

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII A OPERAČNÍM VÝZKUMU

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

2. december – 4. december 2020

2. prosinec – 4. prosinec 2020

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
doc. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD., VŠE Praha
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

doc. Ing. Jan Zouhar, Ph.D.
Ing. Brian König, PhD.

AH 9,23

Kontakt: brian.konig@euba.sk

Editor: Ing. Brian König, PhD.

Web editor: doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2020

ISBN: ISBN 978-80-225-4774-1

Obsah

<i>Ivan Brezina, Juraj Pekár:</i> <u>VYUŽITIE KVADRATICKÉHO PRIRAĐOVACIEHO PROBLÉMU PRI ROZMIESTŇOVANÍ AUTOVRAKOVÍSK</u>	5
<i>Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová:</i> <u>STANOVENIE CENY DUOPOLISTU V MODELI PRIESTOROVEJ KONKURENCIE</u>	11
<i>Jiří Georgiev:</i> <u>POROVNÁNÍ IMPLEMENTACE ŘEŠITELŮ DO PROSTŘEDÍ R</u>	18
<i>Pavel Gežík, Marian Reiff:</i> <u>IDENTIFIKÁCIA STAVOV ZMIEN SPRÁVANIA SA ZÁKAZNÍKOV PRE PLÁNOVANIE POČTU OTVORENÝCH POKLADNÍ</u>	25
<i>Marián Goga:</i> <u>METODOLOGICKÝ POHĽAD NA PRÍJMOVO MULTIPLIKÁTOROVÚ ANALÝZU</u>	33
<i>Jakub Hanousek:</i> <u>SROVNÁNÍ KAPACIT ZDRAVOTNÍ PÉČE PRO COVID 19 PACIENTY V KRAJÍCH ČESKÉ REPUBLIKY</u>	41
<i>Jakub Hanousek:</i> <u>APLIKACE MODELU ANALÝZY OBALU DAT NA ŠÍŘENÍ NEMOCI COVID 19 V MĚSÍCI ŘÍJNU 2020 V KRAJÍCH ČESKÉ REPUBLIKY</u>	47
<i>Vladimír Holý:</i> <u>PŘEHLED LITERATURY EFEKTIVNOSTI VEŘEJNÝCH KNIHOVEN SE ZAMĚŘENÍM NA ČESKOU REPUBLIKU</u>	53
<i>Eduard Hozlár:</i> <u>PRAKTICKÉ MOŽNOSTI KOMPLEXNÉHO HODNOTENIA FIRIEM V ZADANOM EKONOMICKOM PROSTREDÍ</u>	59
<i>Michaela Chocholatá:</i> <u>ÚLOHY CELOČÍSELNÉHO LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA A BALÍK PYTHON-MIP VO VÝUČBE</u>	64
<i>Miroslava Jánošová:</i> <u>TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRIAMYCH ZAHRANIČNÝCH INVESTÍCIÍ V PODMIENKACH DOKONALEJ A NEDOKONALEJ KONKURENCIE</u>	72
<i>Brian König:</i> <u>ANALÝZA EFEKTOV ZAVEDENIA CLA NA ZAHRANIČNÝ OBCHOD</u>	78
<i>Veronika Miťková:</i> <u>TRANSFORMÁCIA MATICE SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA</u>	87

<i>Vladimír Mlynarovič:</i> <u>MODELY METRÍK RIZIKA</u>	94
<i>Mariya Oleynik:</i> <u>METODY MODELOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI DEFAULTU FIREMNÍCH ZÁKAZNÍKŮ BANKY</u>	101
<i>Michal Pieter:</i> <u>VOĽBA A ZORADENIE BÁNK POMOCOU SIEŤOVEJ ANALÝZY OBALU DÁT SO SPOLOČNÝMI VÁHAMI</u>	109
<i>Ondřej Sokol:</i> <u>PROBLÉMY SOUVISEJÍCÍ S UŽITÍM GENETICKÉHO ALGORITMU NA SHLUKOVACÍCH ÚLOHÁCH</u>	117
<i>Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková:</i> <u>ODHAD ELASTICITY SUBSTITÚCIE VSTUPOV POMOCOU PANELOVÝCH ÚDAJOV PRE RÔZNE KRAJINY</u>	122
<i>Zoltán Végh:</i> <u>KORPORÁTNE STRATÉGIE AKO HRA</u>	128
<i>Petra Zýková, Jan Malý:</i> <u>AUDIT KAMPAŇÍ TELEVIZNÍ REKLAMY</u>	137

VYUŽITIE KVADRATICKÉHO PRIRAĐOVACIEHO PROBLÉMU PRI ROZMIESTŇOVANÍ AUTOVRAKOVÍSK¹

QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM USE FOR SCRAPYARD ALLOCATION

Ivan Brezina, Juraj Pekár

Abstrakt

Politika odpadového hospodárstva každej krajiny Európskej únie zahŕňa aj aktivity v oblasti likvidácie starých automobilov a recyklácie ich súčiastok. Druhotné spracovanie surovín z likvidovaných automobilov sa realizuje u rôznych špecializovaných spracovateľoch, čoraz viac však toto spracovanie komplikujú chýbajúce kapacity na ďalšie špecializované materiálové a surovinové spracovanie.. Ich vzdialenosť od zberných miest a intenzita prepravy spracovávaného materiálu (celkové prepravné náklady) ovplyvňuje efektívnosť spracovania druhotných surovín. Optimalizácia prepravných nákladov pri určitej intenzite prepravy viedla k myšlienke použiť na riešenie tohto problému metodológiu a riešenie kvadratického priraďovacieho problému. V príspevku je prezentované možné riešenie kvadratického priraďovacieho problému ako potenciálneho nástroja na optimalizáciu siete spracovateľov druhotných surovín na báze existujúceho umiestnenia autovrakovísk prostredníctvom optimalizačného programového systému GAMS.

Kľúčové slová: rozmiestňovanie autovrakovísk, kvadratický priraďovací problém, GAMS

Abstract

The waste management policy of each European Union country also includes activities in the disposal of old cars and the recycling of their parts. Secondary processing of raw materials from liquidated vehicles is carried out with various specialized processors. Still, this processing is increasingly complicated by the lack of capacity for other specialized material and raw material processing. Its distance from collection points and the intensity of transport of the processed material (total transport costs) affect the efficiency of processing secondary raw materials. The idea of optimizing transport costs at a certain transport intensity has led to using a methodology and solving a quadratic assignment problem to solve this problem. The paper presents a possible solution to the quadratic assignment problem as a potential tool for optimizing the network of processors of secondary raw materials based on the existing scrapyard location through the optimization software system GAMS.

Keywords: Scrapyard Allocation, Quadratic Assignment Problem, GAMS

ÚVOD

Politika odpadového hospodárstva v krajinách Európskej únie je už viac ako tridsať rokov aplikovaná prostredníctvom akčných plánov jednotlivých krajín. Na tieto akčné plány

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu „Stav a vízie zhodnocovania odpadov z automobilového priemyslu SR“, združenie UNIVNET.

nadväzujú aj aktivity v oblasti likvidácie starých automobilov a recyklácie ich súčiastok, či už „na výrobu obdobných súčiastok, alebo iných použiteľných výrobkov“.

Niektoré druhy odpadu možno síce z likvidovaných áut vyseparovať, ale vznikajú problémy z ich ďalším zhodnotením, pričom počet spracovateľov práve tohto typu odpadov sa čoraz viac znižuje. Podľa rôznych zdrojov sa na Slovensku ročne likviduje približne 50-60 tisíc, resp. podľa Spektrum 60-90 tisíc starých automobilov (v rámci Európy predstavuje tento počet 15 až 16 miliónov automobilov). Na Slovensku však recykláciu však čoraz viac komplikujú chýbajúce kapacity na ďalšie špecializované materiálové a surovinové spracovanie (Prepiak, 2020).

Na Slovensku podľa Spektrum v súčasnosti v jednotlivých regiónoch pôsobí 46 autorizovaných spracovateľov starých vozidiel, ktorí majú zriadené zberné miesta, z ktorých privážajú staré automobily na ďalšie spracovanie. Druhotné spracovanie surovín z likvidovaných automobilov sa realizuje u rôznych špecializovaných spracovateľoch. Ich vzdialenosť od zberných miest a intenzita prepravy spracovávaného materiálu (celkové prepravné náklady) ovplyvňuje efektívnosť spracovania druhotných surovín.

Všeobecne by bolo možné konštatovať, že počet spracovateľov starých automobilov je relatívne veľký. Je však zrejmé, že nie každý autorizovaný spracovateľ dokáže spracovať každú komoditu, z ktorých sa automobil skladá, pretože sa skladá z kovov, plastov, tekutín, gumy, skla, textilu. Kovy môžu smerovať priamo do zberných surovín, ktoré sú k dispozícii v každom okresnom meste, resp. priamo do hutníckej prvovýroby, ale napríklad pre ďalšie spracovanie starého oleja sú potrebné veľké objemy a špeciálna chemická technológia (bežný spracovateľ nemá k dispozícii špeciálnu linku na starý olej), preto je potrebné vytvoriť systém, v ktorom pôsobí koncový spracovateľ realizujúci spracovanie takéhoto druhu odpadu. Takýchto koncových spracovateľov je však čoraz menej a celkovo chýba logistický systém, do ktorého by boli zapojení tak spracovatelia likvidovaných automobilov, ako aj spracovatelia druhotných surovín (Prepiak, 2020).

Podľa Spektrum pri spracovaní 50 000 likvidovaných automobilov ročne vzniká približne 60 000 ton rôzneho materiálu, čo predstavuje potrebu prepraviť približne 200 až 240 ton tohto materiálu pri použití 20 až 24 tonových nákladných vozidiel. Z tohto dôvodu je potrebné vytvoriť zodpovedajúci logistický systém, ktorý by minimalizoval náklady zodpovedajúce prepravným vzdialenostiam a intenzite prepravy medzi zodpovedajúcimi lokalitami, v ktorých pôsobia spracovatelia likvidovaných automobilov a spracovatelia druhotných surovín.

Práve táto optimalizácia prepravných nákladov pri určitej intenzite prepravy, ktorá je spojená s časovými, resp. vzdialenostnými ohodnoteniami medzi jednotlivými lokalitami vedú k idey použiť na riešenie tohto problému metodológiu a riešenie kvadratického priradovacieho problému.

1 KVADRATICKÝ PRIRAĎOVACÍ PROBLÉM

Všeobecne možno kvadratický priradovací problém (*Quadratic Assignment Problem - QAP*) zaradiť do skupiny náročných optimalizačných kombinatorických úloh, ktorých cieľom je nájsť jednoznačné priradenie prvkov dvoch množín tak, aby bolo toto priradenie najlepšie zo všetkých možných. Ako prví prezentovali zodpovedajúci model matematického programovania v roku 1957 Koopmans a Beckmann (Koopmans & Beckmann, 1957) ako matematický model na umiestnenie nedeliteľných ekonomických aktivít.

V kvadratickom priradovacom probléme sú definované dve množiny, napríklad množinu n lokalít ($L_1, L_2, \dots, L_s, \dots, L_n$) a množinu n zariadení ($Z_1, Z_2, \dots, Z_r, \dots, Z_n$), ktorých prvky treba vzájomne priradiť. Cieľom QAP je pritom identifikovať také priradenie všetkých n prvkov

jednej množiny ku všetkým n prvkom druhej množiny s dosiahnutím optimálnej hodnoty zodpovedajúcej účelovej funkcie, pričom treba dodržať primárnu podmienku priradovacieho problému, teda skutočnosť, že každému prvku jednej množiny je priradený práve jeden prvok druhej množiny (Brezina a Pekár, 2018).

Za týmto účelom je vhodné definovať binárne premenné x_{rs} tak, že ak platí $x_{rs} = 1$, prvok r je priradený prvku s , $x_{rs} = 0$, prvok r nie je priradený prvku s . Pretože obe množiny obsahujú n prvkov, ide o jednoznačné priradenie.

Podmienky, že r -tý prvok z množiny $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ je priradený práve jednému prvku z množiny $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ a s -tému prvku množiny $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ je priradený práve jeden prvok z množiny $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ zabezpečia sústavy rovníc $\sum_{s=1}^n x_{rs} = 1, r = 1, 2, \dots, n$, resp.

$$\sum_{r=1}^n x_{rs} = 1, s = 1, 2, \dots, n.$$

Ako uvádza (Pelikán, 2001), v úlohách QAP sú identifikované dve matice, maticu $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ a maticu $\mathbf{C} = \{c_{kl}\}$, $k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, n$. Prvky d_{ij} vyjadrujú vzdialenosť (časové, vzdialenostné ...) medzi i -tým a j -tým prvkom množiny $(L_1, L_2, \dots, L_n)$. Prvky c_{kl} udávajú vzájomný intenzitu interakcií medzi prvkami množiny $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

Vzdialenosť d_{ij} , ktorá reprezentuje fyzickú vzdialenosť realizovanej prepravy realizovanej medzi lokalitami (prvkami) i a j a hodnota c_{kl} intenzitu prepravy medzi lokalitami k a l . Účelovú funkciu reprezentujúcu prepravné náklady v závislosti od intenzity prepravy možno formulovať ako sumu vynaložených prepravných nákladov

$$\min f(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kl} d_{ij} x_{ki} x_{lj}.$$

Kvadratický priradovací model ako úlohu matematického programovania potom možno formulovať ako

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kl} d_{ij} x_{ki} x_{lj} \\ \sum_{s=1}^n x_{rs} &= 1, r = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{r=1}^n x_{rs} &= 1, s = 1, 2, \dots, n \\ x_{rs} &\in \{0, 1\} \quad r, s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

2 VYUŽITIE KVADRATICKÉHO PRIRAĐOVACIEHO PROBLÉMU PRI ROZMIESTŇOVANÍ AUTOVRAKOVÍSK A SPRACOVATEĽOV DRUHOTNÝCH SUROVÍN

Uvažujme ďalej problém existujúcej siete n autorizovaných spracovateľov starých vozidiel, ktorí majú zriadené zberné miesta (v súčasnosti pôsobí v SR 46 autovrakovísk) – $(L_1, L_2, \dots, L_s, \dots, L_n)$. Treba vytvoriť sieť spracovateľov druhotných surovín, ktorí môžu pôsobiť v tých istých lokalitách ako sú umiestnené autovrakoviská, potom ich počet je n , zodpovedajúca množina je $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r, \dots, Z_n)$. V prípade, ak by bolo možné umiestniť spracovateľ

druhotných surovín aj do inej lokality ako je množina autovrakovísk, treba do modelu zaviesť fiktívne autovarkoviská, aby boli prvky oboch množín totožné.

Binárne premenné x_{rs} reprezentujú skutočnosť, či je na s -té autovrakovisko priradený s -tý spracovateľ druhotných surovín. Prvky matice $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$) vyjadrujú vzdialenosť (časové, vzdialenostné ...) medzi i -tým autovrakoviskom a j -tou lokalitou, v ktorej má pôsobiť j -ty spracovateľ druhotných surovín. Prvky matice $\mathbf{C} = \{c_{kl}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$) reprezentujú vzájomnú intenzitu interakcií medzi autovrakoviskami a spracovateľmi druhotných surovín, teda množstvo napr. prepravných kontajnerov, resp. nákladných automobilov prepravovaných denne z k -teho autovrakoviska k l -tému spracovateľovi druhotných surovín.

Ako ilustračný príklad budeme ďalej uvažovať s existenciou 8 autovrakovísk v určitých lokalitách ($n = 8$) a s vybudovaním 8 špecializovaných liniek na spracovanie druhotných surovín ($n = 8$). Je pritom známy denný počet nákladných automobilov (intenzita prepravy), ktoré zabezpečujú prepravu z existujúcich autovarkovísk k potenciálnym spracovateľom druhotných surovín. Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že pôsobenie spracovateľov druhotných surovín je možné len v lokalitách, v ktorých pôsobia autovrakoviská (ako sme už uviedli na začiatku tejto časti, úprava úlohy o umiestnenie aj v iných lokalitách je veľmi jednoduchá).

