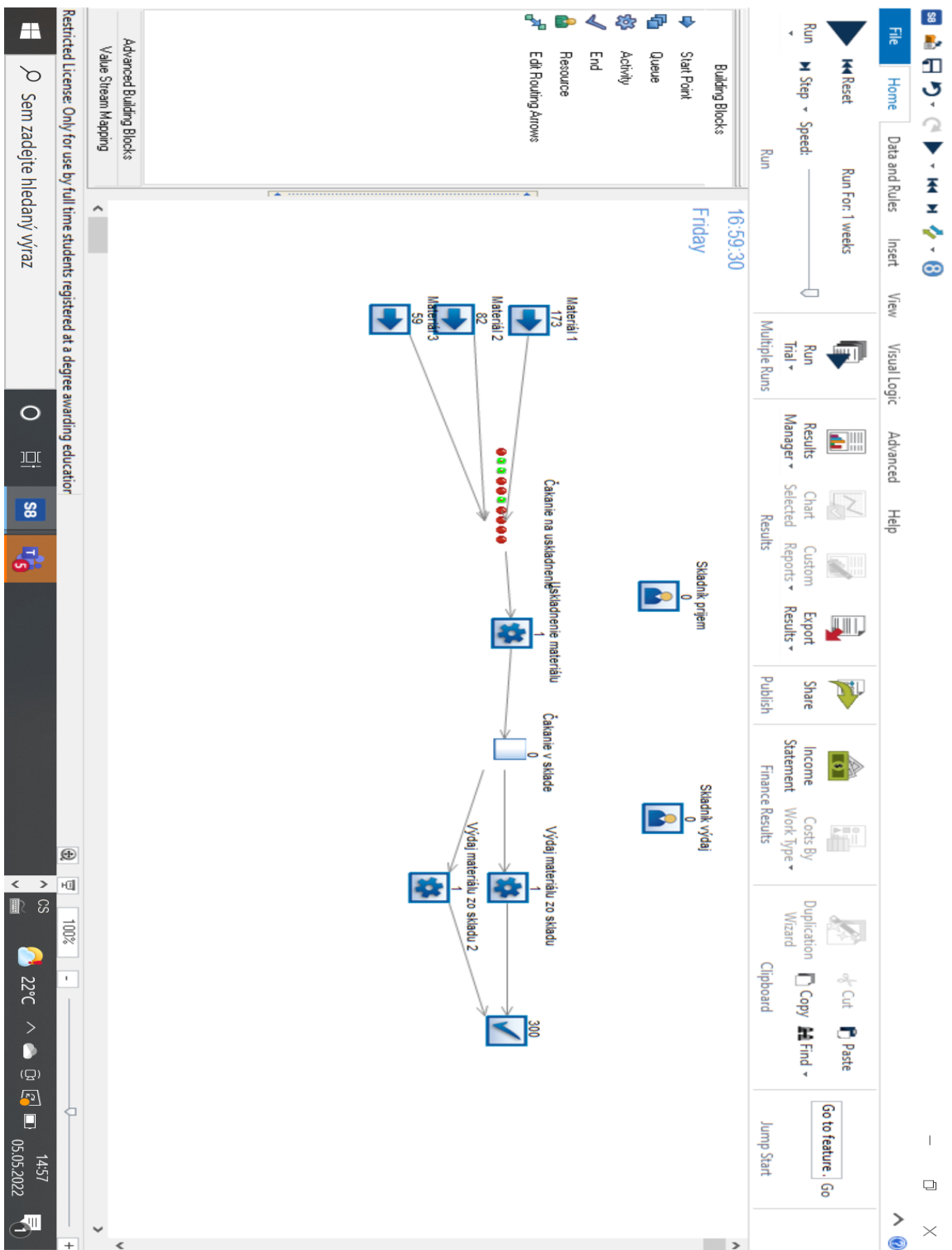
Simulácii sme spravili 2 varianty, a to variant 1 s jedným skladníkom (príjem a výdaj) a druhý variant kde sme za skladník výdaj dosadili 2 zamestnancov a nie iba jedného.



