

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY
EKONOMICKEJ UNIVERZITY V BRATISLAVE



**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA
VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD
VO VEDECKOVÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XVI**

28. – 30. mája 2025
Nová Lehota

Programový výbor:

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Ekon. univerzita Bratislava (predseda)
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická Praha
prof. Ing. Jana Hančlová, CSc., VŠB – Technická univerzita, Ostrava
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická Praha
doc. Ing. Marek Kvet, PhD., Žilinská univerzita, Žilina

Recenzenti:

prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická Praha
doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická Praha
prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc., Žilinská univerzita Žilina
Ing. Martina Kuncová, PhD., Vysoká škola polytechnická Jihlava
Ing. Tomáš Majer, PhD., Žilinská univerzita v Žiline
doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc., Žilinská univerzita Žilina

Organizačný výbor:

doc. Ing. Andrea Furková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Brian König, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.

AH 7,33

Náklad: 50 ks

Kontakt: ssov@euba.sk

Zostavovateľ: Karol Szomolányi

Web Editor: Pavel Gežík

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre
operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava
© Ekonomická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2025
ISBN 978-80-225-5231-8

Obsah

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Marian Reiff	Alternatívny spôsob výučby CPM prostredníctvom MS Excel	5
Zuzana Čičková, Peter Peťko	Fúzie a akvizície firiem a ukazovatele sily	12
Daniel Dudek	Matematické modelovanie ekonomických a ekologických systémov ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí	17
Monika Ferencáková	Optimalizácia sortimentu podľa Markovovho modelu výberu	27
Andrea Furková, Zuzana Čičková	Priestorová analýza emisií skleníkových plynov v regiónoch EÚ: dôraz na strednú Európu	38
Pavel Gežík	Centrá zdieľaných služieb na Slovensku a ich rozmiestnenie	43
Michaela Chocholátá	Environmentálna Kuznetsova krivka v kontexte transformácie slovenskej ekonomiky	51
Miroslava Jánošová	Migrácia a starnutie populácie: príležitosti a výzvy	58
Brian König	Empirická analýza vojnových konfliktov	64
Veronika Mit'ková	Ekonometrické prístupy modelovania liečebných efektov pred-rehabilitácie	71
Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková	Je rast americkej ekonomiky po finančnej kríze nižší?	77
Jan Zouhar	Optimalizačný prístup k meraniu zmien v priestorovom rozšírení druhov	82

ALTERNATÍVNY SPÔSOB VÝUČBY CPM PROSTREDNÍCTVOM MS EXCEL

ALTERNATIVE METHOD OF TEACHING CPM THROUGH MS EXCEL

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Marian Reiff

Abstrakt

Aj keď sa v praxi využíva mnoho špecializovaných produktov na hľadanie kritickej cesty, pre výučbu je vhodné využívať štandardné nástroje, ktoré môžu študentom rozšíriť vedomosti o využití programového produktu MS EXCEL. Pri riešení úlohy hľadania možno využiť doplnok Riešiteľ na riešenie štandardnej úlohy matematického programovania, ale na báze CPM možno aplikovať aj špecifické excelovské funkcie na získanie ďalších dodatočných informácií. Pre zvládnutie oboch prístupov pritom stačí ovládať základné zručnosti práce s MS EXCEL.

Kľúčové slová: CPM, MS Excel, kritická cesta

Abstract

Although many specialized tools are used in practice for finding the critical path, standard software solutions are more effective for educational purposes, allowing students to expand their skills in working with MS Excel. The Solver add-in can be utilized to solve the standard mathematical programming problem for critical path analysis. Additionally, specific Excel functions can be applied to obtain further insights based on the CPM (Critical Path Method). Mastering both approaches requires only basic proficiency in MS Excel.

Keywords: CPM, MS Excel, Critical Path

1 Úvod

Výučba hľadania kritickej cesty je v rámci sieťovej analýzy ako súčasti predmetov operačného výskumu (operačnej analýzy, management science) štandardným nástrojom na kvantitatívne riadenie projektov. *Kritickú cestu* možno charakterizovať ako najdlhšiu možnú cestu zo začiatočného vrcholu u_z sieťového grafu do jeho koncového vrcholu u_k . V každom projekte sa pritom nachádza minimálne jedna kritická cesta, ktorá sa skladá z navzájom na seba nadväzujúcich činností. Termín ukončenia poslednej činnosti na kritickej ceste je súčasne termínom ukončenia celého projektu. Pre činnosti ležiace na kritickej ceste platí, že nemajú časové rezervy a teda nedodržanie ich termínov znamená celkové predĺženie trvania projektu.

Pretože celý projekt pozostáva z jednotlivých činností, možno ho zaznamenať v tzv. *sieťovom grafe*, ktorý predstavuje matematický model projektu. Sieťový graf tvorí n vrcholov reprezentujúcich udalosti (začiatky a konce činností), z ktorých je jeden začiatočný vrchol u_z a jeden koncový vrchol u_k . Na reprezentáciu jednotlivých činností v projekte sa v sieťovom grafe využívajú ohodnotené orientované hrany $\overrightarrow{h_{ij}}$ (každý hrane je priradený smer z vrcholu u_i do vrcholu u_j a doba trvania t_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n$), pričom jednej činnosti je priradená jedna hrana. *Trvanie činnosti* predstavuje okrem technologického popisu nadväzností základný údaj pre zostavenie sieťového grafu a predstavuje čas potrebný na realizáciu zodpovedajúcej činnosti. V sieťovom grafe je trvanie činnosti označované ako t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n$) a

predstavuje ohodnotenie hrany $\overrightarrow{h_{ij}}$, teda hrany z vrcholu u_i do vrcholu u_j , pričom musí platiť $i < j$, čo musí byť rešpektované pri zostrojení sieťového grafu.

Ak sú parametre (časové údaje, trvanie činnosti, náklady, zdroje,...) sieťového grafu zadané presnými hodnotami, ide o *deterministické sieťové grafy*, na ich riešenie sa používa metóda CPM (*Critical Path Method*), napr. Kadang et al., 2024, Göksu & Catovic, 2012 a pod.

2 Nájdenie kritickej cesty ako úloha matematického programovania

Na nájdenie kritickej cesty možno použiť úlohu matematického programovania (ÚMP), v ktorej sú známe časy trvania jednotlivých činností $t_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 2, 3, \dots, n$ a hľadajú sa hodnoty binárnych premenných $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 2, 3, \dots, n$, začiatočným vrcholom je vrchol u_1 , koncovým vrchol u_n . Pri formulácii ÚMP predstavuje množina P_j vrcholy, do ktorých činnosti vedú, a množina R_i vrcholy, z ktorých činnosti vychádzajú.

Úloha matematického programovania na nájdenie kritickej cesty:

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{X}) &= \sum_{i \in P} \sum_{j \in R} t_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j \in P_j} x_{ij} &= 1, \quad i = 1, \\ \sum_{i \in P_j} x_{ij} - \sum_{k \in R_j} x_{jk} &= 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \sum_{i \in R_i} x_{ij} &= 1, \quad j = n, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i \in R_i, \quad j \in P_j, \end{aligned}$$

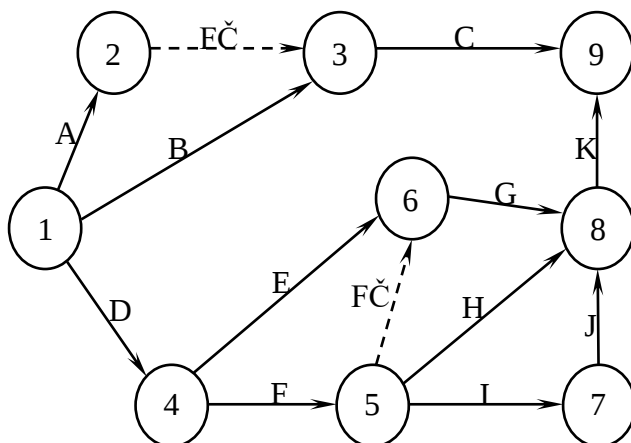
kde

$$\begin{aligned} P_j &= \{p \in \{1, 2, \dots, n\} / t_{pj} \neq 0, j = 2, 3, \dots, n\} \\ R_i &= \{r \in \{1, 2, \dots, n\} / t_{ir} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Riešením zodpovedajúcej úlohy matematického programovania možno získať kritickú cestu medzi začiatočným vrcholom u_1 a koncovým vrcholom u_n .

3 Nájdenie kritickej cesty ako ÚMP v MS Excel

Úlohu matematického programovania na nájdenie kritickej cesty možno riešiť pomocou *Riešiteľa* (*Solvera*) programu MS Excel (napr. <https://flylib.com/books/en/3.287.1.114/1/>). Postup bude ilustrovaný na príklade z obr. 1, zodpovedajúce údaje v tab. 1. Riešená úloha obsahuje 81 rozhodovacích premenných, ktoré vyjadrujú všetky existujúce činnosti v sieťovom grafe. Pri riešení budú použité iba premenné, pre ktoré existuje činnosť, teda 11 premenných pre reálne činnosti a 2 premenné pre fiktívne činnosti). Reálne činnosti sú ohodnotené koeficientami t_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 2, 3, \dots, n$), fiktívnym činnostiam je priradené veľmi malé číslo (v našom príklade hodnota 0,0001). Je zrejmé, že matica koeficientov t_{ij} je hornotrojuholníková, pretože ide o orientovaný sieťový graf. Každéj premennej je priradená začiatočná hodnota 0.



Obr. 1

Činnosť	Predchádzajúca činnosť	Hrana i, j	t_{ij}
A	-	1,2	3
B	-	1,3	4
C	A, B	3,9	6
D	-	1,4	2
E	D	4,6	3
F	D	4,5	3
G	E, F	6,8	4
H	F	5,8	2
I	F	5,7	5
J	I	7,8	3
K	G, H, J	8,9	1

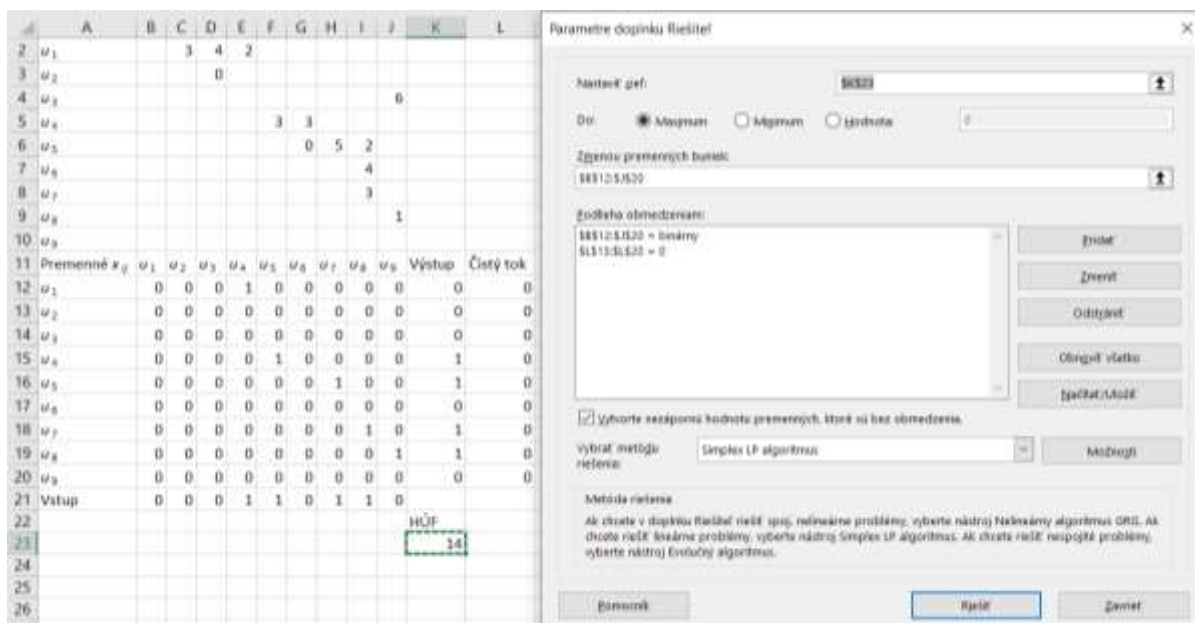
Tab. 1

Možný zápis úlohy spolu s príslušnými vzorcami a funkciami v MS Excel je na obr. 2. Optimalizačné kritérium je umiestnené v bunke K23 ako skalárny súčin matice času činností (blok B2:J10) s maticou premenných (blok B12:J20) prostredníctvom funkcie `=SUMPRODUCT(B2:J10;B12:J20)`, (funkcia `=SUMPRODUCT(pole1; [pole2]; [pole3]; ...)` vypočíta súčet produktov zodpovedajúcich rozsahov alebo polí). Funkcia `=SUMIF(rozsah; kritériá; [rozsah_súhrnu])` sa používa na sčítanie hodnôt v rozsah, ktoré spĺňajú zadané kritériá, pričom *rozsah* predstavuje rozsah buniek, pre ktorý sa má na základe kritéria vykonať výpočet; *kritérium* v podobe čísla, výrazu, odkazu na bunku, textu alebo funkcie, ktorá definuje bunky na sčítanie; *rozsah_súhrnu* zodpovedá reálnym bunkám, ktoré sa sčítajú.

=SUMIF(B2:B10;">0";B12:J20)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Matica C	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
2	u_1		3	4	2					
3	u_2			0,0001						
4	u_3								6	
5	u_4				3	3				
6	u_5					0,0001	5	2		
7	u_6							4		
8	u_7							3		
9	u_8								1	
10	u_9									
11	Premenné x_{ij}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
12	u_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	u_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0
16	u_5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17	u_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	u_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0
19	u_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	u_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	Výstup	=SUMIF(I2	=SUMIF(C2	=SUMIF(D2	=SUMIF(E2	=SUMIF(F2	=SUMIF(G2	=SUMIF(H2	=SUMIF(I2	=SUMIF(J2:J10;">0";J12:J20)-1
22										HŮP
23										=SUMPRODUCT(B2:J10;B12:J20)

Obr. 2

Po aktivovaní vlastného optimalizačného modulu *Riešiteľ* je ponúknuté dialógové okno „Parametre doplnku *Riešiteľ*“ určené na zadávanie parametrov riešenej úlohy (obr. 3).



Obr. 3

V rámci obr. 3 je uvedené aj optimálne riešenie, z ktorého je zrejmé, že kritická cesta vedie hranami vedúcimi z vrcholu u_1 do vrcholu u_4 , z vrcholu u_4 do vrcholu u_5 , z vrcholu u_5 do vrcholu u_7 , ďalej z vrcholu u_7 do vrcholu u_8 a nakoniec z vrcholu u_8 do vrcholu u_9 s hodnotou účelovej funkcie 14. Kritické činnosti sú teda D, F, I, J a K a najskôr možný koniec ukončenia projektu je 14.

Výhodou použitia prezentovaného prístupu nájdenia kritickej cesty je možnosť využitia štandardného softvéru MS Excel. Nevýhodou však je, že okrem nájdenia kritickej cesty neposkytuje žiadne ďalšie informácie o nájdenom riešení.

4 Metóda CPM (Critical Path Method)

V každom projekte je dané množstvo časových údajov a termínov spojených s jednotlivými činnosťami, ktoré možno zobrazit' pomocou sieťového grafu, o ktorom sa predpokladá, že je acyklický, hrany $\overrightarrow{h_{ij}}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 2, 3, \dots, n$, smerujú od vrcholov s nižšími indexmi do vrcholov s vyššími indexmi, pre každú činnosť je známy čas jej trvania t_{ij} a určená nadväznosť jednotlivých činností. Na nájdenie kritickej cesty sa pre deterministické vstupné údaje (t_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n$, sú presne zadane) najčastejšie používa *metóda kritickej cesty* (CPM), ktorú predstavuje matematický algoritmus plánovania priebehu na seba nadväzujúcich činností projektu.

Aplikácia metódy CPM umožňuje pre projekt určiť:

1. kritickú cestu, t. j. celkovú dĺžku trvania realizácie projektu,
2. priebeh realizácie projektu vrátane kalendárneho rozpisu realizácie jednotlivých činností,
3. časové rezervy pri realizácii jednotlivých činností.

Používané označenie:

T^0 čas začiatku celého projektu (zvyčajne sa rovná 0, ale môže byť zadany i ako dátum),
 T^1 vypočítaný čas trvania projektu (dĺžka vypočítanej kritickej cesty), označuje sa aj ako T_n , keďže projekt tvorí n činností,
 t_{ij} trvanie činnosti z vrcholu u_i do vrcholu u_j , teda trvanie činnosti (i, j) vyjadrené v časových jednotkách ($i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 2, 3, \dots, n$),

ZM_{ij} najskôr možný začiatok činností vychádzajúcich z vrcholu u_i , resp. najskôr možný začiatok činnosti (i, j) ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$),

KM_{ij} najskôr možný koniec činností končiacich vo vrchole u_j , resp. najskôr možný koniec činnosti (i, j) ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$),

ZP_{ij} najneskôr prípustný začiatok činností vychádzajúcich z vrcholu u_i , resp. najneskôr prípustný začiatok činnosti (i, j) ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$),

KP_{ij} najneskôr prípustný koniec činností končiacich vo vrchole u_j , resp. najneskôr prípustný koniec činnosti (i, j) ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$),

TM_i najskôr možný termín vrcholu u_i , t. j. najskôr možný koniec všetkých činností, ktoré do tohto vrcholu prichádzajú a súčasne najskôr možné začiatky všetkých činností, ktoré z tohto vrcholu vychádzajú ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

TP_i najneskôr prípustný termín vrcholu u_i , t. j. najneskôr prípustný koniec všetkých činností, ktoré sa v tomto vrchole končia ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Rozdiel medzi najskôr možným termínom vrcholu a najneskôr prípustným termínom sa označuje ako časová rezerva činnosti R ($R = TM_i - TP_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$), pričom ak platí $TM_i = TP_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, tak časová rezerva neexistuje ($R = 0$) a činnosti s nulovou rezervou tvoria *kritickú cestu*.

Kritickú cestu tvoria kritické činnosti s nulovou rezervou, teda tie, pre ktoré platí $TM_i = TP_i$, resp. $t_{ij} = TP_j - TM_i = KP_{ij} - ZM_{ij}$, z čoho vyplýva, že $ZM_{ij} = ZP_{ij}$, resp. $KM_{ij} = KP_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$).

Výpočet kritickej cesty prostredníctvom CPM prebieha v 2 etapách:

- 1. etapa – výpočet vpred (od začiatočného vrcholu ku koncovému), počítajú sa najskôr možné hodnoty (TM_i , ZM_{ij} , KM_{ij}) a pre $i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$ platí:

$TM_i = ZM_{ij}$, $TM_1 = T^0$, teda $TM_1 = 0$ – ide o začiatočný vrchol, ktorý sa začína v čase 0 a má index 1

$TM_i = \max_h(TM_h + t_{hi}) = \max_h(ZM_{hi} + t_{hi})$, resp. $TM_i = \max_h(KM_{hi})$,

kde $KM_{hi} = TM_h + t_{hi} = ZM_{hi} + t_{hi}$

a h predstavuje indexy všetkých vrcholov, z ktorých hrany vstupujú do vrcholu u_i ,

následne sa určí celkový čas projektu $T^1 = \max_m(KM_{mn})$, resp. $T^1 = TM_n$, kde n predstavuje posledný vrchol sieťového grafu a m indexy všetkých vrcholov vstupujúcich do posledného vrcholu.

- 2. etapa – výpočet vzad (od koncového vrcholu k začiatočnému), pre $i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$ sa počítajú najskôr možné hodnoty (TP_i , ZP_{ij} , KP_{ij}):

$TP_j = KP_{ij}$, z prvej etapy je známe $T^1 = TM_n$, preto $TP_n = T^1$ a, resp. $TP_n = TM_n$, kde n predstavuje posledný vrchol sieťového grafu, $TP_i = \min_j(TP_j - t_{ij}) = \min_j(KP_{ij} - t_{ij})$, resp. $TP_i = \min_j(ZP_{ij})$, kde $ZP_{ij} = TP_j - t_{ij} = KP_{ij} - t_{ij}$ a j predstavuje indexy všetkých vrcholov, ktorých hrany vystupujú z vrcholu u_i .

- Následne sa určí kritická cesta, resp. sa pre $i = 1, 2, \dots, n-1; j = 2, 3, \dots, n$ určia kritické činnosti prostredníctvom výpočtu celkovej rezervy RC_{ij} . Kritickú cestu tvoria kritické činnosti s nulovou rezervou, teda $TM_i = TP_i$, z čoho vyplýva, že $ZM_{ij} = ZP_{ij}$, resp. $KM_{ij} = KP_{ij}$ a celková rezerva $RC_{ij} = KP_{ij} - KM_{ij} = ZP_{ij} - ZM_{ij}$.

Uvedený prístup je pri výučbe nájdenia kritickej cesty prostredníctvom CPM interpretovaný napr. v Kala, 2001, MacDonald, 1995, internetové zdroje (7) – (8).

5 Nájdenie kritickej cesty algoritmom CPM v MS Excel

Predchádzajúci postup nájdenia kritickej cesty aj s informáciami o najskôr možnom začiatku a konci, o najneskôr prípustnom začiatku a konci, ako aj o kritických rezervách jednotlivých činností možno aplikovať v MS Excel (obr. 4). Vhodné je pritom využiť funkcie =MAXIFS

$a = \text{MINIFS}$. Funkcia $=\text{MAXIFS}(\text{max_rozsah}; \text{rozsah_kritérií1}; \text{kritériá1}; [\text{rozsah_kritérií2}; \text{kritériá2}]; \dots)$ vypočíta maximálnu hodnotu buniek vybratých na základe danej množiny podmienok alebo kritérií, kde max_rozsah predstavuje aktuálny rozsah buniek, v ktorých sa určuje maximálna hodnota; rozsah_kritérií1 je množina buniek, ktoré sa hodnotia na základe kritérií; kritériá1 predstavuje kritériá vo formáte čísla, výrazu alebo textu definujúce bunky, ktoré budú vyhodnotené ako maximum. Funkcia $=\text{MINIFS}$ má rovnakú syntax, samozrejme, určuje sa v nej minimálna hodnota z rozsahu buniek na základe definovaného kritéria.

	A	B	C	D	E	F	G	H
				Najskôr možný začiatok KM _{ij}	Najneskôr prípustný začiatok ZP _{ij}		Najneskôr prípustný koniec KP _{ij}	Kritické rezervy RC _{ij}
1	i	j	t _{ij}	Najskôr možný začiatok ZM _{ij}			Najneskôr prípustný koniec KP _{ij}	Kritické rezervy RC _{ij}
2	1	2	3	=IF(A2=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A2))	=D2+C2	=G2-C2	=IF(B2=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B2))	=F2-D2
3	1	3	4	=IF(A3=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A3))	=D3+C3	=G3-C3	=IF(B3=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B3))	=F3-D3
4	1	4	2	=IF(A4=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A4))	=D4+C4	=G4-C4	=IF(B4=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B4))	=F4-D4
5	2	3	0	=IF(A5=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A5))	=D5+C5	=G5-C5	=IF(B5=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B5))	=F5-D5
6	3	9	6	=IF(A6=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A6))	=D6+C6	=G6-C6	=IF(B6=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B6))	=F6-D6
7	4	5	3	=IF(A7=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A7))	=D7+C7	=G7-C7	=IF(B7=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B7))	=F7-D7
8	4	6	3	=IF(A8=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A8))	=D8+C8	=G8-C8	=IF(B8=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B8))	=F8-D8
9	5	6	0	=IF(A9=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A9))	=D9+C9	=G9-C9	=IF(B9=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B9))	=F9-D9
10	5	7	5	=IF(A10=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A10))	=D10+C10	=G10-C10	=IF(B10=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B10))	=F10-D10
11	5	8	2	=IF(A11=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A11))	=D11+C11	=G11-C11	=IF(B11=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B11))	=F11-D11
12	6	8	4	=IF(A12=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A12))	=D12+C12	=G12-C12	=IF(B12=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B12))	=F12-D12
13	7	8	3	=IF(A13=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A13))	=D13+C13	=G13-C13	=IF(B13=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B13))	=F13-D13
14	8	9	1	=IF(A14=1;0;MAXIFS(\$E\$2:\$E\$14;\$B\$2:\$B\$14;A14))	=D14+C14	=G14-C14	=IF(B14=9;MAX(\$E\$2:\$E\$14);MINIFS(\$F\$2:\$F\$14;\$A\$2:\$A\$14;B14))	=F14-D14

Obr. 4

Na obr. 5 je výsledné riešenie, ktoré informuje, že kritické činnosti sú činnosti 1-4, 4-5, 5-7 7-8 a 8-9, ktoré majú v stĺpci kritických rezerv RC_{ij} hodnotu 0.

	A	B	C	D	E	F	G	H
				Najskôr možný začiatok ZM _{ij}	Najskôr možný koniec KM _{ij}	Najneskôr prípustný začiatok ZP _{ij}	Najneskôr prípustný koniec KP _{ij}	Kritické rezervy RC _{ij}
1	i	j	t _{ij}					
2	1	2	3	0	3	5	8	5
3	1	3	4	0	4	4	8	4
4	1	4	2	0	2	0	2	0
5	2	3	0	3	3	8	8	5
6	3	9	6	4	10	8	14	4
7	4	5	3	2	5	2	5	0
8	4	6	3	2	5	6	9	4
9	5	6	0	5	5	9	9	4
10	5	7	5	5	10	5	10	0
11	5	8	2	5	7	11	13	6
12	6	8	4	5	9	9	13	4
13	7	8	3	10	13	10	13	0
14	8	9	1	13	14	13	14	0

Obr. 5

Aj z obr. 5 je zřejmé, že kritická cesta vedie hranami vedúcimi z vrcholu u_1 do vrcholu u_4 , z vrcholu u_4 do vrcholu u_5 , z vrcholu u_5 do vrcholu u_7 , ďalej z vrcholu u_7 do vrcholu u_8 a nakoniec z vrcholu u_8 do vrcholu u_9 s hodnotou účelovej funkcie 14.

6 Záver

Pre výučbu hľadania kritickej cesty je vhodné využívať štandardné nástroje, ktoré by mali študenti zvládnuť tak, aby sa v nich nielen orientovali, ale aby ich vedeli aj používať pri riešení problémov, ktorým budú vystavení v praxi. Všeobecným programovým nástrojom, ktorého ovládanie vyžaduje väčšina firiem je programový produkt MS EXCEL. Preto jeho využitie pri riešení úlohy prostredníctvom CPM rozširuje pohľad študentov na jeho využitie a umožňuje študentom využiť tak *Riešiteľ* (Solver), ako aj špecifické excelovské funkcie na získanie ďalších dodatočných informácií. V praxi pritom existuje aj mnoho špecializovaných produktov, ktoré možno použiť pri hľadaní kritickej cesty, napr. internetové zdroje (2) – (6).

Literatúra:

1. Göksu, A. and Čatović, S., 2012, May. Implementation of critical path method and project evaluation and review technique. In *3rd International Symposium on Sustainable Development* (Vol. 3, pp. 205-212).
2. Kadang, T., Hidayah, P.W., Simarmata, K., Putri, N.A. and Krisvinus, K., 2024. Analysis of consultant building project management using the CPM (Critical Path Method). *J. Bus. Manag. Econ. Dev*, 2(03), pp.1169-1179.
3. Seal, K.C., 2001. A generalized PERT/CPM implementation in a spreadsheet. *INFORMS Transactions on Education*, 2(1), pp.16-26.
4. MacDonald, Z., 1995. Teaching Linear Programming using Microsoft Excel Solver. *Computers in Higher Education Economics Review*(CHEER), 9(3).

Internetové zdroje:

- (1)<https://flylib.com/books/en/3.287.1.114/1/>
- (2)<https://chandoo.org/wp/critical-path-excel-template/>
- (3)<https://www.thebricks.com/resources/guide-how-to-calculate-cpm-in-excel>
- (4)<https://www.projectmanager.com/templates/critical-path-template>
- (5)https://www.researchgate.net/publication/324015024_Solving_PERTCPM_Using_Excel
- (6)<https://asana.com/resources/critical-path-method>
- (7)https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&sca_esv=3b736228b17ed96f&q=Free+critical+path+template+Excel&sa=X&ved=2ahUKEwjD2_uIyZOMAxW8_AIHHeecE4wQ1QJ6BAg-EAE&biw=1920&bih=947&dpr=1
- (8)<https://www.smartsheet.com/critical-path-method?srsltid=AfmBOorS29ll8LnvSClYs6CiZRP1WZ4esWi0oo8sYu-gJQhrJM1iDBJ>

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: ivan.brezina@euba.sk

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: juraj.pekar@euba.sk

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: marian.reiff@euba.sk

FÚZIE A AKVIZÍCIE FIRIEM A UKAZOVATELE SILY

MERGERS AND ACQUISITIONS OF COMPANIES AND POWER INDICES

Zuzana Čičková, Peter Peťko

Abstrakt

V prostredí dynamickej geopolitickej a makroekonomickej transformácie, poznačenej výzvami ako energetická a digitálna tranzícia či potreba posilnenia odolnosti dodávateľských reťazcov, zohrávajú fúzie a akvizície čoraz dôležitejšiu úlohu ako nástroj na posilnenie konkurencieschopnosti podnikov v Európskej únii. Kooperatívne správanie sa subjektov vo svojej podstate skúma kooperatívna teória hier. Koaličné vzťahy medzi firmami sú významným faktorom ovplyvňujúcim úspech firmy v oblasti nedokonalkej konkurencie. Tento príspevok sa zaoberá možnosťami vyčíslenia základných ukazovateľov sily subjektu (Banzhafov a Shapleyho-Shubikov index), ktoré ponúkajú prvotný pohľad na odhad jeho koaličného potenciálu. Prezentujeme výpočet indexov v systéme MatLab.

Kľúčové slová: fúzie, teória hier, indexy sily

Abstract

In an environment of dynamic geopolitical and macroeconomic transformation, marked by challenges such as energy and digital transitions or the need to strengthen the resilience of supply chains, mergers and acquisitions play an increasingly important role as a tool for strengthening the competitiveness of companies in the European Union. Cooperative behavior of entities is essentially studied by cooperative game theory. Coalition relations between firms are a significant factor influencing the success of a company in the area of imperfect competition. This paper deals with the possibilities of quantifying the basic indicators of the strength of an entity (Banzhaf index and Shapley-Shubik index), which offer an initial view of the estimate of its coalition potential. We present the calculation of indices in the MatLab system.

Keywords: mergers, game theory, power indices

1 ÚVOD

Fúzie a akvizície (M&A) sú dôležitým faktorom ovplyvňujúcim konkurencieschopnosť podnikov v Európskej únii. Kľúčové správy ako “Letta Report” (g2024) a “Draghi Report” (2024) varujú pred narastajúcou divergenciou medzi Európou a USA v oblasti produktivity, inovácií a investícií. V tomto kontexte M&A predstavuje nedostatočne využitý strategický nástroj na priblíženie sa k dynamickejšiemu modelu konsolidácie trhov a efektívnejšieho kapitálového trhu, ktorý je charakteristický pre USA.

V nadväznosti na tieto analýzy predstavila Európska komisia v januári 2025 nový strategický nástroj na zvýšenie konkurencieschopnosti EÚ s názvom “Competitiveness Compass” (Európska komisia 2025). Tento kompas slúži ako rámec pre pravidelné hodnotenie výkonnosti EÚ v oblasti konkurencieschopnosti naprieč štyrmi piliermi: otvorené a spravodlivé trhy, silné priemyselné ekosystémy, investície do výskumu a inovácií, a schopnosť podnikov rásť a expandovať. Cieľom tohto nástroja je nielen zmapovať stav konkurencieschopnosti v jednotlivých členských štátoch, ale aj identifikovať štrukturálne

slabiny a poskytovať strategické odporúčania na ich odstránenie. V tomto kontexte Komisia zdôrazňuje potrebu konsolidácie, transformácie a internacionalizácie európskeho podnikateľského prostredia.