Známe sú pritom vzdialenosti medzi jednotlivými lokalitami dané maticou $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, $j = 1, 2, \dots, 8$):

	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
L1	0	207.8	212.8	119.4	195.3	141.5	165.8	88.5
L2	207.8	0	390.7	88.4	403.1	126.5	47	199.9
L3	212.8	390.7	0	302.3	35	302.5	348.7	230.4
L4	119.4	88.4	302.3	0	314.7	84.7	46.4	140
L5	195.3	403.1	35	314.7	0	293	361.1	220.9
L6	141.5	126.5	302.5	84.7	293	0	78	73.4
L7	165.8	47	348.7	46.4	361.1	78	0	151.4
L8	88.5	199.9	230.4	140	220.9	73.4	151.4	0

Denný počet nákladných automobilov reprezentuje intenzita prepravy (predpokladané toky medzi autovrakoviskami a spracovateľmi druhotných surovín) a je daný maticou intenzity prepravy $\mathbf{C} = \{c_{kl}\}$, $k = 1, 2, \dots, 8$, $l = 1, 2, \dots, 8$):

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
Z1	0	10	0	0	0	0	0	0
Z2	0	0	0	0	0	0	0	9
Z3	0	0	0	0	7	0	0	0
Z4	0	0	0	0	0	0	0	0
Z5	0	0	0	0	0	0	4	0
Z6	7	0	0	5	0	0	0	0
Z7	0	0	8	0	0	0	0	0
Z8	0	0	0	0	0	5	0	0

Strategické rozhodovanie je postavené na rozhodnutí o umiestnení spracovateľov druhotných surovín do jednotlivých lokalít tak, aby celkové náklady vyplývajúce z rozmiestnenia spracovateľov druhotných surovín boli minimálne.

3 RIEŠENIE KVADRATICKÉHO PRIRAĐOVACIEHO PROBLÉMU POMOCOU GAMS

Jedným z možných softvérových nástrojov na vyriešenie úlohy kvadratického priraďovacieho problému je programový systém GAMS. Pri zápise úlohy budeme pre jednotlivé lokality zapisovať maticu vzdialeností v tvare $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, $i = 0, 1, \dots, 7$, $j = 0, 1, \dots, 7$) a takisto maticu intenzity prepravy $\mathbf{C} = \{c_{kl}\}$, $k = 0, 1, \dots, 7$, $l = 0, 1, \dots, 7$).

Kód programu GAMS na riešenie uvažovaného ilustratívneho príkladu je nasledujúci:

Sets

i index uzla /0*7/

alias (i,j,k,l)

table c(k,l)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	10	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	9
2	0	0	0	0	7	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	4	0
5	7	0	0	5	0	0	0	0
6	0	0	8	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	5	0	0;

table d(i,j)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	207.8	212.8	119.4	195.3	141.5	165.8	88.5
1	207.8	0	390.7	88.4	403.1	126.5	47	199.9
2	212.8	390.7	0	302.3	35	302.5	348.7	230.4
3	119.4	88.4	302.3	0	314.7	84.7	46.4	140
4	195.3	403.1	35	314.7	0	293	361.1	220.9
5	141.5	126.5	302.5	84.7	293	0	78	73.4
6	165.8	47	348.7	46.4	361.1	78	0	151.4
7	88.5	199.9	230.4	140	220.9	73.4	151.4	0;

Binary Variable x(i,j);

Variables f;

Equations

ohr1(i)

ohr2(j)

ucel;

ucel.. f=e=sum((i,j,k,l),c(k,l)*d(i,j)*x(i,k)*x(j,l));

ohr1(i).. sum(j,x(i,j))=e=1;

ohr2(j).. sum(i,x(i,j))=e=1;

Model qap /all/;

Solve qap using miqcp minimizing f;

Riešenie: $x_{03} = x_{16} = x_{24} = x_{37} = x_{40} = x_{55} = x_{62} = x_{71} = 1$, ostatné nadobúdajú nulové hodnoty, hodnota účelovej funkcie je 4977,7 jednotiek.

Z riešenia vyplýva, že do lokality 0 bude umiestnený tretí spracovateľ druhotných surovín, do lokality 1 šiesty spracovateľ druhotných surovín, do lokality 2 štvrtý spracovateľ druhotných surovín, do lokality 3 siedmy spracovateľ druhotných surovín, do lokality 4 nultý spracovateľ druhotných surovín, do lokality 5 piaty spracovateľ druhotných surovín, do lokality 6 druhý spracovateľ druhotných surovín a do lokality 7 prvý spracovateľ druhotných surovín.

ZÁVER

Problematika spracovania starých vozidiel je v súčasnosti na Slovensku veľmi aktuálna a je predmetom riešenia Univerzitnej a priemyselnej výskumno-edukačnej platformy recyklujúcej spoločnosti - UNIVNET. Druhotné spracovanie surovín z likvidovaných automobilov sa realizuje prostredníctvom špecializovaných spracovateľov. Optimalizácia prepravných nákladov medzi autovrakoviskami a týmito spracovateľmi pri určitej intenzite prepravy je zaujímavým problémom pri lokácii spracovateľov druhotných surovín pri zadanej sieti autovrakovísk. Pretože sieť špecializovaných spracovateľov druhotných surovín je čoraz redšia a autovrakoviská majú čoraz väčší problém s umiestňovaním druhotných surovín k týmto spracovateľom, stojí pred decíznou sférou problém ako vytvoriť efektívnu sieť spracovateľov druhotných surovín a ako ich rozmiestniť tak, aby boli prepravné náklady medzi autovrakoviskami a špecializovanými spracovateľmi čo najnižšie. Tento problém je spojený s časovými, resp. vzdialenostnými ohodnoteniami medzi jednotlivými lokalitami a intenzitou prepravy medzi nimi. Táto problematika bola motívom na riešenie tohto problému prostredníctvom kvadratického prirad'ovacieho problému.

Kvadratický prirad'ovací problém patrí do skupiny náročných optimalizačných kombinatorických úloh, ktorých cieľom je nájsť jednoznačné priradenie prvkov dvoch množín tak, aby bolo toto priradenie najlepšie zo všetkých možných. Bolo vyvinutých mnoho metód na riešenie tohto zložitého problému, ale na riešenie úloh menšieho rozmeru možno úspešne použiť aj rôzne dostupné softvérové produkty. V príspevku je prezentované možné riešenie kvadratického prirad'ovacieho problému ako potenciálneho nástroja na optimalizáciu siete spracovateľov druhotných surovín na báze existujúceho umiestnenia autovrakovísk prostredníctvom optimalizačného programového systému GAMS.

Použitá literatúra

1. Brezina, I., & Pekár, J. (2018). *Úvod do operačného výskumu I*. Bratislava: Letra Edu.
2. Koopmans, T.C. & Beckmann, M.J. (1957). *Assignment Problems and the Location of Economic Activities*. *Econometrica*, 25, 53–76.
3. Erdoğan, G. & Tansel, B.Ç. (2011). *Two classes of Quadratic Assignment Problems that are solvable as Linear Assignment Problems*. *Discrete Optimization*, 446–451.
4. Pelikán, J. (2001). *Diskrétní modely v operačním výzkumu*. Praha: Professional Publishing.
5. Prepiak, P. (2020). *Kapacity na spracovanie materiálov zo starých vozidiel postupne vypadávajú*. Retrieved 16.06. 2020, from <https://www.odpady-portal.sk/Dokument/105392/pavol-prepiak-kapacity-na-spracovanie-materialov-zo-starych-vozidiel-postupne-vypadavaju.aspx>
6. Šooš, Ľ. (ed.) (2020). *Stav a vízie zhodnocovania odpadov z automobilového priemyslu SR*. Bratislava: Spektrum STU.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: +421 2 67 295 821
email: ivan.brezina@euba.sk

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: +421 2 67 295 827
email: juraj.pekar@euba.sk

STANOVENIE CENY DUOPOLISTU V MODELI PRIESTOROVEJ KONKURENCIE¹

DETERMINATION OF THE DUOPOLIST PRICE IN SPATIAL COMPETITION MODEL

Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová

Abstrakt

Analýza oligopolného trhu je relatívne diskutovanou témou. Priestorové hry, zamerané na nedokonalú konkurenciu z priestorového hľadiska, sú špecifickou oblasťou teórie hier, analyzujúcu správanie sa subjektov na trhu, ktorí sa snažia prilákať zákazníkov a nájsť najlepšiu lokalitu pre svoju pobočku. Každá firma uplatňuje svoju vlastnú cenovú politiku, ktorá ovplyvňuje jej podiel na trhu. Tento príspevok sa zameriava na riešenie špecifickej situácie dvoch firiem, ktoré sa rozhodujú o svojom umiestnení, s cieľom maximalizovať svoje zisky, zatiaľ čo výsledkom sú informácie o cene prvého výrobcu ovplyvneného známou cenou druhého výrobcu. V modeli vylučujeme predpoklad jednotkového dopytu uzlov a jeho veľkosť zohľadňujeme v riešení. Zákazníci si vyberajú jedného z výrobcov na základe svojich celkových nákladov, ktoré pozostávajú z ceny produktu a nákladov na dopravu.

Kľúčové slová: duopol, cenová politika, priestorová konkurencia

Abstract

The analysis of the oligopolistic market is a relatively discussed topic. Spatial games, aimed at imperfect competition from a spatial point of view, are a specific area of game theory, analyzing the behavior of market players who try to attract customers and find the best location for their branch. Each company applies its own pricing policy, which affects its market share. This paper focuses on solving the specific situation of two companies that decide on their location, in order to maximize their profits, while the result is information about the price of the first producer affected by the known price of the second producer. In the model, we exclude the assumption of unit demand of nodes and take its size into account in the solution. Customers choose one of the manufacturers based on their total costs, which consist of the price of the product and shipping costs.

Keywords: duopoly, pricing policy, spatial competition

1 ÚVOD

Analýza oligopolistického trhu v priestore je neustále pomerne diskutovanou témou. Jedným z prvých, ktorí sa začali venovať tejto problematike bol matematik a ekonóm Harold Hotelling (1929), ktorý predstavil model spočívajúci v prítomnosti dvoch firiem hľadajúcich čo najvýhodnejšiu pozíciu na takzvanom lineárnom trhu. Model je základom množstva teórií produktovej diferenciácie a lokácie, no napriek svojej využiteľnosti prešiel mnohými kritikami. C. D'Aspremont, J. Jaskold Gabszewicz a J.-F. Thisse (1979) poukazujú na jeho chybnosť a dokazujú, že nie je možné aby existovala rovnováha v prípade, že sú firmy blízko pri sebe. Výsledkom ich upraveného modelu je model, ktorého riešením je zabezpečená existencia rovnováhy v akomkoľvek mieste na trhu (C. D'Aspremont et al., 1979).

¹ Príspevok vznikol ako súčasť výskumného projektu VEGA 1/0427/20 - Viackriteriálne modely teórie hier v ekonómii a politológii

Autori Melvin L. Greenhut, George Norman a Chao-Shun Hung vo svojej publikácii z roku 1987 *The Economics of Imperfect Competition: A Spatial Approach* zaujali odlišný prístup k tradičnej teórii cien a analýze nedokonalkej konkurencie, a to prostredníctvom priestorovej perspektívy, ktorú aplikujú na celý rad nepriestorových problémov spájajúcich sa s nedokonalou konkurenciou (Greenhut et al., 1987).

Vychádzajúc z Hotellingovho modelu vznikla aj publikácia *The economic theory of product differentiation* (Beath and Katsoulacos, 1991). Autori sa, okrem iného, venujú cenovej konkurencii priestorového duopolu. Zákazníci, rozmiestnení pozdĺž lineárneho trhu a nútení cestovať ak si chcú zadovážiť ponúkané produkty, sú jediní, ktorí znášajú dopravné náklady. Pre výrobcov platí, že lokácia ich produktov je pre nich exogénnym parametrom, takže cena je ich jedinou rozhodovacou premennou (Beath a Katsoulacos, 1991).

Všeobecne pri lokačných modeloch platí predpoklad, že sú zákazníci umiestnení v diskretných bodoch určitého priestoru a ich voľba závisí od vzdialenosti dostupných produktov. V prípade modelu formulovaného ako „problém variačného počtu“ autorov Sze-Chun Wong a Hai Yang (2002) ide o predpoklad, že zákazníci sú spojitou rozptýlení v rámci celého priestoru a rozhodujú sa na základe časovej náročnosti a vlastností produktov. Rovnovážne priestorové podmienky voľby zákazníka a optimálne podmienky tohto modelu sú podľa autorov ekvivalentami (Wong a Yang, 2002).

Medzi novšie príspevky patrí publikácia *The multi-route location-routing problem and zone price decision-making using a tabu and variable neighborhood search algorithm*. V tej sa autori zameriavajú na zónové stanovovanie cien, cenovú politiku, častokrát využívanú spoločnosťami, a polohy. Model navrhnutý autormi je modelom zmiešaného celočíselného nelineárneho programovania (nelinearita bola riešená metódou čiastočnej linearizácie). Pre riešenie veľkých problémov predstavujú dva algoritmy, ktorých porovnaním prichádzajú k tvrdeniu, že účinnejší je algoritmus VNS (*variable neighborhood search*) oproti algoritmu *tabu search* (Sadeghi-Dastaki et al., 2018).

V našom príspevku budeme prezentovať špecifický problém priestorovej hry v prípade duopolu. Ten je, ako už bolo spomenuté, špecifickým typom oligopolu, kde na trhu na strane ponuky pôsobia iba dva subjekty. Duololistický trh budeme prezentovať v priestore, ktorý možno charakterizovať formou grafu. Hráči robia svoje rozhodnutie o umiestnení prevádzky, pričom výsledky hry sú dané stanovením ich cien, ktoré ovplyvnia im prislúchajúci podiel na trhu. Zákazníci si pritom vyberajú jedného z dvoch duopolistov na základe svojich nižších nákladov, ktoré zahŕňajú jednak cenu tovaru, ale aj náklady na dopravu. Budeme prezentovať originálny matematický model, prostredníctvom ktorého možno stanoviť cenu pre jedného z duopolistov na základe už známej ceny protihráča tak, aby jeho tržby boli čo najvyššie. Model zároveň zohľadňuje vylúčenie predpokladu jednotkového dopytu v každom z uzlov, pričom veľkosť dopytu v jednotlivých uzloch vstupuje do modelu ako premenná.

2 STANOVENIE CENY DUOPOLISTU NA ZÁKLADE NAJLEPŠEJ ODPOVEDE

V tejto časti budeme prezentovať originálny matematický model umožňujúci stanoviť cenu duopolistu na základe stanovenej ceny protihráča v prípade špecifickej priestorovej hry.

V modeli uplatňujeme, rovnako, ako Hotelling vo svojom základnom modeli, základné predpoklady: homogenitu produktu (obe firmy na trhu ponúkajú veľmi podobný produkt),

nulové výrobné náklady firiem, neelastickosť dopytu (spotreba jednej jednotky zákazníkmi v každom bode trhu) a indiferentnosť spotrebiteľov (vzhľadom k výberu výrobcu).

Idea priestorovej hry vychádza z článku (Lopez a Čičková, 2018). V príspevku budeme predpokladať: Nech $V = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{Z}^+$, je množina zákazníkov a nech je daný graf $G = (V, H)$, v ktorom V predstavuje uzly grafu, a $H \subset V \times V$ predstavuje množinu hrán $h_{ij} = (v_i, v_j)$ z uzla v_i k uzlu v_j , pričom každej orientovanej hrane h_{ij} je priradené reálne číslo $o(h_{ij})$, ktoré sa označuje ako ocenenie alebo hodnota h_{ij} . Priestorová hra bola formulovaná v takzvanom úplnom hodnotenom grafe $\bar{G} = (V, \bar{H})$ s rovnakou množinou uzlov ako graf G , kde $\bar{H}$ je množina hrán medzi každou dvojicou uzlov v_i a v_j , pričom ich ocenenie je rovné minimálnej cene medzi uzlami v_i a v_j v pôvodnom grafe, $i, j \in V$. Často možno predpokladať, že $o(h_{ij}) = d_{ij}$ kde d_{ij} predstavuje minimálnu vzdialenosť (najkratšiu dĺžku cesty) medzi uzlami v_i a v_j . Potom matica $\mathbf{D}_{n \times n} = \{d_{ij}\}$ je matica najkratších vzdialeností medzi uzlami v_i a v_j .