Obrázok č. 3

Variant 1

Na obrázku č. 3 je znázornená schéma „Sklad materiálu“



Obrázok č. 4

Variant 2

Na obrázku č. 4 je znázornená schéma „Sklad materiálu“

Na nasledujúcich obrázkoch je znázornená výsledná simulácia s názvom SKLAD MATERIALU. Z počtu položiek materiálu pri jednotlivých prvkoch simulácie je možné usúdiť, koľko materiálu celkovo vstúpilo aj vystúpilo do systému. Koľko materiálu bolo obslužených zdrojmi, ich vyťaženosť alebo doby čakania entít v rade na obsluženie.

### *Navrhovaný postup riešenia*

#### **VARIANT 1:**

Simulácia celkom obsahovala priemerne 173 materiálu 1, 82 materiálu 2 a 59 materiálu 3. Ani jedna položka materiálu nebola v systéme „stratená“ a všetky boli obslužené. Priemerná dĺžka frontu čakajúceho na obsluženie pri príjme materiálu je 4,65 ks položiek a priemerný čas je 43,90 min. pre materiál 1 a 2, zatiaľ čo pre prioritný materiál priemerný čas položky tvorí hodnotu 5,80 min. Maximálna dĺžka frontu bola 16,52 ks položiek materiálu a maximálna doba čakania bola v priemere 145,26 min. Tento čas je dosť veľká hodnota. Čas by sa dal znížiť pridaním ďalšieho zdroja – skladníka materiálu, čím by sa znížilo čakanie na obsluhu. Jeden skladník materiálu má využitie 85,88 % svojho času, takže pridaním ďalšieho zdroja by sa síce zvýšila obslužnosť príjmu, ale pravdepodobne by tiež kleslo využitie zdroja. Znížiť čas čakania by šlo aj znížením priemerného času obsluženia jednej položky.

Celkovo bolo na uskladnenie obslužených v priemere 233,78 ks položiek. Priemerný čas pobytu jednej položky čakajúcej v sklade na výdaj bol 231,94 min a priemerne tam bolo uskladnených 28,58 ks položiek.

Zo skladu bolo pri ukončení simulácie vydaných a odvezených zo skladu 240 ks položiek. Využitie skladníka výdaja bolo pritom neuveriteľných 97,29 %. Čas výdaja zo skladu pri ukončení bol 286,09 min.

#### **VARIANT 2:**

Priemerný čas pobytu jednej položky čakajúcej v sklade na výdaj bol 5,45 min a priemerne tam bolo uskladnených 0,67 ks položiek.

Zo skladu bolo pri ukončení simulácie vydaných a odvezených zo skladu v priemere 291,02 položiek. Využitie skladníka výdaja bolo pritom 61,31 %.