Jednou zo stratégií rastu, ktorú môžu podniky využiť na zvýšenie svojej odolnosti a konkurencieschopnosti, sú práve fúzie a akvizície. Zatiaľ čo USA historicky aktívnejšie podporujú M&A a konsolidáciu kľúčových odvetví, prístup EÚ bol v minulosti často opatrnejší, pričom pravidlá hospodárskej súťaže niekedy brzdili rozsiahlejšie M&A s cieľom chrániť fragmentovaný vnútorný trh. Pretrvávajúce regulačné bariéry, vyplývajúce z rozdielnych národných právnych úprav v oblasti obchodného práva, daní a administratívnych postupov, komplikujú a predražujú najmä cezhraničné fúzie, obzvlášť pre malé a stredné podniky (SME). V tejto súvislosti sa diskutuje o zavedení tzv. 28. režimu – voliteľného celoeurópskeho právneho rámca pre spoločnosti, ktorý by mohol zjednodušiť cezhraničné operácie vrátane fúzií tým, že by sa obišla potreba navigovať komplexitu 27 národných systémov.

Tisíce transakcií s hodnotou nižšou ako 500 miliónov dolárov tvoria väčšinu M&A aktivít každý rok. Menšie až stredne veľké transakcie budú jednoduchšie na realizáciu než megatransakcie, a to vďaka relatívne nižšiemu riziku, menšej závislosti od financovania a nižšej regulyčnej kontrole.

2 INDEXY SILY

Na odhad koaličného potenciálu firmy možno použiť indexy sily známe z kooperatívnej teórie hier, ktoré opíšeme v ďalšej časti.

2.1 Banzhafov index a Shapleyho-Shubikov index

Nech $P = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina hráčov (podnikov, firiem a podobne). Charakteristická funkcia hry s množinou hráčov P nazveme funkciu v definovanú pre všetky podmnožiny $S \subseteq P$, ktorá má tieto vlastnosti: $v(\emptyset) = 0$ a $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$ pre všetky disjunktné dvojice S_1 a $S_2 \subset P$. Dvojicu (P, v) nazývame kooperatívna hra n hráčov v tvare *charakteristickej funkcie*.

Charakteristická funkcia priradzuje každej koalícii $S \subset P$ číslo $v(S)$, ktoré vyjadruje „silu“ koalície S . Toto číslo nazývame aj hodnota koalície S . Hodnota koalície, ktorá vznikne zjednotením dvoch disjunktných koalícií, nemôže byť menšia ako súčet hodnôt týchto dvoch koalícií, operujúcich samostatne (t.j. „sila“ celku nie je menšia ako „sila“ jeho časti).

Najjednoduchšou formou koaličných hier sú hry kde $v(S) \in \{0, 1\}$. Tento prípad možno použiť napríklad v prípade hlasovacích hier, alebo v prípade sledovania hraničného ukazovateľa (napríklad sledovanie podielu na trhu, dosiahnutie stanovenej hodnoty tržieb a podobne).

Banzhafov index (Dlouhý a Fiala, 2015, Čičková a kol., 2019) je metódou odhadu sily hráča z hľadiska jeho hraničného prínosu ku koalíciám, kde prínos i -teho hráča ku koalícii S možno určiť ako: $v(S) - v(S - \{i\})$. Ak pre charakteristickú funkciu platí $v(S) = 1$ a $v(S - \{i\}) = 0$, potom i -ty hráč je nevyhnutný pre víťazstvo koalície S . Nech je počet takýchto koalícií

označovaný ako e_i , potom Banzhafov ukazovateľ pre i -teho hráča: $\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{k=1}^n e_k}$, pričom platí

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0.$$

Shapleyho-Shubikov ukazovateľ možno za predpokladu $v(S)=1$ a $v(S-\{i\})=0$ vyčíslit'

ako: $h_i = \sum_{i \in S} \left(\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \right)$, kde symbolom $|S|$ označujeme počet členov koalície S ,

pričom platí $\sum_{i=1}^n h_i = 1, h_i \geq 0$.

2.2 Výpočet indexov v systéme MatLab

Nech $P = \{A, B, C, D\}$ a nech sila hráčov je: $v(A) = 4, v(B) = 3, v(C) = 2, v(D) = 1$. Nech hraničnou silou koalície (hodnota, kedy koalícia je väčšinová), je hodnota 9. Na výpočet Banzhafovho a Shapleyho-Shubikovho ukazovateľa sme vytvorili program v systéme MatLab.

```
%zadanie vstupnych dat, meno hraca a jeho sila (podiel na trhu)
hraci = ['A','B','C','D']
sila_hraca=[4,3,2,1]
%blokovacia konstanta
konstanta=9;
rozmer=size(sila_hraca);
pocet=rozmer(1);
pocet_koalicii=2^pocet-1;
celkovy_pocet=sum(sila_hraca);
%vypocet Banzhafovho a Shapley-Shubikovho ukazovateľa ukazovateľa
Banzhaf=zeros(pocet,1);
Sharpley=zeros(pocet,1);
%hranicne 1-koalície
for i=1:pocet
    if sila_hraca(i)>=konstanta
        Banzhaf(i)=Banzhaf(i)+1;
        Sharpley(i)=Sharpley(i)+factorial(pocet-1)/factorial(pocet);
    end
end
%hranicne 2 a viac-koalície
for i=2:pocet
    koalície=nchoosek(hraci,i);
    pocet_clenov=nchoosek(sila_hraca,i);
    pocet_v_koalicii=sum(pocet_clenov');
    pocet_v_koalicii=pocet_v_koalicii';
    for j=1:pocet
        sila_hraca_bez=sila_hraca;
        sila_hraca_bez(j)=0;
        pocet_clenov_bez=nchoosek(sila_hraca_bez,i);
        pocet_v_koalicii_bez=sum(pocet_clenov_bez');
        rozmer1=size(pocet_v_koalicii_bez);
        rozmer2=rozmer1(2);
```

```

    pocet_v_koalicii_bez=pocet_v_koalicii_bez';
    for m=1:rozmer2
        if
pocet_v_koalicii(m)>=konstanta&pocet_v_koalicii_bez(m)<konstanta
            Banzhaf(j)=Banzhaf(j)+1;
            Sharpley(j)=Sharpley(j)+factorial(i-1)*factorial(pocet-
i)/factorial(pocet);
            end
        end
    end
end
end

```

Výsledkom sú rovnaké hodnoty Banzhafovho aj Shapleyho-Shubikovho indexu:

$\beta_i = h_i = (1/3, 1/3, 1/3, 0), i \in P$. V tejto hre majú hráči *A*, *B*, *C* rovnaký koaličný potenciál, koaličný potenciál hráča *D* je nulový.

3 ZÁVER

Fúzie a akvizície predstavujú kľúčový nástroj zvyšovania konkurencieschopnosti firiem v dynamicky sa meniacej európskej ekonomike. V kontexte aktuálnych strategických dokumentov EÚ, ako aj rastúcich výziev v oblasti technologickej a energetickej transformácie, možno očakávať ďalší nárast ich významu. Ukazovatele sily založené na kooperatívnej teórii hier – konkrétne Banzhafov a Shapleyho-Shubikov index – ponúkajú užitočný nástroj na kvantifikáciu koaličného potenciálu subjektov pri strategickom plánovaní a hodnotení fúzií a akvizícií. Ich výpočtom možno identifikovať hráčov s rozhodujúcim vplyvom a určiť možné zoskupenia firiem s potenciálom dosiahnuť synergické efekty. Implementácia týchto metód v systéme MatLab ukázala, že aj v relatívne jednoduchej konfigurácii možno získať zrozumiteľné výsledky, ktoré môžu poslúžiť ako podklad pre strategické vyjednávanie a rozhodovanie.

Do budúcnosti sa javí ako prínosné rozšíriť analýzu o viackriteriálne hodnotenie subjektov (napr. kombinácia trhového podielu, inovačného potenciálu a geografickej pôsobnosti), ako aj o empirickú validáciu výsledkov na reálnych dátach z trhu fúzií a akvizícií. Zároveň by bolo vhodné preskúmať možnosti vizualizácie koaličných štruktúr a ich vývoja v čase, čo by mohlo prispieť k lepšiemu pochopeniu dynamiky fúzií a podpore dátovo orientovaného rozhodovania v oblasti hospodárskej politiky aj na úrovni podnikového manažmentu.

PodĎakovanie

Tento príspevok bol spracovaný s podporou grantu VEGA 1/0115/23 Aplikácia kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a v medzinárodných vzťahoch.

Použitá literatúra

- Čičková, Z. a kolektív. (2015) *Vybrané aplikácie teórie hier*. Vydavateľstvo Letra Edu. 2019.
- Dlouhý, M. and Fiala, P. (2015) *Teorie ekonomických a politických her*. Oeconomica, nakladatelství VŠE

Draghi, M. (2024) *The future of European competitiveness* [Online]. Brusel: Európska komisia. Dostupné na: https://commission.europa.eu/topics/eu-competitiveness/draghi-report_en#paragraph_47059 (Citované 18. 3. 2025)

Európska komisia (2025) *The future of EU competitiveness: Looking beyond 2030 – Report of the High-Level Group on Competitiveness* [online]. Dostupné na: https://commission.europa.eu/document/download/10017eb1-4722-4333-add2-e0ed18105a34_en (Citované 20. 3. 2025)

Letta, E. (2024) *Much More Than a Market: Speed, Security, Solidarity – Empowering the Single Market to Deliver a Sustainable Future and Prosperity for All EU Citizens* [online]. Brusel: Európska rada. Dostupné na: <https://www.consilium.europa.eu/media/ny3j24sm/much-more-than-a-market-report-by-enrico-letta.pdf> (Citované 18. 3. 2025)

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 830

email: zuzana.cickova@euba.sk

Ing. Peter Peťko, MBA

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +4218 918 444 200

email: peter.petko.2@euba.sk

MATEMATICKÉ MODELOVANIE EKONOMICKÝCH A EKOLOGICKÝCH SYSTÉMOV AKO NÁSTROJ EKOLOGICKO- EKONOMICKÝCH ROZHODNUTÍ

MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC AND ECOLOGICAL SYSTEMS AS A TOOL FOR ECOLOGICAL-ECONOMIC DECISION- MAKING

Daniel Dudek¹

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá možnosťami matematického modelovania ekonomických a ekologických systémov s dôrazom na energetický manažment. Cieľom je navrhnúť prístupy, ktoré pomôžu optimalizovať procesy v rámci udržateľného rozvoja, obehového hospodárstva a kruhovej ekonomiky. Práca bližšie analyzuje nástroje systému energetického manažmentu (EMS), legislatívne a ekonomické motivácie k ekologizácii a prináša návrh univerzálneho modelu plánovania využívania energií. Model prihliada na variabilitu taríf elektrickej energie, potenciál obnoviteľných zdrojov a možnosti integrácie do priemyselných či domácych procesov.

Kľúčové slová: Systém Energetického Manažmentu, Udržateľný Rast, Obnoviteľné Zdroje

Abstract

This paper explores the possibilities of mathematical modelling in economic and ecological systems, focusing specifically on energy management. It aims to propose methods that help optimise processes under the principles of sustainable development, circular economy, and eco-friendly strategies. The paper analyses tools of the Energy Management System (EMS), legislative and economic motivations for greener solutions, and offers a proposal for a universal model for energy usage planning. The model accounts for variable electricity pricing, renewable energy integration, and the practical incorporation of these tools into both industrial and household processes.

Keywords: Energy Management System, Sustainable Growth, Renewable Resources

1 INTRODUCTION

Ecology, environmentalism, and sustainable development are topics frequently discussed in contemporary economic and social debates. These areas intersect various scientific disciplines and can significantly impact both global economic processes and environmental stability. Over the decades, numerous national and international organisations, including the European Union and the United Nations, have introduced legislative frameworks, recommendations, and incentives to promote sustainable growth and minimise environmental footprints (European Parliament, 2019; United Nations, 1992).

One such strategic objective, both globally and within the European Union, is to reduce the negative impacts of industrial processes while simultaneously supporting economic growth.

¹ Economics University in Bratislava, Faculty of Business Informatics, Department of Operations Research and Econometrics, Dolnozemska cesta 1 851 04 Bratislava, daniel.dudek@euba.sk

The paper was elaborated in the scope of the grant assignment ESG I-24-111-00 Exploring the use of artificial intelligence to support the creation of scientific research papers and the data mining within them

These efforts have given rise to the concept of a “circular economy” in which resources and energy are managed in cycles to reduce waste and emissions. Within this context, new policy instruments emphasise the integration of environmental criteria alongside traditional economic objectives (The World Bank, 2008).

From a legislative standpoint, several directives aim at achieving efficient energy usage. For instance, the European Union’s Directive on Energy Efficiency (EED) encourages both industrial and household users to adopt systematic measures to reduce energy consumption (European Parliament, 2012). Simultaneously, Directive 2019/944 supports dynamic electricity tariffs, enabling consumers to shift their energy usage to lower-cost (and often greener) time periods (European Parliament, 2019).

2 CURRENT STATE OF THE RESEARCH

Recent decades have seen an accelerated emphasis on incorporating environmental considerations into economic planning. In part, this is driven by growing consumer demand, as more individuals and organisations recognise the importance of reducing emissions and resource usage. Tools such as ESG (Environmental, Social, and Governance) reporting have emerged to measure and disclose ecological and social impacts. Moreover, cap-and-trade systems encourage producers to reduce emissions and monetise any unused emission allowances (May, Stahl and Taisch, 2016).

2.1 Energy Management Systems (EMS)

Energy management involves systematically optimizing production, distribution, and consumption of energy. The modern concept of a comprehensive Energy Management System (EMS) focuses primarily on end-user consumption. Defined by ISO 50001, EMS provides organisations with a framework to continuously improve energy performance by defining and measuring consumption goals, implementing improvements, and regularly reviewing progress (McKane et al., 2009).

Two key energy-related categories often targeted for optimisation are:

- Electricity – Shifting or reducing power consumption to match cheaper tariff windows or higher supply from renewables.
- Heating, ventilation, and air conditioning (HVAC) – Enhancing thermal comfort in buildings while minimising energy use and associated costs.

Energy management systems can be further divided based on their domain:

- HEMS (Home Energy Management System) – Typically integrates photovoltaic systems, battery storage, electric vehicle charging, and household appliances.
- BEMS (Building Energy Management System) – Controls lighting, HVAC, and other building-level energy loads.
- FEMS (Factory Energy Management System) – Focuses on manufacturing processes and industrial loads.
- CEMS (Community Energy Management System) – Coordinates energy usage and production among multiple buildings, local producers, and prosumers.

2.2 Smart Grids and Dynamic Tariffs

Smart grids leverage digital communication and real-time data to enhance reliability and efficiency in power distribution (Cecati et al., 2010). By using smart meters and IoT-based technologies, consumers can access variable tariff structures—also known as time-of-use pricing—allowing them to shift energy usage to off-peak hours with lower costs. This approach

balances supply and demand more effectively, promoting the integration of renewable sources like solar and wind (Ghelasi and Ziel, 2024).

Various studies (Samadi, Schober and Wong, 2011) have demonstrated that dynamic pricing significantly reduces peak loads, lowers consumer costs, and improves grid stability. On the industrial side, advanced scheduling of production processes can reduce overall electricity expenses by strategically using lower tariff windows (Wu et al., 2005).

2.3 Recent Developments in EMS Research

A growing portion of EMS research addresses multi-objective optimisation, incorporating both economic and ecological criteria. For example:

- Zhang, Yang and Li (2022) proposed a hybrid algorithm combining gravitational search and particle swarm optimization to schedule flexible loads and electric vehicle charging, minimising both cost and emissions.
- Ali et al. (2024) implemented real-time EMS control in an actual household with solar panels, battery storage, and dynamic tariffs, achieving significant cost reduction (nearly 58%) and lower stress on the grid.

Multi-appliance scheduling is another key aspect, accounting for appliances with different flexibility properties (Roh and Lee, 2016). Many models classify appliances as fully interruptible, partially interruptible, or non-interruptible and then address each category with specific constraints. While these models can be highly accurate, their computational complexity often grows, requiring meta-heuristic approaches such as genetic algorithms, swarm optimisation, or hybrid solutions (Javaid et al., 2017).

3 PROPOSED MODEL AND METHODOLOGY

In this shortened paper, we outline a universal model aimed at optimising energy usage for various entities—households, buildings, and factories—under a single unifying approach. The model is based on discrete time intervals, 15-minute, to capture dynamic tariff changes and renewable supply variability.

We distinguish between three core categories of energy-consuming devices:

- Interruptible Devices (SV): Operation can be paused or resumed. Example: charging batteries, electric vehicles.
- Non-Interruptible Devices (SN): Once turned on, they must run continuously until completion (e.g., washing machines). Some such devices may form a “chain,” where one task must finish before the next begins (like a washing machine followed by a dryer).
- Uncontrollable Devices (SBO): Operated at the user’s immediate discretion (lighting, TVs).

The primary objective is minimising total cost of electricity—calculated by multiplying the device’s power usage within each interval by the interval-specific tariff—while respecting constraints such as runtime requirements and user-defined comfort or scheduling preferences. Secondary objectives, not yet fully integrated in this simplified model, include environmental impacts (e.g., carbon intensity in each interval), maximising usage of on-site renewables, or limiting the number of devices ON-OFF transitions to preserve equipment lifespan.

3.1 Example of a Simplified Scheduling Problem

Consider a scenario with:

- One Shiftable Interruptible Appliances (Electric vehicle [EV] charger) requiring 8 discrete intervals of operation.
- One Shiftable Uninterruptible Appliances (washing + drying) requiring 12 + 16 intervals, respectively.
- Several Regular appliances (lights, small appliances).

By applying a mathematical programming approach in a solver, the model finds the schedule that runs the washing machine and dryer at the cheapest time frames, while the EV charger is switched on during periods with lower tariffs. The result can differ markedly from a baseline schedule, demonstrating potential cost savings of over 20–30% (Zhao et al., 2013).

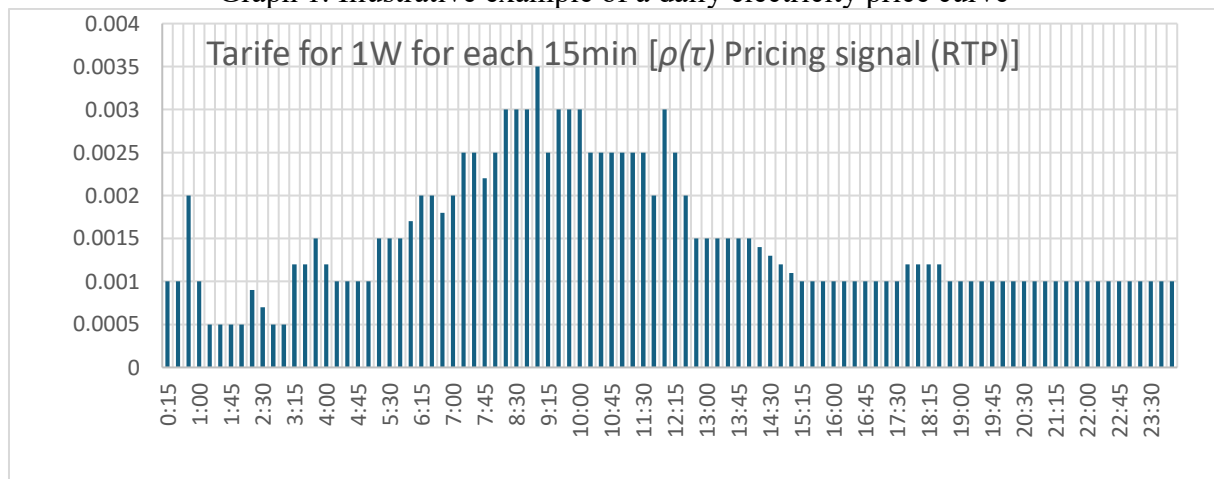
We used sample data that served as an estimate how many wats of electricity such devices could consume per time frame. We used price tariffs inspired by real tariffs of electricity, while the cost is calculated with sample monetary units. In the future we could use data predicted by artificial intelligence based on historical data and trends, so the scheduling of devices could be done up to 1 year ahead, not only for basic tariffs, but also for possible electricity output from regular or renewable sources of electricity. We then used model created by work of Doctor Javaid and his team (2017).

Figure 1. Illustration of device scheduling



Source: (Abrás et al., 2007)

Graph 1. Illustrative example of a daily electricity price curve



Source: Own elaboration

Table 1 Description of appliances

Interruptible devices			
Name of Device	Number of device (m)	Consumption per 15 minutes (λ_{si})	Operation time of 15 minutes
EV	1	700	8
Non-interruptible devices			
Name of Device	Number of device (m)	Consumption per 15 minutes (λ_{sni})	Operation time
Washing machine	1	700	12
Dryer	2	1000	16
Uncontrollable devices			
Name of Device	Number of device (m)	Consumption per 15 minutes (λ_r)	Operation time
Light1	1	215	16
PC	2	300	6
Fridge	3	30	48
Light2	4	30	36
Light3	5	180	32

Source: Own elaboration

Table 2. Description of symbol used in mathematical model.

Symbol	Description
N	Total number of homes
m	Total number of appliances
A	Set of appliances
τ	Time interval
T	Total time
E	Energy consumption
$\rho(\tau)$	Pricing signal (RTP)
λ	Power rating of appliance
ε	Energy consumption
ζ	Cost per day
σ	Cost per 15 minutes
Y	Total load demand

Source: (Javaid et al., 2017)

Shiftable–interruptible loads are end-using whose operation can be scheduled in any time slot and paused without loss of service quality. Typical members of this class include vacuum cleaners, domestic water-heaters, booster pumps, dishwashers and hair-dryers. Let A_{si} be the set of interruptible appliances and $a_{si} \in A_{si}$ a particular device with rated power λ_{si} (kW). Then total energy consumption per day(ε_{si}) is represented by the following Eq.1.

$$\varepsilon_{si} = \sum_{a_{si} \in A_{si}} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_{si} * \alpha(\tau) \right) \quad (1)$$

The aggregate daily operating cost of the shiftable–interruptible fleet during tariff window T is calculated as:

$$\zeta_{si}^{total} = \sum_{a_{si} \in A_{si}} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_{si} * \rho(\tau) * \alpha(\tau) \right) \quad (2)$$

Let $\rho(\tau)$ be the real-time price signal and let the binary variable $\alpha(\tau) \in \{0,1\}$ indicate the appliance state (1 = ON, 0 = OFF). The corresponding 15-minute operating cost for an interruptible load is therefore:

$$\sigma_{si}^{\tau} = \sum_{\tau=1}^T (\lambda_{si} * \rho(\tau) * \alpha(\tau)) \quad \forall \quad \tau = 1 : T \quad (3)$$

By minimizing each appliance's 15-minute operating cost, the total daily expenditure is correspondingly reduced.

Shiftable–non-interruptible loads are tasks whose start time can be deferred yet must run to completion once activated. Canonical examples are washing machines and tumble-dryers. Let A_{sin} denote this set and $a_{sni} \in A_{sni}$ a particular appliance with rated power λ_{sin} then, total energy consumption ε_{sni} per day is represented by the following Eq. 4

$$\varepsilon_{sni} = \sum_{a_{sni} \in A_{sni}} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_{sni} * \alpha(\tau) \right) \quad (4)$$

Because each non-interruptible task must run to completion, its full-cycle operation can raise expenditure; the resulting cost is given by Eq. 5:

$$\zeta_{sni}^{total} = \sum_{a_{sni} \in A_{sni}} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_{sni} * \rho(\tau) * \alpha(\tau) \right) \quad (5)$$

The 15 minute operating cost for a shiftable–non-interruptible load is given by:

$$\sigma_{sni}^{\tau} = \sum_{\tau=1}^T (\lambda_{sni} * \rho(\tau) * \alpha(\tau)) \quad \forall \quad \tau = 1 : T \quad (6)$$

Regular (non-shiftable) loads—such as refrigerators, ovens and lighting—must operate whenever demanded. Let A_r be the set of these devices and $a_r \in A_r$ an individual appliance with rated power λ_r , and ε_r is the total energy consumption per day which is represented by the Eq.7:

$$\varepsilon_r = \sum_{a_r \in A_r} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_r * \alpha(\tau) \right) \quad (7)$$

Regular loads frequently operate for extended durations to satisfy continuous demand; their expenditure during tariff window T is therefore given by:

$$\zeta_r^{total} = \sum_{a_r \in A_r} \left(\sum_{\tau=1}^T \lambda_r * \rho(\tau) * \alpha(\tau) \right) \quad (8)$$

The 15 minute operating cost of regular loads is given by Eq. 9.

$$\sigma_r^\tau = \sum_{\tau=1}^T (\lambda_r * \rho(\tau) * \alpha(\tau)) \quad \forall \quad \tau = 1 : T \quad (9)$$

Let Y denote the total electrical load of a household during interval T .

$$Y_\tau = \varepsilon_{si} + \varepsilon_{sni} + \varepsilon_r \quad \forall \quad \tau = 1 : T \quad (10)$$

Appliance-level energy use across successive time slots is summarized in the matrix below:

$$M_E = \begin{bmatrix} Y_{a_{si}}^{\tau_1} & \dots & Y_{a_{sni}}^{\tau_1} & \dots & Y_{a_r}^{\tau_1} \\ Y_{a_{si}}^{\tau_2} & \dots & Y_{a_{sni}}^{\tau_2} & \dots & Y_{a_r}^{\tau_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{a_{si}}^T & \dots & Y_{a_{sni}}^T & \dots & Y_{a_r}^T \end{bmatrix}$$

Electricity charges are evaluated under a real-time-pricing (RTP) tariff $\rho(\tau)$, whose 15-min rates fluctuate with system demand and supply (profile in Graph 1.). Let $A_n = A_n \cup A_n \cup A_n$ denote the full appliance portfolio and $a_i \in A_n$ any individual load. The 15-minute expenditure is simply the product of the aggregate household demand Y_τ and the corresponding RTP signal, cf. Eq. (11).

$$\sigma_{total}^\tau = \sum_{a_r \in A_r} Y_{(\tau, a_i)} * \rho(\tau) \quad \forall \quad \tau = 1 : T \quad (11)$$

The daily expenditure is obtained by summing the 15 min costs over the 24-h, or 96 time series horizons, as formalized in Eq. (12).

$$\zeta_{total} = \sum_{\tau=1}^T \left(\sum_{a_r \in A_r} Y_{(\tau, a_i)} * \rho(\tau) \right) \quad (12)$$

3.2 Problem formulation and Results

The optimisation targets cost reduction through strategic grid usage: a knapsack-based scheduler shifts controllable loads away from high-tariff periods, yielding the objective function:

$$\min \sum_{\tau=1}^T \left(\sum_{a_i \in A_n} Y_{(\tau, a_i)} * \rho(\tau) \right) \quad (13)$$

Subject to:

$$T_{min} \leq \tau \leq T_{max} \quad (14)$$

$$Y_{\tau} = \varepsilon_{si} + \varepsilon_{sni} + \varepsilon_r \leq (KW_g) \quad (15)$$

$$\sum_{\tau=1}^T Y_{\tau}^{unsch.} = \sum_{\tau=1}^T Y_{\tau}^{sch.} \quad (16)$$

Equation (13) formulates the objective—minimise the household’s daily electricity charge. Constraint (14) confines the search to the prescribed scheduling horizon. Constraint (15) limits the combined demand of every appliance class to the feeder capacity KW_g , a utility-defined value that secures grid reliability (computed from Fig. 2). Constraint (16) enforces energy conservation: total consumption before and after scheduling is identical, so each device’s full operating cycle is preserved.

We found solution for the problem, that is using the data from table 1 and graph 1, while we denote that T is equal 96, because there are 96 different time intervals consisting of 15 minute intervals in the whole day. The scheduling plan for the whole day is noted in graph 2, and the value of the objective function of optimised plan and the value of unscheduled plan is depicted in table 3. The Total saved electricity for one home is, that represents monetary units of saved costs. The unscheduled $a_i(\tau)$, as well as $a_r(\tau)$ is calculated using fig. 17.

$$a_r(\tau) = \frac{\tau}{T} \quad (17)$$

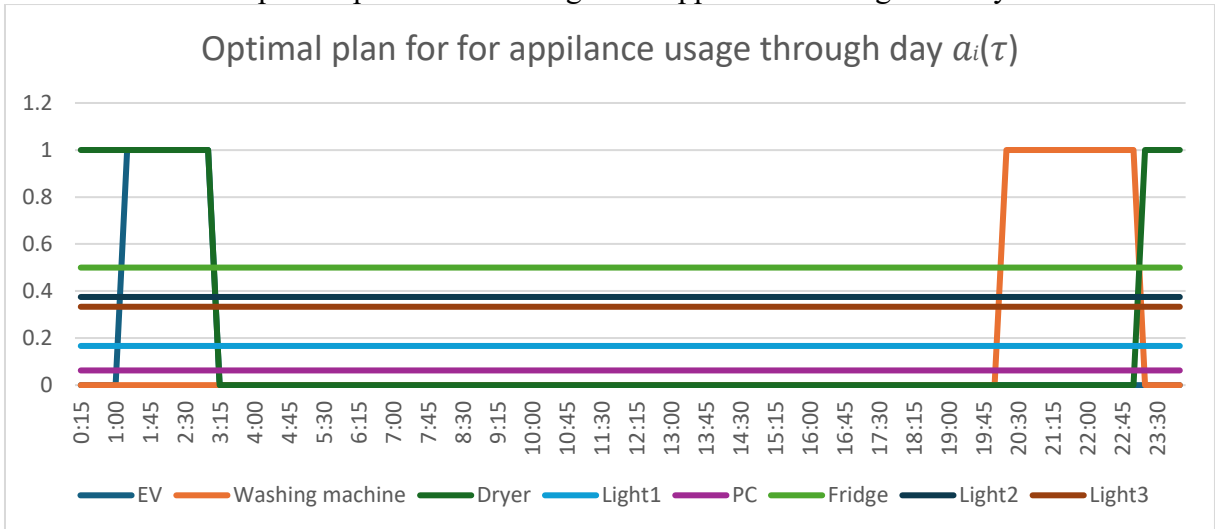
Comparison is written in table below:

Table 3. Comparison of optimal and unscheduled Plan, with the percentages of total cost saved.

	Optimal Plan	Unscheduled plan	Percentage of money saved
Costs per day (€)	45.18	64.24	30%

Source: Own elaboration

Graph 2. Optimal scheduling of all appliances through the day



4 EXTENSIONS AND FUTURE WORK

While the above example focuses primarily on cost-based optimisation, a more comprehensive framework can incorporate multiple objectives:

- Environmental criteria: Shifting usage toward periods when the grid is powered by renewable sources
- Comfort metrics: Keeping indoor temperatures within user-preferred ranges, balancing occupant comfort with energy expenditures (Ha et al., 2006).
- Risk and uncertainty: Accounting for uncertain forecasts in renewable generation or variable tariffs

As these complexities grow, meta-heuristic algorithms such as improved bald eagle search (Youssef et al., 2023) or humpback whale algorithms (Ali et al., 2024) offer robust solutions that can converge to near-optimal solutions within a reasonable computation time.

5 CONCLUSION

Mathematical modelling of economic and ecological systems, particularly in the domain of energy management, holds substantial promise for advancing sustainable and cost-effective operations across households, commercial buildings, and industrial facilities. A suitably designed Energy Management System can integrate dynamic tariffs, user preferences, and renewable energy availability into a unified platform for scheduling energy usage.

By merging best practices—such as HEMS, BEMS, or FEMS—into a single, flexible model, stakeholders can effectively reduce energy costs, lower carbon footprints, and enhance the reliability of the grid. While many models exist, further research is needed to refine multi-objective optimization (economic, ecological, comfort) and to incorporate novel meta-heuristics for solving increasingly complex scheduling problems in real-time. Ultimately, better synergy between technology, policymaking, and user engagement can drive sustainable progress, aligning both economic and environmental goals.

Used Literature

Ali, A. O., Elmarghany, M. R., Hamed, A. M., Sabry, M. N., and Abdelsalam, M. M. (2024) ‘Optimized smart home energy management system: Reducing grid consumption and costs through real-time pricing and hybrid architecture’, *Case Studies in Thermal Engineering*, 64, p. 105410.

Abras, S., Ploix, S., Pesty, S. and Jacomino, M. (2007) ‘A multi-agent home automation approach for power management’, *IFAC Proceedings Volumes*, 40(8), pp. 93–98.

Cecati, C., Mokryani, G., Piccolo, A. and Siano, P. (2010) ‘An overview on the smart grid concept’, *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3322–3327.