V článku (Lopez a Čičková, 2018) sa predpokladalo, že existujú dve spoločnosti (hráči) $P = \{1, 2\}$, ktoré ponúkajú homogénny produkt (tovar alebo službu) a tieto spoločnosti majú možnosť umiestniť svoje pobočky v jednom z uzlov, to znamená v akomkoľvek prvku množiny $V = \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré sú zároveň sídlom zákazníkov. Uvažovalo sa o konštantnom (jednotkovom) dopyte v každom uzle. Hoci obaja hráči ponúkajú identický produkt v neobmedzenom množstve, cena produktov mohla byť odlišná. Nech $p^{(1)}$ je cenou produktu hráča 1 a $p^{(2)}$ cenou produktu hráča 2. Neuvažovalo sa o žiadnych obmedzeniach kapacity, pričom každý zákazník mohol uskutočniť nákup u ktorejkoľvek spoločnosti (zákazník pritom uskutočnil nákup vždy, teda neuvažovalo sa o stratenom dopyte). Zákazníci pri rozhodovaní zvažovali celkové náklady na kúpu produktu, ktoré pozostávajú z ceny produktu a nákladov na prepravu k vybranej spoločnosti. Náklady na dopravu sú vyjadrené ako t na jednotku vzdialenosti, takže predpokladáme, že zákazník musí platiť cenu produktu a dopravné náklady ku každej spoločnosti. Ak hráč 1 umiestni svoju pobočku v i -tom uzle ($i \in V$) a hráč 2 umiestni svoju predajňu v j -tom uzle ($j \in V$), hráč 1 získa zákazníka z k -teho uzla ($k \in V$) len v prípade, ak $t * d_{ki} + p^{(1)} < t * d_{kj} + p^{(2)}$, v opačnom prípade je zákazník z i -teho uzla obslužený hráčom 2. Ak $t * d_{ki} + p^{(1)} = t * d_{kj} + p^{(2)}$, hráči zdieľajú dopyt v rovnakej miere.

Je zrejmé, že záujem hráča o daný uzol je vo všeobecnosti podmienený aj „veľkosťou“ dopytu daného uzla, pričom z hľadiska tohto kritéria sú niektoré uzly pre hráča zaujímavejšie ako iné. Veľkosť dopytu môže súvisieť napríklad s počtom obyvateľov. Takáto situácia bola popísaná v článku (Čičková a Holzerová, 2019).

Obidva tieto články zvažovali situáciu, keď ceny produktov boli vopred známe a na základe vyššie uvedených predpokladov umožňovali explicitne vypočítať prvky matice platieb hráča 1 $\mathbf{A} = (a_{ij}), i, j \in V$ (kde prvok a_{ij} reprezentuje počet obslužených uzlov hráča 1 v prípade, ak si hráč 1 vybuduje prevádzku v i -tom uzle a protihráč v j -tom uzle). Potom možno stanoviť rovnovážne stratégie hráčov rozhodujúcich sa o umiestnení svojich prevádzok ako hru s konštantným súčtom). V takomto prípade možno rovnovážne stratégie hráčov získať pomocou úlohy lineárneho programovania.

Parametre:

- $a_{ij}, i, j \in V$ – platba hráča pri jeho i -tej stratégii a j -tej stratégii protihráča

- $p^{(2)}$ – cena výrobku protihráča (hráča 2)

Premenné:

- $p^{(1)}$ – cena výrobku hráča 1
- w – výsledná platba hráča
- $x_i \geq 0, i \in V$ – i -ta zmiešaná stratégia hráča

Rovnovážne stratégie možno potom určiť takto:

$$w \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} a_{ij} x_i \geq w, j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} x_i = 1 \quad (3)$$

Uvažujme teraz problém určenia rovnovážnej ceny hráča ako reakciu na stanovenú cenu protihráča, keď budeme súčasne zohľadňovať veľkosť dopytu uzlov. Označme veľkosť dopytu uzla $r_k, k \in V$. Nech cena tovaru druhého hráča $p^{(2)}$ je vopred známa. Cenu tovaru prvého hráča $p^{(1)}$ však považujeme za premennú, pričom hráč by ju chcel stanoviť tak, aby sa maximalizovali jeho tržby. Je zrejmé, že pri takýchto predpokladoch budú prvky matice platieb hráča 1 závisieť od hodnoty $p^{(1)}$.

Ak sa hráč 1 rozhodne vybudovať miesto spotreby v uzle 1 a hráč 2 bude realizovať obsluhu v uzle 2, potom pre spotrebiteľa z k -teho uzla pri výbere hráča môžu nastať tri prípady:

$$a) \quad t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) > 0 \quad (4)$$

$$b) \quad t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) = 0 \quad (5)$$

$$c) \quad t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) < 0 \quad (6)$$

Priradenie zákazníka k hráčovi 1 možno potom realizovať pomocou funkcie Signum:

$$\text{sgn}(t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) \quad (7)$$

Kde v prípade a) (4) vráti hodnotu 1, v prípade b) (5) vráti hodnotu 0 a v prípade c) (6) vráti hodnotu -1. Keďže v prípade a) bude k -ty uzol priradený hráčovi 1 (dopyt v hodnote 1), v prípade b) bude polovica dopytu k -teho uzla priradená hráčovi 1 (dopyt v hodnote 1/2) a v prípade c) hráč 1 nebude obsluhovať k -ty uzol, vzťah medzi prvkami matice platieb a cenou $p^{(1)}$ je:

$$a_{ij}(p^{(1)}) = \sum_{i \in V} \frac{\text{sgn}(t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) + 1}{2} * r_k \quad (8)$$

Teraz by bolo možné modelovať stanovenie ceny pre hráča 1 týmto matematickým modelom:

Parametre:

- $d_{ij}, i, j \in V$ – najkratšia vzdialenosť z vrcholu i do vrcholu j ,
- t – náklady na jednotku vzdialenosti,
- $p^{(2)} > 0$ – cena výrobku protihráča (hráča 2).

Premenné:

- w – výsledný počet obslužených uzlov,
- $x_i \geq 0, i \in V$ – i -ta zmiešaná stratégia hráča,
- $p^{(1)} > 0$ – cena výrobku hráča 1,
- $a_{ij}(p^{(1)})$ – matica platieb pre hráča 1.

Problémom je nespojitosť funkcie Signum. Teraz však ukážme, ako možno túto funkciu včleniť do úlohy matematického programovania s binárnymi premennými. Zavedme binárne premenné $b_{kij}^{(1)} \in \{0,1\}$ a $b_{kij}^{(2)} \in \{0,1\}; k, i, j \in V$ a spojitú premennú $b_{kij} \in \langle -1,1 \rangle; k, i, j \in V$. Pridajme takéto obmedzenia:

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * b_{kij}^{(1)}; k, i, j \in V \quad (9)$$

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (10)$$

kde M je veľké kladné číslo.

Ohraničením (9) zabezpečíme, že ak $t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) > 0$, potom $b_{kij}^{(1)} = 1$ a ohraničením (10) zabezpečíme, že ak $t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) < 0$, potom $b_{kij}^{(2)} = 1$. Pretože tieto dva prípady nemôžu nastať súčasne, do modelu zavedieme podmienku:

$$b_{kij}^{(1)} + b_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \quad (11)$$

Výpočet prvkov a_{ij} zabezpečíme pomocou premenných $b_{kij} \in \langle -1,1 \rangle; k, i, j \in V$:

$$b_{kij} = b_{kij}^{(1)} - b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (12)$$

$$b_{kij} * (t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) \geq \varepsilon * b_{kij}; k, i, j \in V \quad (13)$$

$$a_{ij} = \sum_{k \in V} (b_{kij} + 1) / 2; i, j \in V \quad (14)$$

kde nerovnica (13) ošetruje prípad, keď $t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) = 0$. ε v tomto prípade považujeme za malé kladné číslo.

Zrekapitulujme používané premenné a parametre ešte raz.

Parametre:

- $d_{ij}, i, j \in V$ – najkratšia vzdialenosť z vrcholu i do vrcholu j ,
- r_k – vektor dopytu,
- t – náklady na jednotku vzdialenosti,
- $p^{(2)} > 0$ – cena výrobku protihráča (hráča 2)
- M – veľké kladné číslo,
- ε – veľmi malé kladné číslo.

Premenné:

- w – výsledný počet obslužených uzlov
- $x_i \geq 0, i \in V$ – i -ta zmiešaná stratégia hráča
- $p^{(1)} > 0$ – cena výrobku hráča 1
- $a_{ij}(p^{(1)})$ – matica platieb pre hráča 1
- $b_{kij}^{(1)} \in \{0,1\}; k, i, j \in V$ – binárna premenná,

- $b_{kij}^{(2)} \in \{0,1\}; k, i, j \in V$ – binárna premenná,
- $b_{kij} \in \{-1,1\}; k, i, j \in V$ – ohraničená premenná.

Uvedenú situáciu možno popísať takýmto matematickým modelom:

$$w * p^{(1)} \rightarrow \max \quad (15)$$

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * b_{kij}^{(1)}; k, i, j \in V \quad (16)$$

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (17)$$

$$b_{kij}^{(1)} + b_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \quad (18)$$

$$b_{kij} = b_{kij}^{(1)} - b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (19)$$

$$b_{kij} * (t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) \geq \varepsilon * b_{kij}; k, i, j \in V \quad (20)$$

$$a_{ij} = \sum_{k \in V} (b_{kij} + 1) / 2; i, j \in V \quad (21)$$

$$w \leq \sum_{i \in V} a_{ij} * x_i; i, j \in V \quad (22)$$

$$\sum_{i \in V} x_i = 1 \quad (23)$$

Účelová funkcia (15) reprezentuje funkciu tržieb hráča 1. Nerovnice (16) až (22) slúžia na stanovenie matice platieb hráča 1. Nerovnice (16) a (17) umožňujú stanoviť priradenie spotrebiteľov z k -teho uzla pre pozíciu (i,j) , $k, i, j \in V$. V prípade ostrej nerovnosti nákladov (ak je k -ty uzol priradený hráčovi 1, premenná $b_{kij}^{(1)} = 1$, ak je tento uzol priradený hráčovi 2, premenná $b_{kij}^{(2)} = 1$). Premenné b_{kij} kalkulujú obslužené uzly pre hráča 1 (ak je k -ty uzol priradený hráčovi 1, premenná $b_{kij} = 1$, ak je tento uzol priradený hráčovi 2, premenná $b_{kij} = -1$). V prípade rovnosti nákladov nerovnice (8) až (20) umožnia nastaviť hodnotu $b_{kij} = 0$. Konečnú kalkuláciu prvkov a_{ij} zabezpečia nerovnice (21) (ak $b_{kij} = 1$, prvok a_{ij} je zvýšený o 1, ak $b_{kij} = 0$, prvok a_{ij} je zvýšený o 0,5 a ak $b_{kij} = -1$, prvok a_{ij} ostáva nezmenený). Vzťahy (22) a (23) umožňujú stanoviť rovnovážnu zmiešanú stratégiu hráča 1.

3 ZÁVER

Táto práca bola zameraná na analýzu oligopolistického, konkrétne duopolistického trhu, na ktorom pôsobia dve firmy prijímajúce rozhodnutia o svojej lokalite s cieľom maximalizovať svoje zisky. Nakoľko má povaha tejto situácie konkurenčný charakter, mohli sme na riešenie problému použiť teóriu hier. Duopolisti súťažia o prilákanie svojich zákazníkov, ktorí si vyberajú jedného z výrobcov na základe svojich celkových nákladov, pozostávajúcich z ceny produktu a nákladov na dopravu. V našom článku riešime problém za predpokladu, že je známa cena druhého výrobcu vopred, čo znamená, že cena je v modeli variabilná. Zároveň uvažujeme situáciu, že v každom z uzlov je veľkosť dopytu rôzna, nie jednotková. Na základe týchto informácií podniká spoločnosť 1 takú cenovú politiku, aby maximalizovala svoj zisk. Navrhujeme model, ktorého výsledok obsahuje informácie o konečnej cene $p^{(1)}$, spolu s informáciami o počte obslužených uzlov a finálnom zisku.

Použitá literatúra

1. BEATH, J. a KATSOULACOS, Y. 1991. Spatial models of imperfect competition. In: The economic theory of product differentiation (chap. 2). Cambridge University Press, 1991.
2. ČIČKOVÁ, Z. a HOLZEROVÁ, P. 2019. Priestorový model duopolu s rôznymi dopytmi: Duopol Spatial Model with Different Demand. In: Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, s. 13-18.
3. ČIČKOVÁ, Z. a LOPEZ, A.J.S. 2018. Price Policy in Games in Spatial Competition. In: Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making. XIX: Proceedings of the International Scientific Conference: 23rd May - 25th May 2018, Trenčianske Teplice, Slovakia. Bratislava: Letra Edu, s. 313-319. ISBN 978-80-89962-07-5.
4. D'ASPROMONT, C., GABSZEWICZ, J.J. a THISSE, J.-F. 1979. On Hotelling's "Stability in competition". In: Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1979, s. 1145-1150. <https://doi.org/10.2307/2224214>
5. GREENHUT, M. L., et al. 1987. The economics of imperfect competition: a spatial approach. Cambridge University Press, 1987.
6. HOTELLING, H. 1929. Stability in competition. In: The Economic Journal, 1929, 39.153: 41-57.
7. WONG, S. C. and YANG, H. (2002). Determining market areas captured by competitive facilities: a continuous equilibrium modeling approach. In: Journal of Regional Science, 2002, 39.1: 51-72. <https://doi.org/10.1111/1467-9787.00123>
8. SETAK, M., SADEGHI-DASTAKI, M. a KARIMI, H. 2018. The multi-route location-routing problem and zone price decision-making using a tabu and variable neighborhood search algorithm. In: *Journal of Industrial and Production Engineering*, 2018, 35.5: 277-297. <https://doi.org/10.1080/21681015.2018.1484391>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: cickova@euba.sk

Kontaktné údaje

Ing. Patrícia Holzerová

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: holzerovap@gmail.com

Porovnání implementace řešitelů do prostředí R

Comparison of solver implementation into R

Ing. Jiří Georgiev

Abstrakt

Pro integraci optimalizačních úloh do běžného chodu firmy je klíčové, aby tato integrace byla proveditelná v souladu s technologiemi, které firma již využívá. Programovací jazyk R patří mezi jeden z nejpoužívanějších jazyků pro datovou analýzu, a tedy je vhodným prostředím pro implementaci těchto řešení. Tento příspěvek se zaměřuje na integraci populárních řešitelů Gurobi, LpSolve a MOSEK právě do prostředí programovacího jazyku R. Cílem je popsat základní syntaxi zápisu modelu a možnosti nastavení pro lineární, tak i pro kvadratické úlohy a následně porovnat rychlost výpočtu triviálních úloh, aproximující dobu inicializace samotného výpočtu.

Klíčová slova: *optimalizace, R, řešitelé*

Abstract

Integration of optimization tasks into the regular operation of the company must be feasible under the technologies that the company already uses. The R programming language is one of the most used languages for data analysis and is, therefore, a suitable environment for the implementation of these solutions. This paper focuses on the integration of popular solvers Gurobi, LpSolve and MOSEK into the environment of the R programming language. The aim is to describe the basic syntax of model notation and setting options, both for linear and quadratic problems and to compare the calculation speed of trivial problems, thus approximating the initialization time of the calculation itself.