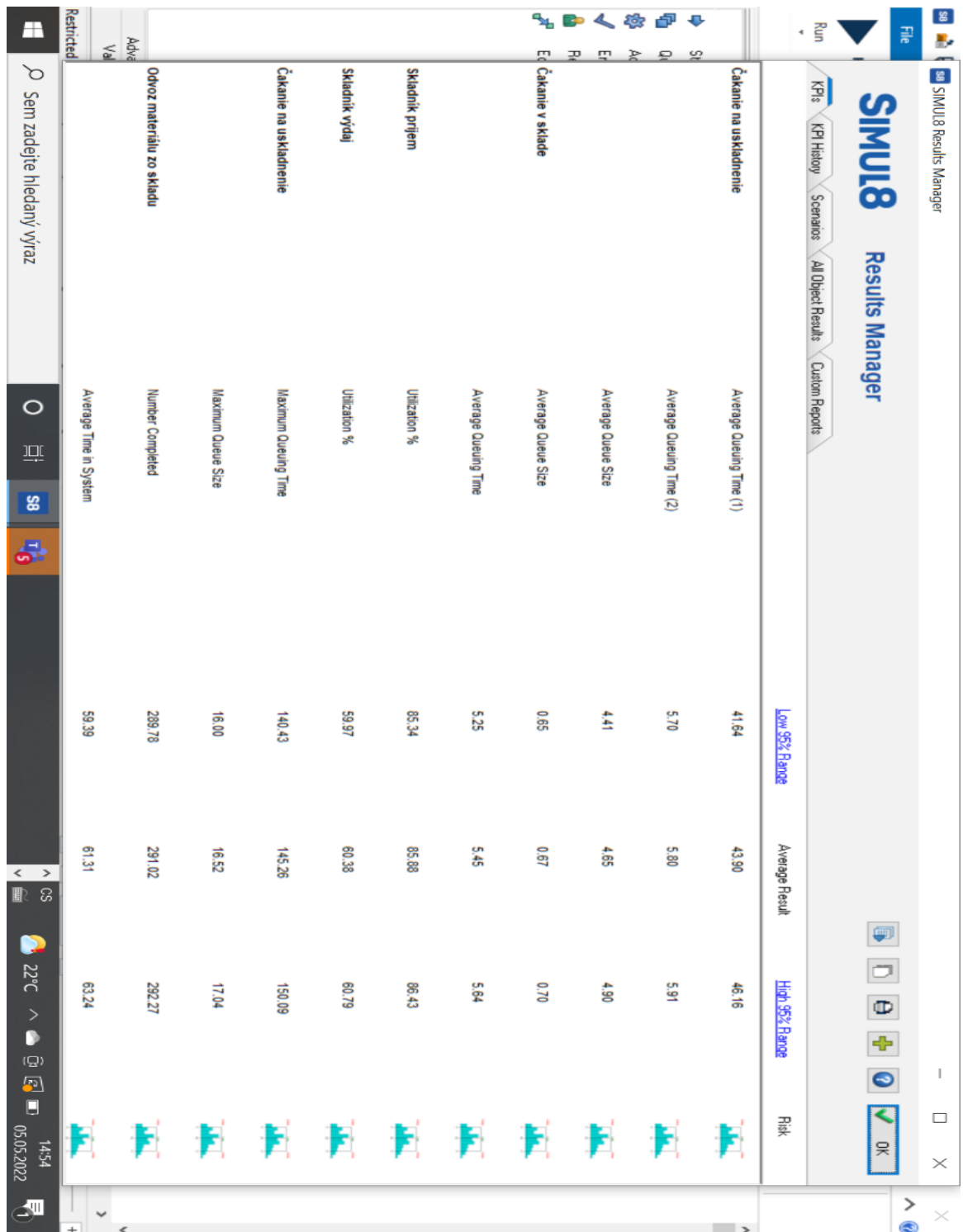
## Výsledky práce - riešenie prípadovej štúdie v rámci programu SIMUL8 a to simulácia podnikového procesu „Sklad materiálu“

KPI	Average Result	Risk
Čakanie na uskladnenie	41.64	46.16
Average Queuing Time (1)	43.90	46.16
Average Queuing Time (2)	5.70	5.91
Average Queue Size	4.41	4.90
Čakanie v sklade	27.66	29.49
Average Queue Size	28.58	29.16
Average Queuing Time	224.72	231.94
Utilization %	85.34	88.43
Skladník prijím	97.15	97.44
Utilization %	97.29	97.44
Čakanie na uskladnenie	140.43	150.09
Maximum Queuing Time	145.26	150.09
Maximum Queue Size	16.00	17.04
Number Completed	232.41	235.16
Odvoz materiálu zo skladu	233.78	235.16
Average Time in System	278.42	293.75
Average Time in System	286.09	293.75

Obrázok č. 5

Variant 1

Na obrázku č. 5 si môžeme všimnúť kritickú hodnotu v riadku „Čakanie na sklad“ v stĺpci Average Result. Táto hodnota nespĺňa požiadavky na kvalitu obsluhy.



Obrázok č. 6

Variant 1

Na obrázku č. 6 si môžeme všimnúť kritickú hodnotu v riadku „Čakanie na sklad“ v stĺpci Average Result. Táto hodnota spĺňa požiadavky na kvalitu obsluhy.