European Parliament (2012) Directive 2012/27/EU on Energy Efficiency [Online]. Available at: <https://eur-lex.europa.eu/> (Accessed: 20 March 2025).

European Parliament (2019) Directive 2019/944 on common rules for the internal market for electricity [Online]. Available at: <https://eur-lex.europa.eu/> (Accessed: 20 March 2025).

Ghelasi, P. and Ziel, F. (2024) ‘Hierarchical forecasting for aggregated curves with an application to day-ahead electricity price auctions’, *International Journal of Forecasting*, 40(2), pp. 581–596.

- Ha, D. L., Ploix, S., Zamai, E. and Jacomino, M. (2006) 'A home automation system to improve household energy control', IFAC Proceedings Volumes, 39(3), pp. 15–20.
- Javaid, N., Naseem, M., Rasheed, M. B., Mahmood, D., Khan, S. A., Alrajeh, N. and Iqbal, Z. (2017) 'A new heuristically optimized home energy management controller for smart grid', Sustainable Cities and Society, 34, pp. 211–227.
- May, G., Stahl, B. and Taisch, M. (2016) 'Energy management in manufacturing: toward eco-factories of the future – a focus group study', Applied Energy, 164, pp. 628–638.
- McKane, A., Desai, D., Matteini, M., Meffert, W., Williams, R. and Risser, R. (2009) 'Thinking Globally: How ISO 50001 - Energy Management Can Make Industrial Energy Efficiency Standard Practice', Lawrence Berkeley National Laboratory. Available at: <https://www.osti.gov/servlets/purl/983191>.
- Roh, H-T. and Lee, J-W. (2016) 'Residential demand response scheduling with multiclass appliances in the smart grid', IEEE Transactions on Smart Grid, 7(1), pp. 94–104.
- Samadi, P., Schober, R. and Wong, V. W. S. (2011) 'Optimal Energy consumption scheduling using mechanism design for the future smart grid', 2011 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm), pp. 369–374.
- The World Bank (2008) The Growth Report: Strategies for Sustained Growth and Inclusive Development. Washington, DC: The World Bank on behalf of the Commission on Growth and Development.
- United Nations (1992) United Nations Conference on Environment and Development, Rio de Janeiro, Brazil, 3-14 June 1992 [Online]. Available at: <https://www.un.org/en/conferences/environment/rio1992> (Accessed: 21 March 2025).
- Wu, T-Y., Shieh, S-S., Jang, S-S. and Liu, C. C. L. (2005) 'Optimal energy management integration for a petrochemical plant under considerations of uncertain power supplies', IEEE Transactions on Power Systems, 20(3), pp. 1431–1439.
- Youssef, H., Kamel, S., Hassan, M. H., Nasrat, L. and Jurado, F. (2023) 'An improved bald eagle search optimization algorithm for optimal home energy management systems', Soft Computing, 28(2), pp. 1367–1390.
- Zhang, R., Yang, C. and Li, X. (2022) 'Optimal energy consumption optimization in a smart house by considering electric vehicles and demand response via a hybrid gravitational search and particle swarm optimization algorithm', Energy Engineering, 119(6), pp. 2489–2511.
- Zhao, Z., Lee, W. C., Shin, Y. and Song, K-B. (2013) 'An optimal power scheduling method for demand response in home energy management system', IEEE Transactions on Smart Grid, 4(3), pp. 1391–1400.

Contact information

Ing. Daniel Dudek

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67295 111

E-mail: daniel.dudek@euba.sk

OPTIMALIZÁCIA SORTIMENTU PODĽA MARKOVOVHO MODELU VÝBERU

ASSORTMENT OPTIMIZATION UNDER MARKOV CHAIN CHOICE MODEL

Monika Ferenčáková

Abstrakt

Článok sa zaoberá problematikou optimalizácie sortimentu pomocou Markovovho modelu výberu (MCCM), ktorý presne zachytáva správanie zákazníkov pri substitúcii produktov v rámci rozhodovacieho procesu. V úvode sú popísané teoretické základy a literárne východiská, ktoré viedli k aplikácii MCCM v oblasti revenue manažmentu. Praktická časť obsahuje simulovaný príklad s hotelovými izbami, kde sa na základe údajov o preferenciách a výbere zákazníkov vypočítavajú pravdepodobnosti príchodu, prechodové pravdepodobnosti a očakávané výnosy pre rôzne kombinácie ponúkaných produktov. Výsledky potvrdzujú prínos MCCM pre rozhodovanie v podmienkach neistoty a zdôrazňujú potrebu jeho aplikovateľnosti v praxi.

Kľúčové slová: *revenue manažment, optimalizácia sortimentu, Markovov model výberu, substitúcia, zákaznícke správanie*

Abstract

This paper investigates assortment optimization using the Markov Chain Choice Model (MCCM), which effectively captures customer substitution behavior in decision-making processes. The study begins with a review of theoretical foundations and literature that support the integration of MCCM into revenue management. A numerical example based on simulated hotel room data illustrates how arrival and transition probabilities are derived and used to compute expected revenues across different assortment configurations. The results demonstrate the model's potential for decision-making under uncertainty and highlight the need for accessible implementations in practice.

Keywords: *revenue management, assortment optimization, Markov chain choice model, substitution, customer behavior*

1 INTRODUCTION

In revenue management, accurately modeling customer choice behavior is essential for optimizing product assortments and maximizing expected revenues. Traditional models, such as the Multinomial Logit (MNL), often rely on the Independence of Irrelevant Alternatives (IIA) assumption, which may not hold in real-world settings where customer substitution behavior is more complex and context-dependent.

The Markov Chain Choice Model (MCCM) offers a more flexible and behaviorally realistic framework by representing customer decision-making as a sequence of transitions within a Markov process. In this model, customers arrive with an initial preference for a specific product. If that product is unavailable, they transition to other alternatives—or exit without purchasing—based on empirically estimated transition probabilities. This mechanism allows the MCCM to capture a broader range of substitution patterns while avoiding the restrictive assumptions of traditional utility-based models.

Moreover, the methodological adaptability of the MCCM makes it suitable for addressing interdisciplinary challenges. Emerging research emphasizes the importance of integrating

assortment optimization not only with profit-driven objectives but also with sustainability metrics and environmental considerations. This positions MCCM as a promising tool for organizations striving to align operational efficiency with sustainable development goals.

Recent studies have demonstrated the applicability of MCCM in various revenue management contexts, including assortment planning, single-resource allocation, and network-based optimization. Its structural properties facilitate tractable mathematical formulations, such as linear programming, supporting its integration into data-driven decision-making systems.

2 LITERATURE REVIEW

Revenue Management (RM) emerged as a strategic response to the challenges faced by the airline industry following deregulation in the late 1970s. Initially reliant on heuristic and statistical approaches to manage fare classes and seat allocations, airlines transitioned toward data-driven systems capable of dynamically adjusting availability across different fare products, leading to notable improvements in industry-wide revenues (Talluri & van Ryzin, 2004; McGill & van Ryzin, 1999). Beyond airlines, RM practices rapidly extended into hospitality, rental, and transportation sectors, where the combination of fixed capacities, demand uncertainty, and time-dependent perishability proved an ideal fit for these tools (Belobaba, 1987). Early RM models were rooted in independent demand assumptions, where each product or fare class was believed to generate demand unaffected by availability controls or the portfolio of products presented to the customer (Littlewood, 1972; Brumelle & McGill, 1993). Although simple and tractable, these models failed to capture the complexities of substitution and customer adaptation that characterize real-world consumer behavior (Talluri & van Ryzin, 2004).

In parallel with developments in RM, Markov chains established themselves as vital tools in stochastic modeling and decision analysis. Conceived to model random processes with memoryless property, Markov chains describe transitions between discrete states governed by probabilistic rules independent of prior history (Markov, 1906). Their foundation in operations research is notable, with applications ranging from modeling queuing systems and reliability analysis to forecasting market shares and customer switching behavior (Karlin & Taylor, 1975; Winston & Goldberg, 2004). The transition probability matrix, solving for stationary distributions and passage times, became instrumental for optimal control and sequential decision-making, particularly in dynamic environments (Puterman, 2014).

As both RM and Markov chain modeling matured, the integration of these fields became a natural evolution. Traditional RM models were typically static or short sighted, neglecting the dynamic and fast evolving nature of both inventory consumption and customer behavior (Talluri & van Ryzin, 2004). Markov Decision Processes (MDPs) and dynamic programming approaches offered a rigorous and computationally tractable framework for optimizing booking controls, overbooking decisions, and dynamic pricing strategies under uncertainty.

Recognizing that demand is fundamentally endogenous rather than exogenous marked a critical shift in RM. Consumer choice modeling became essential, allowing substitution, buy-up, buy-down, and no-purchase behaviors to be formally incorporated into revenue optimization frameworks (Talluri & van Ryzin, 2004; Ben-Akiva & Lerman, 1987). Discrete choice models, particularly the Multinomial Logit (MNL) model, gained prominence for their theoretical reach and analytical tractability (McFadden, 1974; Ben-Akiva & Lerman, 1987). However, despite their utility, MNL models were constrained by the Independence of Irrelevant Alternatives (IIA) property, limiting their ability to realistically capture customer

substitution dynamics and leading to potentially inaccurate predictions in more complex choice environments (Blanchet, Gallego, & Goyal, 2016).

The limitations inherent in traditional choice models motivated the introduction of the Markov Chain Choice Model (MCCM), as formalized by Blanchet, Gallego, and Goyal (2016). The MCCM conceptualizes customer search and substitution as a probabilistic process where a customer enters considering an initial preferred choice and, if unavailable, transitions through a Markov chain across available alternatives until a purchase or no-purchase decision is made. Distinguished by its flexibility, the MCCM can approximate a wide range of random utility models, including the MNL, nested logit, and their mixtures, without being constrained by the IIA assumption. Moreover, the MCCM requires only basic choice probabilities over small offer sets for calibration and remains computationally efficient, making it highly suitable for assortment optimization problems (Blanchet, Gallego, & Goyal, 2016; Feldman & Topaloglu, 2017).

Efforts to model consumer choice behavior under MCCM have evolved substantially in recent years. Feldman and Topaloglu (2017) were among the first to examine the operational implications of MCCM within a revenue management framework, demonstrating that optimal assortments could be characterized through linear programming formulations, thus enabling efficient computation even in high-dimensional settings. They also highlighted the non-trivial structural differences that emerge when customer choice behavior follows Markovian transitions, such as the absence of nested assortment structures that are typical under MNL optimization.

Building on this foundation, research has expanded the application of MCCM to dynamic pricing and inventory control. Kleywegt and Shao (2022) showed that even under inventory constraints and time-dependent pricing, MCCM remains analytically tractable by reformulating the optimization task into a convex conic problem. Their work opens the door to real-time assortment and pricing decisions that are simultaneously behaviorally grounded and computationally efficient.

At the same time, robust optimization techniques have been developed to address parameter uncertainty within MCCM-based models. Desir et al. (2020) introduced a robust assortment optimization framework under uncertainty in transition probabilities, employing min-max formulations to ensure worst-case performance guarantees. Their approach is particularly relevant in practice, where the empirical estimation of choice parameters often suffers from data sparsity, noise, or censoring effects.

Generalizations of the MCCM framework have also been proposed to capture phenomena such as dynamic preference evolution and choice overload. Goutam, Goyal, and Soret (2019) incorporated context-sensitive transitions into the MCCM to model cognitive overload, where an excessive number of available alternatives reduces the likelihood of any purchase. Their work represents a significant advancement toward aligning choice models with insights from behavioral economics and consumer psychology. Similarly, Liu and Chen (2020) extended MCCM to multi-category environments, addressing asymmetric cross-category substitution patterns and developing estimation methods based on expectation-maximization algorithms applied to transactional data.

A complementary line of research explores the structural properties of RM policies under Markov-modulated environments. Özkan et al. (2012) introduced a stochastic dynamic programming framework where customer arrivals and preferences are influenced by exogenous Markov processes, demonstrating the adaptability of threshold-based admission policies depending on environmental states.

Finally, Strauss, Klein, and Steinhardt (2018) provided a comprehensive survey situating MCCM within the broader taxonomy of choice-based RM models, emphasizing its unique ability to bridge behavioral realism and optimization tractability. Together, these contributions form a robust theoretical and methodological foundation for assortment optimization under customer choice uncertainty.

Nevertheless, despite the promising features of MCCM, its practical adoption remains limited due to the scarcity of applied case studies and simplified implementations accessible to practitioners. Addressing these gaps is essential not only for theoretical advancement but also for making MCCM-based methods deployable in dynamic and complex real-world environments. The present project seeks to contribute a brief example of MCCM in the context of assortment optimization, supported by a reproducible Python-based implementation.

3 FORMULATING THE ASSORTMENT OPTIMIZATION PROBLEM UNDER MCCM

Understanding customer choice dynamics is essential in modern revenue management, particularly when customer behavior includes sequential product substitution. A rigorous framework for modeling such behavior is provided by the Markov Chain Choice Model (MCCM), introduced by Blanchet, Gallego, and Goyal (2016). In this model, customers' decisions are conceptualized as a stochastic process governed by Markovian transitions between states representing products or no-purchase outcomes.

A Markov chain is formally defined as a discrete-time stochastic process $\{X_n\}$ that satisfies the Markov property, meaning that the probability of transitioning to the next state depends solely on the current state and not on the sequence of preceding states. This property is mathematically expressed as:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots, X_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (3.1)$$

for all n and all states i, j (Markov, 1906; Karlin & Taylor, 1975).

In the MCCM framework, customer preferences are encoded via **arrival probabilities** and **transition probabilities**, both of which can be computed from empirical choice data. The goal of the model is to describe customer substitution behavior in a probabilistic yet computationally tractable manner.

Arrival Probabilities

Each product $i \in \mathcal{N}_+$ has an associated arrival probability λ_i , representing the likelihood that a customer initially prefers product i when presented with the full assortment $\mathcal{N}$. As defined by Blanchet, Gallego, and Goyal (2016), these are calculated as:

$$\lambda_i = \pi(i, \mathcal{N}) \quad (3.2)$$

where $\pi(i, \mathcal{N})$ is the observed choice probability of product i from the full offer set $\mathcal{N}$.

Transition Probabilities

If a customer's preferred product i is unavailable, the model assumes that the customer transitions to an alternative option $j \in \mathcal{N}_+$ with a probability governed by the Markov chain. These transition probabilities are defined as:

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 0, j = 0 \\ \frac{\pi(j, \mathcal{N}\{i\}) - \pi(j, \mathcal{N})}{\pi(i, \mathcal{N})}, & \text{if } i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{N}_+, i \neq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3)$$

This formulation captures how the removal of product i affects the probability of product j being selected, normalized by the original preference for i . However, not all products are always available. When an assortment $S \subseteq \mathcal{N}$ is offered, the set of products in S becomes absorbing states (i.e., once reached, the customer does not leave). In that case, Blanchet et al. (2016) defines the **modified transition probabilities** $\rho_{i,j}$ as:

$$\rho_{i,j}(S) = \begin{cases} 0, & \text{if } i \in S, j \neq i \\ 1, & \text{if } i \in S, j = i \\ \rho_{i,j}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.4)$$

This modification ensures that offered products are absorbing states in the Markov chain, while the remaining transition probabilities apply to substitution behavior among unavailable options.

Transition Matrix Decomposition and Absorption

The central structure of a discrete-time Markov chain is the **transition matrix** $\mathbf{P}$, where each entry p_{ij} denotes the probability of transitioning from state i to state j . For a Markov chain with m states, the matrix takes the form:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

where each row sums to one, ensuring that the chain defines a valid probability distribution:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (3.6)$$

(Winston & Goldberg, 2004).

A critical aspect of the MCCM is its handling of absorbing and transient states. As explained in standard Markov chain theory (Winston & Goldberg, 2004), available products are modeled as absorbing states, meaning that once a customer chooses an available product, the transition process stops. Unavailable products are modeled as transient states, where customers continue transitioning until absorption occurs. The transition matrix $\mathbf{P}$ in this context can be partitioned as:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

where I is the identity matrix for absorbing states, 0 is the zero matrix, R captures transitions from transient to absorbing states, and Q represents transitions among transient states.

Purchase Probabilities

Given the arrival distribution λ and the modified transition matrix $\mathbf{P}(S)$, the probability that a customer purchases product $j \in S$ is defined by Blanchet et al. (2016) as:

$$\hat{\pi}(j | S) = \lambda_j + (\lambda(\bar{S}))^T (I - C)^{-1} B e_j \quad (3.8)$$

This formula computes the **purchase probability** for product j , given an offered assortment S , where:

- λ_j is the direct arrival probability for product j ,
- $\lambda(\bar{S})$ vector of arrival probabilities for products **not in** the assortment S ,
- C is a transition submatrix between **unavailable (transient) products**,
- B is a transition matrix from **unavailable to available** products,
- e_j is a unit vector indicating the absorbing state j .

Markov Chain Choice Model (MCCM) for Assortment Optimization

The ultimate goal of the assortment optimization problem under the Markov Chain Choice Model is to determine the subset of products $S \subseteq \mathcal{N}$ that maximizes expected revenue, considering both arrival preferences and sequential substitution behavior. Once purchase probabilities $\hat{\pi}(j | S)$ have been computed using the transition matrix decomposition described in this chapter. Feldman and Topaloglu (2017) describe that the expected revenue function takes the following form:

$$\max_{S \subseteq \mathcal{N}} R(S) = \max_{S \subseteq \mathcal{N}} \sum_{j \in S} (r_j * \hat{\pi}(j, S)) \quad (3.9)$$

where:

- r_j is the revenue generated from product j ,
- $\hat{\pi}(j, S)$ is the probability that a customer ultimately purchases product j when offered assortment S .

This revenue formulation reflects both direct preferences and substitution dynamics in a compact, interpretable form. It allows the analyst to evaluate any proposed assortment S using estimated transition probabilities and known product prices.

Feldman and Topaloglu (2017) further develop this framework and show that despite the non-nested structure of optimal assortments under MCCM, the expected revenue function remains tractable. They demonstrate that even though standard monotonicity results from Multinomial Logit models no longer hold, the optimal assortment can be computed effectively by evaluating revenue over a feasible set of assortments or by applying approximation methods in larger-scale problems.

The simplicity and clarity of the revenue function $R(S)$ make it well-suited for practical use. In the following section, this model will be applied to a numerical example based on simulated data, illustrating each computational step of the theoretical framework described above.

4 PRACTICAL IMPLEMENTATION AND EXTENSIONS

To illustrate the practical implementation of the Markov Chain Choice Model (MCCM) in the context of assortment optimization, we present a step-by-step application using simulated customer choice data. The use of simulated data enables full control over customer preferences and assortment visibility, ensuring consistency with theoretical assumptions and supporting clear interpretation. This approach is aligned with the methodology outlined in Blanchet et al. (2016) and Feldman and Topaloglu (2017).

4.1 Problem

We analyze a stylized case of assortment planning for a hotel offering three room types, differentiated by features and price:

1. **Standard Room** (Product 1) – €80
2. **Room with Breakfast in Restaurant** (Product 2) – €110
3. **Room with Breakfast Served in Room** (Product 3) – €150

All room types are structurally identical, differing only in the additional breakfast service included in the offer. Therefore, no capacity constraints are assumed in the analysis.

The dataset consists of 100 simulated customer records. Each record includes information about the customer's initial preference (i.e., the product they would choose if available), the assortment they were exposed to at the moment of decision-making, and their final choice. This structure is essential for MCCM estimation, as it allows for identification of both arrival probabilities and substitution patterns.

Arrival preferences are summarized through arrival probabilities λ_j , computed from simulated data assuming the full assortment $\mathcal{N} = \{1,2,3\}$ is available. These values reflect the probability that a customer initially prefers product j :

$$\lambda_1 = 0,20 \quad \lambda_2 = 0,70 \quad \lambda_3 = 0,10$$

These values reflect empirical arrival frequencies under full information.

Transition Probabilities and Matrix Construction

In the MCCM framework, products in the offered set—alongside the no-purchase option—are modeled as absorbing states. Any product not in the assortment is treated as a transient state, from which customers probabilistically transition until they either purchase an available product or exit. In this case, the absorbing states are 0, 1, and 2, while the transient state is 3.

Next, we construct the transition probability matrix from customer behavior when their preferred product was **not** available in the offered assortment. For each such instance, we recorded the product ultimately chosen. This approach adheres to the MCCM principle of estimating substitution dynamics solely from non-absorbing (transient) situations.

The resulting empirical transition matrix is as follows:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,769 & 0,231 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

This matrix shows, for example, that customers who initially preferred product 3 but could not purchase it transitioned to product 1 or 2 with equal probability.

Revenue Calculation using MCCM

To demonstrate the revenue computation step-by-step, we select one representative assortment: $S = \{1,2\}$. Using the arrival probabilities and transition matrix, the purchase probabilities for the available products are calculated as follows:

$$\hat{\pi}(1 | \{1,2\}) = 0,20 + 0,05 = 0,25$$

$$\hat{\pi}(2 | \{1,2\}) = 0,7 + 0,05 = 0,75$$

The expected revenue for this assortment is then computed as:

$$R(\{1,2\}) = 80 * 0,25 + 110 * 0,75 = 20 + 82,5 = 102,5$$

This process was applied similarly to each of the eight possible assortment configurations:

- Full set: [1, 2, 3]
- All two product combinations: [1, 2], [1, 3], [2, 3]
- Single product offers: [1], [2], [3]
- Empty set: $\emptyset$

The computation produced the following values:

Assortment	Expected Revenue R(S)	$\hat{\pi}(1 S)$	$\hat{\pi}(2 S)$	$\hat{\pi}(3 S)$
[1, 2, 3]	108	0.2	0.7	0.1
[1, 2]	102,5	0.25	0.75	0.0
[1, 3]	43,92	0.362	0.0	0.1
[2, 3]	92	0.0	0.7	0.1
[3,]	15	0.0	0.0	0.1
[2,]	88	0.0	0.8	0.0
[1,]	36,92	0.462	0.0	0.0
$\emptyset$	0	0.0	0.0	0.0

The full assortment yielded the highest expected revenue. Removing product 2 significantly reduced the revenue, confirming it as the most preferred product. Offering product 2 alone generated more revenue than any other single-product offer.

This example demonstrates a replicable methodology for applying MCCM to real-world settings and highlights how even limited data can yield structured insight into choice dynamics.

Despite the substantial theoretical progress in modeling customer substitution through the Markov Chain Choice Model, its real-world applicability remains limited by the lack of simple, transparent implementations. Existing contributions often focus on theoretical properties or large-scale algorithmic frameworks, leaving a gap in accessible, example-driven studies suitable for direct use in applied revenue management contexts. This highlights the need for illustrative models based on simulated or real-world data that not only operationalize MCCM but also demonstrate its decision-making value in a clear and replicable manner.

Beyond its economic relevance, the MCCM framework may also support environmentally informed assortment decisions. By incorporating sustainability-related metrics—such as energy consumption, packaging intensity, or supply chain emissions—into the product evaluation process, the model can serve as a decision-support tool for environmentally responsible and resource-efficient assortment planning.

5 CONCLUSION

This study examined assortment optimization using the Markov Chain Choice Model (MCCM), highlighting its ability to capture realistic customer substitution behavior within a revenue management framework. Through simulated data, we demonstrated how arrival and transition probabilities can be estimated and applied to compute purchase probabilities and expected revenues across various assortments.

The hotel room example illustrated the sensitivity of revenue outcomes to assortment design, with the MCCM offering a tractable and behaviorally sound approach. While the results confirm the model's practical relevance, broader adoption will benefit from the development of accessible tools and real-world case studies. This work lays a foundation for both academic extension and applied use in assortment planning.

The paper was prepared as part of the research project A-25-103/3020-08 „Preskúmanie interdisciplinárnych stratégií pre efektívne manažovanie životného prostredia a udržateľný rozvoj“

Literature:

- [1] TALLURI, K. T. a VAN RYZIN, G. J. 2005. *The Theory and Practice of Revenue Management*. New York: Springer. 745 s. ISBN 1-4020-7701-7.
- [2] BELOBABA, P. P. 1987. *Air Travel Demand and Airline Seat Inventory Management*. MIT Libraries DSpace. [online]. [cit. 2025-01-06]. Dostupné na: <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/68077>
- [3] LITTLEWOOD, K. 1972. Forecasting and Control of Passenger Bookings.
- [4] Markov, A.A. (1906) Extension of the Law of Large Numbers to Dependent Events. Bulletin of the Society of the Physics Mathematics, Kazan, Russia, 2, 155-156.
- [5] Karlin, S., & Taylor, H. M. (1975). A first course in stochastic processes. In *Elsevier eBooks*. <https://doi.org/10.1016/c2009-1-28569-8>

- [6] Puterman, M. L. (2014). *Markov Decision processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons.
- [7] Uncles, M. D., Ben-Akiva, M., & Lerman, S. R. (1987). Discrete Choice Analysis: Theory and application to travel demand. *Journal of the Operational Research Society*, 38(4), 370. <https://doi.org/10.2307/2582065>
- [8] Goutam, K., Goyal, V., & Soret, A. (2019). A generalized Markov chain model to capture dynamic preferences and choice overload. *arXiv (Cornell University)*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.1911.06716>
- [9] Winston, W.L. (2004) *Operations Research Applications and Algorithms*. 4th Edition, Duxbury Press, Pacific Grove, CA.
- [10] STRAUSS, A. et al. 2018. A Review of Choice-Based Revenue Management: Theory and Methods. *European Journal of Operational Research*. [online]. [cit. 2025-01-02]. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.011>
- [11] Taha, H. A. (2016). *Operations research: An Introduction*. Pearson Higher Education.
- [12] Blanchet, J., Gallego, G., & Goyal, V. (2016). A Markov chain approximation to choice modeling. *Operations Research*, 64(4), 886–905. <https://doi.org/10.1287/opre.2016.1505>
- [13] Feldman, J. B., & Topaloglu, H. (2017). Revenue management under the Markov Chain Choice model. *Operations Research*, 65(5), 1322–1342. <https://doi.org/10.1287/opre.2017.1628>
- [14] Désir, A., Goyal, V., Jiang, B., Xie, T., & Zhang, J. (2021). Robust assortment optimization under the Markov Chain model. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3938924>
- [15] Özkan, C., Karaesmen, F., & Özekici, S. (2012). Structural properties of Markov modulated revenue management problems. *European Journal of Operational Research*, 225(2), 324–331. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.09.020>
- [16] Kleywegt, A. J., & Shao, H. (2022). Revenue Management Under the Markov Chain Choice Model with Joint Price and Assortment Decisions. *arXiv (Cornell University)*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2204.04774>
- [17] Liu, Z. (2020). Assortment Optimization under Markov Chain Choice Model for Multi-Category Products.
- [18] McGill, J. I., & Van Ryzin, G. J. (1999). Revenue Management: Research Overview and Prospects. *Transportation Science*, 33(2), 233–256. <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>

- [19] McFadden, D. (1974). The measurement of urban travel demand. *Journal of Public Economics*, 3(4), 303–328. [https://doi.org/10.1016/0047-2727\(74\)90003-6](https://doi.org/10.1016/0047-2727(74)90003-6)
- [20] McGill, S. L. B. a. J. I. (1993). Airline Seat Allocation with Multiple Nested Fare Classes. *Operations Research*, 41(1), 127–137. <https://www.jstor.org/stable/171948>

Kontaktné údaje

Ing. Monika Ferencáková

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 905 637 102

email: monika.ferencakova@euba.sk

PRIESTOROVÁ ANALÝZA EMISIÍ SKLENÍKOVÝCH PLYNOV V REGIÓNOCH EÚ: DÔRAZ NA STREDNÚ EURÓPU

SPATIAL ANALYSIS OF GREENHOUSE GAS EMISSIONS IN EU REGIONS: A FOCUS ON CENTRAL EUROPE

Andrea Furková, Zuzana Čičková¹

Abstrakt

Cieľom príspevku je analyzovať priestorové rozloženie emisií skleníkových plynov (GHG) v regiónoch NUTS 2 krajín Európskej únie na základe údajov z databázy EDGAR za rok 2022. Pomocou nástroja Moranovo *I* bola identifikovaná existencia priestorovej autokorelácie, pričom bola analyzovaná jej intenzita medzi všetkými regiónmi EÚ a vybranou skupinou regiónov strednej Európy (Slovensko, Česko, Maďarsko, Poľsko, Rakúsko). Výsledky poukazujú na výraznejšie zoskupovanie regiónov s podobnou úrovňou emisií v západnej a severozápadnej Európe, zatiaľ čo priestorové rozloženie v stredoeurópskom priestore je menej výrazné.

Kľúčové slová: skleníkové plyny, priestorová autokorelácia,, EDGAR, EÚ regióny, spillover efekty

Abstract

The aim of this paper is to analyze the spatial distribution of greenhouse gas (GHG) emissions in NUTS 2 regions of European Union countries based on data from the EDGAR database for the year 2022. Using Moran's *I* statistic, the presence of spatial autocorrelation was identified, and its intensity was analyzed both across all EU regions and within a selected group of Central European regions (Slovakia, Czechia, Hungary, Poland, and Austria). The results indicate a stronger clustering of regions with similar emission levels in Western and Northwestern Europe, while the spatial distribution in the Central European area appears to be more diffuse.

Keywords: greenhouse gases, spatial autocorrelation, EDGAR, EU regions, spillover effects

1 ÚVOD

Zmena klímy patrí medzi najvýznamnejšie globálne výzvy súčasnosti, pričom významnú úlohu v jej priebehu zohrávajú emisie skleníkových plynov. Tieto emisie vznikajú v rôznych sektoroch hospodárstva, ako sú energetika, doprava, priemysel či poľnohospodárstvo, a ich intenzita sa v jednotlivých regiónoch značne líši. V rámci Európskej únie je znižovanie emisií skleníkových plynov kľúčovým cieľom klimaticko-energetickej politiky, čo sa premieta aj do iniciatív ako Európska zelená dohoda a balík opatrení Fit for 55, ktorý stanovuje cieľ znížiť emisie do roku 2030 o minimálne 55 % v porovnaní s rokom 1990 (European Commission, 2021). Vzhľadom na komplexnú povahu environmentálnych javov je nevyhnutné zohľadniť aj ich priestorový rozmer. Priestorová analýza umožňuje identifikovať, či sa vysoké alebo nízke úrovne emisií geograficky zhlukujú, a tým odhaliť potenciálne priestorové vzorce, závislosti a tzv. spillover efekty medzi regiónmi. V tomto kontexte sa čoraz častejšie využívajú nástroje

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0115/23 a VEGA 1/0047/23.

priestorovej štatistiky alebo priestorové regresné modely, ktoré umožňujú kvantifikovať priestorovú autokoreláciu (Anselin a Rey, 2014; Fahrmeir a kol., 2021; Chi a Zhu, 2019)

Cieľom príspevku je preskúmať priestorové rozloženie emisií GHG (Greenhouse Gas emissions) na úrovni regiónov NUTS (Nomenclature of territorial units for statistics) 2 v krajinách Európskej únie, identifikovať existenciu a intenzitu priestorovej autokorelácie a porovnať priestorové vzorce medzi vybranou skupinou stredoeurópskych regiónov a ostatnými regiónmi EÚ. Analýza je založená na údajoch z databázy EDGAR za rok 2022 a využíva nástroje priestorovej štatistiky dostupné v softvéri GeoDa (Anselin, 2023).

2 METODOLÓGIA

Moranovo I ako globálny indikátor priestorovej autokorelácie (bližšie pozri napr. v (Anselin, 2023)) meria koreláciu medzi sledovanou premennou a jej priestorovo oneskorenou premennou. Tento indikátor odhaľuje, či existuje tendencia, aby priestorovo blízke regióny vykazovali podobné hodnoty sledovaného javu. Vzťah pre výpočet globálnej Moranovej štatistiky možno formálne zapísať nasledujúcim spôsobom ((Anselin, 2023)):

$$I = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij}} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (1)$$

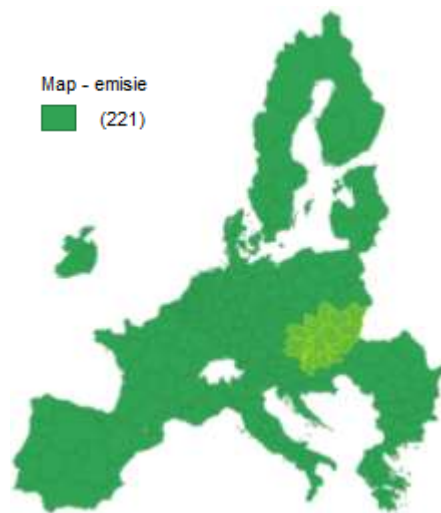
kde x_i predstavuje hodnotu skúmanej premennej pre jednotku i (región, štát, atď.), x_j predstavuje hodnotu skúmanej premennej pre jednotku j , $\bar{x}$ označuje priemernú hodnotu skúmanej premennej, N je počet sledovaných jednotiek v súbore údajov a w_{ij} sú prvky matice $\mathbf{W}$, matice priestorových váh (bližšie pozri napr. v Anselin a Rey, 2014; Fahrmeir a kol., 2021; Chi a Zhu, 2019).