Keywords: *optimization, R, solvers*

Úvod

Řešení úloh lineárního a kvadratického programování umožňuje podnikům řešit komplexní otázky plánování, distribuce výrobních prostředků, dopravy a rozložení výrobních programů a ve výsledku minimalizovat náklady a optimalizovat své chování. Překážkou začlenění těchto úloh do každodenního běhu firem je nejenom výpočetní čas ale i nutnost neustálých změn ve vstupních datech a nastaveních použitých modelů. Optimalizační algoritmy se za posledních několik desítek let rapidně zlepšily a výpočetní časy tedy zaznamenaly značný pokles, a to i u úloh s vysokou komplexitou Bixby, 2010. Nadále zůstává otázkou, jak vhodně začlenit proces řešení těchto úloh do každodenní praxe. Jako jedno nejvhodnější řešení se zdá být integrace řešitelů lineárního a kvadratického programování prostřednictvím API do populárních vysokoúrovňových skriptovacích jazyků, jako jsou například Python či R¹. Tato integrace přináší

¹Python i R patří mezi top 20 nejpoužívanějších programovacích jazyků dle Stackoverflow Survey 2019

mnoho výhod a možností automatizace jako například: získávání dat přímo z SQL databází, příprava a čištění vstupních dat, přepočty při změně vstupních dat, tvorba reportů a sad nařízení založených na výsledcích optimalizace, vizualizace výsledků, interaktivní zadávání vstupů a změn. Dále tato integrace od uživatele nevyžaduje znalost jednoúčelových jazyků jako jsou například MPS, AMPL, případně GAMS. Tento příspěvek se zaměřuje pouze na integraci populárních řešitelů Gurobi, LpSolve a MOSEK do prostředí programovacího jazyku R. Cílem je popsat základní syntaxi zápisu modelu a možnosti nastavení, a to jak pro lineární úlohy, tak i pro úlohy kvadratické a porovnat rychlost výpočtu triviálních úloh, aproximující tedy dobu inicializace samotného výpočtu.

1 Přehled optimalizačních softwarů

Gurobi je komerční optimalizační řešitel od Gurobi Optimization. Název v sobě skrývá jména zakladatelů Zonghao Gu, Edward Rothberg a Robert Bixby, kteří se původně podíleli na vývoji CPLEX, který je v současné době vyvíjen společností IBM². Gurobi byl od počátku vytvářen, aby využíval moderní architekturu a více jádrové procesory a používal nejnovější algoritmy. Obsahuje několik řešitelů, například, řešitele kvadratického programování, lineárního programování a smíšeného celočíselného programování. Podporuje širokou škálu programovacích jazyků (C++,

Java, Python, .Net, C, MATLAB, a R) a samozřejmě i standardní modelovací jazyky (AIMMS, AMPL, GAMS, MPL.) Tento příspěvek používá nejnovější dostupnou verzi Gurobi 8.1.1..

LpSolve (lp_solve) je řešitel vyvíjený pod licencí LGPL. K řešení úloh používá rozšíření simplexové metody a metodu větvení a mezí. Podporuje knihovny z různých jazyků jako například C, VB, .NET, Delphi, a další. Také je umožněno propojení s AMPL, MATLAB, OCTAVE a R (LpSolve, 2019).

MOSEK (Mosek, 2019) je komerční softwarový balíček pro řešení jak lineárních, kvadratických, smíšeně kvadratických optimalizačních problémů, tak pro úlohy konvexního programování. MOSEK je dostupný v prostředích C, C#, Java a Python. Je také podporován řadou modelovacích systémů např.: AIMMS, GAMS, AMPL. Možné je i propojení s MATLAB, R.

²<https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer>

2 API pro programovací jazyk R

2.1 Balíček Gurobi

Balíček Gurobi není dostupný z CRAN³, ale je součástí samotné distribuce Gurobi. Gurobi rozhraní pro R umožňuje zapsat model v následující formě

$$\min \quad x^T Q x + c^T x + \alpha, \quad (1)$$

kde c je vektor koeficientů, Q je čtvercová matice koeficientů pro kvadratickou účelovou funkci. Sadu možných podmínek lze zapsat následovně:

$$Ax = b \quad \text{lineární omezení} \quad (2)$$

$$x_j \quad \text{je celočíselné} \quad (3)$$

$$x^T Q_c x + q^T x \leq \beta \quad \text{kvadratické omezení} \quad (4)$$

Výsledný model je uložen jako list obsahující jednotlivé komponenty. Model lze zapsat pomocí standardních principů jazyku R. Případně lze model také načít pomocí funkce `gurobi_read` z libovolného podporovaného formátu (například `.mps`, `.lp`, atd). Takto připravený model se vyřeší pomocí příkazu `gurobi`, který zavolá odpovídajícího řešitele. Například pokud se jedná o úlohu smíšeného lineárního programování bude použita metoda větvení a mezí. Základní komponenty modelu jsou následující:

- A je maticí strukturních koeficientů.
- `obj` je číselný vektor c .
- `modelsense` je textový řetězec nastavující, zdali se jedná o účelovou funkci minimalizační, či maximalizační.
- `sense` je vektor textových řetězců představujících typy omezení. Možné hodnoty jsou “<”, “>”, “=”. Pokud není uvedeno jinak všechna omezení jsou automaticky nastavena na “<”.
- `vtype` je vektor nastavující podmínky celočíselnosti. Může nabývat hodnot “C” pro spojitě, “B” pro binární, “I” pro celočíselné podmínky.
- `rhs` je vektor pravých stran pro lineární omezení

Přehled všech možných komponentů modelu je uveden v dokumentaci Gurobi, 2019.

Takto zapsaný model lze vyřešit pomocí funkce `gurobi(model)`. Dále je možné model zapsat funkcí `gurobi_write()` do libovolného z podporovaných formátů.

³The Comprehensive R Archive Network je platforma zajišťující distribuci balíčků pro R

2.2 Balíček lpSolve

K open source řešiteli LpSolve LpSolve, 2019 existuje stejnojmenný balíček lpSolve⁴ a je určen zejména k řešení celočíselných a smíšených úloh lineárního programování. Balíček obsahuje funkce napsané v C a R a k samotnému řešení využívá lp_Solve ve verzi 5.5. K tvorbě modelu a i k jeho řešení se používá funkce `lp()`. Základní argumenty této funkce jsou:

- `direction` je textový řetězec udávající, zdali se jedná o minimalizační `min` či maximalizační úlohu `max`.
- `objective.in` je číselný vektor koeficientů c .
- `const.mat` je matice koeficientů A .
- `const.dir` je vektor textových řetězců udávající typ omezení. Možné hodnoty jsou “<”, “<=”, “=”, “==”, “>” a “>=”.
- `cont.rhs` je vektor pravých stran b .
- `all.int` je logická hodnota udávající, zdali jsou všechny proměnné celočíselné.

Další možné argumenty jsou popsány v dokumentaci balíčku.

Výsledkem je objekt `model` obsahující řešení a další údaje. K řešení dopravních a přiřazovacích úloh jsou dostupné speciální funkce `lp.transport()` a `lp.assign()`.

2.3 Balíček Rmosek

Balíček Rmosek⁵ je vyvíjen jako oficiální rozhraní pro MOSEK Mosek, 2019. I přestože MOSEK je proprietárním softwarem je tento balíček vyvíjen pod licencí LGPL2.1/LGPL3, jedná se tedy o open source projekt a je možné balíček získat přímo z CRAN. Obdobně jako u balíčku Gurobi, model je zde definován jako `list`. Jednotlivé komponenty jsou tedy přidávány jako elementy tohoto listu. Základní komponenty modelu jsou následující:

- A je maticí strukturních koeficientů. V rámci Rmosek je nutné matici definovat jako `sparseMatrix`, tj. řídkou matici. Tento zápis je výrazně úspornější oproti běžnému objektu `matrix`. Stejnou formulaci lze použít i v balíčku Gurobi.
- `obj` je číselný vektor c .
- `sense` textový řetězec nastavující, zdali se jedná o účelovou funkci maximalizační, či minimalizační. Možné hodnoty jsou “max”, “maximize”, “min” a “minimize”.
- `binsub` je vektor indexů binárních proměnných
- `intsub` je vektor indexů proměnných s podmínkou celočíselnosti

⁴<https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/>

⁵<https://cran.r-project.org/web/packages/Rmosek/>

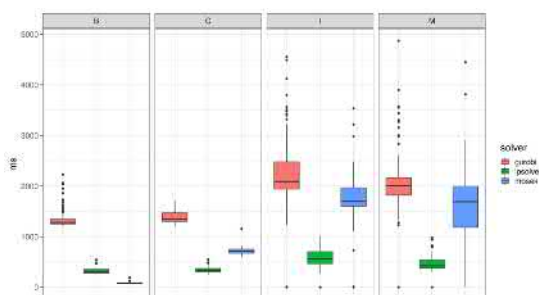
- bc je matice s řádky blc a buc , obsahujícími koeficienty pravé strany, případně $Inf, -Inf$.
- bx je matice s řádky blc a buc , obsahujícími omezení proměnných, případně pokud proměnné nejsou omezeny lze využít hodnot $Inf, -Inf$.

Výsledkem je seznam obsahující řešení, včetně informace o průběhu výpočtu. Pro řešení kvadratické úlohy je nutné model rozšířit o matici Q . K tomu je nutné přidat do objektu `model` list s názvem `qobj` obsahující vektory i, j, v . Tyto vektory představují řádek, sloupec a samotnou hodnotu. Výsledná matice je tedy zapsána ve formátu řídké matice.

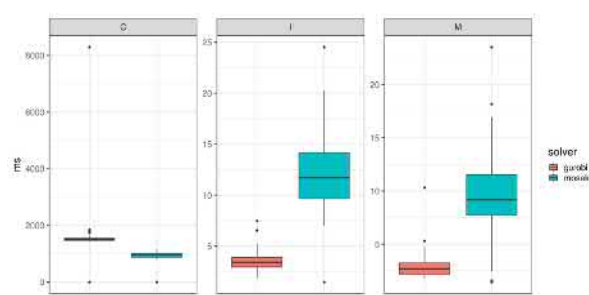
Pro snadnou tvorbu řídké matice lze také využít balíček `slam` a jeho funkci `as.simple_triplet_matrix`. Takto zapsaná úloha je opět řešena pomocí funkce `mosek()`. MOSEK umí řešit pouze konvexní úlohy a je tedy nutné, aby matice Q byla pozitivně semi-definitní.

3 Benchmark

K vyhodnocení rychlosti inicializace jednotlivých řešitelů v R byly nasimulovány spojité (C), celočíselné (I), binární (B) a smíšené (M) úlohy lineárního programování. Úlohy byly generovány s různým množstvím proměnných a omezení. Uvažovány byly pouze malé úlohy s méně než pěti proměnnými a méně než pěti omezeními. Všechny úlohy byly vyřešeny desetkrát, aby výpočetní čas nebyl ovlivněn jinými úlohami běžícími na pozadí⁶ Pro každý typ bylo nasimulováno sto úloh. K opravdovému ověření výpočetní výkonnosti zkoumaných řešitelů by bylo vhodnější použít některou z kolekcí úloh z praxe, například MIPLIB 2017 Hendel, 2019. Výsledek by nejspíše odpovídal výsledkům dosaženým Hansem Mittelmanem Mittelman, 2019. Cílem tohoto benchmarku je tedy primárně porovnání času inicializace výpočtu, tedy jak dlouho trvá řešiteli zahájit výpočet, neboť na úlohách této velikosti samotný čas řešení je zanedbatelný. Výsledky pro úlohy lineárního programování jsou uvedeny v tabulce 1 a vizualizovány na obrázku 1.



Obrázek 1: Porovnání výpočetního času na triviální úloze lineárního programování



Obrázek 2: Porovnání výpočetního času na triviální úloze kvadratického programování

⁶Veškeré výporty byly provedeny na Ubuntu 18.04.04, i5-7400 (4) @ 3.500GHz, 16GB a R 3.6.1.

Z výsledků je patrné, že nejvyšší výpočetní časy mají výkonnější řešitelé Gurobi a MOS-EK a to napříč všemi typy úloh. Důvodem je by mohla být výpočetně náročná předpříprava úlohy před zahájením samotné optimalizace. Jelikož se jedná o closed-source řešitele není možné tento předpoklad nijak ověřit.

Tabulka 1: Výpočetní časy

Řešitel	Lineární úloha												Kvadratická úloha								
	gurobi				lpsolve				mosek				gurobi			lpsolve					
Druh	B	C	I	M	B	C	I	M	B	C	I	M	C	I	M	C	I	M	C	I	M
průměr	1349	1456	2288	2366	328	341	587	470	83	716	4000	2756	1314.5	3.4	2.8	840.1	12.1	9.5			
směř. odch.	190	699	927	1423	58	58	210	158	17	66	2671	2437	539.0	0.8	1.0	348.6	3.3	3.8			
maximum	2228	8280	5692	12740	541	550	1016	979	189	1153	10632	13311	1850.1	7.4	10.3	1159.6	24.5	23.5			
minimum	1203	1199	1.98	2	237	246	1.05	1.02	57	594	1.98	6	1.4	1.8	1.7	1.0	1.4	1.4			

Obdobný postup byl použit i pro kvadratické úlohy. Opět tedy byla vytvořena sada 100 náhodně generovaných úloh pro každý typ. Výsledky pro úlohy kvadratického programování jsou uvedeny v tabulce 1 a na obrázku 2. Největší rozdíl byl mezi řešiteli u spojitých úloh, kde Gurobi byl téměř dvakrát pomalejší.

4 Závěr

Tento příspěvek se zabýval hodnocením implementace API pro řešitele úloh lineárního a kvadratického programování. Porovnána byla syntaxe zápisu a výpočetní rychlost na triviálních úlohách pro Gurobi, MOSEK a LpSolve. Z analyzovaných řešitelů se opakovaně ukázal, a to jak na lineárních úlohách, tak na úlohách kvadratického programování jako nejpomalejší řešitel Gurobi. Pokud by se však jednalo o reálné úlohy tento řešitel je opakovaně hodnocen jako nejrychlejší z dostupných řešitelů Mittelman, 2019 a rozdíl by s růstem náročnosti úlohy rychle vyrovnal. Naopak jeden z nejméně výkonných řešitelů LpSolve se ukázal jako vhodný řešitel pro malé úlohy a jeho nasazení lze tedy doporučit pro ilustrativní úlohy, například, v rámci kurzů zaměřených na lineární programování. Další výhodou tohoto řešitele je, že je vydáván jako open source a má velmi podrobně zpracovanou dokumentaci. Pokud se jedná o samotnou implementaci rozdíl mezi jednotlivými řešiteli není příliš velký a v případě potřeby by nemělo být příliš náročné jednotlivé řešitele vyměnit.

Použitá literatura

BIXBY, R.E., 2010. A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation. *DOCUMENTA MATHEMATICA*.

GUROBI. *Documentation* [online] [cit. 2019-07-31]. Dostupné z: <https://www.gurobi.com/documentation>.

HENDEL, Gregor. *MIPLIB 2017 – The Mixed Integer Programming Library* [online] [cit. 2019-08-05]. Dostupné z: <https://miplib.zib.de/index.html>.

LPSOLVE. *Lpsolve* [online] [cit. 2019-08-01]. Dostupné z: <https://sourceforge.net/projects/lpsolve/>.

MITTELMANN, Hans. *Decison Tree for Optimization Software* [online] [cit. 2019-08-05]. Dostupné z: <http://plato.asu.edu/bench.html>.

MOSEK. *Mosek ApS* [online] [cit. 2019-08-05]. Dostupné z: <https://www.mosek.com/>.

Kontaktní údaje

Ing. Jiří Georgiev

University of Economics, Prague,

Faculty of Informatics and Statistics

Náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: jiri.georgiev@vse.cz

Tento příspěvek byl vytvořen za podpory projektu č. IGA F4/53/2019 Interní grantové agentury, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

IDENTIFIKÁCIA STAVOV ZMIEN SPRÁVANIA SA ZÁKAZNÍKOV PRE PLÁNOVANIE POČTU OTVORENÝCH POKLADNÍ

IDENTIFICATION OF THE REGIMES IN CUSTOMERS BEHAVIOR FOR PLANNING THE NUMBER OF OPEN CASHDESKS

Pavel Gežík, Marian Reiff

Abstrakt

Príspevok prezentuje možnosti využitia údajov z počítačového systému zákazníkov v maloobchodných prevádzkach typu FMCG a modelovanie týchto dát, ktoré môže efektívne ovplyvniť plánovanie potreby otvorených pokladní. V príspevku sú použité reálne údaje konkrétnej prevádzky v danom segmente. Príspevok definuje koeficient prechodu prevádzkou, ktorý možno určiť z údajov o počte zákazníkov vstupujúcich a vystupujúcich zákazníkov z prevádzky maloobchodu. Toto modelovanie je realizované pomocou metodológie Markovovho modelu prepínania režimov, nakoľko trvanie nákupu nie je priamo merané, ale skryté v dátach o príchode a odchode zákazníkov. Práve skryté stavy umožňujú správny výber pravdepodobností, ktoré určujú spomínaný koeficient, keďže ten sa v priebehu otváraciej doby prevádzky mení.

