

MODEL POISTENIA KRITICKÝCH CHORÔB

Abstrakt

Tento príspevok vznikol s cieľom poskytnúť čitateľovi informáciu o problematike poistenia kritických chorôb a stručný prehľad o práci aktuárov v tejto oblasti. Cieľom tohto príspevku je preto zhrnúť a zdôrazniť hlavné črty aktuárskej praxe v oblasti zdravotného a nemocenského poistenia. Autorka podrobnejšie popisuje nový model, ktorý by sa v súčasnosti mohol používať.

Kľúčové slová

Kritické choroby, nemocenské poistenie, aktuárske výpočty, stochastický model.

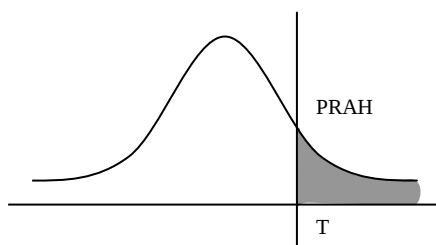
Úvod

Kritické ochorenia predstavujú riziko, ktorému je vystavený takmer každý človek. Pri ochorení dochádza často k vážnemu narušeniu existujúceho životného štýlu a finančnej situácie. Poistením možno túto zložitú situáciu zmierniť a uľahčiť tak ďalší život človeka.

Pre potreby zdravotného a nemocenského poistenia bola v priebehu aktuárskej praxe rozvinutá veľká škála matematických modelov. V poslednom čase sa kladie dôraz na modely, ktoré sú prispôsobiteľné špecifickým podmienkam individuálnych poisťovacích spoločností [4]. Práve toto kritérium spĺňajú stochastické modely v zdravotnom a nemocenskom poistení.

1 STOCHASTICKÝ MODEL NEMOCENSKÉHO POISTENIA

Účelom nasledujúceho stochastického modelu je predpovedať počet očakávaných poistných plnení, resp. odhad počtu poistných udalostí v danom skúmanom poistnom druhu. Inými slovami, zaujíma nás, aká je pravdepodobnosť výskytu daného znaku (ochorenia) u poisteného jedinca. Daný poistný kmeň môžeme rozdeliť na zdravých jedincov a jedincov postihnutých nejakou dedičnou chorobou. Príkladom takto skúmanej choroby môže byť napríklad rakovina. Dnes už vieme, že predispozície na toto ochorenie je skoro v každom jedincovi. Či sa choroba prejaví alebo nie, závisí od mnohých faktorov: životné prostredie, stres, fajčenie, ale najmä dedičnosť. Obrázok 1 znázorňuje jedincov postihnutých sledovanou chorobou (vyšrafovaná časť) za predpokladu, že predispozícia choroby sleduje normálne rozdelenie.



Obr. 1

Hranicu medzi zdravými jedincami a jedincami, u ktorých sa choroba prejavila označíme T a nazveme túto hranicu *prahom*.

Aby náš model zodpovedal bližšie situácii pri priebehu nejakej kritickej choroby, budeme uvažovať situáciu, keď má daný znak (choroba) tri varianty:

1. nepostihnutý chorobou – zdravý jedinec,
2. bežné (vyliečiteľné) ochorenie (napr. následkom chemoterapie rakovina ustúpi),
3. jedinec je nevyliečiteľne chorý (napr. rakovina v poslednom štádiu).

Objektom modelovania bude pre zjednodušenie trojčlenná rodina: otec, matka, dieťa. Pri viacdenných rodinách sa skúma len prvorodené dieťa.

Nech X, Y, Z sú spojité náhodné premenné, kde X je predispozícia otca na danú chorobu, Y predispozícia matky a Z predispozícia u dieťaťa.

Príslušné prahy označme:

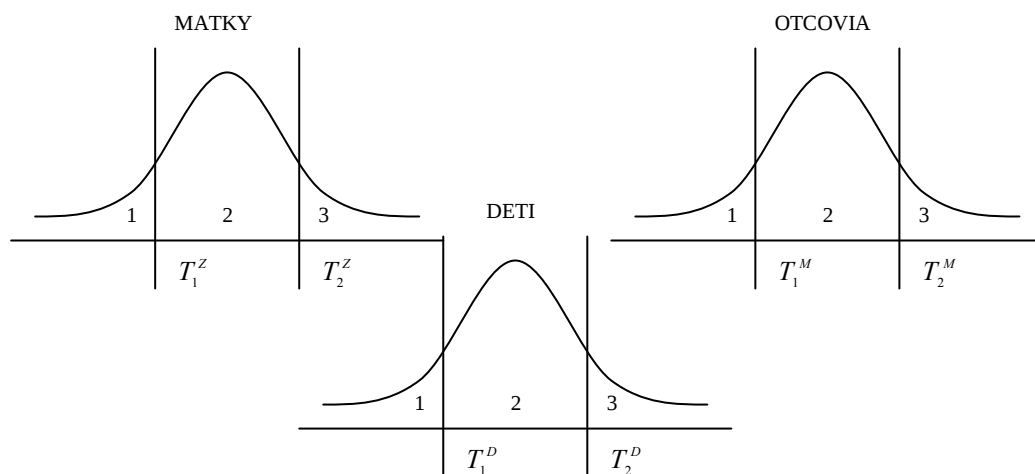
→ T_1^M, T_2^M pre mužov, kde $T_1^M < T_2^M$,