Na vizualizáciu a interpretáciu výsledkov je možné aplikovať Moranovu rozptylovú mapu, ktorá zobrazuje vzťah medzi hodnotou premennej a jej priestorovým váženým priemerom. Na zvýraznenie možných nelineárnych trendov je vhodné pridať do grafu LOWESS smoother (Locally Weighted Scatterplot Smoothing), ktorý poskytuje flexibilné vyhladenie dát (Anselin, 2023). V rámci empirickej časti príspevku využijeme aj techniku "brushing", ktorá umožňuje interaktívne označiť konkrétne regióny v grafe a analyzovať ich priestorové správanie (Anselin, 2023). Napokon, nástroj režimov v Moranovom rozptylovom grafe použijeme na výpočet osobitných hodnôt Moranovho I pre jednotlivé skupiny priestorových jednotiek, čím sa umožní porovnanie priestorovej autokorelácie medzi rôznymi časťami územia (napr. regióny s rôznou úrovňou GHG emisií alebo ekonomickej aktivity).

3 PRIESTOROVÁ ANALÝZA EMISIÍ REGIÓNOV SR

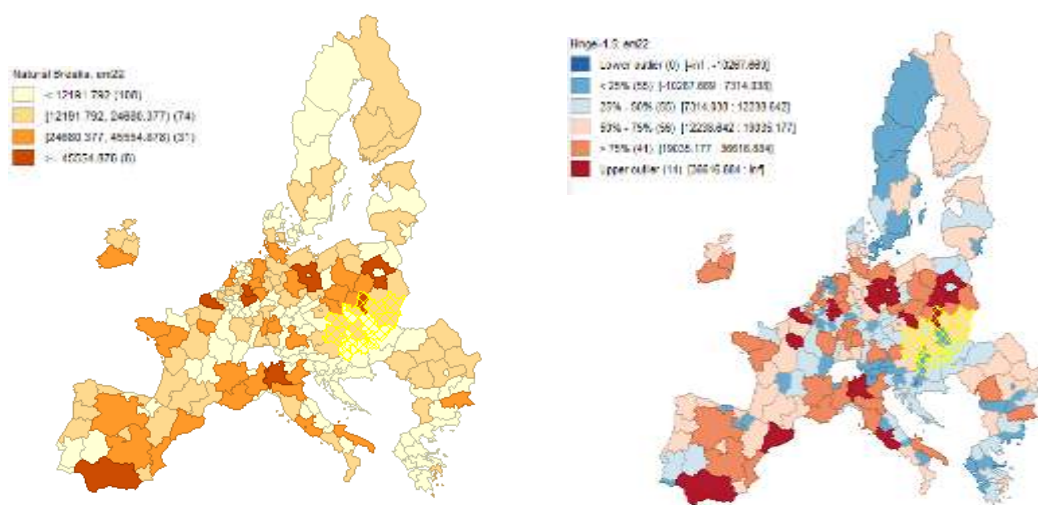
Údaje pre analýzu boli získané z databázy Emissions Database for Global Atmospheric Research - EDGAR (Crippa, M. a kol., 2023). Skúmaná premenná GHG (Greenhouse Gas emissions) je vyjadrená v kton CO₂eq a predstavuje emisie skleníkových plynov, ktoré prispievajú ku globálnemu otepľovaniu a zmene klímy. Údaje sú za emisie za rok 2022. Sledovanými jednotkami boli regióny NUTS 2, pričom celkový počet sledovných regiónov bol 221. Keďže cieľom analýzy je preskúmať potenciálne spillover efekty z emisii, regiónov Slovenska a jeho susedných regiónov, podrobnejšie sme sa sústredili na NUTS2 regióny Slovenska (4 regióny), Českej republiky (3 regióny), Maďarska (4 regióny), Poľska (3 regióny)

a Rakúska (2 regióny). Ako kritérium susednosti regiónov bolo zvolené kritérium susednosti typu kráľovná. Prehľad skúmaných regiónov poskytuje obr. 1.

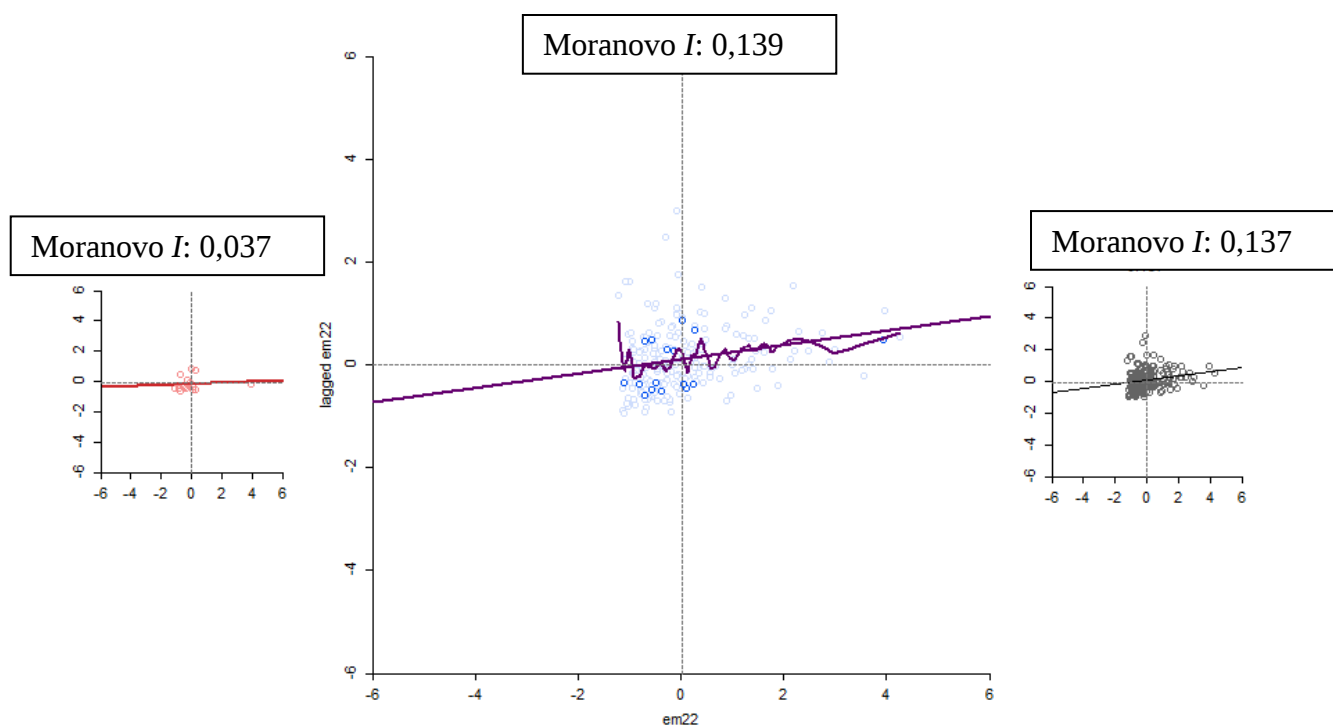


Obr.1 Regióny NUTS 2 Slovenska a ich susedné regióny (kritérium kráľovná)
Zdroj: vlastné vypracovanie

Obr. 2 zobrazuje priestorové rozloženie emisií skleníkových plynov (GHG) vo všetkých regiónoch NUTS 2 v rámci Európskej únie za rok 2022. Na ľavej strane je znázornená mapa prirodzených zlomov, ktorá rozdeľuje regióny do kategórií na základe vnútornej variability údajov, čím sa zvyrazňujú priestorové rozdiely v intenzite emisií. Pravá strana zobrazuje krabicovú mapu, ktorá umožňuje identifikovať regióny s extrémne vysokými alebo nízkymi hodnotami vzhľadom na celkové rozdelenie. Výsledky poukazujú na existenciu priestorových zhlukov s vysokými emisiami, najmä v priemyselne rozvinutých oblastiach západnej a strednej Európy (napr. severné Taliansko, Porúrie v Nemecku, Benelux), zatiaľ čo regióny s nízkymi emisiami sú častejšie v periférnych častiach juhovýchodnej a severovýchodnej Európy. Takéto rozloženie naznačuje potenciálnu priestorovú autokoreláciu.



Obr.2 Regióny NUTS 2 Slovenska a ich susedné regióny (kritérium kráľovná) – mapa prirodzených zlomov (vľavo) a krabicová mapa (vpravo) pre premennú GHG
Zdroj: vlastné vypracovanie



Obr. 3 Moranovo I a LOWESS smoother (v strede), Moranovo I pre podskupiny regiónov (vľavo a vpravo) pre premennú GHG

Zdroj: vlastné vypracovanie

Obr. 3 znázorňuje výsledky priestorovej analýzy pre premennú GHG – emisie pomocou Moranovej rozptylovej mapy. Stredná Moranova mapa (obr. 3) zobrazuje globálny vzťah medzi hodnotami GHG v jednotlivých regiónoch a ich priestorovým priemerom, pričom bola doplnená o LOWESS smoothing krivku, ktorá odhaľuje potenciálne nelineárne trendy. Výsledná, štatisticky významná hodnota globálneho Moranovho $I = 0,139$ indikuje pozitívnu priestorovú autokoreláciu, čo naznačuje, že regióny s podobnou úrovňou emisií sa v rámci EÚ majú tendenciu sa geograficky zoskupovať.

Ľavý a pravý panel na obr. 3 zobrazujú Moranove rozptylové mapy pre dve samostatné podskupiny regiónov. Prvá podskupina zahŕňa NUTS 2 regióny Slovenska (4 regióny), Českej republiky (3), Maďarska (4), Poľska (3) a Rakúska (2) – teda stredoeurópsky priestor, ktorý je predmetom podrobnejšej analýzy. Pre túto skupinu bola vypočítaná hodnota Moranovho $I = 0,037$, čo predstavuje veľmi nízku mieru autokorelácie. Druhú podskupinu tvorí zvyšok regiónov EÚ, pre ktorú bola hodnota Moranovho $I = 0,137$, čo indikuje vyššiu úroveň priestorovej závislosti.

4 ZÁVER

Výsledky analýzy poukazujú na regionálne rozdiely v priestorovej štruktúre emisií – zatiaľ čo v širšom európskom kontexte možno pozorovať priestorové zhľady regiónov s podobnými úrovňami emisií (napr. vysoké hodnoty v priemyselných oblastiach západnej Európy), v prípade stredoeurópskych krajín (prvá podskupina) je tento vzťah výrazne slabší. Možné vysvetlenie je heterogenita v úrovni industrializácie, zdrojoch energie alebo v environmentálnych politikách medzi týmito susediacimi krajinami, čo môže obmedzovať šírenie efektov medzi regiónmi. Napriek slabej priestorovej autokorelácii v prvej skupine nemožno úplne vylúčiť existenciu lokálnych spillover efektov, napríklad v prípadoch cezhraničnej dopravy alebo energetickej infraštruktúry, ktoré však pravdepodobne pôsobia na mikroúrovni (napr. medzi susednými regiónmi) a neodzrkadľujú sa na úrovni celej podskupiny.

Použitá literatúra

Anselin, L. a Rey, S.J. (2014) *Modern spatial econometrics in practice*. Chicago: GeoDa Press LLC.

Anselin, L. (2023) *GeoDa user's guide*. Spatial Analysis Laboratory, University of Chicago. Dostupné na: <https://geodacenter.github.io/documentation.html> (1. apríl 2025)

Chi, G. a Zhu, J. (2019) *Spatial regression models for the social sciences*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Crippa, M a kol. (2023) *GHG emissions of all world countries*. Luxembourg: Publications Office of the European Union.

European Commission (2021) *'Fit for 55': Delivering the EU's 2030 climate target on the way to climate neutrality*. Brussels: Publications Office of the European Union. Dostupné na: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:52021DC0550> (1. apríl 2025)

Fahrmeir, L., Kneib, T., Lang, S. a Marx, B.D. (2021) *Regression models, methods and applications*. Berlin and Heidelberg: Springer

Kontaktné údaje

doc. Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 831

Email: andrea.furkova@euba.sk

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 833

Email: zuzana.cickova@euba.sk

CENTRÁ ZDIEĽANÝCH SLUŽIEB NA SLOVENSKU A ICH ROZMIESTNENIE

SHARED SERVICE CENTERS IN SLOVAKIA AND THEIR LOCATION

Pavel Gežík

Abstrakt

Slovensko čelí dlhodobému problému vysokej miery fragmentácie miestnej samosprávy, čo vedie k nízkej efektivite a odbornej kapacite v poskytovaní verejných služieb. Jedným z riešení je zriaďovanie centier zdieľaných služieb, ktoré budú poskytovať podporu viacerým malým obciam v rámci mikroregiónov. Tento príspevok analyzuje kritériá pre výber ich umiestnenia s využitím optimalizačných modelov na základe vzdušnej a cestnej vzdialenosti. Na príkladoch Tornale a Filákov sa ukazuje, že tieto centrá boli zvolené efektívne vzhľadom na ich geografickú polohu a potenciál obsluhovať viaceré obce. Zistenia podporujú záver, že odborné a analyticky podložené plánovanie môže výrazne prispieť k spravodlivejšiemu a efektívnejšiemu poskytovaniu verejných služieb na regionálnej úrovni. Zároveň ale poukazujú na fakt, že je stále nutné vychádzať z reálnych skutočností a teóriu vhodne doplniť faktami a možnosťami.

Kľúčové slová: *optimálne umiestnenie, minimalizácia vzdialenosti, poskytovanie služieb*

Abstract

Slovakia faces a long-term problem of high fragmentation of local government, which leads to low efficiency and professional capacity in the provision of public services. One solution is the establishment of shared service centers that will provide support to several small municipalities within micro-regions. This paper analyzes the criteria for selecting their location using optimization models based on air and road distance. The examples of Tornale and Filákov show that these centers were effectively selected due to their geographical location and potential to serve several municipalities. The findings support the conclusion that professional and analytically based planning can significantly contribute to a fairer and more efficient provision of public services at the regional level. At the same time, they point out that it is still necessary to proceed from real realities and appropriately supplement theory with facts and possibilities.

Keywords: *Optimal Location, Distance Minimization, Service Provision*

1 ÚVOD

Slovensko má v porovnaní s priemerom EÚ veľký počet malých, roztrieštených samospráv, ktoré majú problém s efektívnym poskytovaním služieb a financovaním odborných zamestnancov. Malé obce často zápasia s nedostatkom kvalifikovaného personálu a obmedzenými finančnými zdrojmi na zabezpečenie odborných verejných služieb, ako sú stavebné úrady, verejné obstarávanie, právne poradenstvo, či správa životného prostredia. Riešením má byť vytváranie centier zdieľaných služieb na úrovni mikroregiónov. Zriadenie takýchto centier v najmenej rozvinutých okresoch je súčasťou Plánu obnovy a návrh na zriadenie centier zdieľaných služieb vznikol z iniciatívy Združenia miest a obcí Slovenska (ZMOS), ktoré vníma rastúcu potrebu spájania administratívnych kapacít obcí do efektívnych a odborne zabezpečených jednotiek.

ZMOS už v roku 2023 upozorňovalo na to, že samosprávy v regiónoch s vysokou mierou nezamestnanosti a nízkym daňovým výnosom majú výrazne horšie predpoklady na zabezpečenie kvality verejných služieb.

Vznik centier mal byť zároveň impulzom na zvýšenie odbornosti a profesionalizácie výkonu verejnej správy v regiónoch, kde je ich úroveň podpriemerná.

Vláda SR schválila koncom septembra 2024 zriadenie pilotných Centier zdieľaných služieb v 22 obciach z najmenej rozvinutých regiónov. Ich cieľom je posilniť administratívne kapacity a efektívnosť verejnej správy na regionálnej a lokálnej úrovni, pričom vznik týchto centier zároveň plní podmienky míľnika v Pláne obnovy a odolnosti. Financovanie je dvojúrovňové: investície do rekonštrukcií a vybavenia hradí MV SR z Plánu obnovy a odolnosti, kým financovanie odborných personálnych kapacít zabezpečujú eurofondy cez výzvy Programu Slovensko.

Zoznam vybraných obcí, v ktorých vzniknú centrá zdieľaných služieb: Becherov, Filákov, Gemerská Poloma, Gíraltove, Hnúšťa, Margecany, Medzev, Medzilaborce, Michalovce, Nižný Orník, Ptičie, Sabinov, Sečovce, Sobrance, Spišská Stará Ves, Stará Ľubovňa, Tornaľa, Trebišov, Trhovište, Veľké Kapušany, Vinica, Vranov nad Topľou.

Tieto centrá sú navyše nástrojom podpory regionálneho rozvoja – stabilizujú pracovné miesta v regiónoch, kde je odliv kvalifikovaných ľudí vysoký, a zároveň prispievajú k vytvoreniu odborného zázemia pre nové projekty.

- Zlepšenie kvality života obyvateľov možno očakávať v týchto oblastiach:
- Rýchlejší a jednotnejší prístup k rozhodnutiam verejnej správy (napr. stavebné povolenia, dane a miestne poplatky, podnety vo veciach verejných)
- Dostupnosť právneho a sociálneho poradenstva, ktoré sa často v malých obciach nevykonáva vôbec.
- Zvýšenie transparentnosti a kontrolovateľnosti procesov v obciach.
- Zníženie byrokratickej záťaže starostov a starostiek, ktorí sa môžu viac sústrediť na rozvoj komunity.

2 UMIESTNENIE CENTIER ZDIEĽANÝCH SLUŽIEB

Zriaďovanie Centier zdieľaných služieb reflektuje snahu o optimalizáciu výkonu verejnej správy, zvýšenie efektívnosti vynakladania verejných zdrojov a zabezpečenie rovnocenného prístupu k verejným službám aj pre najmenšie obce. Malé obce často nedokážu zamestnať odborníkov na zložitejšie agendy – napríklad na stavebný úrad, právne služby, či projektové riadenie. Vznik týchto centier umožňuje, aby si tieto obce zdieľali spoločný odborný aparát, čím sa znižujú náklady a zároveň zvyšuje odbornosť a spoľahlivosť verejných rozhodnutí. Práve z tohto dôvodu je nutné aby boli tieto centra efektívne umiestnené pre všetkých obyvateľov jednotlivých obcí, ktoré pod dané centrum spadajú.

Vhodné umiestnenie týchto centier predstavuje účinný model modernizácie výkonu samosprávy, ktorý kombinuje ekonomickú racionalitu so sociálnym dopadom. Sú jedným z praktických nástrojov, ako znižovať rozdiely medzi rozvinutými a zaostávajúcimi regiónmi Slovenska.

2.1 Optimalizačné metódy pre umiestnenie centra

Vychádzajúc z optimalizačných úloh, možno riešiť umiestnenie centra zdieľaných služieb na základe optimalizačného kritéria, ktoré reprezentuje celkovú vzdušnú vzdialenosť z potenciálneho obce, kde bude zriadené do jednotlivých obcí, ktoré by malo dané centrum obsluhovať. Použitím uvedeného kritéria možno lokalizovať obec, kde možno umiestniť centrum na báze vzdušných vzdialeností.

Takýmto spôsobom možno nájsť bod (stredisko) s celkovo najkratšou vzdialenosťou z východiskového vrcholu x^0 do všetkých n ostatných vrcholov x^i .

Optimálne umiestnená prevádzka (bod) $\mathbf{x}^0$ je umiestnená v strede priestoru so súradnicami $[x_1^0, x_2^0]$. Vzdialenosť $d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0)$ sa počíta podľa L2 metriky, teda vytvorením „štvorca“ so súradnicami $[x_1^i, x_2^i]$ s cieľom minimalizovať súčet všetkých vzdialeností $d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Takto popísaný problém možno formulovať podľa (Brezina, 2020) ako úlohu nájdenia voľného extrému:

$$f(x_1^0, x_2^0) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_1^i - x_1^0)^2 + (x_2^i - x_2^0)^2} \rightarrow \min$$

Ďalšia možnosť je optimalizovať umiestnenie na základe matice vzdialenosti vychádzajúcej z cestnej siete a reálnej dostupnosti z jednotlivých obcí.

2.2 Reálne možnosti pre umiestnenie centra

Optimálne, resp. efektívne umiestnenie centier vychádzajúce z dostupnosti pre vybrané obce na základe vzdušnej alebo cestnej vzdialenosti je v praxi len teoretické východisko. Reálne je nutné sa na umiestnenie týchto centier pozeráť tak, že proces optimalizácie sa zameriava na vyber obcí, ktoré budú zaradené pod jednotlivé centrá.

Tento fakt vychádza najmä zo skutočnosti, že obce pre tieto centrá už boli vybrané. Jedna sa o väčšie obce, resp. mestá, kde už existuje byrokratický aparát a rovnako aj priestorové kapacity. V niektorých prípadoch sa jedna o okresné mesta, kedy je tento proces jednoduchý a právomoci sa kumulujú na základe okresnej príslušnosti.

3 AKTUÁLNE VYBUDOVANÉ CENTRÁ ZDIEĽANÝCH SLUŽIEB

Na základe vyššie uvedených skutočností možno zhodnotiť aktuálne šesť vybudovaných centier zdieľaných služieb a uviesť jednotlivé ukazovatele, ktoré potvrdzujú vhodný vyber daného centra alebo naopak, poukazujú na nedostatky pri zaradení jednotlivých obcí pod dané centrum.

3.1 Centrum zdieľaných služieb v Tornali

Jedná sa o prvé a zároveň z pohľadu optimalizácie o najvhodnejšie zvolené centrum z aktuálne zriadených centier. Centrum v Tornali obsluhuje aktuálne 30 obcí (31. v procese) a to: Abovce, Barca, Bátka, Hubovo, Chanava, Chrámeč, Chvalová, Kesovce, Kráľ, Lenartovce, Lenka, Leváre, Levkuška, Martinová, Neporadza, Radnovce, Rašice, Riečka, Rimavská Seč, Rumince, Skerešovo, Stránska, Štrkovec, Tomášovce, Tornaľa, Včelince, Vieska nad Blhom, Višňové, Žiar, Žíp.

O vhodnosti výberu mesta Tornaľa hovorí aj fakt, že obsluhuje 8 obcí z okresu Revúca a 22 obcí z okresu Rimavská Sobota, čím nerieši príslušnosť obcí podľa okresu, ale podľa dostupnosti z jednotlivých obcí. S použitím vzťahu z časti 2.1 možno vypočítať bod, ktorý reprezentuje pomyselný optimálny bod na základe vzdušných vzdialeností.

Na základe výpočtu je bod, ktorý určuje optimálne umiestnenie centra len 6,6 km od reálne zriadeného centra v Tornali.

Pre ilustráciu efektívnosti tohto centra možno uviesť niektoré vzdialenosti. Napr. Tornaľa je vzdialená od Rimavskej Soboty 25,6 km a od mesta Revúca 41,3 km. Jedná sa o okresné mestá obcí, ktoré spadajú pod toto centrum. Na ilustráciu možno uviesť konkrétne najkratšie cestné vzdialenosti ak by bolo centrum zriadené v okresných mestách. Napr. z obce Neporadza by mali obyvatelia do okresného mesta (Rimavská Sobota) 34,7 km, pričom do Tornale to majú len 12,6 km (o 63,7% menej). Rovnako, napr. z obce Žiar to je do okresného mesta (Revúca) 36 km, no do Tornale len 4,6 km (o 87,2% menej).

Na obrázku sú zobrazené všetky obce, ktoré spadajú pod centrum zdieľaných služieb v Tornali a zároveň sú tam aj okresné mesta, pre lepšiu predstavu o vhodnosti umiestniť centra v tomto meste oproti okresnému mestu.

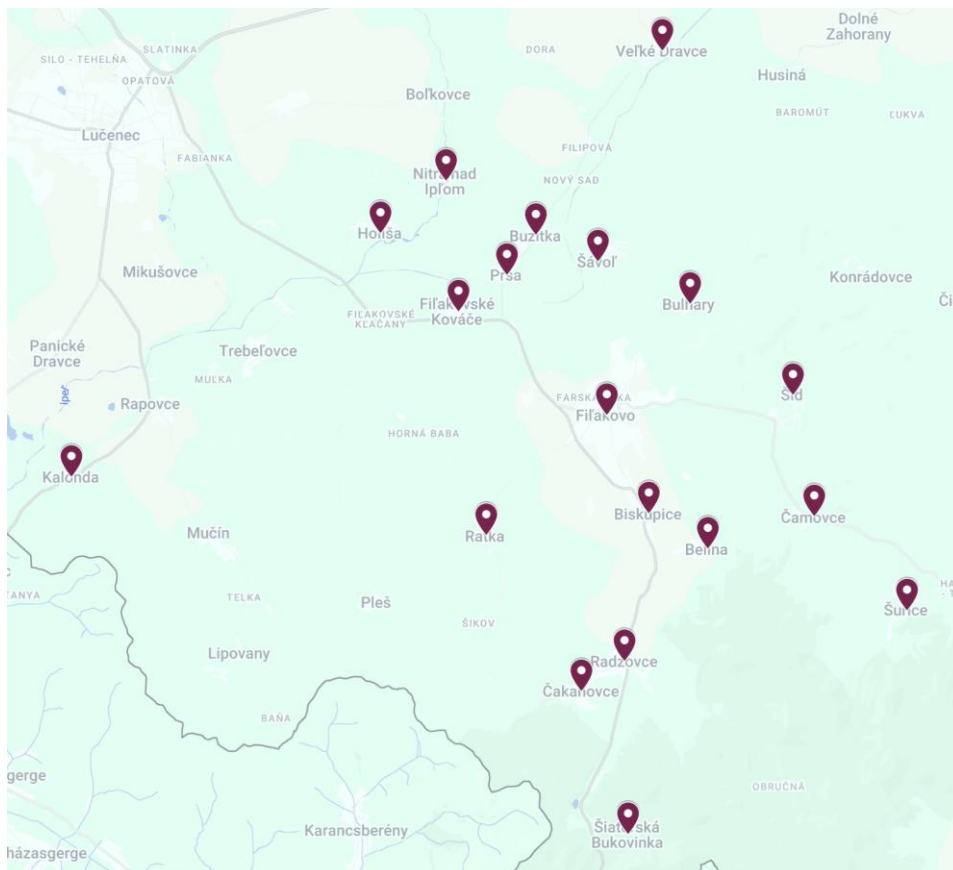
3.2 Centrum zdieľaných služieb vo Filákovke

V prípade zriadenia Centra zdieľaných služieb vo Filákovke nie je až tak výrazná vzdialenosť od okresného mesta Lučenec (14,9 km) ale aj tak bolo zvolené vhodné mesto, ktoré obsluhuje vzdialenejšie obce. Napr. obec Šurice je od Lučenca vzdialená 25,3 km a od Filákov len 10,6 km a obec Šiatorská Bukovinka je od Lučenca vzdialená 26,5 a od Filákov len 12,1 km (najkratšie cestné vzdialenosti). Podľa vzťahu z časti 2.1 vypočítaný optimálny bod na základe vzdušných vzdialeností len 4 km vzdialený od mesta Filákov.

```
import numpy as np
from scipy.optimize import fmin
def f(x):
    function=0
    for i in V:
        function += ((latitude[i]-x[0])**2+(longitude[i]-x[1])**2)**0.5
    return function
villages=["Belina","Biskupice","Bulhary","Buzitka","Čakanovce","Čamovce","Filákov","Filákovské Kováče","Holiša","Kalonda","Nitra nad Ipľom","Prša","Radzovce","Ratka","Šávoľ","Šiatorská Bukovinka","Šíd","Šurice","Veľké Dravce"]
latitude=[48.242528,48.33249,48.29351,48.33249,48.213166,48.250415,48.267567,48.292077,48.308134,48.25962,48.318237,48.300936,48.221069,48.33249,48.33249,48.33249,48.275321,48.2336,48.346441]
longitude=[19.851331,19.66708,19.848056,19.66708,19.8146,19.883103,19.824734,19.776229,19.751704,19.656153,19.773716,19.791293,19.828931,19.66708,19.66708,19.66708,19.879367,19.914027,19.839282]
n, V = len(villages), set(range(len(villages)))
xopt, fopt, iter, funcalls, warnflag = fmin(f,np.array([0,0]),full_output=True)
print(xopt, fopt)

Optimization terminated successfully.
[48.29328356 19.782136 ] 1.6216960793842736
```

Obr. 3 - Zdrojový kód a výstup v programovacom jazyku Python



Obr. 4 – Obce, ktoré spadajú pod centrum zdieľaných služieb vo Filákovke

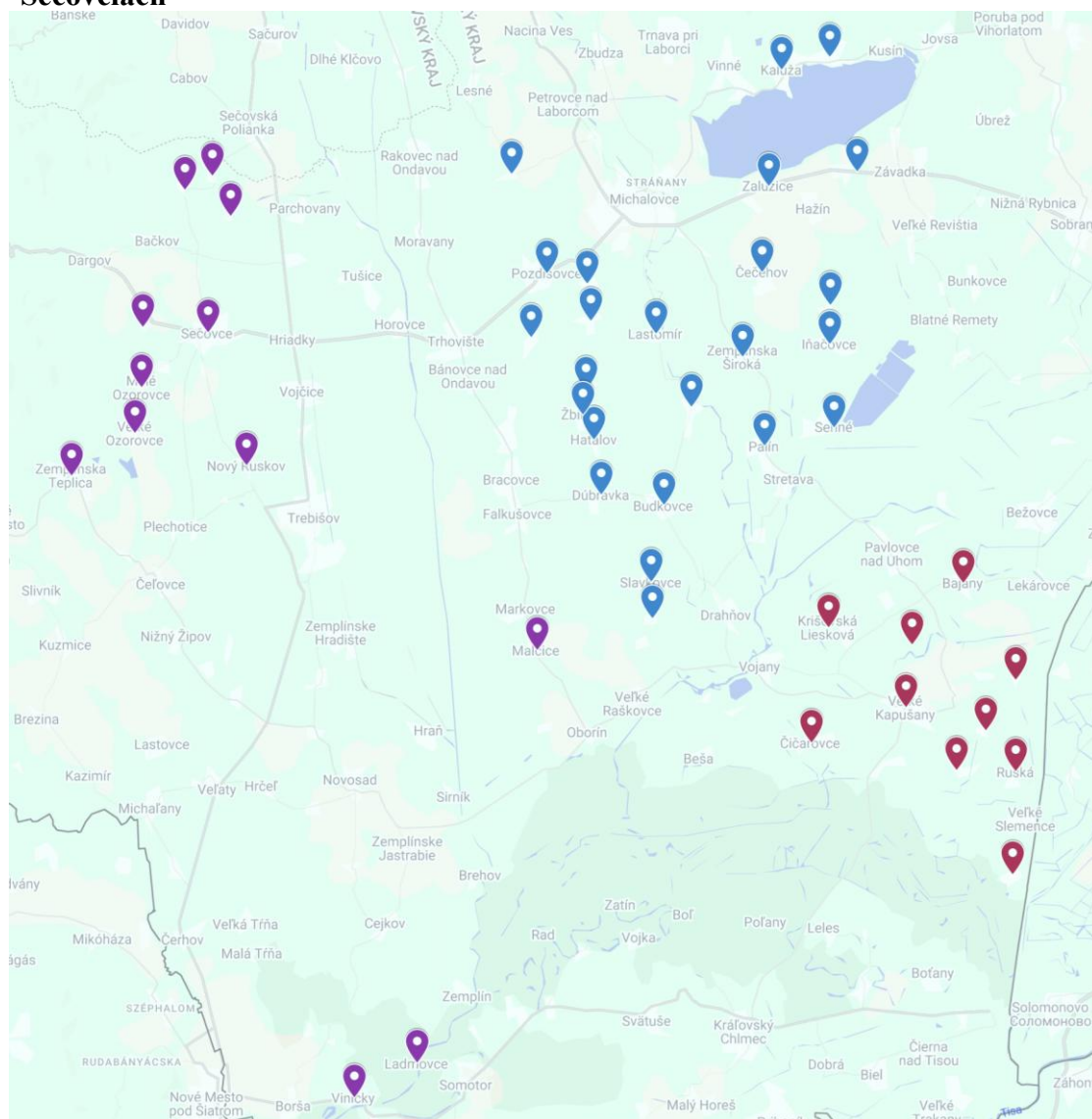
Centrum zdieľaných služieb vo Fiľakove obsluhuje tieto obce: Belina, Biskupice, Bulhary, Buzitka, Fiľakovo, Fiľakovské Kováče, Holiša, Kalonda, Nitra nad Ipľom, Prša, Radzovce, Ratka, Veľké Dravce, Šiatorská Bukovinka, Šurice, Šávoľ, Šíd, Čakanovce a Čamovce.