Kľúčové slová: *Markovov model prepínania režimov, teória radov, predikcia návštev obchodu, optimálny počet pokladní*

Abstract

The article presents options on using the data from the customer counter in FMCG retail establishments and modeling this data, which can effectively influence the open cash registers planning need. In the article, the real data for a specific location in a given segment are analyzed. In the article, an operational transition coefficient is defined, which can be determined from the number of customers entering and leaving the retail store. The modeling is done using the Markov switching model methodology since the duration of purchase is not directly measured but hidden in customer arrival and departure information. It is the system's hidden states, which make it possible to select the probabilities that determine that coefficient since it varies during the opening hours of a retail store.

Keywords: *Markov switching model, Queue Theory, Prediction of Store Visits, Optimal Cashiers Count*

1 ÚVOD

Určenie potreby otvorených pokladní a zároveň predpoklad tvorby radu v maloobchodných prevádzkach typu FMCG je základná otázka, ktorá musí byť zodpovedaná na zabezpečenie plynulého chodu prevádzky. Jeden z kľúčových faktorov, ktorý ovplyvňuje prechod zákazníka obchodom je práve čakanie zákazníka v rade pri pokladni. Z toho dôvodu je práve optimalizácia v tejto oblasti jedna z najdôležitejších úloh spojených s riadením prevádzky.

Reťazce majú často zavedené isté pravidlá, ktoré sú spojené s obsluhou zákazníkov. Tieto pravidlá sledujú tak vedúci prevádzok, ako aj obsluha. Predikcia potrebného počtu otvorených pokladní radikálne pomáha k plánovaniu úloh jednotlivých pracovníkov a zároveň prispieva k plynulej obsluhu zákazníkov.

Z týchto dvoch hlavných dôvodov je práve odhad počtu zákazníkov prichádzajúcich k pokladniciam jedna z často riešených optimalizačných úloh v maloobchode.

V príspevku na tento odhad je použitá teória skrytých Markovových modelov, ktorá sa už dlhšie používa v oblasti spracovania signálov, najmä v súvislosti s automatickým rozpoznávaním reči. Táto teória však poskytuje dostatočne flexibilné, univerzálne modely aplikovateľné v prípadoch, ak sú k dispozícii dáta typu časových radov jednej alebo viacerých premenných, a to buď kvalitatívneho alebo kvantitatívneho charakteru, vrátane časových radov s cyklickým výskytom hodnôt. Vďaka flexibilitě modelu sa záujem o teóriu a aplikácie skrytých Markovových modelov rýchlo rozšíril aj do iných oblastí. Medzi prvé aplikácie skrytého Markovovho modelu časových radov na ekonomických ukazovateľoch možno zaradiť publikácie (Hamilton 1989) a (Hamilton 1990), kde autor skúma povojnový vývoj hrubého národného produktu Spojených štátov amerických v závislosti od skrytých stavov modelujúcich ekonomické cykly v Spojených štátoch amerických.

Skrytý Markovov model je model detekcie signálu, ktorý predpokladá, že pozorované sekvencie sú odvodené zo sekvencie skrytých stavov. Sekvencia skrytých stavov je diskretná, modelovaná pomocou Markovovho reťazca. Skrytý Markovov model je teda stochastický model (MacDonald a Zucchini 1997). Baum a Petrie (1966) navrhli matematické základy teórie skrytého Markovovho modelu. Autori predpokladajú, že pozorovania sú generované skrytou sekvenciou, ktorá je modelovaná Markovovým procesom. V skrytom Markovovom modeli sú latentné stavy neviditeľné, zatiaľ čo pozorovania (vstupy modelu), ktoré závisia od stavov, sú viditeľné.

Ak model skrytého Markovovho reťazca uvažuje s faktom, že pozorovateľný proces nie je závislý len od súčasného skrytého stavu ale aj predchádzajúcich pozorovaní pozorovateľných stavov možno takýto model nazvať Markovov prepínací model (angl. Markov switching model) alebo Markovov model prepínania režimov (angl. Markov regime switching model).

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že skrytý Markovov model je skôr teoretická konštrukcia. Čas zákazníka strávený v predajni nákupom tovaru, nie je bežne priamo meraný u každého zákazníka. Využitím počítačiel návštev možno ale merať počet zákazníkov na vstupe a výstupe do predajne v čase. Počítadlo poskytuje údaje o počte zákazníkov vstupujúcich a o počte vystupujúcich zákazníkov prevádzky maloobchodu.

Stavy Markovovho reťazca môžeme interpretovať ako úroveň kvality poskytovania služieb, kde jeden zo stavov je charakterizovaný nízkou úrovňou poskytovaných služieb charakterizovaný dlhým čakaním pred pokladnicami, resp. dlhým časom potrebným na nákup a druhý stav s vysokou úrovňou poskytovaných služieb, teda krátkym čakaním pre pokladnicami, resp. krátkym časom potrebným na nákup.

2 KOEFICIENT PRECHODU PREVÁDZKOU A JEHO SKRYTÉ STAVY

2.1 Koeficient prechodu priestorom prevádzky

Predikcia tvorby radu je v princípe predikcia prichádzajúcich zákazníkov k pokladniciam v určitom čase a následnom určení potrebného množstva obslužných kanálov. Spôsoby, ako predpokladať, resp. robiť odhad prichádzajúcich zákazníkov sú rôzne a najmä dané špecifikami reťazca alebo daného typu maloobchodu, či špecifikami prevádzky. Najčastejšie sa ale tieto odhady robia krátkodobu na základe prichádzajúcich zákazníkov do maloobchodnej prevádzky a tak môže manažment prevádzky určiť potrebný počet otvorených pokladní.

Uvedený spôsob umožňuje jednoducho predikovať prichádzajúcich zákazníkov k pokladniám za predpokladu poznania času pobytu v prevádzke *ST* (*ShoppingTime*). Čas pobytu v prevádzke možno určiť ako čas medzi okamihom príchodu zákazníka do prevádzky a okamihom odchodu zákazníka z prevádzky. Vhodnejšie je uvádzať ako entitu návštevu a tak je nutné definovať množstvo prichádzajúcich návštev a množstvo odchádzajúcich návštev.

Následne možno definovať koeficient prechodu prevádzkou, teda koeficient, ktorým možno prenásobiť prichádzajúce návštevy a výsledný počet návštevníkov s istou pravdepodobnosťou následne príde k pokladniám po istom čase. Tento čas sa dá určiť z už spomínaného času pobytu v prevádzke, od ktorého sa odpočíta čas čakania a čas obsluhy. Všetky tieto časy je pomerne náročné presne modelovať a tak pre ďalšie potreby je vhodné využívať priemerne hodnoty. Následne je možné stanoviť odhadom čas, o aký je nutné zareagovať na prichádzajúce návštevy.

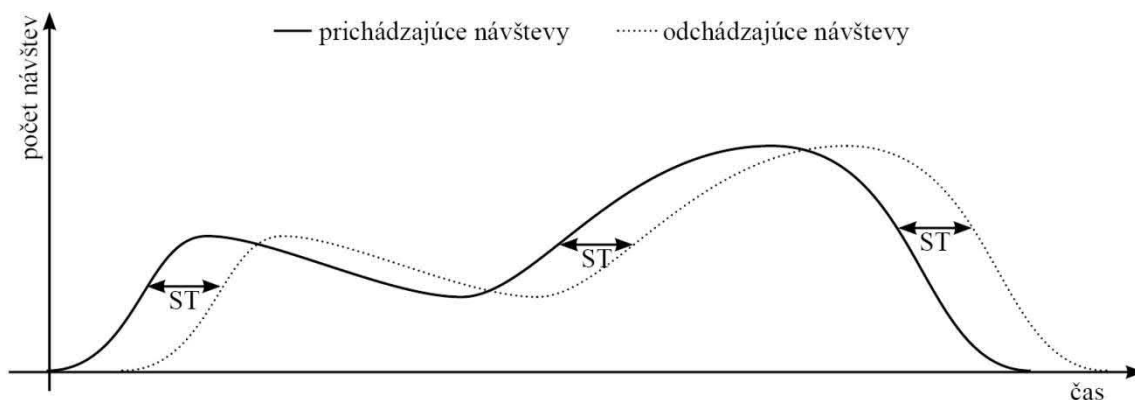
Vychádzajúc z uvedeného, je možné použitie jednoduchého odhadu počtu prichádzajúcich návštev k pokladniám. Dali by sa využiť aj zložitejšie metódy, avšak tie budú využívať rovnaké princípy ako takýto jednoduchý odhad. Voľba jednotlivých metód je podmienená aj časom, kedy sa predikcia vykonáva. Ďalej je uvedený výpočet koeficientu z uvedených dvoch časových radov.

$$koef = \text{odchádzajúce návštevy} / \text{prichádzajúce návštevy} \quad (1)$$

Porovnaním týchto dvoch časových radov je možné odhadnúť spomínaný koeficient a tak určiť množstvo pokladní v čase, kedy zákazníci budú približne prichádzať k pokladniám vzhľadom na ich príchod do prevádzky. Zmeny času potrebného na nákup tovaru možno analyzovať z pozorovateľného ukazovateľa počtu odchádzajúcich zákazníkov a počtu vstupujúcich zákazníkov a modelovať skrytým Markovovým modelom s dvoma stavmi v nasledujúcej časti. Tento koeficient možno počítať po abstrakcii od špecifických faktoroch (zaťaženosť prevádzky, sezónnosť alebo akcie v jednotlivých zónach, alebo v celej prevádzke, väčšie množstvo návštevníkov v zónach prechodu, resp. v uličkách, naplnenosť pokladní, rýchlosť jednotlivých prechodov pokladňami, atď.)

Ak by bol *ST* počas celého dňa rovnaký, čo je striktné teoretická situácia, tak by bolo relatívne jednoduché určiť počet prichádzajúcich návštevníkov k pokladniám a koeficient nie je nutný (**koef** = 1). Danú situáciu popisuje obrázok 1.

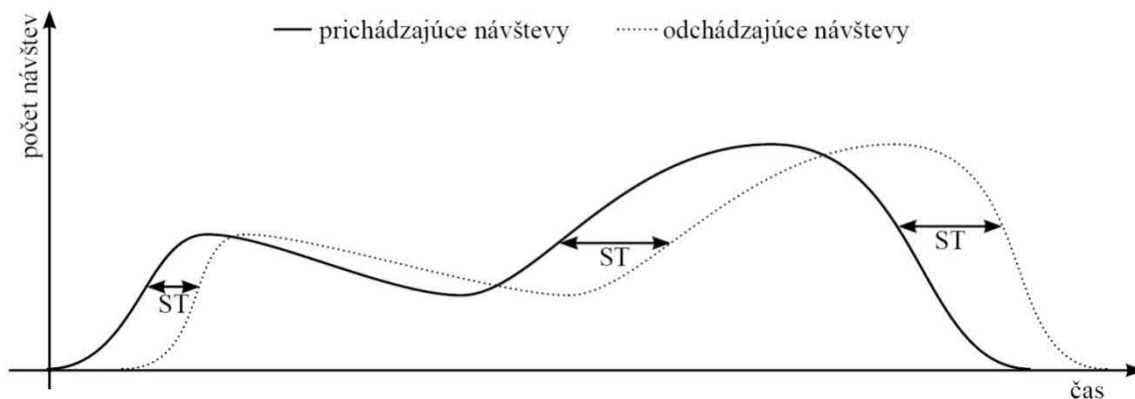
Obrázok 1 - Priebeh príchodu a odchodu návštevníkov s konštantným časom pobytu



Zdroj: Vlastné spracovanie.

V praxi je samozrejme ST rôzny v jednotlivých okamihoch dňa a to nielen v súvislosti s už spomenutými špecifickými faktormi ale aj v súvislosti s faktom, že na ST práve vplýva počet otvorených pokladní. A s touto skutočnosťou je spojená optimalizácia počtu pokladní. Uvedené ilustruje obrázok 2.

Obrázok 2 - Priebeh príchodu a odchodu návštevníkov s rôznym časom pobytu



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Danú skutočnosť dobre ilustrujú aj priemerné hodnoty vybraného reťazca za obdobie 22 ucelených týždňov od 22. júna 2020 do 22. novembra 2020¹, ktoré sú na obrázku 3.

Obrázok 3 - Priemerné hodnoty koef.

	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00
Pondelok	0,87	0,94	0,96	1,03	0,93	1,02	1,01	1,05	0,95	0,94	1,04	0,99	1,05	1,09	1,26
Utorok	0,86	0,90	0,94	1,03	0,98	1,00	1,02	1,04	0,96	0,97	0,99	1,02	1,03	1,12	1,21
Streda	0,88	0,94	0,96	1,01	0,99	1,00	1,05	1,02	0,96	0,98	1,01	1,05	1,03	1,06	1,24
Štvrtok	0,86	0,90	0,98	0,98	1,03	0,98	1,02	1,06	0,95	0,97	1,06	1,01	1,02	1,07	1,27
Piatok	0,87	0,90	0,95	1,03	0,97	1,02	1,02	1,03	0,95	0,97	1,04	1,04	1,00	1,10	1,24
Sobota	0,77	0,87	0,90	0,98	1,02	1,01	1,11	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,03	1,05	1,21
Nedeľa	0,00	0,83	0,87	1,04	0,97	1,07	1,06	1,01	1,00	1,03	0,99	1,01	1,04	1,07	1,17

Zdroj: Vlastné spracovanie.

2.2 Markovov model prepínania režimov pre správanie sa zákazníkov a jeho odhad

Markovov model prepínania režimov je odhadnutý pomocou softvéru Eviews pre maloobchodnú predajňu na základe hodinových dát o počte prichádzajúcich a odchádzajúcich zákazníkov. Analyzované je závislá premenná *koef* podľa vzťahu (1), sedem nezávislých kvalitatívnych umelých premenných reprezentujúcich deň v týždni ($d_1, d_2, \dots, d_7$) a 15 nezávislých kvalitatívnych umelých premenných reprezentujúcich hodinu počas otváraciej doby od 6:00 do 20:00 ($h_{06}, h_{07}, \dots, h_{20}$) a nezávislé oneskorené exogénne premenné ($ar(1)$, $ar(2)$) a premennú OCCUPANCY, ktorá reprezentuje zaľudnenosť.

Odhadli sme viacero verzii modelu pričom v príspevku prezentujeme model (Tabuľka 1) s najnižšou hodnotou Akaikeho informačného kritéria kde všetky vysvetľujúce premenné sú štatisticky významné. Vplyv dňa v týždni na hodnotu koeficientu sa štatisticky významne nepotvrdil. Prezentovaná verzia modeluje prepínanie medzi režimami s rôznou strednou hodnotou a rozptylom. Odhadnuté boli aj verzie modelujúce len prepínanie medzi režimami s rôznou strednou hodnotou a rovnakým rozptylom a verzia s rovnakou strednou hodnotou a rôznym rozptylom.

¹ 20. júna sa začala posledná, piata vlna uvoľňovania opatrení a tak sa da povedať, že sa správanie zákazníkov ustálilo.