**Celkovo na základe simulačných experimentov a získaných charakteristík by som zhodnotila ako výhodnejší variant č. 2.** Vo variante 2 som pridala skladníka výdaju. Vo variante 1 sa nám ukázal čas výdaja 233,78 minút čo je veľmi veľká hodnota. Čas som znížila pridaním ďalšieho zdroja – skladníka výdaju, čím sa znížilo čakanie na obsluhu. Ak by mala firma na trhu konkurenciu môžeme vybrať variant 2 a firma si môže dovoliť zaplatiť ďalšieho zamestnanca navyše. Ale ak by firma na trhu konkurenciu nemala môžeme použiť aj variant 1.

## **Záver**

Na základe spracovanej záverečnej bakalárskej práce uvádzam, že jedným z výsledkov práce bolo vypracovanie prípadovej štúdie simulačným softvérom SIMUL8. Pomocou zvoleného softvérového nástroja je možné navrhnuť simulácie rôznych systémov, respektíve procesov napríklad v oblasti logistiky, ako aj výroby. V práci sme zostrojili simulačný model Skladu materiálu a zároveň sme otestovali dve variantné riešenia ako podklad pre rozhodovanie. Uvedený softvér (program) je podľa môjho názoru a na základe vlastnej skúsenosti vhodným nástrojom na podobu rozhodovania v prípade výskytu stochastických javov v modelovacom systéme.

Téma bakalárskej práce, ako aj zameranie práce ma veľmi zaujali, tak po teoretickej, ako aj praktickej stránke a uvedenej problematike sa chcem venovať aj v mojom ďalšom štúdiu.

## Použitá literatúra

- (1) BREZINA, Ivan, PEKÁR, Juraj. *Úvod do operačného výskumu II*. Bratislava: Letra Edu, 2019. ISBN 80-89962-29-7.
- (2) DOMONKOS, Tomáš. *Simulácie : vysokoškolské učebné texty*. 1. vydanie. Bratislava : Letra Edu, 2018. 80 s. ISBN 978-80-89962-01-3.
- (3) DLOUHÝ, Martin, FÁBRY Ján. *Simulace podnikových procesů*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, c2007. s. 109-150. ISBN 978-80-251-1649-4.
- (4) MEDONOS, Michal, DLOUHÝ, Martin, KUNCOVÁ, Martina. SIMULATION ANALYSIS OF THE PRODUCTION SYSTEM. In: *MODELOVÁNÍ PROCESŮ*.
  - i. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2010, s. 10. ISBN 978-80-87035-32-0. Dostupné z: <https://most.vspj.cz/files/7/sbornik-modelovani-procesu.pdf>
- (5) UNČOVSKÝ, L.: *Stochastické modely operačnej analýzy ALFA*, Bratislava 1980, vysokoškolská učebnica číslo Š 13214/1978-32.
- (6) ABUDI, Gina. Business Process Improvement is a Strategic Necessity. *ExecutiveBrief*
  - b. [online]. May 2010 [cit. 2012-02-15]. Dostupné z:
    - i. <http://www.executivebrief.com/process-improvement/business-process-improvementstrategic/>
- (7) Bhat, U.N., 2008. *An introduction to queueing theory: modeling and analysis in applications* (Vol. 36). Boston, MA: Birkhäuser.
- (8) [https://www.fd.cvut.cz/department/k611/pedagog/K611THO\\_soubory/webskriptum/index.html](https://www.fd.cvut.cz/department/k611/pedagog/K611THO_soubory/webskriptum/index.html)
- (9) <https://www.simul8.com/>
- (10) IPM [Institut Průmyslového Managementu spol, s.r.o.] [online], 2011 [cit. 2011-12-03],
  - i. *Zavedení procesní organizace*. Dostupné z: [http://www.ipmplzen.cz/index.php?t=zav\\_proces\\_org](http://www.ipmplzen.cz/index.php?t=zav_proces_org)
- (11) BUJNA, Marián, KORENKO, Maroš. *Simulácia výrobných procesov*. Vydala Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre vo vydavateľstve SPU, Nitra 2017. ISBN 978-80-552-1761-1.