→ T_1^Z, T_2^Z pre ženy, kde $T_1^Z < T_2^Z$,

→ T_1^D, T_2^D pre deti, pričom ak je dieťa chlapec, prahy sú T_1^M, T_2^M ak dievča T_1^Z, T_2^Z .

Budeme skúmať všetky rodiny s jedným dieťaťom v populácii a budeme si všímať jednotlivé varianty sledovaného znaku. Ak si rozdelíme všetkých mužov (ženy) do troch tried podľa výskytu sledovaného znaku, dostaneme v tejto populácii deväť druhov manželstiev vzhľadom na varianty skúmaného znaku. Pravdepodobnosť výskytu znaku u dieťaťa bude u každého druhu manželstva iná (obr. 2).

Pravdepodobnosť výskytu troch variantov nejakej choroby v populácii



Obr. 2

Pre ďalšie výpočty predpokladajme, že trojica predispozícií (x, y, z) má v populácii trojrozmerné normálne rozdelenie (tento predpoklad nemá vplyv na všeobecnosť modelu) so strednými hodnotami $\mu_x = \mu_y = \mu_z = 0$ a korelačnou maticou:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho_1 \\ 0 & 1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 1 \end{bmatrix} \quad |P| = 1 - \rho_1^2 - \rho_2^2, \quad (1)$$

kde ρ_1 je korelačný koeficient predispozícií otca a dieťaťa (chlapca) a ρ_2 je korelačný koeficient predispozícií matky a dieťaťa (dievčaťa).

Za týchto predpokladov možno hustotu pravdepodobností predispozícií (x, y, z) v populácii vyjadriť nasledovne:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}} e^{-\left[\frac{1}{2}Q(x, y, z)\right]}, \quad (2)$$

pričom $Q(x, y, z) = \frac{1}{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} [x^2(1 - \rho_2^2) + y^2(1 - \rho_1^2) + z^2 + 2\rho_1\rho_2xy - 2\rho_1xz - 2\rho_2yz]$.

Nech $W = \left(\frac{x - \rho_1 z}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}\right)^2 + \frac{2\rho_1\rho_2}{\sqrt{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)}} \frac{x - \rho_1 z}{\sqrt{1 - \rho_1^2}} \frac{y - \rho_2 z}{\sqrt{1 - \rho_2^2}} + \left(\frac{y - \rho_2 z}{\sqrt{1 - \rho_2^2}}\right)^2$, potom

$$Q(x, y, z) = z^2 + \frac{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)}{|P|} W. \quad (3)$$

Ak náhodná premenná X nadobúda hodnoty v intervale $(-\infty, T_1^M)$, potom otec má sledovaný znak formy 1 a patrí do prvej skupiny v populácii, ktorá je na obr. 2 označená číslom 1.

Ak náhodná premenná X nadobúda hodnoty v intervale (T_1^M, T_2^M) , potom otec má sledovaný znak formy 2 a ak je náhodná premenná X z intervalu (T_2^M, ∞) , otec má znak formy 3.

Analogická je situácia u matiek pre predispozíciu Y a prahy T_1^Z, T_2^Z a detí s predispozíciou Z a prahmi T_1^D, T_2^D .

Zavedieme si nasledovné označenie:

- pre predispozíciu X výraz $a_1 < x \leq b_1$ znamená, že $x \in (a_1, b_1]$, kde a_1 nadobúda hodnoty z množiny $\{-\infty, T_1^M, T_2^M\}$ a b_1 nadobúda hodnoty z množiny $\{T_1^M, T_2^M, \infty\}$;
- pre predispozíciu Y výraz $a_2 < y \leq b_2$ znamená, že $y \in (a_2, b_2]$, kde a_2 nadobúda hodnoty z množiny $\{-\infty, T_1^Z, T_2^Z\}$ a b_2 nadobúda hodnoty z množiny $\{T_1^Z, T_2^Z, \infty\}$;
- pre predispozíciu Z výraz $a_3 < z \leq b_3$ znamená, že $z \in (a_3, b_3]$, kde a_3 nadobúda hodnoty z množiny $\{-\infty, T_1^D, T_2^D\}$ a b_3 nadobúda hodnoty z množiny $\{T_1^D, T_2^D, \infty\}$.