Tabuľka 1 - Štatistiky pre odhadnutý Markovov model prepínania režimov

Dependent Variable: KOEF

Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)

Date: 11/27/20 Time: 22:31

Sample: 1 2200

Included observations: 2200

Number of states: 2

Initial probabilities obtained from ergodic solution

Standard errors & covariance computed using observed Hessian

Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=94382250)

Convergence achieved after 24 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
C	0.914656	0.008201	111.5356	0.0000
LOG(SIGMA)	-2.196773	0.061508	-35.71496	0.0000
Regime 2				
C	0.890737	0.005090	174.9858	0.0000
LOG(SIGMA)	-2.719260	0.040276	-67.51557	0.0000
Common				
H08	0.071764	0.009631	7.451042	0.0000
H09	0.147520	0.008699	16.95887	0.0000
H10	0.134323	0.008517	15.77138	0.0000
H11	0.167571	0.008552	19.59476	0.0000
H12	0.180411	0.008245	21.88146	0.0000
H13	0.166264	0.008176	20.33645	0.0000
H14	0.109005	0.008008	13.61241	0.0000
H15	0.127642	0.008127	15.70651	0.0000
H16	0.171480	0.008199	20.91369	0.0000
H17	0.164111	0.008098	20.26667	0.0000
H18	0.170699	0.008035	21.24400	0.0000
H19	0.214279	0.008103	26.44305	0.0000
H20	0.339339	0.008882	38.20715	0.0000
OCCUPANCY	-0.001953	0.000178	-10.96157	0.0000
AR(1)	-0.317139	0.022981	-13.80011	0.0000
AR(2)	-0.118905	0.021925	-5.423239	0.0000
Transition Matrix Parameters				
P11-C	0.661839	0.449066	1.473810	0.1405
P21-C	-2.002287	0.380783	-5.258344	0.0000
Mean dependent var	1.008406	S.D. dependent var	0.117871	
S.E. of regression	0.081526	Sum squared resid	14.48943	
Durbin-Watson stat	2.008557	Log likelihood	2437.429	
Akaike info criterion	-2.195845	Schwarz criterion	-2.138883	
Hannan-Quinn criter.	-2.175030			
Inverted AR Roots	-.16-.31i	-.16+.31i		

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Odhadnuté podmienené pravdepodobnosti prechodu medzi režimami a stredná hodnota zotrvania v príslušnom stave/režime sú uvedené v tabuľke 2.

*Tabuľka 2 - Matica podmienených pravdepodobností prechodov medzi stavom jedna a dva
stredná hodnota zotrvania v príslušnom stave*

Equation: EQ02

Date: 11/27/20 Time: 22:41

Transition summary: Constant Markov transition
probabilities and expected durations

Sample: 1 2200

Included observations: 2200

Constant transition probabilities:

$P(i, k) = P(s(t) = k \mid s(t-1) = i)$

(row = i / column = j)

	1	2
1	0.659673	0.340327
2	0.118963	0.881037

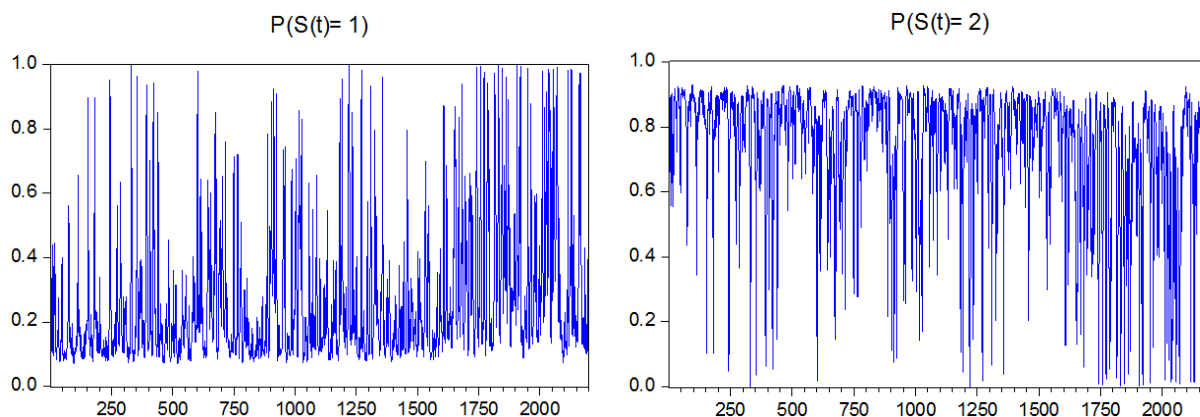
Constant expected durations:

	1	2
	2.938353	8.405975

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Pri analýze časového radu za sledované obdobie pre hodinové dáta počas otváracej doby boli odhadnuté pravdepodobnosti, v ktorom stave sa pravdepodobne analyzovaný systém nachádza. Tieto pravdepodobnosti sú zobrazené na obrázku č 3.

*Obrázok 4 - Odhadnuté pravdepodobnosti v ktorom stave sa analyzovaný systém nachádza
(Smoothed Regime Probabilities).*



Zdroj: Vlastné spracovanie.

3 ZÁVER

Problematika optimalizácie počtu a potreby pokladní je spojená s množstvom faktorov a špecifik jednotlivých prevádzok, ktoré majú ale spoločné princípy a teda na základe uvedeného v príspevku možno celkom jednoducho stanovovať počet otvorených pokladní. K danému je dobré si ale uvedomovať, že na prevádzke môžu nastávať rôzne situácie a podľa nich koeficient upravovať. Odhadnuté dva stavy možno kumulatívne zobrazit' v prehľadom pohľade podľa hodín v týždni (Obrázok 5). Vzhľadom na fakt, že tieto stavy sa „prepínajú“, postačuje iba pohľad na stav 2.

Obrázok 5 - Výskyt stavu 2.

	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00
Pondelok	2	3	8	6	4	3	3	1	0	1	0	0	2	4	5
Utorok	2	3	4	4	3	1	2	1	0	0	0	0	1	3	3
Streda	7	8	9	6	5	2	1	3	0	0	0	3	3	0	2
Štvrtok	3	3	6	7	6	5	4	3	1	1	2	0	1	2	4
Piatok	4	4	7	7	5	4	2	1	2	2	1	1	0	3	2
Sobota	3	3	3	2	1	2	5	3	2	2	2	1	0	0	1
Nedeľa	0	1	5	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0	0	0

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Z odhadnuté je zrejme, že tieto stavy súvisia so zaľudnenosťou prevádzky hlavne v doobdených hodinách, čo presne reflektuje jedno z pandemických opatrení, ktoré práve tieto hodiny vyčleňuje ako „nákupne hodiny pre dôchodcov“. Práve tento výsledok potvrdzuje pohľad na priemernú zaľudnenosť za skúmané obdobie. Je zrejme, že aj keď zaľudnenosť má podobné hodnoty aj poobede, stav 2 sa v daných hodinách už nie je taký početný, čo je spôsobené inou štruktúrou zákazníkov, ich nákupným časom inou štruktúrou obsluhy.

Obrázok 6 - Priemerné hodnoty zaľudnenosti.

	6:00	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00
Pondelok	5,09	9,17	14,91	16,18	19,66	24,45	18,18	15,72	17,15	25,65	28,57	25,84	22,80	17,60	10,11
Utorok	5,82	10,30	16,45	17,24	18,70	21,83	15,48	14,61	16,31	22,70	25,58	21,30	20,14	16,54	9,40
Streda	6,01	10,84	15,94	16,35	18,95	21,69	16,44	14,58	17,79	22,76	25,48	19,92	17,16	15,53	9,31
Štvrtok	5,55	11,08	16,03	18,10	20,09	23,90	18,53	16,57	19,11	24,35	25,81	20,45	20,47	16,29	8,52
Piatok	6,07	12,04	18,53	19,15	21,94	26,91	19,81	19,70	21,98	27,16	26,68	20,20	19,85	16,21	9,23
Sobota	6,51	14,33	26,72	30,93	33,53	28,72	20,66	16,50	14,76	15,28	18,08	17,68	17,05	17,57	11,08
Nedeľa	0,00	10,06	16,39	21,03	22,25	22,76	14,00	12,30	12,23	12,17	13,57	14,72	14,65	12,88	7,01

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Uvedené poukazuje na fakt, že uvažované otváranie pokladní podľa prichádzajúcich zákazníkov je jednoduchšie práve v časoch stavu 2, čo sa dalo aj predpokladať, nakoľko nákup dôchodcov je „kľudnejšie“ a teda výkyvy nie sú až tak bežné.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0339/20 Využitie skrytého Markovovho modelu vo finančnom modelovaní.

Použitá literatúra

1. BAUM, L. E., PETRIE, T. (1966). *Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains*. The annals of mathematical statistics, 37(6), 1554-1563.
2. FAŠIANG, T. (2010). *Komunikačné stratégie maloobchodu*. Trnava: Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Fakulta masmediálnej komunikácie. 117 p.

3. HAMILTON, J. D. (1989). *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 57(2), 357-384.
4. HAMILTON, J. D. (1990). *Analysis of time series subject to changes in regime*. Journal of Econometrics, 45(1-2), 39-70.
5. MACDONALD, I. L., ZUCCHINI, W. (1997). *Hidden Markov and other models for discrete-valued time series*. Chapman and Hall/CRC.

Kontaktné údaje

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: marian.reiff@euba.sk

METODOLOGICKÝ POHĽAD NA PRÍJMOVO MULTIPLIKÁTOROVÚ ANALÝZU¹

METHODOLOGICAL PERSPECTIVE ON INCOME MULTIPLIER ANALYSIS

Marián Goga

Abstrakt

Autor v článku analyzuje v prvej časti niektoré metodologické problémy modelovania multiplikátorov v input-output analýze so zameraním na príjmový multiplikátor v Leontiefovom modeli. Analýza ekonomických dôsledkov zmien v parametroch, ktoré sú pre Leontiefov input-output model dané exogénne je jedným z jeho hlavných využití. Vo všeobecnosti multiplikátory v input – output modeli predstavujú podiel celkového efektu určitej zmeny veličiny k počiatočnému efektu exogénnej zmeny. V druhej časti uvádza metodologický pohľad na príjmový multiplikátorovú analýzu v makroekonomickej teórii, pričom sa zameriava na príjmový multiplikátor, ktorý je mierou celkového priameho aj nepriameho efektu zvýšenia finálneho dopytu o jednu peňažnú jednotku.

Kľúčové slová: *Leontiefov model, príjmový multiplikátor, princípy multiplikátora, celková produkcia, spotreba*

Abstract

The author in the article analyzes in the first part some methodological problems modeling multipliers in an input-output analysis, focusing on the income multiplier in the Leontief's model. The analysis of the economic consequences of changes in parameters that are for the Leontief's input-output model given exogenous is one of its main uses. In general, the multipliers in the input-output model represent the proportion of the overall effect of a particular change in quantity to the initial effect of the exogenous change. In the second part, it presents a methodological view of the income multiplier analysis in macroeconomic theory, focusing on the income multiplier, which is a measure of the overall direct and indirect effect of increasing the final demand for one monetary drive.

Keywords: *Leontief's model, income multiplier, multiplier principle, final production, consumption*

JEL Classification: C 67, E 29

1 ÚVOD

Vo všeobecnosti multiplikátory v input – output modeli predstavujú podiel celkového efektu určitej zmeny veličiny k počiatočnému efektu exogénnej zmeny. Pričom exogénna zmena (napr. zmena v konečnom dopyte jednotlivých odvetví) predstavuje hodnotu, na základe ktorej sa postupným narastaním počiatočný efekt transformuje do celkového efektu. V podmienkach input – output analýzy sa rozlišujú celkové efekty v otvorených modeloch (priame + nepriame efekty) a v uzavretých modeloch (priame + nepriame + indukované efekty) [8, s. 59]. Pri identifikácii a definovaní jednotlivých multiplikátorov sa v odbornej

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0193/20: *Vplyv priestorových spillover efektov na inovačné aktivity a rozvoj regiónov EÚ*.

literatúre môžeme stretnúť s istými odlišnosťami, i keď ich základná myšlienka zostáva rovnaká. Najznámejšie a najpoužívanéjšie sú multiplikátor výroby (produkcie), multiplikátor príjmov, multiplikátor zamestnanosti, multiplikátor pridanej hodnoty a multiplikátor dovozných koeficientov. Rozdielnosť v názve jednotlivých multiplikátorov spočíva vo výbere počiatočného efektu, resp. exogénnej zmeny.

V článku sa zameriame v prvej časti na metodologické problémy modelovania multiplikátorov v input-output analýze so zameraním na príjmový multiplikátor a v druhej časti ukážeme metodologický pohľad na príjmový multiplikátorovú analýzu v makroekonomickej teórii.

2 PRÍJMOVÝ MULTIPLIKÁTOR V INPUT-OUTPUT ANALÝZE

Input-output multiplikátory sú nástroje, vďaka ktorým je možné predvídať dôsledky zmeny dopytu po produkcii jedného odvetvia na celú ekonomiku. Poskytujú rýchle odpovede na možné vplyvy rastúceho alebo klesajúceho dopytu po odvetvovej produkcii, na možné dôsledky nových projektov a na výsledky stratégií zameraných na nahrádzanie dovozu, a to nielen v samotnom odvetví, ale aj vo všetkých ostatných odvetviach hospodárstva. Ich použitie je pomerne jednoduché a relatívne účinné. Pretože multiplikátory opisujú priemerné dôsledky, nezohľadňujú výnosy z rozsahu, nevyužitú kapacitu ani technologické zmeny.

Najjednoduchším a najčastejšie používaným input-output multiplikátorom je multiplikátor výstupu (produkcie), ktorý vyjadruje vzťah medzi počiatočným nárastom produkcie (alebo dopytu) jedného odvetvia a konečným nárastom produkcie všetkými odvetviami hospodárstva. Preto, ak sa zmení dopyt po produkcii daného odvetvia o jednotku, celková produkcia vo všetkých odvetviach sa zvýši presne o hodnotu multiplikátora. Pri interpretácii je dôležité poznamenať, že multiplikátor produkcie započíta tiež celú medzispotrebu, a preto niektoré vstupy môžu byť započítané opakovane v celom dodávateľsko-odberateľskom reťazci. Multiplikátory produkcie bývajú teda značne nadhodnotené kvôli interpretácii výsledkov. Okrem uvedeného multiplikátora môžeme pre každé odvetvie vypočítať aj multiplikátor zamestnanosti, multiplikátor príjmov, multiplikátor pridanej hodnoty a multiplikátor dovozu.

Multiplikátor príjmov predstavuje hodnotu príjmov, ktoré v celej ekonomike vygeneruje zvýšenie konečnej spotreby j -tej komodity o jednotku.

Analýza ekonomických dôsledkov zmien v parametroch, ktoré sú pre Leontiefov input-output model dané exogénne je jedným z jeho hlavných využití. Na účely takejto analýzy sa ako veľmi vhodný javí práve Leontiefov input-output model. Na základe tohto modelu vieme pomocou príslušnej Leontiefovej inverznej matice vypočítať, aký dôsledok má daná okamžitá zmena v konečnej spotrebe na objemy produkcie všetkých komodít v hospodárstve [1].

Pri analýze vychádzame z maticovo – vektorového zápisu sústavy distribučných rovníc v tvare:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad (1)$$

resp. $(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (2)$

kde $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{nn}$, $\mathbf{x} = [x_i]_{n1}$, $\mathbf{y} = [y_i]_{n1}$ a $\mathbf{I}$ je jednotková matica.

Vzťahy (1) a (2) predstavujú sústavy lineárnych rovníc, ktoré tvoria základ otvoreného statického leontiefovského input-output modelu [10].

Tento input–output model zobrazuje systém, ktorého zložkami sú odvetvia. Otvorený je preto, lebo produkcia odvetví sa spotrebúva nielen vo výrobnnej sfére, ale aj mimo nej, vo sfére konečnej (finálnej) spotreby. Na druhej strane do systému vstupujú zložky, vytvárané mimo vlastného systému (primárne zdroje). Sú to najmä pracovné sily, kapitál, produkcia z dovozu a pod. Systém je teda spojený určitými väzbami so svojim okolím tak na strane výstupu (outputu), ako aj na strane vstupu (inputu).

Na výpočet multiplikátorov, ktoré vyhodnocujú efekty niektorých premenných na hodnotu ekonomickej aktivity sa používajú väzby jednotlivých sektorov zachytené v Leontiefovej inverznej matici. Pri riešení sa využíva vzťah (2) modifikovaný do tvaru:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}, \quad (3)$$

resp. $\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{y}, \quad (4)$

kde $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_{ij}] = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Prvky inverznej matice r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) nazývame celkovými (komplexnými) koeficientmi spotreby. Závisia iba od technických koeficientov a_{ij} a majú charakter parametrov.