Pri tomto centre je otázna efektívnosť pre obec Kalonda, ktoré je bližšie k Lučencu. Zároveň by bolo vhodné prehodnotiť zaradenie ďalších obcí ako napr. Horná Baba, Obručná, Pleš a Šikov, ktoré sú malé obce blízko Fiľakova.

3.3 Centrum zdieľaných služieb v Medzilaborciach

Centrum zdieľaných služieb v Medzilaborciach je spomínaný príklad, kedy centrum bolo zriadené v okresnom meste a obsluhuje všetky obce okresu, teda 22 obcí: Sukov, Ňagov, Palota, Čertižné, Krásny Brod, Habura, Čabiny, Svetlice, Výrava, Olka, Čabalovce, Radvaň nad Laborcom, Zbojné, Roškovce, Olšinkov, Volica, Zbudská Belá, Valentovce, Rokytovce, Repejov, Kalinov a Brestov nad Laborcom. V prípade tohto centra sa jedná o malý okres, kde ani nebola iné možnosť vzhľadom na umiestnenie, ale aj kapacity jednotlivých obcí.

3.4 Centrum zdieľaných služieb v Michalovciach, vo Veľkých Kapušanoch a v Sečovciach



Obr. 5 – Obce, ktoré spadajú pod centrá zdieľaných služieb v Michalovciach, vo Veľkých Kapušanoch a v Sečovciach

Posledná časť pojednáva o dvoch susediacich okresoch, kedy boli zriadené centrá vo väčších mestách a v okresnom meste Michalovce. Tu je predpoklad, že sa jedná o proces zaradovania jednotlivých obcí, keďže napr. pri centre v Sečovciach vzniká viacero neefektívnych zaradení obcí (Viničky, Ladmovce či Malčice). Rovnako pri centre v Michalovciach, kedy toto centrum obsluhuje iba jednu časť na juh od mesta (okrem troch obcí). Centrum vo Veľkých Kapušanoch vykazuje vhodné umiestnenie v strede medzi vybranými obcami, avšak pod toto centrum patrí len 10 obcí, pričom minimálne rovnaký počet by bolo efektívne zaradiť pod toto centrum tak z pohľadu vzdialenosti, ako aj z pohľadu veľkosti obce (jedna sa o veľmi malé obce z pohľadu počtu obyvateľov). Uvedené skutočnosti vidieť na obrázku nižšie, kde sú obce farebne rozlíšené podľa príslušnosti k jednotlivým centrá:

- **modrá** - centrum zdieľaných služieb v Michalovciach,
- **bordová** - centrum zdieľaných služieb vo Veľkých Kapušanoch,
- **fialová** - centrum zdieľaných služieb v Sečovciach.

4 ZÁVER

Zavádzanie centier zdieľaných služieb predstavuje dôležitý krok smerom k modernizácii a zvýšeniu efektivity výkonu verejnej správy v najmenej rozvinutých regiónoch Slovenska. Ako ukazujú príklady z Tornale, Fiľakova a ďalších miest, vhodné umiestnenie týchto centier môže zásadne znížiť vzdialenosti, ktoré musia obyvatelia a predstavitelia obcí prekonávať za účelom vybavenia agendy, a zároveň zabezpečiť kvalitnejšie, odborne kryté služby, ktoré by samostatné malé obce nedokázali realizovať vlastnými silami.

Zároveň sa ukazuje, že optimálne geografické umiestnenie centier je len jedným z faktorov úspechu. Rovnako dôležitý je aj výber obcí, ktoré pod dané centrum spadajú, ako aj dostupnosť personálneho zázemia, infraštruktúry a administratívnej kapacity v hostiteľskom meste. Pilotné projekty ukazujú, že vhodnou kombináciou analytického prístupu, miestnych znalostí a využitia dostupných dát možno dosiahnuť vysokú efektivitu a prijateľnosť tohto modelu zo strany samospráv aj obyvateľstva.

Centrá zdieľaných služieb tak môžu prispieť nielen k lepšiemu fungovaniu verejnej správy, ale aj k regionálnemu rozvoju, stabilizácii kvalifikovaných pracovníkov v území a znižovaniu regionálnych rozdielov. Pre ďalšie etapy implementácie bude kľúčové vyhodnotiť skúsenosti z prvých zriadených centier, flexibilne reagovať na zistené nedostatky a systematicky budovať udržateľný model poskytovania verejných služieb na regionálnej úrovni.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia výskumného projektu VEGA – 1/0120/23 „Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí“.

Použitá literatúra

- [1.] Brezina, I., Pekár, J. and Gežík, P. (2020). *Metódy logistiky prepravy, rozmiestňovania a rozvrhovania (Aplikácie matematických modelov v jazyku Python)*. Letra Edu, Bratislava, 2020.
- [2.] *Stránka venovaná vybraným charakteristikám obcí na slovensku - Sčítanie 2021 - doplnené vybrané štatistiky*. [online] Available at: <http://www.sodbtn.sk/obce/bratislava.php> [Accessed April 2025].
- [3.] Tlačová správa - *Plán obnovy a odolnosti: zasadal riadiaci výbor k projektu Centrá zdieľaných služieb* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?tlacove-spravy&sprava=plan-obnovy-a-odolnosti-zasadal-riadiaci-vybor-k-projektu-centra-zdielanych-sluzieb> [Accessed April 2025].

- [4.] Tlačová správa - *Vláda schválila zoznam obcí, v ktorých vzniknú centrá zdieľaných služieb* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?plan-obnovy-a-odolnosti-aktuality&sprava=vlada-schvalila-zoznam-obci-v-ktorych-vzniknu-centra-zdielanych-sluzieb> [Accessed April 2025].
- [5.] *Centrum zdieľaných služieb v Tornali otvorilo svoje brány, poslúži vyše 30 samosprávam* [online] Available at: <https://mirri.gov.sk/aktuality/centra-zdielanych-sluzieb/centrum-zdielanych-sluzieb-v-tornali-otvorilo-svoje-brany-posluzi-vyse-30-samospravam/> [Accessed April 2025].
- [6.] Tlačová správa - *Novozriadené Centrum zdieľaných služieb v Michalovciach pomôže menším obciam v regióne Dolného Zemplína so zlepšením služieb* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?plan-obnovy-a-odolnosti-aktuality&sprava=novozriadene-centrum-zdielanych-sluzieb-v-michalovciach-pomoze-mensim-obciam-v-regione-dolneho-zemplina-so-zlepsenim-sluzieb> [Accessed April 2025].
- [7.] Tlačová správa - *Ďalšie centrá zdieľaných služieb začnú fungovať v Sečovciach a vo Veľkých Kapušanoch* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?plan-obnovy-a-odolnosti-aktuality&sprava=dalsie-centra-zdielanych-sluzieb-zacnu-fungovat-v-secovciach-a-vo-velkych-kapusanoch> [Accessed April 2025].
- [8.] Tlačová správa - *Centrum zdieľaných služieb vo Filákově poskytuje služby obyvateľom 19 obcí* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?tlacove-spravy&sprava=centrum-zdielanych-sluzieb-vo-filakove-poskytuje-sluzby-obyvatelom-19-obci> [Accessed April 2025].
- [9.] Tlačová správa - *Ďalšie centrum zdieľaných služieb funguje v Medzilaborciach, pomôže všetkým obciam v okrese* [online] Available at: <https://www.minv.sk/?plan-obnovy-a-odolnosti-aktuality&sprava=dalsie-centrum-zdielanych-sluzieb-funguje-v-medzilaborciach-pomoze-vsetkym-obciam-v-okrese> [Accessed April 2025].
- [10.] *ZMOS navrhlo vytvorenie centier zdieľaných služieb pre 22 území* [online] Available at: <https://www.teraz.sk/spravy/zmos-navrhlo-vytvorenie-centier-zdielan/772614-clanok.html> [Accessed April 2025].

Kontaktné údaje

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

ENVIRONMENTÁLNA KUZNETSOVA KRIVKA V KONTEXTE TRANSFORMÁCIE SLOVENSKEJ EKONOMIKY

ENVIRONMENTAL KUZNETS CURVE AND THE TRANSITION OF THE SLOVAK ECONOMY

Michaela Chocholatá¹

Abstrakt

Cieľom príspevku je preskúmať problematiku environmentálnej Kuznetsovej krivky (EKC) pre Slovenskú republiku v období 1990 – 2022. Prostredníctvom analýzy časových radov HDP na obyvateľa a emisií CO₂ na obyvateľa sa testuje hypotéza obráteného U-tvaru vzťahu medzi hospodárskym rastom a environmentálnym zaťažením. Vzhľadom na výskyt autokorelácie a silnej multikolinearity bol model rozšírený o oneskorenú závislú premennú a bolo aplikované centrovanie nezávisle premennej. Výsledky analýzy poukazujú na nelineárnu a konkávnu povahu vzťahu medzi $\ln(\text{GDP})_t$ a $\ln(\text{CO}_2)_t$, čo je v súlade s obráteným U-tvarom EKC.

Kľúčové slová: *Environmentálna Kuznetsova krivka, HDP, emisie CO₂, Slovensko*

Abstract

The aim of this paper is to examine the issue of the Environmental Kuznets Curve (EKC) for the Slovak Republic during the period 1990 – 2022. By analysing time series data on GDP per capita and CO₂ emissions per capita, the hypothesis of an inverted U-shaped relationship between economic growth and environmental degradation is tested. Due to the presence of autocorrelation and strong multicollinearity, the model was extended by including a lagged dependent variable and applying centring to the independent variable. The results of the analysis indicate a nonlinear and concave relationship between $\ln(\text{GDP})_t$ and $\ln(\text{CO}_2)_t$, which is consistent with the inverted U-shape of the EKC.

Keywords: *Environmental Kuznets Curve, GDP, CO₂ emissions, Slovakia*

1 ÚVOD

Aktuálne environmentálne výzvy, ako sú zmeny klímy, strata biodiverzity a znečistenie životného prostredia, predstavujú vážne hrozby pre udržateľnosť našich ekosystémov. Tieto problémy ovplyvňujú nielen prírodné prostredie, ale aj hospodárske a sociálne systémy, čo si vyžaduje komplexný prístup k ich riešeniu. Celosvetovou výzvou je prijať efektívne opatrenia na zmiernenie negatívnych dopadov klimatických zmien a zlepšiť environmentálnu odolnosť krajín.

V rámci riešenia týchto výziev je nevyhnutné integrovať ekonomické a ekonometrické nástroje do procesu tvorby environmentálnych politík, keďže umožňujú lepšie pochopiť nielen ekonomické dopady environmentálnych opatrení, ale aj posúdenie ich ekonomickej realizovateľnosti na národnej a globálnej úrovni. Jedným z významných konceptov, ktorý je stále aktuálny, je tzv. Environmentálna Kuznetsova krivka (EKC). Pojem EKC sa dostal do

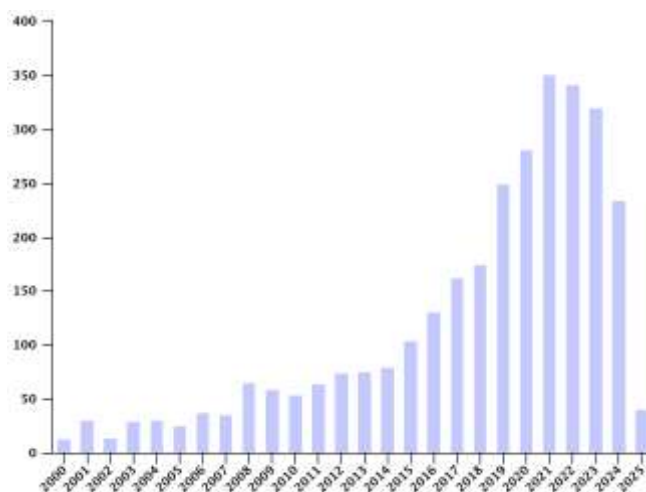
¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“ a VEGA 1/0052/24 „Odhad kľúčových štrukturálnych parametrov súčasných makroekonomických modelov“.

popredia v 90. rokoch 20. storočia vďaka štúdiu Grossmana a Kruegera (1991), ktorých empirické analýzy ukázali, že niektoré formy znečistenia (napr. oxid siričitý – SO_2) vykazujú nelineárny vzťah s HDP na obyvateľa. EKC teda predpokladá, že vzťah medzi ekonomickým rastom (zvyčajne meraným HDP na obyvateľa) a environmentálnou degradáciou má tvar obráteného písmena U. V počiatočných fázach rastu ekonomiky dochádza k zhoršeniu životného prostredia, no po dosiahnutí určitej úrovne príjmu začne environmentálna záťaž klesať – vďaka napr. vyššej regulácii, environmentálnemu povedomiu, technologickým inováciám a zmene štruktúry ekonomiky. Hoci Grossman a Krueger sú považovaní za zakladateľov empirického testovania EKC hypotézy, koncept EKC bol inšpirovaný už prácou Kuznetsa (1955), ktorý navrhol podobný vzťah medzi ekonomickým rastom a príjmovou nerovnosťou.

Ďalšie štúdie následne rozšírili túto hypotézu na rôzne environmentálne ukazovatele, ako sú emisie skleníkových plynov (GHG), kvalita ovzdušia, vodné znečistenie či spotreba prírodných zdrojov. Výsledky však často nie sú konzistentné a „platnosť“ EKC závisí od konkrétneho indikátora, metodiky, regiónu a časového obdobia (Dinda, 2004; Stern, 2004).

Zástancovia EKC tvrdia, že dlhodobý hospodársky rast môže viesť k zlepšeniu životného prostredia, najmä v rozvinutých krajinách. Tento argument rezonuje aj v politikách tzv. „zelenej transformácie“ a konceptoch „zeleného rastu“, ktoré predpokladajú možnosť oddelenia ekonomického rastu od environmentálnej degradácie (Russel, 2020). Naopak, kritici EKC upozorňujú na skutočnosť, že sa modely založené na neustálom raste opierajú o nerealistické predpoklady technologického pokroku a ignorujú limity planetárnych zdrojov. Tieto prístupy zdôrazňujú potrebu redukcie nadmernej spotreby a reštrukturalizácie ekonomík – aj za cenu zníženia celkového HDP (Kallis et al., 2020). Podrobný prehľad kritických štúdií k problematike EKC možno nájsť napr. v publikácii Kaika & Zervas (2013).

O atraktivnosti a aktuálnosti problematiky EKC svedčí aj Obr. 1, ktorý bol získaný pomocou výskumného asistenta „Web of Science Research Assistant“ (Clarivate, 2025), pričom graficky znázorňuje prehľad počtu publikácií v časovom období (2000 – 2025) na tému „Environmental Kuznets Curve“. Celkový počet identifikovaných publikácií z databázy „Web of Science Core Collection“ za uvedené obdobie bol 3135 s výrazným nárastom počtu publikácií v období pandémie Covid-19.



Obr. 1: Počet publikácií (v kusoch) z databázy „Web of Science Core Collection“ na tému *Environmental Kuznets Curve* v období 2000-2025²

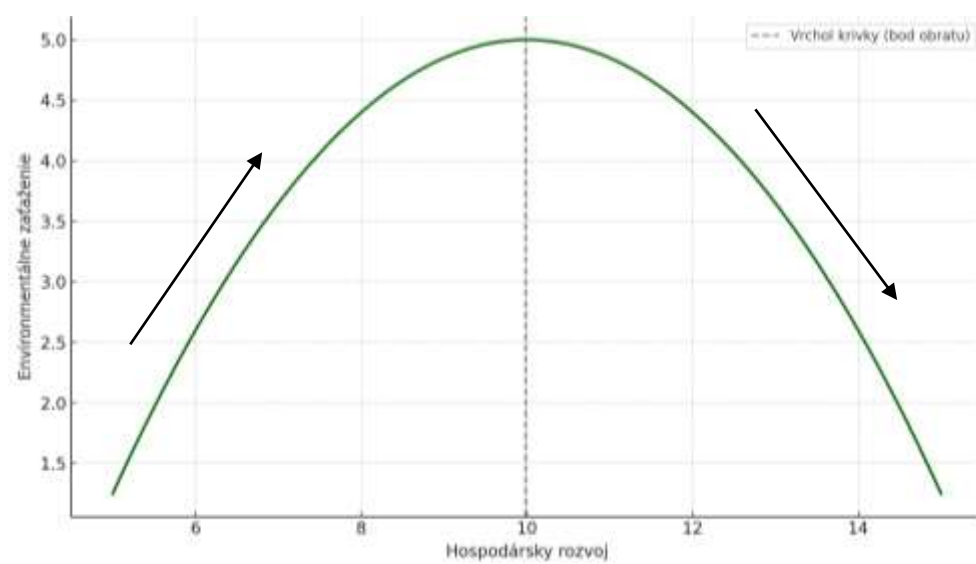
Zdroj: Clarivate (2025).

² Údaje za rok 2025 sú aktuálne k 15.4.2025.

Štruktúra príspevku je nasledujúca: po úvode do problematiky v prvej časti, nasleduje časť venovaná predstaveniu konceptu EKC, v tretej časti je pozornosť zameraná na analýzu vzťahu medzi emisiami CO₂ a hospodárskym rozvojom meraným pomocou HDP v Slovenskej republike za obdobie 1990 – 2022 a príspevok uzatvára záver.

2 PREDSTAVENIE KONCEPTU EKC

Pod pojmom EKC, ako sme už uviedli vyššie, si možno predstaviť teoretický model, ktorý zobrazuje vzťah medzi ekonomickým rastom a environmentálnymi problémami (zhoršovaním životného prostredia). Tento model predpokladá, že v počiatočných fázach hospodárskeho rozvoja dochádza k zhoršovaniu environmentálnych ukazovateľov, ako sú emisie skleníkových plynov alebo degradácia prírodných zdrojov. Po dosiahnutí určitej úrovne rozvoja (prahová hodnota, bod obratu) sa tento negatívny efekt znižuje, čo vedie k zlepšovaniu kvality životného prostredia. EKC teda predpokladá, že vzťah medzi znečistením a hospodárskym rastom je v tvare obráteného písmena U. Grafické znázornenie EKC je zachytené na Obr. 2 (os x – hospodársky rozvoj meraný napr. zlogaritmovanými hodnotami HDP na obyvateľa, os y – environmentálne zaťaženie merané napr. zlogaritmovanými hodnotami emisií CO₂ na obyvateľa).



Obr. 2: Grafické znázornenie Environmentálnej Kuznetzovej krivky
Zdroj: Na základe inštrukcií autorky vygenerované pomocou nástroja OpenAI (2025)

Matematickú formuláciu modelu EKC v tvare obrátenej U-krivky možno zapísať v tvare:

$$\ln(\text{CO}_2)_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(\text{GDP})_t + \beta_2 \cdot (\ln(\text{GDP})_t)^2 + u_t \quad (1)$$

kde $\ln(\text{CO}_2)_t$ označuje logaritmus emisií CO₂ v roku t, $\ln(\text{GDP})_t$ označuje logaritmus HDP v roku t a symbolu u_t zodpovedá náhodná zložka (reziduálny člen), pričom do modelu môžu byť zahrnuté ešte iné faktory (nezávisle premenné) s vplyvom na kvalitu životného prostredia (závisle premenná). V literatúre je možné stretnúť sa aj s EKC v tvare tzv. N-krivky (napr. pri pridaní tretej mocniny premennej $\ln(\text{GDP})_t$ do modelu), čo naznačuje, že environmentálna situácia sa po zlepšení môže opäť zhoršovať pri veľmi vysokej úrovni príjmu (Grossman & Krueger, 1995).

Vzhľadom na rôzne prístupy ku koncepcii EKC je vhodné analyzovať empirické dáta a overiť platnosť EKC v konkrétnych regiónoch, resp. krajinách. Ako uvádzajú Wang et al. (2024), z hľadiska použitých metód testovania platnosti EKC možno hovoriť o prechode od odhadu jednoduchých lineárnych modelov po sofistikované panelové a nelineárne prístupy s dôrazom na heterogenitu, prahové efekty a globálne makroekonomické premenné ako obchod a globalizácia. Vývoj metodológie EKC odráža aj posun vo vnímaní vzťahu medzi rastom a udržateľnosťou.

3 DÁTA A EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

Predmetom príspevku je analýza ročných údajov o vývoji emisií CO₂ a vývoji HDP v Slovenskej republike v období 1990 – 2022 s cieľom preskúmať platnosť EKC v tvare obrátenej U-krivky. Údaje o vývoji emisií CO₂ (v tonách na osobu) boli získané z Global Carbon Budget (2024) a údaje o HDP (v parite kúpnej sily v medzinárodných dolároch³, na osobu) boli získané z internetových stránok Svetovej banky (World Bank, 2023). Obr. 3 znázorňuje vývoj logaritmu emisií CO₂ na obyvateľa (lnCO₂, oranžová krivka a os y vľavo) a logaritmu HDP na obyvateľa (lngdp, modrá krivka a os y vpravo) v Slovenskej republike v období 1990 – 2022. V období 1990 – 1993 pozorujeme prudký pokles emisií CO₂ pri miernom poklese HDP (pravdepodobne tzv. transformačný šok), obdobie 1994 – 2008 bolo sprevádzané zrýchľovaním ekonomického rastu a stabilizáciou úrovne emisií. Počas obdobia 2009 – 2022 síce časový rad ln(GDP)_t pokračuje v raste, ale ln(CO₂)_t už nekopíruje jeho trend, čo možno považovať za znak oddelenia rastu od emisií (tzv. decoupling).

Analýza bola zrealizovaná v softvéri *EViews 10* (IHS Global Inc., 2017) a všetky grafické znázornenia, na základe vstupných údajov autorky, boli generované pomocou nástroja OpenAI (2025).



Obr. 3: Priebeh vývoja zlogaritmovaných hodnôt CO₂ a HDP

Zdroj: vlastné výpočty

Odhadovanie modelu v tvare (1) preukázalo prítomnosť autokorelácie a tiež silnej multikolinearity medzi premennými ln(GDP)_t a (ln(GDP)_t)². Do modelu (1) sme doplnili oneskorenú hodnotu závislej premennej ln(CO₂)_{t-1}, pričom rozšírený dynamický model EKC mal potom tvar:

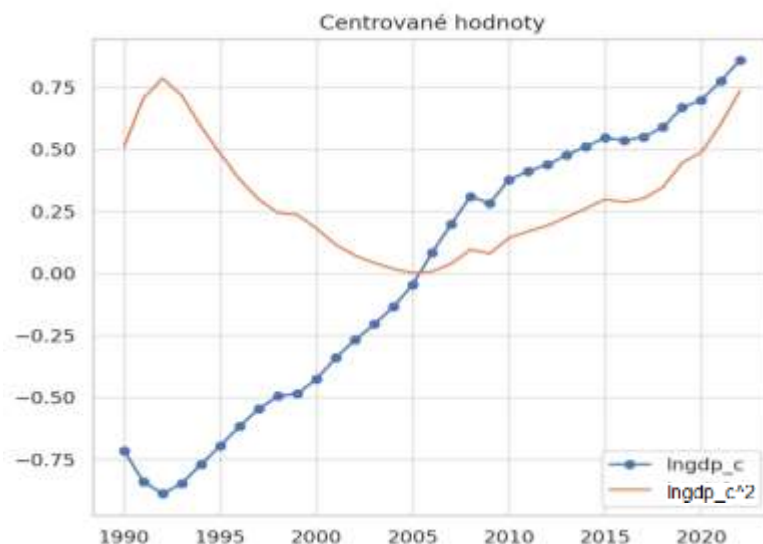
$$\ln(\text{CO}_2)_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(\text{GDP})_t + \beta_2 \cdot (\ln(\text{GDP})_t)^2 + \beta_3 \cdot \ln(\text{CO}_2)_{t-1} + u_t \quad (2)$$

³ PPP (purchasing power parity) in current international \$, per capita

S cieľom odstrániť pretrvávajúcu silnú multikolinearitu sme pristúpili k centrovaniu premennej $\ln(\text{GDP})_t$, čím sa zmenšila korelácia medzi lineárnou a kvadratickou zložkou. Centrovanie bolo vykonané podľa vzťahu:

$$\text{lngdp_c}_t = \ln(\text{GDP})_t - \text{priemer}(\ln(\text{GDP})_t), \quad (3)$$

kde symbolom lngdp_c_t sú označené centrované hodnoty pôvodnej premennej $\ln(\text{GDP})_t$. Obr. 4 ilustruje priebeh centrovaných hodnôt premenných a zároveň ilustruje, že centrovanie znižuje rozsah a teda aj koreláciu medzi premennými.



Obr. 4: Vývoj centrovaných hodnôt premenných

Zdroj: vlastné výpočty

Model (2) s centrovanými premennými možno zapísať v tvare (4) takto:

$$\ln(\text{CO}_2)_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{lngdp_c}_t + \beta_2 \cdot (\text{lngdp_c}_t)^2 + \beta_3 \cdot \ln(\text{CO}_2)_{t-1} + u_t \quad (4)$$

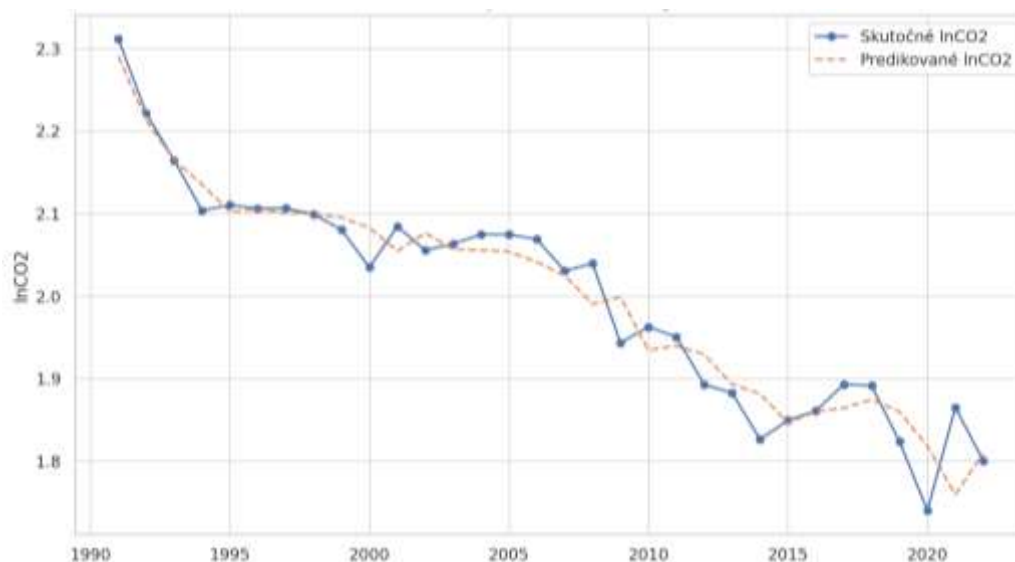
Tab. 1 obsahuje odhady parametrov z regresného modelu EKC s centrovanými premennými (4). Odhadnuté parametre sú štatisticky významné na hladine významnosti 0,05 s výnimkou parametra β_2 , ktorý je štatisticky významný na hladine 0,053.

Parameter	Odhad	t-hodnota	p-hodnota
β_0	0,949	3,54	0,001
β_1	-0,097	-4,45	<0,001
β_2	-0,062	-1,99	0,053
β_3	0,53	5,21	<0,001

Tab. 1: Odhady parametrov modelu (4)

Zdroj: vlastné výpočty v EViews 10

Koeficient determinácie $R^2 = 0,932$, čo znamená, že model vysvetľuje 93,2 % variability v emisiách CO_2 . Vysoká hodnota R^2 naznačuje tiež silnú predikčnú schopnosť modelu (4), o čom svedčí aj Obr. 5 porovnávajúci priebeh skutočných a predikovaných (vyrovnaných) hodnôt.



Obr. 5: Skutočné vs. predikované hodnoty $\ln(\text{CO}_2)_t$

Zdroj: vlastné výpočty

Na základe získaných výsledkov možno tvrdiť, že odhadovaný model (4) svedčí v prospech platnosti EKC v obrátenom U-tvare. Vzťah medzi HDP a emisiami je nelineárny, konkávny, čo znamená, že pri určitej úrovni rozvoja dochádza k poklesu emisií. Doplnenie oneskorenej hodnoty $\ln(\text{CO}_2)_{t-1}$ medzi nezávisle premenné prispelo k zachyteniu dynamiky vývoja emisií.

4 ZÁVER

Výsledky empirickej analýzy naznačujú, že vzťah medzi hospodárskym rozvojom a emisiami CO_2 v Slovenskej republike vykazuje charakteristiky environmentálnej Kuznetsovej krivky v obrátenom U-tvare. Počiatočné fázy hospodárskeho rastu boli sprevádzané zvyšujúcimi sa emisiami, no po prekročení určitej úrovne HDP došlo k ich stabilizácii, respektíve poklesu, čo možno interpretovať ako dôkaz environmentálneho „decouplingu“. Aplikovaný dynamický model s centrovanými premennými potvrdil nelineárnu a konkávnu povahu vzťahu medzi $\ln(\text{GDP})_t$ a $\ln(\text{CO}_2)_t$, pričom odhadnuté parametre boli štatisticky významné. Významná zotrvačnosť emisií podporuje potrebu zohľadniť časové aspekty v environmentálnom modelovaní.