Označme ďalej $g(z)$ hustotu pravdepodobnosti predispozície u detí za predpokladu, že otec aj matka má sledovaný znak z foriem 1, 2, 3.

$$\text{Potom } g(z) = f(z/a_1 < x \leq b_1, a_2 < y \leq b_2) = \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dx dy, \text{ kde}$$

$$K = P[a_1 < x \leq b_1, a_2 < y \leq b_2] = [\Phi(b_1) - \Phi(a_1)][\Phi(b_2) - \Phi(a_2)].$$

Z teórie pravdepodobnosti je zrejmé, že $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, kde $\Phi(x)$ je hustota pravdepodobnosti a $\varphi(x)$ je distribučná funkcia náhodnej premennej X [2]. Vyjadriť funkciu $g(z)$:

$$g(z) = \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \frac{\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}}{2\pi\sqrt{|P|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{|P|}\right\} \left[\left(\frac{x-\rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \right)^2 + \frac{2\rho_1\rho_2}{\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}} \frac{x-\rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \frac{y-\rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}} + \left(\frac{y-\rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}} \right)^2 \right] \frac{dy}{\sqrt{1-\rho_2^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\rho_1^2}} \quad (4)$$

Pre zjednodušenie a sprehľadnenie zavedieme substitúcie:

$$u = \frac{x-\rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \quad v = \frac{y-\rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \quad \rho = \frac{-\rho_1\rho_2}{\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}}.$$

Zavedme nové hranice:

$$A_1 = \frac{a_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \quad B_1 = \frac{b_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \quad A_2 = \frac{a_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \quad B_2 = \frac{b_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}$$

a pre vzťah $1-\rho^2$ platí:

$$1-\rho^2 = 1 - \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} = \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} = \frac{|P|}{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}.$$

Potom pre hustotu $g(z)$ z (4) dostaneme:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{K} \varphi(z) \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\sqrt{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}}{2\pi\sqrt{|P|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{|P|} (u^2 - 2\rho uv + v^2)\right] du dv = \\ &= \frac{1}{K} \varphi(z) \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} f(u, v, \rho) du dv = \frac{1}{\Phi(b_1) - \Phi(a_1)} \frac{1}{\Phi(b_2) - \Phi(a_2)} \varphi(z) \left[F\left(\frac{b_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \frac{b_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \rho\right) - \right. \\ &\quad \left. - F\left(\frac{b_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \frac{a_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \rho\right) - F\left(\frac{a_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \frac{b_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \rho\right) + F\left(\frac{a_1 - \rho_1 z}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \frac{a_2 - \rho_2 z}{\sqrt{1-\rho_2^2}}, \rho\right) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

$F(x, y, \rho)$ je distribučná funkcia dvojrozmerného normálneho rozdelenia s korelačným koeficientom ρ .

Stredná hodnota funkcie $g(z)$ bude mať tvar:

$$\begin{aligned}
 E[g(z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} z g(z) dz = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{|P|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \rho_1 x - \rho_2 y}{\sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}}\right)^2\right] dx dy dz = \\
 &= \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{|P|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \rho_1 x - \rho_2 y}{\sqrt{|P|}}\right)^2\right] dx dy dz = \\
 &= \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] (\rho_1 x + \rho_2 y) dx dy = \\
 &= \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho_1 x \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy dx + \\
 &+ \frac{1}{K} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho_2 y \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] dx dy = \frac{1}{\Phi(b_1) - \Phi(a_1)} \frac{1}{\Phi(b_2) - \Phi(a_2)} \\
 &\quad \{\rho_1 [\Phi(a_1) - \Phi(b_1)] [\Phi(b_2) - \Phi(a_2)] + \rho_2 [\Phi(a_2) - \Phi(b_2)] [\Phi(b_1) - \Phi(a_1)]\}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

2 STOCHASTICKÝ MODEL S DVOMA PRAHMI

Pre model s jedným prahom existujú dva selekčné diferenciály definované nasledovne:

$$I_{T^+} = \frac{\varphi(T)}{1 - \Phi(T)}, \quad I_{T^-} = \frac{-\varphi(T)}{\Phi(T)}.$$

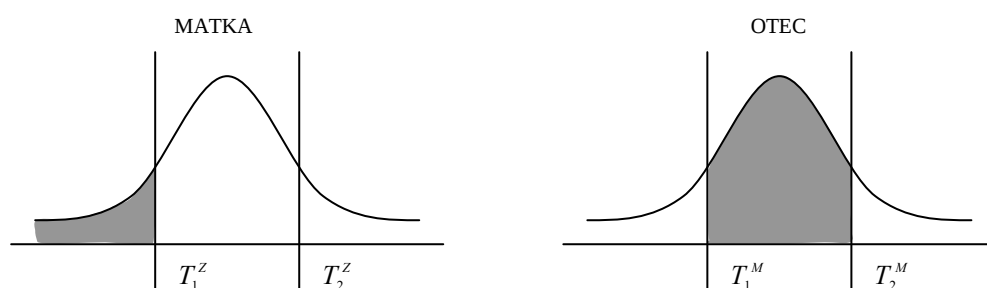
Pre model s dvoma prahmi T_1, T_2 existuje päť rôznych selekčných diferenciálov:

- ak $x \in (-\infty, T_1)$, potom $I_{T_1^-} = \frac{-\varphi(T_1)}{\Phi(T_1)}$;
- ak $x \in (T_1, T_2)$, potom $I_{T_1} = \frac{\varphi(T_1)}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)}$ alebo $I_{T_2} = \frac{\varphi(T_2)}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)}$;
- ak $x \in (T_2, \infty)$, potom $I_{T_2^+} = \frac{\varphi(T_2)}{1 - \Phi(T_2)}$;
- ak $x \in (-\infty, T_2)$, potom $I_{T_2^-} = \frac{-\varphi(T_2)}{\Phi(T_2)}$;

- ak $x \in (T_1, \infty)$, potom $I_{T_1^+} = \frac{\varphi(T_1)}{1 - \Phi(T_1)}$.

V praxi sa potom dá stredná hodnota funkcie $g(z)$ vyjadriť pomocou selekčného diferenciálu, pričom použijeme vzťah (6). Situácia je znázornená na obr. 3.

$$\begin{aligned} E[g(z)] &= \frac{1}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)} \frac{1}{\Phi(T_1)} \{ \rho_1 [\varphi(T_1) - \varphi(T_2)] \Phi(T_1^z) + \rho_2 [0 - \varphi(T_1^z)] [\Phi(T_2) - \Phi(T_1)] \} = \\ &= \rho_1 \frac{\varphi(T_1) - \varphi(T_2)}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)} - \rho_2 \frac{\varphi(T_1^z)}{\Phi(T_1^z)} = \rho_1 \frac{\varphi(T_1)}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)} - \rho_1 \frac{\varphi(T_2)}{\Phi(T_2) - \Phi(T_1)} - \rho_2 \frac{\varphi(T_1^z)}{\Phi(T_1^z)} = \\ &= \rho_1 I_{T_1} - \rho_1 I_{T_2} - \rho_2 I_{T_1^z}. \end{aligned}$$



Obr. 2

Záver

Aktuárskych modelov na výpočet netto poistného, nemocenských dávok a poistných rezerv v nemocenskom poistení bolo už vypracovaných značné množstvo. V súčasnosti je najznámejší a najpoužívanější Manchester Unity model [3]. Dobré skúsenosti s týmto prístupom majú poisťovacie spoločnosti, napr. PHI (Permanent Health Insurance), potom DDI (Dread Disease Insurance), LTC (Long Term Care) a iné.

V poslednom desaťročí podobné modely vypracovali nórski, dánski a švédski aktuari. Americký model Inception Annuity vzbudil veľký záujem najmä v posledných rokoch. Najdlhšiu tradíciu využitia poistnej matematiky v zdravotnom a nemocenskom poistení majú v Nemecku.

Je zrejmé, že dobrá úroveň zdravotníckej starostlivosti vo svete je tiež podmienená vysoko odbornou prácou aktuarov. Slovenskí aktuari s týmito modelmi len začínajú pracovať, čo možno prispeje k vylepšeniu nášho zdravotného systému.

Použitá literatúra

- 1 BARKAR, S. – SIMONKA, Z. – ŠÁNER, V.: *Spojité modely niektorých ekonomických procesov*. Ekonomické rozhlady č.1, Bratislava:1999.
- 2 LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998.
- 3 Neill, A.: *Life Contingencies*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1977.
- 4 POTOCKÝ, R.: *Štatistické metódy v poisťovníctve*. Slovenská štatistika a demografia č.1, Bratislava:1996.

- 5 RENSHAW, A. E. – HABERMAN, S.: *On the Graduation Associated with a Multiple State Model for Permanent Health Insurance*. Actuarial Research Report No. 40, London: City University 1992.
- 6 ŠKROVÁNKOVÁ, L.: *Zdravotné a nemocenské poistenie*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013.
- 7 ŠKROVÁNKOVÁ, P. – HRNČIAROVÁ, Ľ. 2007. *Využitie poistnej matematiky v zdravotnom a nemocenskom poistení*. E+M Ekonomie a Management 3/2007. s. 97-103.
- 8 HPI – Health Policy Institute – HPI <http://www.hpi.sk>
- 9 www.fmed.uniba.sk/fileadmin/user_upload/admin/Veda-vyskum/zdravotna_starostlivost

Kontaktné údaje

doc. RNDr. Lea Škrovánková, PhD. Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 806, e-mail: lea.skrovankova@euba.sk