Systém lineárnych rovníc predstavujúci Leontiefov input-output model teda zachytáva priame aj nepriame efekty zmeny v objeme konečnej spotreby danej komodity. Prostredníctvom jednotlivých stĺpcov Leontiefovej inverznej matice tento model umožňuje vyčíslit' dôsledky zmeny v konečnej spotrebe jednej z komodít na jednotlivé objemy produkcie všetkých komodít v hospodárstve.

Sústavu (4) možno zapísať aj v tvare

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Koeficienty r_{ij} vyjadrujú teda nutný rozsah výroby v i -tom odvetví ($i = 1, 2, \dots, n$) potrebný na zabezpečenie výroby jednotky produkcie j -tého odvetvia pre konečnú spotrebu.

Komplexné koeficienty spotreby (koeficienty celkovej spotreby) r_{ij} vyjadrujú tiež prírastok produkcie i -tého odvetvia na jednotkový prírastok konečnej spotreby produkcie j -tého odvetvia. Vyplýva to z derivácie vzťahu (5)

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = r_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Medzi prírastkom konečnej spotreby $\Delta \mathbf{y}$ a prírastkom objemu celkovej produkcie $\Delta \mathbf{x}$ platí teda vzťah

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{y} \quad (7)$$

Matica $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ sa preto tiež nazýva maticovým multiplikátorom, ktorý transformuje zmeny v konečnej spotrebe na zmeny v objeme výroby. Koeficienty r_{ij} sa vzťahujú na konečnú spotrebu; na rozdiel od koeficientov priamej spotreby a_{ij} (tie sa vzťahujú na celkový objem produkcie odvetví), preto sa nazývajú aj koeficientmi celkovej materiálnej spotreby [5].

Zmena konečného dopytu generuje nielen priame, ale aj nepriame efekty, ktoré vzniknú touto zmenou dopytu. Priame efekty vyjadrujú, že ak sa zvýši konečná spotreba v i -tom odvetví o jednotku, musí odvetvie i vyrobiť o jednotku viac. Avšak toto zvýšenie výroby v odvetví i

spôsobené zvýšením spotreby i -tého odvetvia je podmienené zvýšením výroby aj v ostatných $(n - 1)$ odvetviach, ktoré sú dodávateľmi vstupov do odvetvia i . Tieto zmeny spôsobujú, že konečný efekt na ekonomiku je väčší ako počiatočná zmena konečného dopytu.

Komplexné koeficienty spotreby r_{ij} sú vždy nezáporné a väčšie alebo rovnajúce sa zodpovedajúcim technickým koeficientom. Medzi koeficientmi priamej a celkovej spotreby a_{ij} a r_{ij} platí vzťah:

$$\begin{aligned} r_{ij} &\geq a_{ij}, & i, j &= 1, 2, \dots, n \\ r_{ii} &\geq 1 + a_{ii}, & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

Tento vzťah bezprostredne vyplýva z možnosti rozkladu matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ do konvergujúcej postupnosti matíc [12, s. 291].

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k + \dots \\ (\mathbf{A}^k &\rightarrow 0, \text{ pre } k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Je dokázané, že konvergencia tohto súčtu a zároveň platnosť rovnosti sú ekvivalentné so splnením Hawkinsovej – Simonovej podmienky, ktorá je nutnou a zároveň postačujúcou podmienkou pre samotnú existenciu Leontiefovej inverznej matice [13, s. 363].

Takýto rozklad je možný vtedy, ak platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^{k+1} = 0. \quad (10)$$

Ďalej vo vzťahu (9) sčítame všetky matice, okrem prvej a druhej a súčet označíme $\mathbf{R}^*$:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^k + \dots \quad (11)$$

Maticu komplexných koeficientov $\mathbf{R}$ môžeme potom napísať v tvare, v ktorom sa dá použiť na skúmanie štruktúry hospodárstva:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{R}^* \quad (12)$$

Pretože matica $\mathbf{A}$ je nezáporná ($a_{ij} \geq 0$), sú nezáporné aj mocniny matice $\mathbf{A}$ a tiež matica $\mathbf{R}^*$, ktorá je súčtom mocnín matice $\mathbf{A}$, je nezáporná ($r_{ij}^* \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$).

Pre jednotlivé komplexné koeficienty spotreby r_{ij} platí:

$$r_{ij} = a_{ij} + r_{ij}^* + \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

kde $a_{ij} \geq 0$, $r_{ij}^* \geq 0$ a $\delta_{ij} = 1$, pre $i = j$,

$\delta_{ij} = 0$, pre $i \neq j$.

Odtiaľ vyplýva, že komplexné koeficienty spotreby r_{ij} sú nezáporné a sú väčšie alebo rovnajúce sa zodpovedajúcim technickým koeficientom a_{ij} . Tie koeficienty, ktoré v matici $\mathbf{R}$ ležia na hlavnej diagonále (r_{ij} , pre $i = j$), sú väčšie alebo rovnajúce sa 1, lebo $\delta_{ij} = 1$, pre $i = j$.

Ako sme už spomenuli, multiplikátor príjmov určuje výšku príjmov, ktoré v ekonomike generuje jednotka produkcie j -tej komodity pre konečnú spotrebu.

Na výpočet tohto multiplikátora je potrebné poznať koeficienty príjmov za jednotlivé komodity. Koeficienty príjmov vyjadrujú lineárny vzťah medzi objemom produkcie j -tej komodity a príjmami, ktoré musia byť v súvislosti s produkciou tejto komodity vyplatené.

Hodnoty týchto koeficientov sa dajú získať vydelením hodnoty príjmov súvisiacich s produkciou danej komodity celkovým objemom produkcie danej komodity. Všetky tieto hodnoty sú súčasťou input-output tabuľky.

Diagonálnu maticu príjmových koeficientov označíme ako $\hat{\mathbf{A}}_p$. Ak sa táto matica vynásobí sprava Leontiefovou inverznou maticou $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, vznikne matica kumulatívnych koeficientov príjmov:

$$\mathbf{R}_p = \hat{\mathbf{A}}_p (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (14)$$

Prvok matice $\mathbf{R}_p$ vyjadruje objem, o ktorý sa musia v produkcii i -tej komodity zvýšiť príjmy na to, aby mohlo byť pre konečnú spotrebu vyprodukované jednotkové množstvo j -tej komodity. Multiplikátor príjmov j -tej komodity sa potom vypočíta ako príslušný stĺpcový súčet prvkov tejto matice:

$$m(p)_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}^p \quad (15)$$

Ak je vzťah medzi objemom produkcie jednotlivých komodít a vyplatenými príjmami lineárny, potom sa dajú odhadnúť dôsledky zmeny v objeme konečnej spotreby danej komodity na celkovú hodnotu príjmov v ekonomike.

Celkovú hodnotu príjmov generovaných jednotlivými zložkami konečnej spotreby možno získať vynásobením matice kumulatívnych koeficientov príjmov $\mathbf{R}_p$ príslušnými vektormi konečnej spotreby:

$$\mathbf{p}_C = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{y}_C; \quad \mathbf{p}_G = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{y}_G; \quad \mathbf{p}_I = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{y}_I; \quad \mathbf{p}_E = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{y}_E \quad (16)$$

kde $\mathbf{y}_C$ je vektor konečnej spotreby domácností, $\mathbf{y}_G$ je vektor konečnej spotreby štátnej správy, $\mathbf{y}_I$ je vektor investícií a $\mathbf{y}_E$ je vektor exportu.

Súčet vektorov príjmov generovaných jednotlivými zložkami konečnej spotreby sa musí rovnať vektoru celkových príjmov príslúchajúcich jednotlivým komoditám, uvedenému v input-output tabuľke:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_C + \mathbf{p}_G + \mathbf{p}_I + \mathbf{p}_E \quad (17)$$

Na základe hodnôt príjmov generovaných jednotlivými zložkami konečnej spotreby vypočítame multiplikátory príjmov týchto zložiek konečnej spotreby. Hodnoty multiplikátorov príjmov jednotlivých zložiek konečnej spotreby potom vypočítame ako podiely hodnôt generovaných príjmov a príslušných objemov konečnej spotreby:

- multiplikátor konečnej spotreby domácností: $m(p)_C = \frac{\sum_{j=1}^n p_C}{\sum_{j=1}^n y_C}$,
- multiplikátor konečnej spotreby štátnej správy: $m(p)_G = \frac{\sum_{j=1}^n p_G}{\sum_{j=1}^n y_G}$,
- multiplikátor investícií: $m(p)_I = \frac{\sum_{j=1}^n p_I}{\sum_{j=1}^n y_I}$,
- multiplikátor exportu: $m(p)_E = \frac{\sum_{j=1}^n p_E}{\sum_{j=1}^n y_E}$.

Tieto multiplikátory kvantifikujú hodnoty príjmov generovaných jednotkovým objemom danej zložky konečnej spotreby. Umožňujú vypočítať dôsledky zmien v jednotlivých zložkách konečnej spotreby na celkovú hodnotu príjmov v ekonomike.

3 PRÍJMOVÝ MULTIPLIKÁTOR V MAKROEKONÓMII

V makroekonomickej teórii sa môžeme stretnúť aj s iným pohľadom na príjmo-multiplikátorovú analýzu, ktorá vychádza z týchto predpokladov: [6]

- konečná produkcia (HDP) Y sa použije na nákup spotrebných tovarov (výdavky obyvateľstva na spotrebu C), na nákup investícií (hrubú tvorbu kapitálu I) a na vládne výdavky (konečná spotreba štátnej správy G),
- výdavky obyvateľstva na spotrebu sú funkciou konečnej produkcie (disponibilného dôchodku).

Matematicky sa tieto predpoklady dajú vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= aY + F_c \end{aligned} \quad (18)$$

kde

a je konštanta, ktorá indikuje vplyv konečnej produkcie na výdavky na spotrebu,

F_c - vplyv ostatných faktorov na spotrebu.

Predpokladajme, že hodnoty I a G sú vopred známe (exogénne). Potom rovnice (18) môžeme upraviť do tvaru

$$\begin{aligned} Y - C &= I + G \\ -aY + C &= F_c \end{aligned} \quad (19)$$

Uvedenú sústavu lineárnych rovníc môžeme vyjadriť aj pomocou maticového zápisu: [7, s. 29]

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + G \\ F_c \end{bmatrix} \quad (20)$$

Zo vzťahu (20) vieme vypočítať inverznú maticu, a teda aj neznáme hodnoty Y a C :

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I + G \\ F_c \end{bmatrix} \quad (21)$$

Zo vzťahu (21) vyplýva, že hodnoty Y a C závisia od hodnôt I , G a F_c . Ak by sme vyčíslili tieto vzťahy v hospodárstve za dve obdobia (označme ich 1 a 2) a predpokladali by sme, že výdavky štátnej správy sú konštantné, výraz (21) môžeme vyjadriť a zapísať takto:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 + G_1 \\ F_{c1} \end{bmatrix} \quad (22 a)$$

$$\begin{bmatrix} Y_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 + G_2 \\ F_{c2} \end{bmatrix} \quad (22 b)$$

Teraz odpočítame výraz (22 a) od výrazu (22 b) a dostaneme:

$$\begin{bmatrix} Y_2 - Y_1 \\ C_2 - C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 - I_1 \\ F_{c2} - F_{c1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Vzťah (23) vyjadruje, že zmena konečnej produkcie ($\Delta Y = Y_2 - Y_1$) a zmena vo výdavkoch na spotrebu ($\Delta C = C_2 - C_1$) závisia od zmien výdavkov na investície ($\Delta I = I_2 - I_1$) a od zmeny preferencií spotrebiteľov ($\Delta F_c = F_{c2} - F_{c1}$). Ďalej predpokladajme, že došlo k zmene v investíciách, ale preferencie spotrebiteľov sa nezmenili, nezmenila sa ani funkcia spotreby [2]. Potom

$$\begin{bmatrix} \Delta Y \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} \\ \frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Po vynásobení dostaneme tento výsledok:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-a} \Delta I \quad \Delta C = \frac{a}{1-a} \Delta I. \quad (25)$$

Uvedený výsledok môžeme analyzovať takto: ak obyvateľstvo spotrebuje iba časť prírastku svojho dôchodku ($a < 1$) a keď sa investície zvýšia o jednu peňažnú jednotku, konečná produkcia vzrastie o viac ako jednu peňažnú jednotku. Priame zvýšenie konečnej produkcie o jednu peňažnú jednotku a nepriame zvýšenie môžeme vypočítať pomocou matice v (24).

Bude činiť $\frac{a}{1-a}$ peňažných jednotiek, takže celkový efekt bude $1 + \left[\frac{a}{1-a} \right] = \frac{1}{1-a}$ peňažných jednotiek. Čím bližšie k jednotke je hodnota a , tým väčší je nepriamy efekt (a teda aj celkový efekt) zvýšenia výdavkov na investície na konečnú produkciu. V makroekonomickej teórii sa číslo $\frac{1}{1-a}$ nazýva príjmový multiplikátor. Príjmový multiplikátor je mierou celkového priameho aj nepriameho efektu zvýšenia finálneho dopytu o jednu peňažnú jednotku [7, s. 30].

4 ZÁVER

Cieľom článku v rámci výskumu bolo analyzovať metodologický pohľad na postavenie multiplikátorov v ekonomike z hľadiska rôznych ukazovateľov a merateľných výstupov založených na input-output analýze. Ukázali sme možnosti odvodenia príjmového multiplikátora a jeho využitie pri tvorbe analýzy ekonomických prínosov. Analyzovali sme efekty jednotlivých zložiek konečného použitia na príjmový multiplikátor. Naše závery potvrdili významnú úlohu domáceho dopytu pri tvorbe celkovej produkcie a celkových príjmov v ekonomike, pričom jednoduché štatistiky jeho význam skôr podceňujú.

V článku sme identifikovali význam príjmového multiplikátora v ekonomike. Niektoré odvetvia prinášajú pre ekonomiku malé celkové efekty, vzhľadom na ich veľkosť, ale výrazné prínosy z jednej dodatočnej jednotky celkovej spotreby. Iné sú dôležité práve svojou veľkosťou alebo previazanosťou s inými odvetviami. Ani kľúčové odvetvia by neprinášali pre rozvoj celého národného hospodárstva pozitívne výstupy, ak by dobre nefungovali komplexné väzby medzi odvetviami navzájom. Uvedené súvislosti a empirické výsledky v článku môžu byť podkladom pri tvorbe hospodárskej politiky.

Spracovanie ďalších metodologických a aplikačných problémov spojených s multiplikátorovou analýzou v input-output analýze za ekonomiku Slovenska a jej regióny je náplňou ďalšej etapy výskumu autora článku.