Použitá literatúra

1. Clarivate. (2025). *Web of Science*. Retrieved April 15, 2025, from <https://www.webofscience.com/wos/woscc/summary/b41fe7ca-766a-4b76-bc7a-c69f718ee70a-01599fd4a6/times-cited-descending/1>
2. Dinda, S. (2004). *Environmental Kuznets Curve Hypothesis: A Survey*. *Ecological Economics*, 49(4), 431–455. <https://doi.org/10.1016/j.ecolecon.2004.02.011>
3. Global Carbon Budget. (2024). Annual CO_2 emissions (per capita). Population data based on various sources (2024) with major processing by Our World in Data. Retrieved April 2, 2025, from <https://ourworldindata.org/co2-and-greenhouse-gas-emissions>
4. Grossman, G. M., & Krueger, A. B. (1991). *Environmental Impacts of a North American Free Trade Agreement* (No. w3914). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w3914>

5. Grossman, G. M., & Krueger, A. B. (1995). Economic growth and the environment. *The Quarterly Journal of Economics*, 110(2), 353–377.
<https://doi.org/10.2307/2118443>
6. IHS Global Inc. (2017). EVIEWS 10 [Computer software]. IHS Global Inc. Retrieved April 15, 2025, from <https://www.eviews.com>
7. Kaika, D., & Zervas, E. (2013). The environmental Kuznets curve (EKC) theory. Part B: Critical issues. *Energy Policy*, 62, 1403–1411.
<https://doi.org/10.1016/j.enpol.2013.07.130>
8. Kallis, G., Paulson, S., D’Alisa, G., & Demaria, F. (2020). *The case for degrowth*. Polity Press. Retrieved April 15, 2025, from <https://www.politybooks.com/bookdetail/?isbn=9781509535620>
9. Kuznets, S. (1955). *Economic growth and income inequality*. *American Economic Review*, 45(1), 1–28.
10. OpenAI. (2025). ChatGPT. Retrieved April 15, 2025, from <https://chat.openai.com/chat>
11. Russel, R. (2020, September 29). *Could ditching growth save the planet?* Deutsche Welle. <https://www.dw.com/en/climatechange-emissions-fossilfuels-gdp-economy-renewables/a-55089013>
12. Stern, D. I. (2004). *The Rise and Fall of the Environmental Kuznets Curve*. *World Development*, 32(8), 1419–1439. <https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2004.03.004>
13. Wang, Q., Wang, X., Li, R., & Jiang, X. (2024). Reinvestigating the environmental Kuznets curve (EKC) of carbon emissions and ecological footprint in 147 countries: A matter of trade protectionism. *Humanities and Social Sciences Communications*, 11(1), 160. <https://doi.org/10.1057/s41599-024-02639-9>
14. World Bank. (2023). GDP per capita, PPP (current international \$). The World Bank. Retrieved April 15, 2025, from https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.CD?end=2023&name_desc=false&start=2017

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 832
 email: michaela.chocholata@euba.sk

MIGRÁCIA A STARNUTIE POPULÁCIE: PRÍLEŽITOSTI A VÝZVY

MIGRATION AND POPULATION AGEING: OPPORTUNITIES AND CHALLENGES

Miroslava Jánošová

Abstrakt

Migrácia je čoraz častejšie vnímaná ako jeden z nástrojov, ktoré môžu pomôcť zmierňovať dôsledky demografického starnutia, najmä v krajinách s dlhodobo nízkou pôrodnosťou a rastúcim podielom obyvateľov v postproduktívnom veku. Tento prehľadový článok sa zameriava na súčasné vedecké poznatky o vzťahu medzi migráciou a demografickými zmenami, pričom literatúru tematicky rozdeľuje do troch hlavných oblastí: demografické prínosy migrácie, fiškálne a ekonomické dôsledky a spoločenské a inštitucionálne výzvy spojené s integračným procesom. Osobitná pozornosť sa venuje empirickým zisteniam z krajín OECD a EÚ, ako aj ich možnej aplikovateľnosti v podmienkach Slovenskej republiky. Analýza ukazuje, že migrácia môže v určitých podmienkach pozitívne ovplyvniť vekovú štruktúru, podporiť verejné financie a stabilitu trhu práce, no zároveň poukazuje na nevyhnutnosť adekvátnych integračných opatrení a dlhodobo udržateľnej migračnej politiky. Cieľom článku je prispieť k systematickému pochopeniu migrácie ako komplexného javu so širokými dôsledkami v oblasti sociálno-ekonomického rozvoja.

Kľúčové slová: migrácia, demografické starnutie, integrácia, verejné financie, migračná politika

Abstract

Migration is increasingly perceived as one of the tools that can help mitigate the consequences of population ageing, especially in countries with persistently low fertility and a growing proportion of people of post-productive age. This review article looks at the current scientific evidence on the relationship between migration and demographic change. It divides the literature thematically into three main areas: the demographic benefits of migration, its fiscal and economic impact, and the social and institutional challenges associated with the integration process. Particular attention is paid to empirical findings from OECD and EU countries and their potential transferability to the context of the Slovak Republic. The analysis shows that, under certain conditions, migration can have a positive impact on the age structure, support public finances and improve the stability of the labour market. At the same time, the need for appropriate integration measures and a long-term, sustainable migration policy becomes clear. The aim of the article is to contribute to a systematic understanding of migration as a complex phenomenon with far-reaching effects on socio-economic development.

Keywords: migration, population ageing, integration, public finance, migration policy

1 ÚVOD

Demografické starnutie patrí medzi najzávažnejšie výzvy, ktorým čelí väčšina európskych krajín. Pokles pôrodnosti a predlžovanie strednej dĺžky života vedú k rastúcemu podielu obyvateľstva v postproduktívnom veku, čo so sebou prináša tlak na dôchodkový systém, zdravotnú a sociálnu starostlivosť, ako aj na celkovú udržateľnosť verejných financií. Slovenská republika nie je výnimkou, prognózy Eurostatu ukazujú, že v najbližších dekádach bude starnutie populácie čoraz výraznejšie ovplyvňovať ekonomické aj spoločenské štruktúry. V tomto kontexte sa čoraz častejšie diskutuje o migrácii ako o možnom nástroji zmierňovania dôsledkov demografického vývoja. Migrácia môže potenciálne dopĺňať pracovnú silu, zlepšovať vekovú štruktúru obyvateľstva a podporovať stabilitu daňových príjmov. Zároveň však ide o fenomén, ktorý je sociálne aj politicky citlivý a ktorého účinky závisia od celej škály faktorov od štruktúry migrantov až po schopnosť inštitúcií zabezpečiť ich úspešnú integráciu. V tomto príspevku sa zameriame na syntézu vybraných vedeckých poznatkov o vzťahu medzi migráciou a demografickým starnutím. Cieľom je zachytiť rôzne pohľady na ekonomické, sociálne a populačné dôsledky migrácie a poskytnúť rámec, ktorý umožní lepšie pochopiť jej potenciál a limity v podmienkach krajín ako je Slovensko

2 MIGRÁCIA V KONTEXTE DEMOGRAFICKÝCH A SPOLOČENSKÝCH ZMIEN

Výskum migrácie v kontexte demografického starnutia je tematicky rozsiahly a rozmanitý. Vedecké štúdie sa líšia nielen metodologickým prístupom, ale aj tým, aké aspekty problému kladú do centra pozornosti, niektoré zdôrazňujú populačnú štruktúru, iné verejné financie či spoločenské dôsledky. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli existujúcu literatúru rozdeliť do troch hlavných tematických oblastí:

- Demografické prínosy migrácie
- Fiškálne a ekonomické dôsledky migrácie
- Spoločenské a inštitucionálne výzvy migrácie

2.1 Demografické prínosy migrácie

Prvou z tematických oblastí sú demografické prínosy migrácie, ktoré predstavujú jednu z najčastejších tém odborných diskusií o dôsledkoch starnutia populácie. V ich centre stojí otázka, do akej miery môže migrácia prispieť k zmierneniu demografickej nerovnováhy spôsobenej dlhodobo nízkou pôrodnosťou a predlžujúcou sa strednou dĺžkou života. Štúdie z tejto oblasti analyzujú predovšetkým to, ako môže prílev mladších a ekonomicky aktívnych osôb z iných krajín ovplyvniť vekovú štruktúru populácie, stabilitu pracovnej sily a vývoj tzv. indexu závislosti, teda pomeru medzi počtom ekonomicky neaktívnych a aktívnych obyvateľov. Vplyv migrácie na demografický profil spoločnosti dokumentujú viaceré empirické práce. Lee a Mason (2014) využívajú modelovanie demografických scenárov, ktoré ukazujú, že migrácia môže prispieť k vyrovnaniu pomeru medzi populáciou v produktívnom veku a staršou populáciou. Ich výsledky ukazujú, že hoci migrácia sama o sebe nezvráti trend starnutia, môže ho spomaliť a tým znížiť nároky na verejné financie. Rovnako OECD (2022) vo svojom hodnotení migračných politík upozorňuje, že migrácia zohráva významnú úlohu pri stabilizácii veľkosti pracovnej sily v niektorých členských štátoch, najmä v tých, kde prirodzený populačný prírastok dlhodobo stagnuje. Z údajov Eurostatu (2020) vyplýva, že v niektorých krajinách EÚ migranti predstavujú rozhodujúci podiel na celkovom populačnom

raste, najmä v produktívnej vekovej kategórii. Goldin, Cameron a Balarajan (2011) poukazujú na historický kontext migrácie ako mechanizmu, ktorý v rôznych obdobiach suploval prirodzenú reprodukciu a zároveň prinášal flexibilitu ekonomike. Podľa autorov migrácia často nahrádza „chýbajúce generácie“ a umožňuje spoločnostiam prispôbiť sa demografickým šokom. Z pohľadu populačných preferencií je relevantná aj štúdia Goldstein, Lutz a Testa (2003), ktorá ukazuje, že v mnohých európskych krajinách sa ideálna veľkosť rodiny stabilizovala pod hranicou prirodzenej reprodukcie. To podporuje argument, že bez dopĺňovania populácie prostredníctvom migrácie nie je možné dlhodobo udržať stabilný počet obyvateľov v produktívnom veku. Tieto zistenia poukazujú na to, že migrácia nie je riešením všetkých demografických problémov, no môže pôsobiť ako dočasný korekčný nástroj, ktorý zmierňuje dôsledky starnutia. Jej účinok je však podmienený zložením migrantov podľa veku, ekonomickej aktivity a miery integrácie.

2.2 Fiškálne a ekonomické dôsledky migrácie

Druhá tematická oblasť výskumu sa zameriava na to, ako migrácia ovplyvňuje verejné financie, makroekonomické ukazovatele a dlhodobú udržateľnosť dôchodkových, zdravotných a sociálnych systémov. V podmienkach demografického starnutia a klesajúceho počtu pracujúcich sa čoraz väčšia pozornosť venuje tomu, či môžu migranti prispievať k stabilizácii daňových príjmov a zmierňovať tlak na výdavkové zložky verejných rozpočtov. Štúdie z tejto oblasti poukazujú na to, že migračné prúdy, ak majú správnu vekovú a kvalifikačnú štruktúru, môžu mať pozitívny efekt na fiškálnu rovnováhu. Ekonomicky aktívni migranti, ktorí vstupujú na trh práce, zvyšujú príjmy z daní a odvodov, pričom z krátkodobého hľadiska zvyčajne čerpajú menší rozsah verejných výdavkov. D'Albis, Boubtane a Coulibaly (2019) analyzovali vplyv migrácie na verejné financie vo vybraných krajinách OECD prostredníctvom panelovej regresie a ukázali, že prílev migrantov má vo väčšine prípadov pozitívny čistý príspevok k verejným rozpočtom. Najväčší pozitívny efekt vykazovali migranti v produktívnom veku, ktorí vstupovali na trh práce a platili dane a odvody, zatiaľ čo využívanie verejných služieb bolo v ich prípade limitované. Výsledky tiež ukazujú, že v krajinách s dlhodobo etablovanými migračnými politikami je dopad migrácie na fiškálnu rovnováhu stabilne pozitívny. Zároveň sa potvrdilo, že negatívny efekt môže nastať v prípade starších migrantov alebo vtedy, ak integrácia zlyháva a migranti sa nedokážu plnohodnotne zapojiť do pracovného trhu. Autori zdôrazňujú, že kľúčovými faktormi pozitívneho dopadu sú vek, kvalifikácia, a najmä schopnosť zamestnať sa v krátkom čase po príchode. Tieto zistenia potvrdzujú, že dobre riadená migrácia môže významne prispieť k fiškálnej udržateľnosti, najmä v kontexte starnutia populácie. Významný prínos v tejto oblasti predstavuje štúdia Boubtane, Dumonta a Raulta (2016), ktorá analyzovala vzťah medzi migráciou a ekonomickým rastom v 22 krajinách OECD v období 1986–2006. Autori pomocou modelu VAR identifikovali pozitívny a dlhodobý efekt migračných tokov na HDP a zamestnanosť, bez negatívneho dopadu na mieru nezamestnanosti. Rozlišujú medzi rôznymi typmi migrácie, vrátane migrujúcich za prácou, utečencov a rodinných migrantov pričom zistili, že pracovná migrácia má najvýraznejší vplyv na ekonomický rast. Výsledky podporujú argument, že dobre nastavená migračná politika môže byť efektívnym nástrojom hospodárskej adaptácie na demografické výzvy. Obdobne Bloom, Canning a Fink (2010) uvádzajú, že migrácia pomáha vyrovnávať demografické šoky, čím znižuje potrebu drastických úprav v dôchodkových systémoch alebo zvyšovania daní. OECD (2022) tiež potvrdzuje, že ak je migrácia dobre zacielená a sprevádzaná účinnou integráciou, má potenciál byť dôležitým nástrojom hospodárskej adaptácie na starnutie populácie. Niektoré prístupy v tejto oblasti využívajú metodiku národných transferových účtov (NTA), ktorá umožňuje kvantifikovať rozdiel medzi produkciou a spotrebou v rôznych vekových skupinách a odhadovať, ako migranti ovplyvňujú tzv. životný cyklus verejných príjmov a výdavkov.

Takouto štúdiou je aj štúdia už vyššie spomenutých autorov Lee a Mason (2014), kde ukazujú, že migrácia dokáže oddialiť zhoršovanie fiškálneho salda spôsobené starnutím obyvateľstva. Migrácia môže v kontexte demografického starnutia prispievať k zlepšeniu makroekonomických ukazovateľov a k zmierneniu tlaku na verejné financie, predovšetkým vtedy, ak sa podarí dosiahnuť trvalú zamestnanosť migrantov a ich plnohodnotnú ekonomickú integráciu. Účinok týchto procesov je však podmienený viacerými faktormi najmä štruktúrou migračných tokov, výškou miezd, ktoré migranti dosahujú, ako aj dĺžkou ich zotrvania v krajine.

2.3 Spoločenské a inštitucionálne výzvy migrácie

Tretia skupina štúdií sa zameriava na širšie spoločenské a inštitucionálne súvislosti migrácie, ktoré sú často určujúce pre to, aký reálny vplyv môže mať migrácia na demografické či ekonomické procesy. Kľúčovou otázkou nie je len to, koľko migrantov prichádza, ale aj akým spôsobom sú prijatí, ako sú schopní sa zapojiť do spoločnosti a do akých verejných systémov vstupujú. Výskum v tejto oblasti upozorňuje, že pozitívne efekty migrácie sa môžu oslabiť alebo úplne stratiť, ak krajina nemá dostatočne rozvinutú integračnú infraštruktúru alebo ak čelí výraznému odporu verejnosti. Podľa viacerých štúdií sú verejné postoje k migrácii formované nielen ekonomickými, ale aj kultúrnymi faktormi, obavami o bezpečnosť či spravodlivosť rozdelenia verejných zdrojov. Napríklad Dustmann a Preston (2007) poukazujú na to, že ekonomický status migranta nie je jediným určujúcim prvkom verejnej akceptácie, dôležitú úlohu zohráva aj jeho kultúrna alebo etnická blízkosť k väčšinovej populácii. Z inštitucionálneho hľadiska je významná aj otázka kapacít verejných služieb. V niektorých sektoroch, ako je zdravotníctvo a opatrovateľská starostlivosť, sú migranti kľúčovými pracovníkmi, no zároveň aj užívateľmi týchto služieb. OECD (2018) upozorňuje, že miestne samosprávy zohrávajú kľúčovú úlohu pri znižovaní napätia v súvislosti so zaťažením verejných služieb a zároveň pri budovaní udržateľnej integrácie migrantov. V podmienkach Slovenska Letavajová a Divinský (2019) poukazujú na absenciu komplexného integračného rámca, slabé prepojenie politiky zamestnanosti s migračnou agendou a pretrvávajúce spoločenské stereotypy. Migranti čelia obmedzeniam v prístupe k vzdelaniu, bývaniu a jazykovej príprave, čo oslabuje ich schopnosť integrovať sa na trhu práce aj v komunite. Podobne Radvanský et al. (2021) upozorňujú, že chýba dlhodobá stratégia podpory cirkulárnej a pracovnej migrácie, a vyzdvihujú potrebu lepšej koordinácie medzi národnými a miestnymi inštitúciami. Autori zároveň odporúčajú systematicky budovať analytické kapacity a dátové zázemie pre efektívne riadenie migrácie. Z týchto zistení vyplýva, že úspech migrácie ako nástroja reagujúceho na demografické výzvy závisí nielen od číselných ukazovateľov, ale aj od kvality spoločenského a inštitucionálneho prostredia, ktoré migrantom umožní efektívne sa zapojiť do ekonomiky a spoločnosti.

3 ZÁVER

Migrácia predstavuje komplexný spoločenský fenomén, ktorý má potenciál významne ovplyvniť demografický, ekonomický aj sociálny vývoj krajín čeliacich starnutiu populácie. Ako ukazuje analýza existujúcich vedeckých poznatkov, migrácia môže v priaznivých podmienkach zmierniť dôsledky nepriaznivého demografického vývoja, podporiť stabilitu verejných financií a prispieť k udržateľnosti systémov sociálnej ochrany. Empirické výskumy naznačujú, že prílev mladších a ekonomicky aktívnych migrantov môže spomaliť rast indexu závislosti a posilniť ponuku pracovnej sily, čo je obzvlášť dôležité pre krajiny s nízkou pôrodnosťou a predlžujúcou sa dĺžkou života. Zároveň však platí, že pozitívne účinky migrácie nie sú automatické ani garantované. Ich realizácia závisí od viacerých faktorov, vrátane kvality

integračných politík, spoločenskej akceptácie migrantov a schopnosti štátnych inštitúcií zabezpečiť ich plnohodnotné začlenenie do ekonomického a spoločenského života. Skúsenosti z krajín OECD a EÚ poukazujú na význam lokálnej úrovne pri tvorbe efektívnych nástrojov integrácie, ale aj na potrebu zberu kvalitných údajov a koordinovaného strategického plánovania. V prípade Slovenskej republiky je migrácia stále pomerne novou výzvou, ktorú treba vnímať nielen ako problém, ale predovšetkým ako príležitosť. Za predpokladu premyslenej, dátovo podloženej a udržateľnej migračnej politiky môže migrácia zohrávať dôležitú úlohu pri riešení demografických výziev a posilňovaní sociálno-ekonomickej odolnosti krajiny. Výzvou do budúcnosti preto zostáva nielen prilákať a udržať vhodných migrantov, ale aj zabezpečiť ich úspešnú integráciu a spoločenské začlenenie.

Použitá literatúra

Bloom, D.E., Canning, D. and Fink, G., 2010. Implications of population ageing for economic growth. *Oxford Review of Economic Policy*, 26(4), pp.583–612.

Boubtane, E., Dumont, J.C. and Rault, C., 2016. Immigration and economic growth in the OECD countries 1986–2006. *Oxford Economic Papers*, 68(2), pp.340–360.

d’Albis, H., Boubtane, E. and Coulibaly, D., 2019. Immigration and public finances in OECD countries. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 99, pp.116–151.

Dustmann, C. and Preston, I.P., 2007. Racial and economic factors in attitudes to immigration. *The BE Journal of Economic Analysis & Policy*, 7(1).

Eurostat, 2020. *Population and population change statistics* [online]. Available at: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Population_and_population_change_statistics [Accessed 14 May 2025].

Goldin, I., Balarajan, M. and Cameron, G., 2011. *Exceptional people: How migration shaped our world and will define our future*. Princeton: Princeton University Press.

Goldstein, J.R., Lutz, W. and Testa, M.R., 2003. The emergence of sub-replacement family size ideals in Europe. *Population Research and Policy Review*, 22, pp.479–496.

Lee, R. and Mason, A., 2014. National Transfer Accounts and intergenerational transfers. In: Harper, S. and Hamblin, K. (eds.) *International Handbook on Ageing and Public Policy*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing, pp.153–164.

Letavajová, S. and Divinský, B., 2019. *Migration and development in Slovakia: Common Home Publication*. Bratislava: Caritas Slovakia. Available at: https://www.researchgate.net/publication/335788956_COMMON_HOME_PUBLICATION_MIGRATION_AND_DEVELOPMENT_IN_SLOVAKIA [Accessed 14 May 2025].

OECD, 2018. *Working together for local integration of migrants and refugees*. Paris: OECD Publishing. Available at: https://www.oecd.org/en/publications/working-together-for-local-integration-of-migrants-and-refugees_9789264085350-en.html [Accessed 14 May 2025].

OECD, 2022. *International migration outlook 2022*. Paris: OECD Publishing. Available at: https://www.oecd.org/en/publications/2022/10/international-migration-outlook-2022_140ace0e.html [Accessed 14 May 2025].

Radvanský, M., Lichner, I., Prát, Š., Yeliseyeu, A., Kulesa, A. and Kaźmierkiewicz, P., 2021. *In search of new opportunities: Circular migration between Belarus and Poland, Slovakia and the Czech Republic*. Bratislava: Institute of Economic Research, Slovak Academy of Sciences. Available at: https://ekonom.sav.sk/dokumenty/projekty/2021_02_case_circmigr_raport_v1-7_web.pdf

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta sociálnych a ekonomických vied
Mlynské luhy 4
821 05 Bratislava
miroslava.janosova@fses.uniba.sk

PodĎakovanie

Tento výskum bol podporený grantom APVV-22-0526 „Fiškálne a ekonomické efekty imigrácie na Slovensku: Integrovaný modelovací prístup“

EMPIRICKÁ ANALÝZA VOJNOVÝCH KONFLIKTOV

EMPIRICAL ANALYSIS OF WAR CONFLICTS

Brian König

Abstrakt

Článok sa zaoberá empirickou analýzou determinantov medzištátnych vojnových konfliktov využitím pravdepodobnostných modelov (probit), pričom sú využité dve základné časové intervaly: dlhodobý horizont (1816 - 2010) a povojnové obdobie (1948 - 2010). Z článku možno konštatovať, že (i) rozdiely v moci a to najmä rozdiel v CINC indexe, vojenskom personáli – významne ovplyvňujú pravdepodobnosť výskytu medzištátneho vojenského konfliktu. (ii) Kľúčovú úlohu zohráva aj geografická blízkosť, kde spoločná hranica a menšia vzdialenosť medzi štátmi zvyšujú riziko konfliktu.

Kľúčové slová: *vojnové konflikty, cinc index, gravitačné modely*

Abstract

The article presents an empirical analysis of the determinants of interstate war conflicts using probabilistic (probit) models, based on two key time intervals: a long-term historical horizon (1816–2010) and the post-war period (1948–2010). The findings suggest that (i) differences in power—particularly disparities in the CINC index, military personnel — significantly influence the probability of an interstate military conflict. (ii) Geographic proximity also plays a crucial role, as a shared border and shorter distance between states increase the risk of conflict.

Keywords: *war conflicts, cinc index, gravity models*

1 ÚVOD

Vojnové konflikty sprevádzajú vývoj ľudskej civilizácie už od jej počiatkov. Ich príčiny, ako aj faktory ovplyvňujúce ich priebeh, boli predmetom rôznorodých pohľadov naprieč vednými disciplínami. V modernej ekonómii sa záujem o systematické skúmanie konfliktov výraznejšie rozvinul s nástupom teórie hier, najmä po publikácii prelomového diela Von Neumanna a Morgensterna (1944). Ich prístup umožnil formalizáciu strategického správania aktérov v konfliktných situáciách a vytvoril základ pre vznik komplexnej analytickej štruktúry výskumu vojnových interakcií.

Komplexný prehľad moderných ekonomických teórií konfliktov poskytujú Kimbrough, Laughren a Sheremeta (2020). Autori zhrnuli široké spektrum modelov, vrátane súťažných hier v štýle Colonel Blotto, dynamických a priestorových konfliktov, ako aj modelov poukazujúcich na neefektívnosť konfliktu a možnosti jeho vyhýbania (conflict avoidance).

König (2023) poskytuje systematický prehľad empirických štúdií zameraných na vojnové konflikty, ktoré využívajú ekonometrické prístupy v dvoch oblastiach: identifikácia determinantov vojnového konfliktu pomocou binárnych modelov (probit, panelový probit, IV-probit), a analýza obchodných tokov so zbraňami ako formy externého zasahovania do konfliktov, prevažne cez gravitačné modely.

Elbadawi a Sambanis (2001) vo svojej práci analyzujú faktory ovplyvňujúce výskyt občianskych vojen v 161 krajinách v období 1960–1999. Pomocou panelových

pravdepodobnostných modelov (logit/probit) identifikujú kľúčové determinanty občianskych konfliktov, medzi ktoré patria nízka úroveň príjmov, nerovnosť, slabé inštitúcie a etnická fragmentácia. Štúdia tiež zdôrazňuje význam externých šokov a geopolitických podmienok a poskytuje rámec pre kvantitatívne predikcie pravdepodobnosti vypuknutia občianskej vojny.

Empirickým východiskom tejto štúdie je aj práca Hegreho (2008), ktorý pomocou probit modelu a dyadických dát ukazuje, že nie rovnováha síl, ale absolútna vojenská kapacita zvyšuje pravdepodobnosť konfliktu. Autor zároveň upozorňuje na nutnosť kontrolovať za premenné ako demokracia, vzdialenosť a minulé konflikty, ktoré významne ovplyvňujú výsledky modelov.

V rámci tejto štúdie sa budeme zaoberať empirickým skúmaním determinantov ovplyvňujúcich pravdepodobnosť výskytu medzištátneho vojnového konfliktu, pričom analytickým nástrojom sú probit modely aplikované na bilaterálne údaje. Analýza je založená prevažne na údajoch z databáz projektu Correlates of War a databázy gravity (CEPII). Štruktúra článku je nasledovná: druhá kapitola predstavuje použitú dátovú základňu a konštrukciu premenných; tretia kapitola prezentuje výsledky odhadov a diskutuje dôsledky, ktoré z nich vyplývajú.

2 DÁTA

Empirická analýza je založená na kombinácii viacerých dátových zdrojov, pričom pozorovanie je definované dvojicou štátov (dyádov) v konkrétnom roku. Kľúčovou databázou, z ktorej sú čerpané údaje o výskyte vojnových konfliktov, je Dyadic Interstate War Dataset z projektu Correlates of War (COW), pokrývajúci obdobie 1816 až 2010 (Sarkees a Wayman, 2010). Táto databáza zachytáva medzištátne konflikty s intenzitou presahujúcou 1 000 úmrtí v boji za rok, a to vo forme dyadických pozorovaní, v ktorých je pre každú dvojicu štátov indikovaný výskyt vojny v danom roku. Pre naše potreby bola vytvorená ako závislá premenná umelá premenná (*conflict*), ktorá nadobúdala hodnotu 1 ak pre danú dvojicu krajín a konkrétny rok existoval vojnový konflikt a inak nadobúda hodnotu 0.

Na meranie mocenských charakteristík štátov bola použitá databáza National Material Capabilities (NMC 60 Abridged), ktorá je dostupná pre roky 1816 až 2016. Z tejto databázy je odvodený zložený ukazovateľ moci – Composite Index of National Capability (CINC), ktorý vyjadruje relatívnu váhu štátu v medzinárodnom systéme. Index vzniká ako priemer šiestich zložiek: celkovej populácie (*tpop*), urbanizovanej populácie (*upop*), vojenského personálu (*milper*), vojenských výdavkov (*milex*), spotreby primárnej energie (*pec*) a produkcie železa a ocele (*irst*). Každá zložka vyjadruje podiel daného štátu na celkových svetových hodnotách v danom roku.

Informáciu o geografickej blízkosti štátov zabezpečuje databáza Direct Contiguity v3.2 (Stinnett et al., 2002), ktorá poskytuje dáta pre roky 1816 až 2016. V nej sú krajiny klasifikované podľa typu spoločnej hranice. Hranica typu 1 (*conttype*) označuje priame pevninské spojenie (hranicu), ktoré zahŕňa aj riečne a jazerné hranice. Typy 2 až 5 označujú námornú separáciu v rôznych vzdialenostiach (do 12 námorných míľ, 12 - 24, 24 - 150, 150 – 400 námorných míľ).

Premenné zachytávajúce bilaterálnu obchodnú tok boli čerpané z databázy Dyadic Trade Dataset v3., pokrývajúcej obdobie 1870 až 2009 (Barbieri et al., 2009). Táto databáza obsahuje údaje o objeme obchodného toku medzi dvoma štátmi, reportované z pohľadu každej krajiny samostatne. V analýze je použitý súčet oboch obchodných tokov každej dvojice vyjadrený logaritmom (*lntot_flow*).

Za účelom možnosti rozšírenia skupiny vysvetľujúcich premenných, ako demografických a geografických charakteristikách dvojíc krajín, bola použitá aj CEPII Gravity databáza, ktorá

poskytuje široké spektrum bilaterálnych premenných pre obdobie od 1948 do 2020 (Head et al., 2010). Použité boli najmä údaje o geografickej vzdialenosti medzi hlavnými mestami (*dist*), spoločnej hranici (*contig*), spoločnom oficiálnom jazyku (*comlang_off*), spoločnom jazyku aspoň pre 9% populácie (*comlang_ethno*), historických koloniálnych väzbách (*colony*), spoločnom náboženstve (*comrelig*) a o rozdiel e ekonomickej veľkosti vyjadrenej rozdielom hrubých domácich produktoch krajín (*gdp_o*, *gdp_d*), ktoré sú vyjadrené v tisícoch amerických dolárov.

Pre skúmanie dopadov právneho štátu na výskyt vojnového konfliktu boli prevzaté dáta o Rule of Law (ROL) z databázy Worldwide Governance Indicators (WGI; Kaufman et al., 2010), ktorú spravuje Svetová banka. Indikátor Rule of Law je v rámci WGI dostupný pre viac ako 200 krajín od roku 1996 a predstavuje agregovaný index založený na viacerých zdrojoch hodnotiacich vymáhateľnosť práva, kvalitu súdneho systému či dôveru v dodržiavanie zákonov. Hodnoty tohto indikátora sú štandardizované na priemer nula a smerodajnú odchýlku jedna, čo umožňuje ich priamu porovnateľnosť medzi krajinami a v čase. Typicky sa pohybujú v intervale približne od -2,5 do 2,5, pričom vyššie hodnoty indikujú silnejší právny štát. Nedostatkóm tejto databázy je, že zachytáva iba veľmi krátky časový horizont, v dôsledku čoho zachytáva iba veľmi málo vojnových konfliktov.

3 VÝSLEDKY

Za účelom identifikovania determinantov ovplyvňujúcich pravdepodobnosť vypuknutia vojnového konfliktu, sme obdobne ako Hegre (2008) použili probit model. Ako východiskový bod našej analýzy sme použili probit model v tvare:

$$P(\text{conflict}_{ijt} = 1) = \Phi(\alpha \text{cinc_dif}_{ijt} + X_{ijt}\beta), \quad (1)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia, premenné označené *_dif reprezentujú absolútne rozdiely medzi dvojicou krajín v danom ukazovateli, X_{ijt} je vektor premenných ovplyvňujúcich pravdepodobnosť výskytu vojnového konfliktu.¹

Výsledky odhadnutých modelov sme rozdelili do dvoch častí, podľa časových intervalov, za ktoré boli jednotlivé databázy dostupné. Výsledky probit modelov získané na základe čisto databáz z COW (1816 - 2010), s nižším počtom dostupných premenných sú v tabuľke 1.

Z výsledkov uvedených v tabuľke 1 možno konštatovať, že s rastom rozdielu vojenskej sily medzi krajinami (*cinc_dif*) rastie pravdepodobnosť výskytu vojenského konfliktu. Pokiaľ ide o jednotlivé zložky *cinc* indexu, štatisticky významne k jeho vzniku prispieva rozdiel vo veľkosti vojenského personálu.

¹ Pre detailné informácie ohľadom premenných pozri sekciu dáta.

Tabuľka 1: Probit modely výskytu vojnového konfliktu na základe údajov z COW databáz (1816 - 2010)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
conflict						
cinc_dif	2.995*** (11.83)					
time	-0.00543*** (-23.65)	-0.00640*** (-26.10)	-0.00551*** (-20.28)	-0.00524*** (-19.06)	-0.0118*** (-11.18)	-0.0103*** (-8.03)
tpop_dif		8.16e-08 (0.53)	4.93e-08 (0.29)	3.38e-08 (0.20)	0.000000746* (2.36)	0.000000895** (2.88)
irst_dif		-0.0000064*** (-3.93)	-0.0000074*** (-4.17)	-0.0000074*** (-4.18)	-0.00000453 (-1.11)	-0.00000377 (-1.06)
pec_dif		0.000000147 (0.70)	0.000000231 (1.04)	0.000000239 (1.08)	-0.000000496 (-1.09)	-0.000000512 (-1.10)
milex_dif		-6.08e-10 (-0.44)	-8.89e-10 (-0.60)	-9.88e-10 (-0.66)	4.13e-09* (2.39)	4.29e-09* (2.43)
milper_dif		0.000273*** (23.15)	0.000273*** (22.55)	0.000272*** (22.35)	0.000226*** (3.69)	0.000209*** (3.63)
contg			0.900*** (16.64)			
0.conttype				0 (.)		0 (.)
1.conttype				0.939*** (17.20)		0.629*** (4.36)
2.conttype				0.778*** (3.60)		0.647 (1.58)
3.conttype				0.852*** (4.90)		0.840*** (3.38)
4.conttype				0.531*** (5.19)		0.347 (1.71)
5.conttype				0.360* (2.17)		0.0442 (0.13)
Intot_flow					0.0167 (0.91)	-0.00149 (-0.07)
_cons	-2.279*** (-55.11)	-2.189*** (-60.75)	-2.429*** (-57.11)	-2.496*** (-56.75)	-1.777*** (-11.13)	-2.113*** (-10.47)
conflict=1	1360	1360	1360	1360	126	126
N	956884	956884	956884	956884	395606	395606
Pseudo R2	0.0966	0.173	0.231	0.239	0.193	0.227

t statistics in parentheses

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

Poznámka: Štandardné odchýlky sú klastrované v rozmere dvojíc krajín (pair_id).

Vo všetkých modeloch má časový trend štatisticky významný, negatívny efekt na pravdepodobnosť konfliktu, čo vyplýva aj z faktu, že čím viac sa história približuje súčasnosti, tým menej vojnových konfliktov v priemere zaznamenávame. Premenná contig (spoločná hranica) a špecifické hodnoty pre conttype (typ hranice) ukazujú, že priama geografická blízkosť významne zvyšuje riziko konfliktu. Premenná Intot_flow (log celkového obchodu) nie je signifikantná v modeli (3) ani v modeli (4).

Výsledky probit modelov odhadnutých na kratšom časovom intervale (1948 – 2010), ale so širšou ponukou dostupných premenných možno pozorovať v tabuľke 2:

Tabuľka 2: Probit modely výskytu vojnového konfliktu na základe údajov z gravity a WGI databáz (1948 - 2010)

	(1)	(2)	(3)
conflict			
tpop_dif	0.000000553*	9.77e-08	-6.70e-08
	(2.05)	(0.29)	(-0.16)
irst_dif	-0.0000116**	-0.00000332	-0.00000658
	(-2.78)	(-0.60)	(-1.09)
pec_dif	0.000000868***	-5.41e-09	-2.65e-08
	(7.34)	(-0.02)	(-0.11)
milex_dif	3.42e-10	1.87e-09**	1.24e-09
	(1.30)	(2.71)	(1.65)
milper_dif	-0.000914***	0.000180	0.000181
	(-4.03)	(1.82)	(1.49)
ROL_dif	-0.214		
	(-1.17)		
time	-0.0822***	-0.0267***	-0.0326***
	(-10.52)	(-7.43)	(-8.20)
contig		0.833***	0.820***
		(7.13)	(7.21)
comlang_off		-0.376*	-0.449**
		(-2.20)	(-2.76)
comlang_ethno		0.240	0.210
		(1.48)	(1.32)
comrelig		-0.371	-0.289
		(-1.38)	(-1.08)
Indist		-0.101***	-0.113**
		(-3.64)	(-2.85)
comcol		0.272*	0.337*
		(2.11)	(2.12)
lngdp_dif			0.0900*
			(2.51)
_cons	11.28***	1.547**	1.101
	(6.75)	(2.97)	(1.74)
conflict=1	10	192	160
N	128203	321737	288038
Pseudo R2	0.156	0.243	0.243

t statistics in parentheses

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

Poznámka: Štandardné odchýlky sú klastrované v rozmere dvojíc krajín (pair_id).

Na základe výsledkov z tabuľky 2, ktorá obsahuje tri rôzne špecifikácie probit modelov na kratšom časovom intervale (1948 – 2010), možno vyvodit' niekoľko záverov. Podobne ako v predchádzajúcich odhadoch, časový trend výrazne znižuje pravdepodobnosť konfliktu. Premenná *contig* (spoločná hranica) je vo všetkých modeloch pozitívna a štatisticky významná, čo znamená, že štáty, ktoré zdieľajú hranicu, majú podstatne vyššiu pravdepodobnosť vojenského konfliktu. Podobne aj nižšia vzdialenosť (*Indist*) má negatívny a významný vplyv, čo je v súlade s tradičnými zisteniami geopolitickej literatúry. Premenná *comlang_off* (spoločný oficiálny jazyk) má negatívny a významný efekt, čo naznačuje, že jazyková podobnosť môže zmierňovať konflikty. Naopak, premenná *comcol* (koloniálne väzby) má pozitívny a významný efekt, čo poukazuje na to, že historické vzťahy vyplývajúce z kolonializmu môžu zvyšovať riziko napätí a konfliktov. Premenné *comlang_ethno* a *comrelig* nie sú štatisticky významné, takže etnická podobnosť či spoločné náboženstvo nevykazujú jednoznačný vplyv. Premenná *ROL_dif* (rozdiel v právnom štáte) má negatívny, ale štatisticky nevýznamný koeficient. Z toho vyplýva, že rozdiely v kvalite právneho štátu medzi krajinami nie sú samy o sebe silným prediktorom konfliktu, ak sú v modeli zahrnuté aj iné premenné moci

a geografie. Tento záver však môže byť ovplyvnený a j nízkym počtom vojen, ktoré dáta z ROL zachytávajú (k dispozícii iba od 1996 a použité len pri 10 konfliktoch).

4 ZÁVER

Príspevok sa zaoberá skúmaním determinantov ovplyvňujúcich vypuknutie vojnového konfliktu na základe probit modelov. Zo získaných výsledkov možno konštatovať, že rozdiely v moci a to najmä rozdiel v CINC indexe, konkrétne vojenskom personáli – významne ovplyvňujú pravdepodobnosť výskytu medzištátneho vojenského konfliktu. Kľúčovú úlohu zohráva aj geografická blízkosť, kde spoločná hranica a menšia vzdialenosť medzi štátmi zvyšujú riziko konfliktu. Asymetrie v inštitucionálnej kvalite medzi krajinami (*ROL_dif*) nemajú štatisticky významný efekt, čo môže byť spojené aj s nízkym počtom konfliktov zahrnutých do odhadu. Časový trend má stabilne negatívny a štatisticky významný efekt, čo môže byť aj v dôsledku faktu, že konflikty medzi štátmi sú čoraz menej pravdepodobné v čase.

Výsledky môžu byť ovplyvnené nevyužitím panelového probit modelu. V rámci ďalšieho výskumu by mohla byť realizovaná analýza na základe panelového probit modelu s Mundlakovou korekciou, ktorá umožňuje kontrolovať nepozorovanú heterogenitu medzi dvojicami pozorovaní a súčasne rozlíšiť vplyv vnútrodyadických zmien od časovo konštantných charakteristík..

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0115/23 „Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a medzinárodných vzťahoch“.

Použitá literatúra

1. Barbieri, K., Keshk, O. M. G., & Pollins, B. M. (2009). Trading Data: Evaluating Our Assumptions and Coding Rules. *Conflict Management and Peace Science*, 26(5), 471–491.
2. Head, K., Mayer, T., & Ries, J. (2010). The erosion of colonial trade linkages after independence. *Journal of International Economics*, 81(1), 1–14.
3. CEPII. (2022). *Gravity Dataset (Version 202211)*. Retrieved from https://www.cepii.fr/CEPII/en/bdd_modele/presentation.asp?id=6
4. Correlates of War Project. (2023). *Inter-State War Data, Version 4.0*. Retrieved from <https://correlatesofwar.org/data-sets/COW-war>
5. Correlates of War Project. (2020). *National Material Capabilities Data, Version 6.0 (Abridged)*. Retrieved from <https://correlatesofwar.org/data-sets/national-material-capabilities>
6. Correlates of War Project. (2017). *Direct Contiguity Data, Version 3.2*. Retrieved from <https://correlatesofwar.org/data-sets/direct-contiguity>
7. Correlates of War Project. (2016). *Dyadic Trade Data, Version 3.0*. Retrieved from <https://correlatesofwar.org/data-sets/bilateral-trade>
8. Elbadawi, I., & Sambanis, N. (2001). How much war will we see? Estimating the incidence of civil war in 161 countries.
9. Hegre, H. (2008). Gravitating toward war: Preponderance may pacify, but power kills. *Journal of Conflict Resolution*, 52(4), 566–589.
10. Kaufmann, D., Kraay, A., & Mastruzzi, M. (2010). The Worldwide Governance Indicators: Methodology and Analytical Issues. *World Bank Policy Research Working Paper No. 5430*.

11. Kimbrough, E. O., Laughren, K., & Sheremeta, R. (2020). War and conflict in economics: Theories, applications, and recent trends. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 178, 998-1013.
12. König, B. (2023). Trendy v empirických štúdiách vojnových konfliktov založených na ekonometrických prístupoch = Trends in Empirical Studies of War Conflicts Based on Econometric Approaches. In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XV [elektronický zdroj]: Zborník zo seminára, 24.–26. mája 2023, Púchov (pp. 58–62). Bratislava: Letra Edu. ISBN 978-80-69021-03-7.
13. Sarkees, M. R., & Wayman, F. W. (2010). *Resort to War: A Data Guide to Inter-State, Extra-State, Intra-State, and Non-State Wars, 1816–2007*. Washington, DC: CQ Press.
14. Stinnett, D. M., Tir, J., Diehl, P. F., Schafer, P., & Ghosn, F. (2002). The Correlates of War Project Direct Contiguity Data, Version 3.0. *Conflict Management and Peace Science*, 19(2), 58–66.
15. von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
16. World Bank. (2023). *Worldwide Governance Indicators (WGI)*. Retrieved from <https://info.worldbank.org/governance/wgi/>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Brian König, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: brian.konig@euba.sk

EKONOMETRICKÉ PRÍSTUPY MODELOVANIA LIEČEBNÝCH EFEKTOV PRED-REHABILITÁCIE

ECONOMETRIC APPROACHES FOR MODELLING THE TREATMENT EFFECTS OF PRE-REHABILITATION

Veronika Miťková

Abstrakt

Cieľom tohto článku je poskytnúť prehľad ekonometrických metód, ktoré využívajú porovnanie medzi liečenou a kontrolnou skupinou na odhadovanie kauzálnych efektov pred-rehabilitácie pacientov, ktorí podstupujú výmenu kolenného alebo bedrového kĺbu. V článku analyzujeme teoretické základy a metodologický vývoj rôznych estimátorov, ako rozdiel v rozdieloch (Difference-in-Differences), priradenie na základe pravdepodobnosti liečby, teda skóre náklonnosti (Propensity Matching Score), inštrumentálne premenné (Instrumental Variables) a regresný diskontinuitný dizajn (Regression Discontinuity Design). Zohľadňujeme aj moderné prístupy založené na strojovom učení, ako aj syntetické kontrolné metódy. V závere diskutujeme aplikačné možnosti týchto metód v súčasnom výskume.

Kľúčové slová: *pred-rehabilitácia, rozdiel-v-rozdieloch, skóre náklonnosti, regresný diskontinuitný dizajn*

Abstract

The purpose of this article is to provide an overview of econometric methods that use comparisons between treatment and control groups to estimate the causal effects of pre-rehabilitation in patients undergoing knee or hip replacement. In this paper, we analyze the theoretical foundations and methodological development of various estimators such as Difference-in-Differences (DID), Propensity Matching Score (PMS), Instrumental Variables (IV), and Regression Discontinuity Design (RDD). We also consider modern machine learning-based approaches as well as synthetic control methods. We conclude by discussing the applications of these methods in current research.

Keywords: *prerehabilitation, Difference-in-Differences, Propensity Matching Score, Regression Discontinuity Design*

1 ÚVOD

Empirická ekonómia čoraz viac kladie dôraz na identifikáciu kauzálnych efektov pri modelovaní rôznych opatrení. Keďže tradičné korelačné prístupy nedokážu zachytiť skutočný dopad, napríklad pred-rehabilitačnej starostlivosti o pacientov podstupujúcich ortopedický zákrok, rozvinuli sa také metodické nástroje, ktoré využívajú porovnanie liečenej a kontrolnej skupiny ako základ pre odhad kauzálnych účinkov. Tento článok ponúka systematický prehľad týchto metód.

2 PREHLAD EKONOMETRICKÝCH PRÍSTUPOV

V tejto časti uvádzame prehľad techník odhadov parametrov modelov zameraných na odhad efektov pred-rehabilitácie pacientov, ktorí podstupujú výmenu kolenného alebo bedrového kĺbu. Všetci pacienti podstupujú operačný zákrok a sú rozdelení do dvoch skupín: liečebná skupina tvorí pacientov, ktorí pred samotnou operáciou absolvujú rehabilitačný program a kontrolnú skupinu tvoria tí pacienti, ktorí pred-rehabilitáciu neabsolvujú.

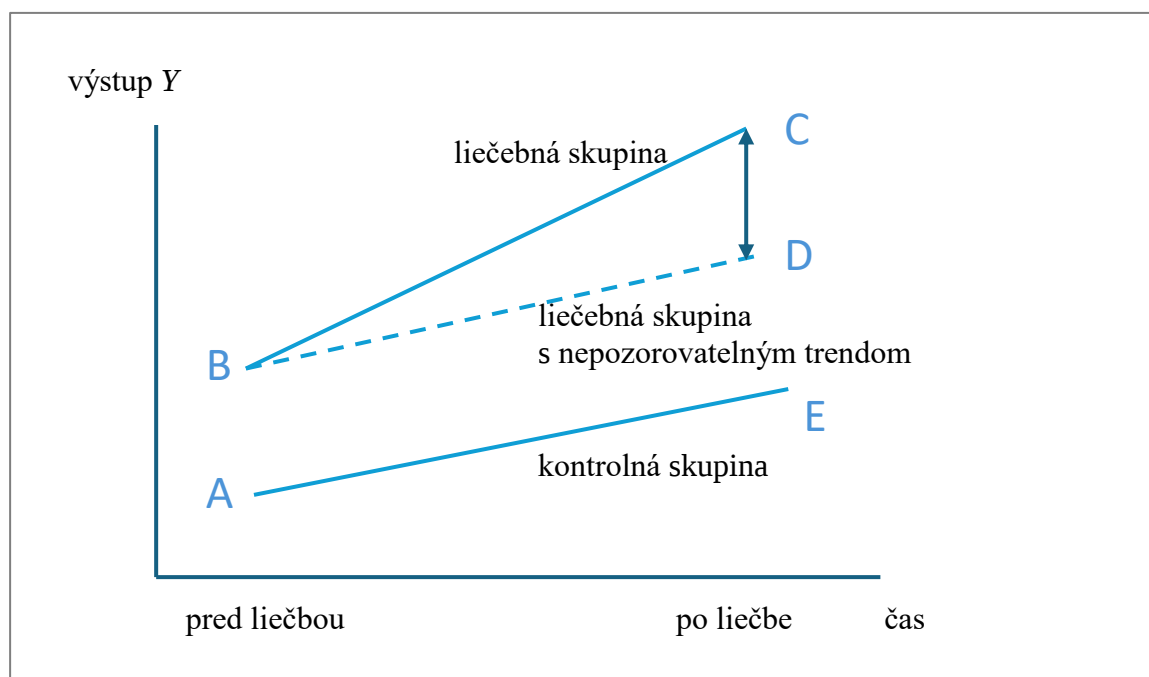
2.1 Rozdiel v rozdieloch

Metóda nazývaná difference-in-differences (DiD), teda rozdiel v rozdieloch, využíva panelové alebo opakované prierezné údaje na porovnanie vývoja výsledkov v liečenej a kontrolnej skupine pred a po rehabilitácii. Predpokladom je paralelný trend – v neprítomnosti liečby by sa vývoj oboch skupín pohyboval podobne. DiD možno vyjadriť ako interakčný efekt v regresnom modeli. Praktické aplikácie zahŕňajú hodnotenie vplyvu minimálnej mzdy, reformy daní alebo zdravotnej politiky, na ktorú zameriavame pozornosť v tomto článku. Bertrand, Duflo a Mullainathan (2004) upozorňujú na potrebu korekcie štandardných chýb pre zoskupené dáta.

Tabuľka 1: Diff-in-diff estimátor

výstup Y	pred liečbou	po liečbe
kontrolná skupina	$\hat{A} = \bar{y}_{\text{kontrolna,pred}}$	$\hat{E} = \bar{y}_{\text{kontrolna,po}}$
liečebná skupina	$\hat{B} = \bar{y}_{\text{liecebna,pred}}$	$\hat{C} = \bar{y}_{\text{liecebna,po}}$

Obrázok 1: : Schematické znázornenie diff-in-diff estimátora



Zdroj: Hill, Griffiths, Lim

2.2 Matching

Matching je metóda, ktorá sa snaží vytvoriť rovnovážnu kontrolnú skupinu porovnaním jednotiek na základe podobnosti ich kovariátov. Najznámejším prístupom je propensity score matching (PSM), ktorý používa pravdepodobnosť vystavenia liečbe ako jedinú vysvetľujúcu premennú. Základy tejto metódy položili Rosenbaum a Rubin (1983). Matching je náchylný na

skreslenie v prípade, že neboli zohľadnené všetky relevantné premenné, a preto je nevyhnutné kombinovať ho s robustnými testami vyváženosti a senzitivity.

2.3 Inštrumentálne premenné

V prípadoch, kedy nie je možné predpokladať nezávislé zaradenie do kontrolnej a liečebnej skupiny, užitočnú alternatívu poskytuje metóda inštrumentálnych premenných (Instrumental Variables). Inštrument je premenná, ktorá ovplyvňuje pravdepodobnosť podstúpenia liečby, ale sama osebe nemá priamy vplyv na výsledkovú premennú, teda jej účinok na výsledok prebieha výhradne cez liečbu. Základný rámec pre odhadovanie tzv. lokálneho priemerného efektu liečby (Local Average Treatment Effect, LATE) predstavil Imbens a Angrist (1994).

Táto metóda má však aj svoje obmedzenia. Najzásadnejším problémom je náročnosť nájdenia validného a silného inštrumentu. Slabé inštrumenty môžu viesť k veľkej štatistickej neistote alebo skresleniu odhadu. Navyše sa odhaduje len efekt na podskupinu tzv. compliers – jednotky, ktorých správanie sa mení v reakcii na inštrument. Preto odhad pomocou inštrumentálnych premenných nemusí byť generalizovateľný na celú populáciu.

2.4 Regresný diskontinuitný dizajn

Regresný diskontinuitný dizajn (Regression Discontinuity Design, RDD) je kvázi-experimentálna metóda, ktorá využíva prahové rozhodovacie premenné, ktoré určujú podstúpenie liečby. Ak sú jednotky tesne nad a pod touto hranicou porovnateľné, rozdiel vo výsledkoch možno interpretovať ako kauzálny efekt liečby. Predpokladom je, že ostatné faktory sa v okolí prahu menia hladko. Rozlišujeme dve základné formy RDD: Sharp RDD, kde prah presne určuje priradenie k liečbe a Fuzzy RDD, kde prah ovplyvňuje pravdepodobnosť priradenia, ale neurčuje ju striktne.

Metodologický základ položili Hahn, Todd a van der Klaauw (2001). Dôležitou výzvou v praxi je overenie nemanipulovateľnosti prahu – ak si jednotky (pacienti) vedia účelovo upraviť svoju pozíciu voči prahu, platnosť dizajnu je ohrozená. McCrary (2008) navrhol test na detekciu diskontinuit v hustote rozdeľovacej premennej ako indikátor manipulácie.

2.5 Syntetické kontrolné metódy

Syntetické kontrolné metódy slúžia na vytvorenie kontrafaktuálu pre liečenú jednotku (pacienta) v prípade, ak chýba vhodná prirodzená kontrolná skupina. Táto metóda bola zavedená Abadiem a Gardeazabalom (2003) a neskôr rozšírená v práci Abadie, Diamond a Hainmueller (2010). Rozšírením pôvodného prístupu je Generalized Synthetic Control (Xu, 2017), ktorý umožňuje viacrozmerné a panelové modelovanie s interaktívnymi fixnými efektmi.

Princíp tejto metódy spočíva vo vytvorení „syntetickej“ kontrolnej jednotky ako váženého priemeru nevystavených jednotiek (neliečených pacientov), pričom váhy sú zvolené tak, aby syntetická jednotka čo najvernejšie kopírovala vývoj liečenej jednotky pred liečbou. Metóda je transparentná a umožňuje vizuálnu aj kvantitatívnu validáciu.

2.6 Strojové učenie a kauzálna inferencia

Rozvoj metód strojového učenia (Machine Learning, ML) poskytol nové nástroje pre kauzálnu inferenciu, najmä pri práci s veľkým množstvom premenných alebo pri identifikácii heterogénnych efektov liečby. ML techniky však samy osebe nezaručujú kauzalitu, je potrebné ich vhodne integrovať do ekonometrických rámcov.

Jednou z najvýznamnejších metód je Double Machine Learning (DML), ktorú vyvinul Chernozhukov et al. (2018). Tento prístup oddeľuje predikciu a identifikáciu pomocou tzv. ortogonalizácie, čo zabezpečuje konzistentnosť odhadu aj pri použití flexibilných ML nástrojov.

Ďalšími dôležitými prístupmi sú tzv. kauzálne lesy (Causal Forests) od Wager a Athey (2018), ktoré umožňujú nelineárne a heterogénne efekty, a metóda X-learner (Künzel et al., 2019), ktorá zvyšuje presnosť odhadu pri nevyvážených skupinách.

3 MODELOVANIE LIEČEBNÝCH EFEKTOV PRED-REHABILITÁCIE PO ORTOPEDICKÝCH ZÁKROKOCH

Jednou z významných oblastí aplikácie ekonometrických odhadov je zdravotníctvo, najmä hodnotenie účinnosti rehabilitačných programov po náročných ortopedických operáciách, ako sú výmeny bedrového alebo kolenného kĺbu. Takéto zásahy majú vysokú prevalenciu v staršiej populácii a predstavujú značnú záťaž pre verejné rozpočty. Zároveň existuje značná heterogenita v priebehu zotavovania a výsledkoch pacientov, čo si vyžaduje precíznu evaluáciu intervencií.

Metóda rozdielu v rozdieloch bola použitá napríklad na hodnotenie efektívnosti včasnej mobilizácie pacientov, pričom sa porovnávali nemocnice pred a po zavedení štandardizovaného rehabilitačného protokolu. Matching bol efektívne použitý na vytvorenie porovnateľných skupín pacientov v štúdií Naylor et al. (2018), ktorá skúmala efekt rehabilitácie v domácnosti oproti nemocničnej starostlivosti.

Inštrumentálne premenne sa uplatnili pri riešení selekčného skreslenia spôsobeného výberom pacientov do špecifických liečebných programov. Napríklad Masaracchio et al. (2017) použili vzdialenosť k rehabilitačnému centru ako inštrument pre prijatie do intenzívneho programu.

Moderné prístupy ako syntetické kontrolné metódy a kauzálne lesy sa osvedčili pri analýzach na úrovni zdravotníckych zariadení alebo regiónov, kde chýba prirodzená kontrolná skupina. Významné metodologické výzvy v tejto oblasti zahŕňajú zaistenie merania výsledkov kvality života, sledovanie dlhodobých účinkov a kontrolu komorbidít. Strojové učenie má potenciál odhaliť heterogénne efekty u rôznych podskupín pacientov a tým umožniť personalizovanejšiu zdravotnú starostlivosť. Ekonometrické metódy založené na porovnávaní liečených a kontrolných skupín tak predstavujú nevyhnutný nástroj pre politiku založenú na dôkazoch, najmä v citlivých oblastiach ako je zdravotná starostlivosť.

Použitá literatúra

Abadie, A. and Gardeazabal, J. (2003). The economic costs of conflict: A case study of the Basque Country. *American Economic Review*, 93(1), pp.113–132.

Abadie, A., Diamond, A. and Hainmueller, J. (2010). Synthetic control methods for comparative case studies: Estimating the effect of California's tobacco control program. *Journal of the American Statistical Association*, 105(490), pp.493–505.

Bertrand, M., Duflo, E. and Mullainathan, S. (2004). How much should we trust differences-in-differences estimates? *Quarterly Journal of Economics*, 119(1), pp.249–275.

Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Demirer, M., Duflo, E., Hansen, C., Newey, W., & Robins, J. (2018). Double/debiased machine learning for treatment and structural parameters. *The Econometrics Journal*, 21(1), pp.C1–C68.

Hahn, J., Todd, P. and van der Klaauw, W. (2001). Identification and estimation of treatment effects with a regression-discontinuity design. *Econometrica*, 69(1), pp.201–209.

Hill, R. C., Griffiths, W. E., and Lim, G. C. (2018). *Principles of econometrics*. John Wiley & Sons.

Imbens, G.W. and Angrist, J.D. (1994). Identification and estimation of local average treatment effects. *Econometrica*, 62(2), pp.467–475.

Künzel, S.R., Sekhon, J.S., Bickel, P.J. and Yu, B. (2019). Metalearners for estimating heterogeneous treatment effects using machine learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(10), pp.4156–4165.

Masaracchio, M., Hanney, W. J., Liu, X., Kolber, M., and Kirker, K. (2017). Timing of rehabilitation on length of stay and cost in patients with hip or knee joint arthroplasty: a systematic review with meta-analysis. *PloS one*, 12(6), e0178295.

McCrary, J. (2008). Manipulation of the running variable in the regression discontinuity design: A density test. *Journal of Econometrics*, 142(2), pp.698–714.

Naylor, J. M., Hart, A., Mittal, R., Harris, I. A., & Xuan, W. (2018). The effectiveness of inpatient rehabilitation after uncomplicated total hip arthroplasty: a propensity score matched cohort. *BMC musculoskeletal disorders*, 19, 1-10.

Rosenbaum, P.R. and Rubin, D.B. (1983). The central role of the propensity score in observational studies for causal effects. *Biometrika*, 70(1), pp.41–55.

Wager, S. and Athey, S. (2018). Estimation and inference of heterogeneous treatment effects using random forests. *Journal of the American Statistical Association*, 113(523), pp.1228–1242.

Xu, Y. (2017). Generalized synthetic control method: Causal inference with interactive fixed effects models. *Political Analysis*, 25(1), pp.57–76.

Kontaktné údaje

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava, Slovakia

Tel: (421 2) 2066 9863

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

Pod'akovanie

Tento projekt bol podporený grantom APVV-22-0526 „The Economic and Fiscal Effects of Migration in Slovakia: An Integrated Modeling Approach“ a projektom INTERREG „Socio-

economic Effects of Pre-Rehabilitation in Knee and Hip Transplantation in Cross-border Cooperation,,.

JE RAST AMERICKEJ EKONOMIKY PO FINANČNEJ KRÍZE NIŽŠÍ?

IS THE US ECONOMY GROWTH LOWER AFTER THE FINANCIAL CRISIS?

Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková¹

Abstrakt

Táto štúdia na dostupných oficiálnych údajoch preukáže, že od finančnej krízy v roku 2008 je priemerný americký rast HDP na obyvateľa štatisticky významne nižší. Využijú sa spojité výpočty miery rastu v rôznych obdobiach (pred a po finančnej kríze). Štatistickú významnosť rozdielov rastu pred a po finančnej kríze bude testovaná na báze log-lineárneho regresného modelu trendu. Analýza sa zopakuje využitím trendovej zložky reálneho HDP na obyvateľa.

Kľúčové slová: miera rastu reálneho HDP na obyvateľa, Chowov test, Hamiltonov filter

Abstract

Using available official data, this study will show that since the 2008 financial crisis, average United States GDP per capita growth has been statistically significantly lower. It will make use of continuous calculations of growth rates in different periods (before and after the financial crisis). The statistical significance of the differences in growth before and after the financial crisis will be tested using a log-linear regression trend model. The analysis will be repeated using the trend component of real GDP per capita.

Keywords: real per capita GDP growth rate, Chow test, Hamilton filter

1 ÚVOD

V Spojených štátoch amerických „priemerná miera rastu reálneho HDP od 1870 do 2005 bola 3,5 % ročne. ... Ak podelíme populáciou, aby sme určili reálny HDP na hlavu, ukáže sa, že priemerná miera rastu reálneho HDP na hlavu bola 2,0 % ročne. ... Miera rastu reálneho HDP na hlavu v hodnote 2,0 % ročne znamená, že reálny HDP na hlavu vzrástol 16-násobne od 1869 do 2005.“ (Barro, 2008, s. 4)

„Priemerná miera rastu HDP bola 3,4 % od roku 1948 do 2005, v porovnaní s 3,8 % od 1890 do 1914.“ (Barro, 2008, s. 6)

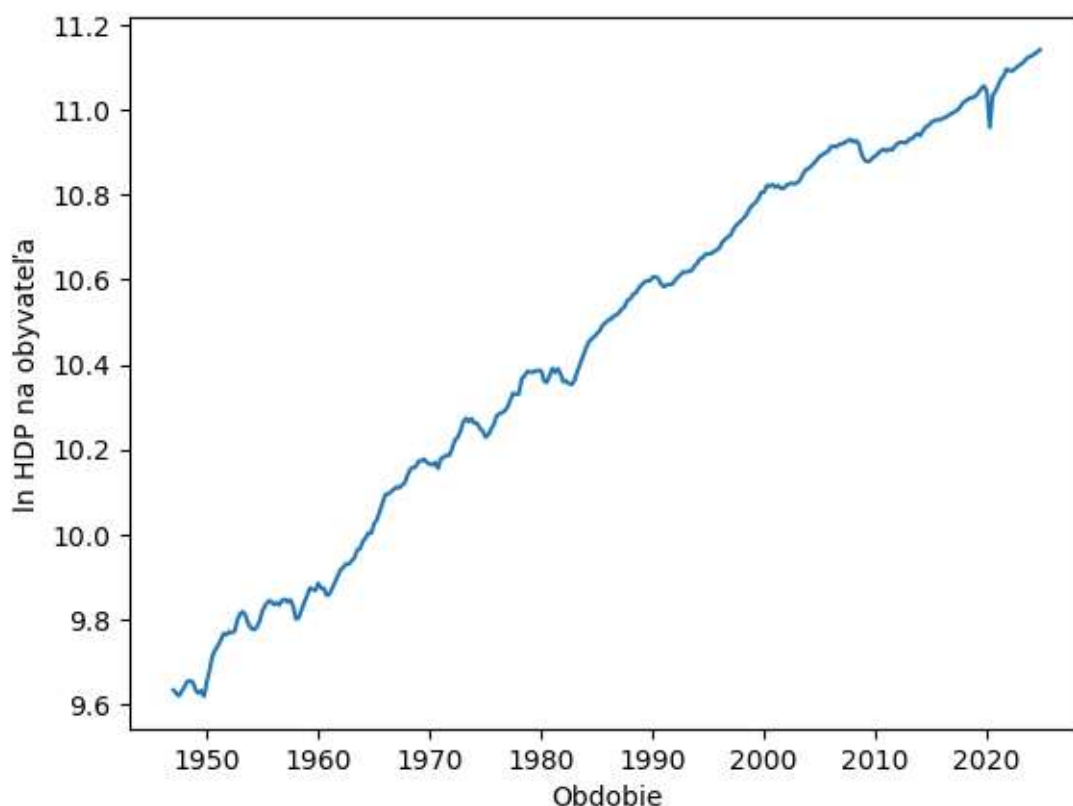
Táto štúdia na dostupných oficiálnych údajoch preukáže, že od finančnej krízy v roku 2008 je priemerný americký rast HDP na obyvateľa štatisticky významne nižší. Využijú sa spojité výpočty miery rastu v rôznych obdobiach (pred a po finančnej kríze). Štatistickú významnosť rozdielov rastu pred a po finančnej kríze bude testovaná na báze log-lineárneho regresného modelu trendu. Analýza sa zopakuje využitím trendovej zložky reálneho HDP na obyvateľa.

2 ÚDAJE, METODOLÓGIA A VÝSLEDKY

Obr. 1 zobrazuje prirodzený logaritmus štvrtročného, sezónne očisteného časového radu reálneho HDP na obyvateľa s základným rokom 2017 v období od 1947 po 2024 publikovaného Americkým úradom ekonomickej analýzy (US Bureau of Economic Analysis)

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0052/24 „Odhad kľúčových štrukturálnych parametrov súčasných makroekonomických modelov“ a VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“.

a získaného z portálu Federálnej rezervnej banky St. Louis (Federal Reserve Bank of St. Louis, FRED). Graf priebehu naznačuje pokles rastu reálneho HDP na obyvateľa od finančnej krízy v roku 2008.



Obr. 1: prirodzený logaritmus štvrťročného, sezónne očisteného časového radu reálneho HDP na obyvateľa s základným rokom 2017 v období od 1947 po 2024.

Zdroj: Americký úrad ekonomickej analýzy (US Bureau of Economic Analysis), portál Federálnej rezervnej banky St. Louis (Federal Reserve Bank of St. Louis, FRED)

Podľa FRED finančná kríza začala v prvom štvrťroku 2008 skončila v treťom štvrťroku 2009. Spojité výpočty priemernej miery rastu v celkovom období a v obdobiach pred a po finančnej krízy sú v tab. 1.

Obdobie	Rast reálneho HDP na obyvateľa v %
1947Q1:2024Q4	1,9 %
1947Q1:2007Q4	2,1 %
2008Q1:2024Q4	1,3 %
2009Q3:2024Q4	1,7 %

Tab. 1: Spojité výpočty priemernej ročnej miery amerického rastu reálneho HDP na obyvateľa v rôznych obdobiach.

Zdroj: vlastné výpočty

Miera rastu reálneho HDP na obyvateľa v celom období (1,9 %) je o málo nižšia ako Barrova referenčná hodnota 2,0 %. V období pred krízou je táto hodnota dokonca o trochu vyššia (2,1 %). V období od začiatku finančnej krízy je priemerný rast reálneho HDP podstatne nižší (1,3 %). Americká ekonomika nevyužila oživenie po kríze, aby sa vrátila do dlhodobého trendu, naopak, priemerná miera rastu reálneho HDP v období od oživenia (vrátane) bola relatívne nízka (1,7 %).

Na verifikáciu štatistickej významnosti rozdielu mier rastu v obdobiach pred a po finančnej kríze možno využiť Chowov (1960) test. Nasledujúce rovnice slúžia na odhad priemernej miery rastu reálneho HDP v celom období a v obdobiach pred a po finančnej kríze.

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= 9,680 + 0,0049t \\ (0,006) \quad (3,41 \times 10^{-5}) \quad R^2 &= 0,985 \\ \hat{y}_t &= 9,631 + 0,0055t + 0,2934d_t - 0,0016d_t t \\ (0,004) \quad (2,66 \times 10^{-5}) \quad (0,050) \quad (0,000) \quad R^2 &= 0,996 \end{aligned} \tag{1}$$

Vyrovnané hodnoty prirodzeného logaritmu reálneho HDP na obyvateľa sú označené symbolom $\hat{y}_t$, časový trend je t , umelá premenná, ktorej hodnota je 0 v období od 1947Q1 do 2007Q4 a 1 v období od 2008Q1 do 2024Q4 je d_t . Podľa výsledkov, priemerná ročná miera rastu reálneho HDP na obyvateľa bola v celom období približne 2,0 %, v období pred finančnou krízou približne 2,2 % a po nej približne 1,6 %.

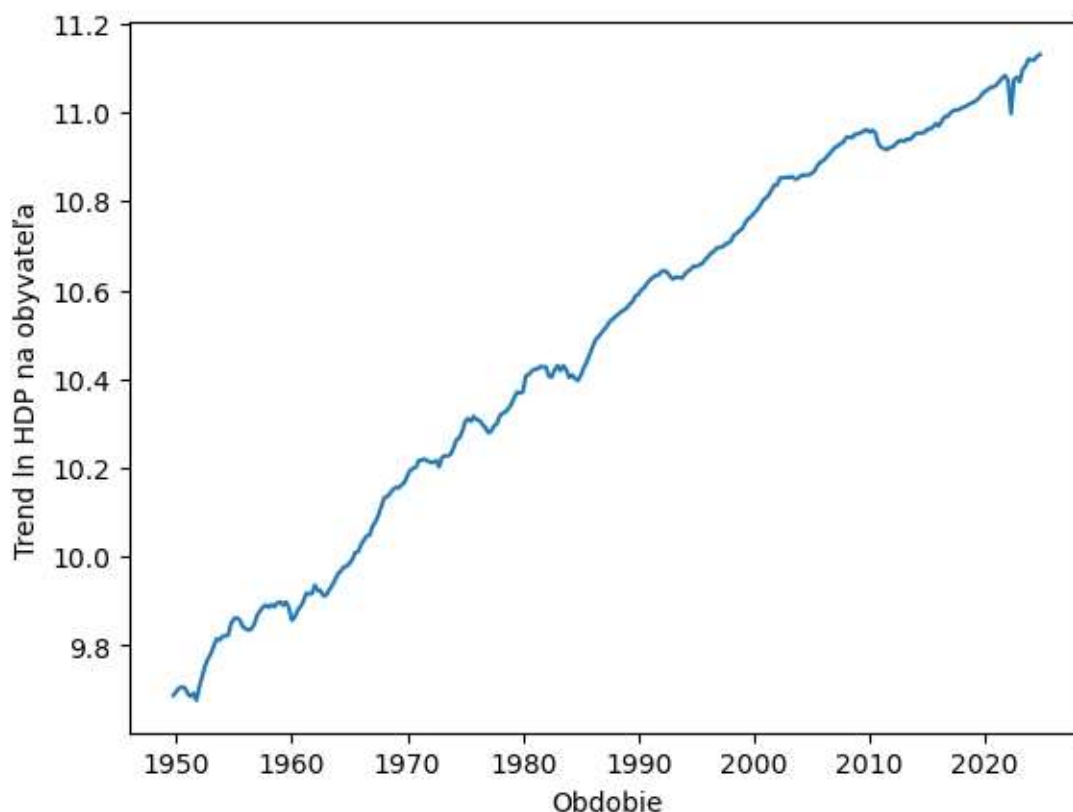
Štatistické porovnanie neohraničeného (prvá regresná rovnica) a ohraničeného (druhá) lineárneho modelu (1) možno formulovať združenou hypotézou, že parametre násobiace umelú premennú a súčin umelej a trendovej premennej sa spoločne rovnajú 0. Zodpovedajúca štatistika podliehajúca Fisherovmu rozdeleniu s počtom stupňov voľnosti 2 (počet ohraničujúcich parametrov) a 308 (počet pozorovaní mínus počet parametrov v ohraničujúcom modeli) sa rovná 379,09 a preto sa hypotéza zamietá. Inými slovami americký rast reálneho HDP na obyvateľa sa po finančnej kríze štatisticky významne znížil.

Štúdia sa zaoberá porovnaním trendov v rôznych obdobiach. Preto sa v ďalšej analýze abstrahuje od hospodárskych cyklov. Trendová zložka prirodzeného logaritmu reálneho HDP na obyvateľa odhadnutá Hamiltonovým filtrom (2018) je na obr. 2.

Za parametre Hamiltonovej funkcie sú zvolené odporúčané hodnoty, časový horizont, pri ktorom je pravdepodobná nesprávna predikcia je $h = 8$ a počet oneskorení v Hamiltonovej regresnej rovnici je $p = 4$. Výsledný časový rad trendovej zložky je od 4. štvrťroku 1949 po štvrtý štvrťrok 2024.

Aj tento graf naznačuje menší rast od finančnej krízy. V tab. 2 sú hodnoty miery rastu v daných obdobiach. Rozdiely rastu trendovej zložky sú ešte výraznejšie.

Nasledujúce rovnice odhadujú miery rastu trendovej zložky reálneho HDP na obyvateľa v obdobiach pred a po finančnej kríze.



Obr. 2: trendová zložka prirodzeného logaritmu časového radu reálneho HDP na obyvateľa odhadnutá Hamiltonovým filtrom.

Zdroj: Vlastné výpočty

Obdobie	Rast trendu reálneho HDP na obyvateľa v %
1947Q1:2024Q4	1,9 %
1947Q1:2007Q4	2,2 %
2008Q1:2024Q4	1,1 %
2009Q3:2024Q4	1,1 %

Tab. 2: Spojité výpočty priemernej ročnej miery amerického rastu reálneho HDP na obyvateľa v rôznych obdobiach (trendová zložka).

Zdroj: vlastné výpočty

$$\hat{y}_t = 9,746 + 0,0049t$$

$$(0,006) \quad (3,44 \times 10^{-5}) \quad R^2 = 0,985$$

(2)

$$\hat{y}_t = 9,702 + 0,0054t + 0,5246d_t - 0,0025d_t t$$

$$(0,004) \quad (2,82 \times 10^{-5}) \quad (0,048) \quad (0,000) \quad R^2 = 0,995$$

Rovnice (2) odhadujú hodnotu priemernej ročnej miery rastu reálneho HDP na obyvateľa v celom období rovnajúcu sa približne 2,0 %, v období pred finančnou krízou približne 2,2 % a po nej približne 1,2 %. Vypočítaná štatistika Fisherovho rozdelenia s počtami stupňov voľnosti 2, 297 hypotézy, že medzi neohraničeným a ohraničeným modelom nie je rozdiel sa rovná 330,10. Znova konštatujeme, že americký rast reálneho HDP na obyvateľa sa po finančnej kríze štatisticky významne znížil.

3 ZÁVER

Táto práca na dostupných oficiálnych údajoch preukázala, že od finančnej krízy v roku 2008 je priemerný americký rast HDP na obyvateľa štatisticky významne nižší. Využili sa spojité výpočty miery rastu v rôznych obdobiach (pred a po finančnej kríze). Podľa výsledkov, priemerná ročná miera rastu reálneho HDP na obyvateľa spadla z hodnoty 2,1 % v období pre finančnou krízou na 1,3 % po kríze. Štatistickú významnosť rozdielov rastu pred a po finančnej kríze bude testovaná na báze log-lineárneho regresného modelu trendu. Podľa odhadov bola miera rastu reálneho HDP na obyvateľa pred krízou 2,2 %, ale po kríze už iba 1,6 %.

Ešte výraznejšie rozdiely sa ukázali na časovom rade trendovej zložky prirodzeného logaritmu reálneho HDP na obyvateľa. Podľa spojeného výpočtu, ako aj podľa regresného modelu, bola miera rastu reálneho HDP na obyvateľa pred finančnou krízou 2,2 %. Po finančnej kríze, však reálny HDP na obyvateľa rástol priemernou ročnou mierou 1,1 % (spojitým výpočtom), resp. 1,2 % (v regresnom modeli).

Použitá literatúra

Barro, R.J. (2008) *Macroeconomics: A modern approach*. Mason, OH, Ohio: Thomson South-Western.

Chow, G.C. (1960) 'Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions', *Econometrica*, 28(3), p. 591. doi:10.2307/1910133.

Hamilton, J.D. (2018) 'Why you should never use the Hodrick-prescott filter', *The Review of Economics and Statistics*, 100(5), pp. 831–843. doi:10.1162/rest_a_00706.

'U.S. Bureau of Economic Analysis, Real gross domestic product per capita [A939RX0Q048SBEA], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; <https://fred.stlouisfed.org/series/A939RX0Q048SBEA>, May 21, 2025.' (2025).

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: karol.szomolanyi@euba.sk

prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: martin.lukacik@euba.sk

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: adriana.lukacikova@euba.sk

OPTIMALIZAČNÝ PRÍSTUP K MERANIU ZMIEN V PRIESTOROVOM ROZŠÍRENÍ DRUHOV

AN OPTIMIZATION-BASED APPROACH TO MEASURING CHANGES IN SPECIES' SPATIAL DISTRIBUTION

Jan Zouhar

Abstrakt

Jednou z dôležitých otázok v monitorovaní voľne žijúcich živočíchov je, ako sa v priebehu času mení priestorové rozšírenie jednotlivých druhov. Na identifikáciu týchto zmien v rámci určitého územia (zvyčajne krajiny) je užitočné merať podobnosť rozšírenia v po sebe nasledujúcich rokoch. V tomto príspevku predstavujeme využitie tzv. Earth Mover's Distance (EMD), optimalizačnej metriky založenej na dopravnej úlohe, na tento účel. Táto metrika vychádza z dopravnej úlohy, ktorá patrí medzi klasické problémy operačného výskumu. Výhodou EMD je jej zrozumiteľná interpretácia a dostupnosť nástrojov v R, ktoré uľahčujú výpočty pri práci s monitorovacími údajmi. Jej využitie ilustrujeme na dlhodobých údajoch z Medzinárodného sčítania vodného vtáctva v Českej republike.

Kľúčové slová: *Earth Mover's Distance, priestorové rozšírenie, monitoring voľne žijúcich živočíchov*

Abstract

One key question in wildlife monitoring is how the spatial distribution of a species changes over time. To detect such changes across a region (typically a country), it is useful to measure the similarity of distributions in consecutive years. We demonstrate how the Earth Mover's Distance (EMD), an optimization-based metric, can be used for this purpose. This metric is grounded in the transportation problem, a classic model in operations research. EMD offers a clear interpretation and can be efficiently computed using tools available in R for ecological monitoring data. We illustrate its application using long-term data from the International Waterbird Census from the Czech Republic.

Keywords: *Earth Mover's Distance, spatial distribution, wildlife monitoring*

1 INTRODUCTION

Wildlife monitoring programs worldwide collect vast amounts of data on species distributions and abundances. Analyzing how these spatial distributions change over time is a fundamental aspect of ecology and wildlife management. Understanding these changes across a region, such as a country, provides crucial insights into population dynamics, responses to environmental pressures, and the effectiveness of conservation efforts. However, developing quantitative measures that effectively capture changes in spatial distribution, particularly when dealing with data collected at discrete monitoring sites, can be challenging. (See Table 1 for an illustration of the structure of a typical dataset that comes from a wildlife monitoring project; this particular example deals with waterbird abundance monitoring.)

Traditional statistical methods for comparing distributions, such as Kullback-Leibler divergence or Jensen-Shannon divergence, focus on the overlap of probability mass in the same regions. However, these metrics fail to capture the spatial nature of distribution changes. To give an example related to Table 1, if an entire flock of birds moves a short distance to a nearby

water pond, traditional metrics would register a complete change in distribution despite the spatial proximity of the new location.

This simple illustration shows that a useful metric to gauge distribution changes should incorporate geographic distance between different parts of the distribution’s domain. One such metric, the so-called Earth Mover’s Distance (EMD), happens to be derived from a classical problem in operations research: the ubiquitous transportation problem.

The aim of this paper is threefold: (i) to advocate for the use of the EMD as a valuable descriptive statistic for analyzing species monitoring data structured as counts or proportions at discrete sites; (ii) to demonstrate its practical application using typical long-term bird monitoring data from Czechia; and (iii) to discuss its key merits, limitations, and computational considerations in the context of ecological monitoring. By applying EMD to this specific data structure, we show how it can provide a quantitative, intuitively interpretable measure of changes in species’ spatial distributions over time.

2 BACKGROUND: THE EARTH MOVER’S DISTANCE

The Earth Mover’s Distance, also known as the Monge-Kantorovich mass transportation distance, the Wasserstein distance, or the Mallows distance, has a rich history, dating back to the 18th century. The concept was first introduced by Gaspard Monge in 1781 in the context of transportation theory (see Deng and Yu, 2009). Later, Kantorovich (1942) gave a relaxed formulation of the problem and proposed a variational principle for solving it. In recent years, EMD has been successfully applied in a wide array of fields for comparing diverse types of distributions. These applications include computer vision (e.g., Rubner et al, 1997), paleoclimatology/paleoecology (for comparing vegetation distributions or affinity scores) (Chevalier et al, 2023), physics (for comparing particle collision events) (Schmitt, 2019), and many more.

The EMD’s name stems from its intuitive interpretation. Consider two distributions, P and Q , defined on the same metric space M . If these distributions are viewed as piles of earth (dirt) – with the mass of dirt representing the probability mass – the EMD represents the minimum cost of transforming one pile into the other, where cost is defined as the amount of earth moved multiplied by the distance it travels.

Formally, in a general sense, the definition of EMD may be phrased as that in Wikipedia’s (2005) page on EMD:

$$EMD(P, Q) = \inf_{F \in \Gamma(P, Q)} E_{(x, y) \sim F}[d(x, y)], \quad (1)$$

where $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ is a distance function (metric) on M and $\Gamma(P, Q)$ is the set of all joint distributions on $M \times M$ whose marginal distributions are P and Q . From this definition, the analogy with dirt transportation is far from apparent. Assuming a minimum exists, we can obtain the right-hand side of (1) as the optimal objective value in the optimization problem

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \int_{M \times M} d(x, y) \, dF(x, y) \\ & \text{subject to} && \int_{A \times M} dF(x, y) = P(A), \quad \forall A \subseteq M, \\ & && \int_{M \times B} dF(x, y) = Q(B), \quad \forall B \subseteq M. \end{aligned} \quad (2)$$

Now, let us restrict attention to marginally continuous distributions (see Studený, 2014, Chapter 1.3), so that it makes sense to talk about Radon-Nikodym densities with respect to a chosen system of dominating measures (typically, either the system of arithmetic measures for discrete-valued distributions or Lebesgue measures for continuous distributions). Denote μ and ν the dominating measures for P and Q , respectively. Rewriting (2) using densities yields a more straightforward link to the transportation problem: this approach is adopted by e.g., who restrict attention to a convex and compact $M \subset \mathbb{R}^d$ and define $\text{EMD}(P, Q)$ via the optimization problem

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \int_{M \times M} d(x, y) f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \\ & \text{subject to} && \int_M f(x, y) d\nu(y) = p(x), \quad \forall x \in M, \\ & && \int_M f(x, y) d\mu(x) = q(y), \quad \forall y \in M, \end{aligned} \quad (3)$$

where p (and q and f , respectively) is the density of P (Q , F) with respect to μ (ν , $\mu \otimes \nu$). Here, $f(x, y)$ can be interpreted as the *flow* from x to y . Indeed, if P and Q are discrete-value distributions with the supports X and Y , we can immediately rewrite (3) as

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} d(x, y) f(x, y) \\ & \text{subject to} && \sum_{y \in Y} f(x, y) = P(x), \quad \forall x \in X, \\ & && \sum_{x \in X} f(x, y) = Q(y), \quad \forall y \in Y. \end{aligned} \quad (4)$$

The structure of the transportation problem is clearly evident here. [See e.g. (Li et al, 2018) for a version of (3) with continuous, rather than discrete, distributions.]

3 USING EMD FOR WILDLIFE MONITORING DATA

Wildlife monitoring data are often acquired through widespread citizen science programmes. One such example is the International Waterbird Census (IWC), a large-scale international monitoring programme aiming at obtaining the numbers of several waterbird species. In Czechia, the IWC measurement occurs over the course of one week in January, with hundreds of amateur and professional ornithologists taking part in data collection each year.

Datasets collected within wildlife monitoring programmes often share a typical structure, representing observations collected at discrete and disjoint sites within a defined study region (e.g., a country). The core data points generally consist of the count or number of individuals of the target species observed at each individual site at a specific moment of measurement. Table 1 provides an illustrative example of this typical structure using fictitious count data for a single species at actual Czech ponds in two consecutive years.

Table 1: An example of monitoring data for EMD calculation. *Source:* Fictitious count data for actual Czech ponds.

Site	Latitude	Longitude	Count in 2022	Count in 2021
<i>site</i>	<i>lat</i>	<i>lon</i>	<i>count</i>	<i>lag count</i>
Láska (Love)	49° 6' 35.460" N	14° 44' 54.6792" E	160	80
Prkenný (Wooden)	49° 6' 43.956" N	14° 47' 10.0176" E	0	108
Klec (Cage)	49° 5' 23.438" N	14° 46' 00.4944" E	28	0

EMD can be used to measure the year-to-year changes in the geographical distribution of the species. In the context of wildlife monitoring, EMD has an intuitive interpretation: it represents the average distance an individual would have to travel to transform the spatial distribution observed at time t to the distribution observed at time $t+1$, assuming minimal effort (i.e., if the individuals moved along the most efficient transportation plan. For instance, an EMD value of

10 km between consecutive years suggests that, on average, individuals would need to travel 10 km to transform one year’s distribution into the next.

In practice, the process of EMD calculation involves three steps:

1. Representing species distributions as empirical probability distributions based on counts at monitoring sites (this includes the standardization of counts into proportions).
2. Calculating the ground distance matrix between all pairs of monitoring sites (typically using geographic distance).
3. Solving the transportation problem to find the optimal flow of “probability mass” from one distribution to another.

Fortunately, given that one already has a tidy dataset in the format of Table 1, implementing these steps in the R software using existing packages is straightforward. In Figure 2, we show a code that uses the *dplyr* package (Wickham *et al.*, 2023) for data handling (including Step 1 in the list above), the *geosphere* package (Hijmans, 2024) for Step 2, and the *emdist* package (Urbanek & Rubner, 2023) for Step 3. Even though the implementation is not complicated, we aim to produce a separate R package with utility functions for researchers that will facilitate both the actual EMD calculation and the surrounding tasks, such as data preparation and visualizations.

Figure 2: R code that transforms data from Table 1 for use with *emdist::emd()*.

```
calculate_emd <- function(df, iter = 1e5) {
  # Filter and standardize monitoring data for both years
  df <- df %>%
    filter(!is.na(count) & !is.na(lag_count)) %>% # Keep only sites observed in both yrs
    filter(count > 0 | lag_count > 0) %>% # Drop sites with zeros in both years
    mutate( # Standardize counts into probability distributions
      count = count / sum(count),
      lag_count = lag_count / sum(lag_count)
    )
  A <- df %>% select(count, lat, lon) %>% as.matrix() # Input for emdist::emd()
  B <- df %>% select(lag_count, lat, lon) %>% as.matrix() # Ditto

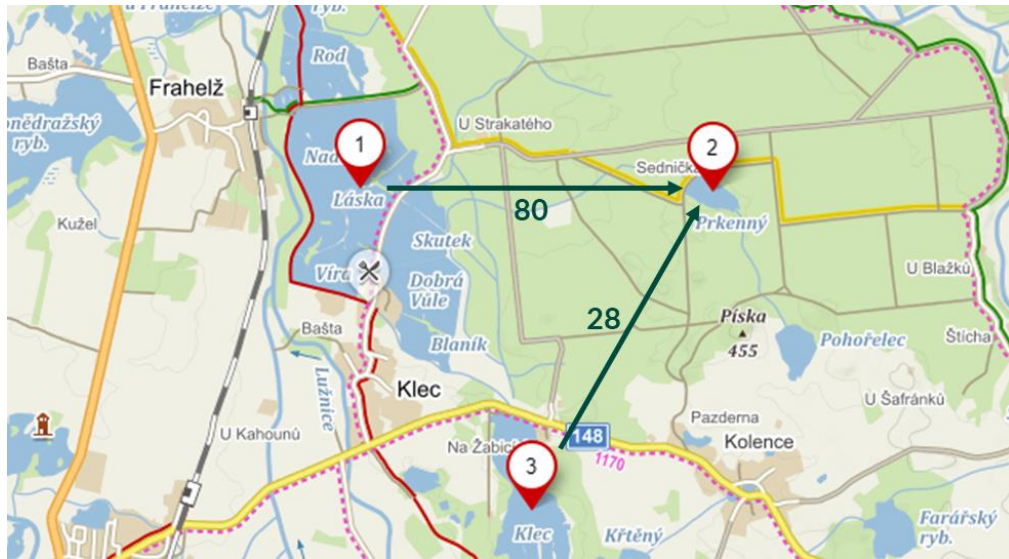
  # Calculate the EMD
  emdist::emd(A, B, max.iter=iter, dist=function(x, y) geosphere::distGeo(y[1:2], x[1:2]))
}
```

The results for the fictitious data from Table 1 are presented in Table 2 and Figure 1. For this small-scale example, results imply that if the individuals moved along the most efficient transportation plan, converting the distribution from 2021 into that of 2022 would involve a total flight distance of 293.19 kilometres, or an average of 1.56 km per individual. The latter figure is the EMD for this example.

Table 2: Distances in the optimal flight plan. *Source:* Own calculations.

	1 → 2	3 → 2	Still	Total
Distance (km)	2.757	2.594	0	
Individuals	80	28	80	188
Total dist. (km)	220.56	72.63	0	293.19
EMD (avg. dist.)				1.560

Figure 1: Optimal flight plan for Table 1. *Source:* Map screenshot taken from *mapy.cz*, own illustrations.

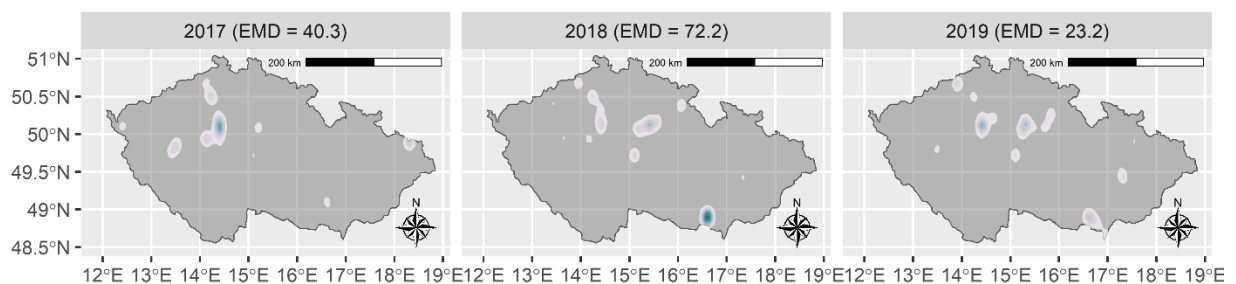


It should be noted, however, that this appealing interpretation of EMD hinges on the fact that in our example, both distributions were equal in size. If the number of individuals varies across years (as it usually does), one needs to switch the narrative from talking about actual counts to discussing proportions. (Implementation-wise, however, the problem of varying total populations is simply solved by the standardization routine included in the code in Figure 2.)

4 CASE STUDY: ASSESSING CHANGES IN CZECH WATERBIRD DISTRIBUTIONS

Needless to say, the intended purpose of EMD is not to provide optimal transportation plans for wildlife animals or measure the distance traveled in these plans. We perceive the EMD as a useful metric that enables us to compare the magnitude of distribution changes over time. To demonstrate such an application of EMD, we will use long-term data from the International Waterbird Census in the Czech Republic for several species, spanning a period of 20 years (2001–2021) and containing data on more than a thousand monitoring sites (various water bodies including lakes, fishponds, industrial waters, and river segments).

Figure 3: Spatial distribution and EMD for the Great Cormorant. *Source:* Own calculations based on IWC data for Czechia, 2016–2019.

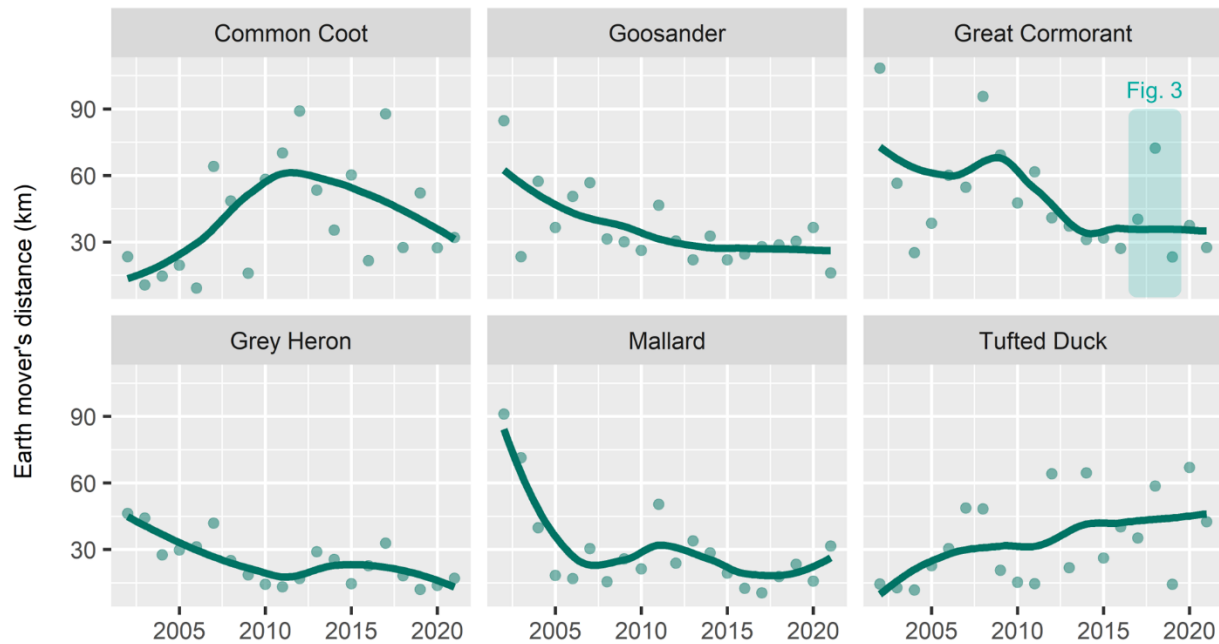


To illustrate the magnitude of distributional changes for different EMD values, consider the case of the Great Cormorant depicted in Figure 3. Between 2017 and 2018, there was a sizeable shift of the Great Cormorant population towards the large water bodies in the southeast of the

Czech Republic. This translates to a large value of EMD, 72.2, compared to the EMD of 23.2, corresponding to a largely unchanged stable spatial pattern between 2018 and 2019.

Calculating the EMD values for a large longitudinal dataset and visualizing these results can provide a very quick overview of overall distributional dynamics. An example is shown in Figure 4. Here, EMD values for 6 species are plotted over the course of 20 years. Points high above the trend lines may suggest large distributional shifts, warranting a closer inspection of detailed data by the analyst.

Figure 4: EMD values for selected waterbird species with LOESS trend lines. Source: Own calculations based on IWC data for Czechia, 2001–2021.



While EMD provides valuable insights, several caveats must be considered in its interpretation:

1. *Monitoring coverage.* Incomplete or varying monitoring coverage introduces noise in EMD calculations. Consistent sampling effort across time is important for reliable results. Data imputation techniques might be considered for more accurate EMD calculations; this is a subject of our ongoing research.
2. *Unmarked individuals.* EMD does not track individual movements but compares population-level distributions. Even if EMD equals zero, individuals may have moved considerably while maintaining the same overall distribution. This limitation is inherent in monitoring data with unmarked individuals.
3. *Abundance effects.* Total abundance affects EMD calculations, particularly in interspecies comparisons. Abundant species tend to show more stable distributions due to the law of large numbers, while rare species may exhibit higher variability in distribution patterns.
4. *Regional constraints.* EMD is inherently restricted to the defined monitoring region and cannot account for movements beyond this boundary.

5 CONCLUSION

The Earth Mover's Distance provides a powerful and intuitive metric for assessing changes in species' spatial distributions over time. By incorporating the spatial dimension of distribution changes, EMD offers deeper insights than traditional overlap-based metrics. Despite certain

limitations, the meaningful interpretation and computational tractability of EMD make it a valuable addition to the toolkit for analysing wildlife monitoring data. The ongoing development of specialized R packages will further facilitate its application in ecological research and conservation planning.

References

Chevalier, M., Dallmeyer, A., Weitzel, N., Li, C., Baudouin, J.P., Herzsuh, U., Cao, X. and Hense, A., 2023. Refining data–data and data–model vegetation comparisons using the Earth mover’s distance (EMD). *Climate of the Past*, 19(5), pp. 1043-1060.

Deng, Y. and Du, W., 2009. The Kantorovich metric in computer science: A brief survey. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 253(3), pp. 73-82.

‘Earth mover’s distance’ (2025) Wikipedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Earth_mover%27s_distance (Accessed: 14 May 2025).

Hijmans, R.J., 2024. *geosphere: Spherical Trigonometry*. R package version 1.5-20. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=geosphere>.

Li, W., Ryu, E.K., Osher, S., Yin, W. and Gangbo, W., 2018. A parallel method for earth mover’s distance. *Journal of Scientific Computing*, 75(1), pp.182-197.

Kantorovich, L. V., 1942. On the translocation of masses. *Dokl. Akad. Nauk. USSR (NS)*, 37, pp. 199-201.

Rubner, Y., Guibas, L.J. and Tomasi, C., 1997, May. The earth mover’s distance, multi-dimensional scaling, and color-based image retrieval. In *Proceedings of the ARPA image understanding workshop* (Vol. 661, p. 668).

Schmitt, M., 2019. Putting distance between collider events. *Physics*, 12(85).

Studený, M., 2014. *Struktury podmíněné nezávislosti*. 1st ed. Prague: MatfyzPress.

Urbanek, S. & Rubner, Y., 2023. *emdist: Earth Mover’s Distance*. R package version 0.3-3. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=emdist>.

Wickham, H., François, R., Henry, L., Müller, K. & Vaughan, D., 2023. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. R package version 1.1.4. Available at: <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Jan Zouhar, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha

Tel: (+420) 67 295 824

email: zouharj@vse.cz