Použitá literatúra

1. ADAMS, A. A. – STEWART, I. G. 1956. Input-Output Analysis: An Application, In: *The Economic Journal*, No. 263, Sept. 1956, s. 442-454.
2. COHEN, S. I. 1989. Multiplier Analysis in Social Accounting and Input-Output Frameworks; Evidence for Several Countries. In: MILLER, R. – POLENSKE, K. P. – ROSE, A. (ed.): *Frontiers of Input-Output Analysis*, Oxford University Press, 1989.
3. COHEN, S. I. 1987. Input-Output versus Social Accounting in the Macro-Analysis of Development Policy. In: *Industry and Development*, No. 22, 1987, s. 93-129.
4. FECANIN, J. a kol. 1985. *Štruktúrna analýza a rozmiestňovacie modely*. Bratislava – Praha: Alfa – SNTL, 1985.
5. GOGA, M. 2009. *Input-output analýza*. Bratislava: IURA EDITION, 2009, ISBN 978-80-8078-293-1.
6. HUSÁR, J. 1998. *Makroekonómia*. Bratislava: Kartprint, 1998.
7. HUSÁR, J. – MOKRÁŠOVÁ, V. – GOGA, M. 2007. *Input-output analýza a systém národných účtov*. Bratislava: EKONÓM, 2007.
8. ISARD, W. – AZIS, I. J. – DRENNAN, M. P. – MILLER, R. E. – SALTZMAN, S. – THORBECKE, E. 1998. *Methods of Interregional and Regional Analysis*. England: Ashgate, 1998. 490 s., ISBN 1-85972-410-8.
9. LABAJ, M. – LUPTÁČIK, M. – RUMPELOVÁ, D. 2008. Štrukturálne súvislosti Slovenskej ekonomiky na báze input-output analýzy. In: *Ekonomický časopis*, č. 5, 2008, s. 477-494.
10. LEONTIEF, W. 1951. *The Structure of American Economy 1919 – 1929*. New York: Oxford University Press, 1951.
11. LEONTIEF, W. 1953. *Studies in the Structure of the American Economy*. New York: Oxford University Press, 1953.
12. SOJKA, J. – ŠIMKOVIC, J. – HATRÁK, M. 1981. *Modelovanie národohospodárskych procesov*. Bratislava: Alfa, 1981.
13. TAKAYAMA, A. 1985. *Mathematical Economics*. 2nd Edition. New York: Cambridge University Press, 1985.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Marián Goga, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava 5

Tel.: (421 2) 67 295 824

e-mail: marian.goga@euba.sk

SROVNÁNÍ KAPACIT ZDRAVOTNÍ PÉČE PRO COVID 19 PACIENTY V KRAJÍCH ČESKÉ REPUBLIKY

COMPARISON OF HEALTH CARE CAPACITIES FOR PATIENTS WITH COVID 19 IN THE REGIONS OF THE CZECH REPUBLIC

Jakub Hanousek

Abstrakt

Článek se zabývá srovnáním kapacit zdravotní péče v krajích České republiky pro pacienty s nemocí COVID 19. Zdravotní kapacity jsou měřeny metodou analýzy obalu dat. Metoda analýzy obalu dat je metoda lineárního programování, která se využívá pro hodnocení efektivnosti homogenních produkčních jednotek. Cílem příspěvku je srovnat kapacity zdravotní péče mezi kraji České republiky pro pacienty s nemocí COVID 19. Kapacity zdravotní péče jsou v tomto příspěvku definovány jako počty lůžek ARO + JIP pro dospělé a lůžka s kyslíkem. Z výsledků je patrné o kolik by se měla navýšit lůžka zdravotní péče v daných krajích, aby v celé České republice byla srovnatelná zdravotní péče pro pacienty s COVID 19.

***Klíčová slova:** COVID 19, Zdravotní péče, Analýza obalu dat*

Abstract

This article deals with comparison of health care capacities for patients with COVID 19 in the regions of the Czech Republic. Health care capacities are measuring by data envelopment analysis. Data envelopment analysis is a linear programming method that is used to measure efficiency of homogenous production units. The goal of this article is to compare health care between regions for patients with disease COVID 19. The health care capacities are the capacity of anesthesiology resuscitation beds + intensive care beds and beds with oxygen. The results show how much health care beds should be increased in the given regions, so that there would be comparable health care for patients with COVID 19 in the whole Czech Republic.

***Keywords:** COVID 19, Health care, Data envelopment analysis*

1 ÚVOD

Nemoc COVID 19 je nové onemocnění, které způsobuje nový typ koronaviru SARS-CoV-2. Tento koronavirus se objevil na konci roku 2019 v Čínské lidové republice. Během následujícího roku se rozšířil po celém světě. Onemocnění je převážně nebezpečné pro rizikové skupiny. Do rizikových skupin se řadí starší lidé a lidé oslabení jinou chorobou. Jako příklad těchto rizikových chorob můžeme uvést cukrovku, či hypertenzi. Může se stát, že hospitalizaci může potřebovat i jinak zdravý člověk. Nárůst pacientů vyvolává tlak na zdravotní systém po celém světě. Tento článek je zaměřen pouze na kraje České republiky. V článku budou analyzovány kapacity lůžek ARO + JIP pro dospělé a kapacity lůžek s kyslíkem. Analýza bude prováděna metodou lineárního programování analýzy obalu dat. Analýza obalu dat je založena na srovnání efektivnosti homogenních produkčních jednotek. Každá produkční jednotka spotřebovává určité množství vstupů a produkuje určité množství výstupů. V tomto článku je produkční jednotka definována jako kraj České republiky. Vstup

je definován jako celkový počet nakažených nemocí COVID 19 v kraji. Výstupy jsou definovány počty lůžek ARO + JIP pro dospělé a kapacity lůžek s kyslíkem v příslušném kraji. Data se vztahují k datu 11.11.2020.

2 METODY

Maximalizovat: x_q

Za podmínek:
$$\sum_{k=1}^r u_k y_{kj} \leq x_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^r u_k y_{iq} = 1$$

$$u_i \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Kde x_q je skóre efektivnosti hodnocené produkční jednotky. x_j je množství vstupů spotřebovávaných produkční jednotkou j . y_{ij} je množství výstupů vyprodukovaných produkční jednotkou j . u_i jsou váhy výstupů a ε je infinitezimální konstanta. V modelu orientovaném na výstupy efektivní jednotky dosahují skóre 1. Neefektivní jednotky mají skóre menší větší než 1. Skóre neefektivní jednotky vyjadřuje potřebné navýšení výstupů, díky které by se stala j jednotka efektivní.

3 APLIKACE

V souladu s předchozím výkladem bude za produkční jednotku považován kraj České republiky. Budeme tedy analyzovat celkem 14 produkčních jednotek.

Vstup: počet nakažených

Výstup: kapacity lůžek JIP + ARO pro dospělé, kapacity standartních lůžek s kyslíkem

Kraj	Počet nakažených	Lůžka (ARO+JIP dospělí)	Lůžka (standardní s kyslíkem)
Praha	53862	836	3199
Středočeský	57310	284	2042
Jihočeský	27796	249	1697
Plzeňský	24205	150	1211
Karlovarský	8947	78	598
Ústecký	28968	251	1368
Liberecký	18564	117	895
Královohradecký	23584	243	1561
Pardubický	21047	133	543
Vysočina	22720	151	1402
Jihomoravský	41611	568	2197
Olomoucký	27317	185	1472
Zlínský	30259	170	626
Moravskoslezský	46622	430	2735

Tabulka 1: hodnoty vstupů a výstupů

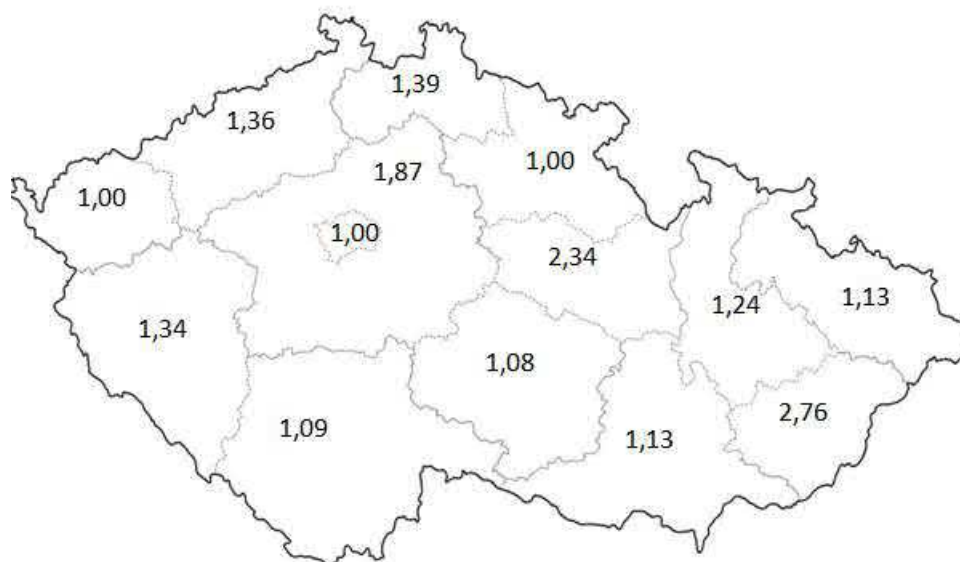
Pomocí vztahu (1) získáme výsledné hodnoty efektivnosti. Výsledky jsou v tabulce 2.

Kraj	Skóre efektivnosti
Praha	1,00
Středočeský	1,87
Jihočeský	1,09
Plzeňský	1,34
Karlovarský	1,00
Ústecký	1,36
Liberecký	1,39
Královohradecký	1,00
Pardubický	2,34
Vysočina	1,08
Jihomoravský	1,13
Olomoucký	1,24
Zlínský	2,76
Moravskoslezský	1,13

Tabulka 2: výsledné míry efektivnosti

Produkční jednotky, které jsou efektivní, dosahují skóre 1. Neefektivní produkční jednotky mají skóre >1 . U neefektivních produkčních jednotek nám skóre říká, o kolik by produkční jednotka musela navýšit svoje výstupy, aby se stala efektivní produkční jednotkou.

Efektivními produkčními jednotkami jsou kraje Praha, Karlovarský a Královehradecký.



Obrázek 1: Mapa České republiky

K Modelu (1) naformulujeme duální model.

Maximalizovat: $g = \phi_q + \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-)$

Za podmínek: $\mathbf{x}\lambda + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q$

$$\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^- = \phi_q \mathbf{y}_q \quad (2)$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}$$

Model se snaží najít virtuální jednotku charakterizovanou vstupy $\mathbf{x}\lambda$ a výstupy $\mathbf{Y}\lambda$, které jsou lineární kombinací vstupů a výstupů ostatních jednotek a které nejsou horší než vstupy a výstupy hodnocené jednotky. $\lambda = (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_{14})$, je vektor vah, které jsou přiřazené jednotlivým produkčním jednotkám. Jedná se o proměnné modelu. Hodnocená jednotka je efektivní, pokud virtuální jednotka s těmito vlastnostmi neexistuje, resp. je totožná s hodnocenou jednotkou. Tato situace nastane, jestliže optimální hodnota účelové funkce $g^* = 1$. Pokud je hodnota účelové funkce >1 jednotka efektivní není. Hodnota proměnné ϕ_q^* vyjadřuje potřebnou proporcionální změnu navýšení výstupů, aby se hodnocená jednotka stala efektivní.

Cílové hodnoty výstupů pro dosažení efektivnosti neefektivní jednotky lze získat pomocí vztahu (3)

$$\mathbf{y}_q' = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{+*} \quad (3)$$

podle vztahu (3), vypočítáme potřebné hodnoty výstupů (virtuální výstupy), aby se hodnocená jednotka mohla stát efektivní.

Kraj	Lůžka (ARO+JIP dospělí)	Virtuální výstup	Lůžka (standardní s kyslíkem)	Virtuální výstup
Praha	836	836,00	3199	3199,00
Středočeský	284	530,96	2042	3817,66
Jihočeský	249	270,88	1697	1846,14
Plzeňský	150	211,02	1211	1617,81
Karlovarský	78	78,00	598	598,00
Ústecký	251	341,51	1368	1861,30
Liberecký	117	162,18	895	1240,64
Královehradecký	243	243,00	1561	1561,00
Pardubický	133	311,14	543	1270,27
Vysočina	151	198,07	1402	1518,56
Jihomoravský	568	640,68	2197	2478,12
Olomoucký	185	238,15	1472	1825,81
Zlínský	170	469,65	626	1797,16
Moravskoslezský	430	484,35	2735	3080,68

Tabulka 3: Potřebné navýšení výstupů

V tabulce číslo 3. vidíme potřebné navýšení kapacit lůžek u neefektivních krajů v České republice, aby se tyto kraje mohli stát efektivními. U efektivních krajů zůstávají hodnoty stejné.

4 ZÁVĚR

Tento článek srovnal rozložení zdravotních kapacit v České republice pro pacienty COVID 19. Analýza byla prováděna pomocí modelů analýzy obalu dat. Z výsledků je patrné, že v rámci krajů České republiky jsou kapacity poměrně nevyrovnané. Z toho hlediska si nejlépe stojí kraje Praha, Karlovarský a Královehradecký. Nejhorší dopadly kraje Pardubický a Zlínský. V Pardubickém kraji by bylo potřeba navýšit kapacity lůžek o 134%. To znamená navýšit kapacitu lůžek ARO a JIP z 133 na 312 a kapacity lůžek s kyslíkem z 543 na 1271. Ve Zlínském kraji je situace dokonce horší. Ve Zlínském kraji je potřeba navýšit kapacity lůžek o 176%. Celkem by tedy bylo zapotřebí ze současných 170 lůžek ARO + JIP navýšit kapacity na 470 lůžek. U lůžek s kyslíkem by bylo zapotřebí navýšit kapacitu ze současných 626 lůžek na 1798 lůžek.

Poděkování:

Článek vznikl za podpory projektu IGA F4/19/2019 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

1. CHARNES, A., COOPER, W.W., LEWIN, A., SEIFORD, L.: *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications*. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1994, 422 s.
2. JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ, M.: *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Praha: Professional Publishing, 2004, 183 s.
3. <https://onemocneni-aktualne.mzcr.cz/covid-19>

Kontaktné údaje

Ing. Jakub Hanousek

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

Email: xhanj52@vse.cz

APLIKACE MODELU ANALÝZY OBALU DAT NA ŠÍŘENÍ NEMOCI COVID 19 V MĚSÍCI ŘÍJNU 2020 V KRAJÍCH ČESKÉ REPUBLIKY

AN APPLICATION DATA ENVELOPMENT ANALYSIS MODEL TO SPREAD DISEASE COVID 19 IN OCTOBER 2020 IN THE CZECH REPUBLIC

Jakub Hanousek

Abstrakt

Článek se zabývá analýzou vývoje situace nemoci COVID 19 v České republice v měsíci říjnu roku 2020. Analýza je prováděna pomocí metody analýzy obalu dat. Metoda analýzy obalu dat je metoda lineárního programování, která slouží k měření efektivnosti homogenních produkčních jednotek. Produkční jednotka je v kontextu toho článku chápána jako jeden den v určitém kraji České republiky. Cílem je najít produkční jednotky, které jsou efektivní. Poté bude měřena relativní vzdálenost mezi efektivními a neefektivními produkčními jednotkami.

***Klíčová slova:** COVID 19, Analýza obalu dat, Česká republika*

Abstract

This article deals with spread of disease COVID 19 in the Czech Republic in October 2020. The data are analysed by data envelopment analysis method. Data envelopment analysis is a method of linear programming. This method is used to measure the efficiency of homogeneous production units. The product unit in this article is one day in one region of the Czech Republic. The goal of this article is to find the efficiency units. Finally, the relative distance between efficient and inefficient production units will be measured.

***Keywords:** COVID19, Data envelopment analysis, Czech Republic*

1 ÚVOD

Celosvětovým tématem roku 2020 se stala pandemie nového typu koronaviru, který způsobuje nemoc Covid 19. Situace v České republice je poměrně velice specifická. Jarní vlnu Česká republika v celosvětovém měřítku zvládla jako jedna z nejlepších. Letní měsíce v České republice proběhly poměrně ve standardním režimu. Bylo sice znatelně méně turistů ze zahraničí, ale restrikce pro občany České republiky byly minimální. Zlom nastal koncem léta, kdy se situace v České republice začala pomalu zhoršovat. Pomyslný olej do ohně přilil nástup dětí do škol začátkem září a velice vágní přístup vlády České republiky k celé situaci. Stačilo pouze několik týdnů a situace v České republice se dramaticky zhoršila. Země, která patřila mezi premianty s bojem proti pandemii, se stala země, která se ocitla na celosvětovém chvostu.

Tento článek bude analyzovat situaci během měsíce října v jednotlivých krajích České republiky. Analýza bude prováděna pomocí metody analýzy obalu dat. Metoda analýzy obalu dat je metoda lineárního programování, která slouží k měření efektivnosti homogenních produkčních jednotek. V tomto článku je produkční jednotka chápána jako příslušný den v příslušném kraji. Budeme tedy porovnávat celkem 434 produkčních jednotek.

2 METODY

Maximalizovat y_q

Za podmínek $y_j \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n,$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{iq} = 1 \quad (1)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Kde y_q je skóre efektivnosti hodnocené produkční jednotky. x_{ij} je množství vstupů spotřebovávaných produkční jednotkou j . y_j je množství výstupů vyprodukovaných produkční jednotkou j . v_i jsou váhy vstupů a ε je infinitezimální konstanta. V modelu orientovaném na vstupy efektivní jednotky dosahují skóre 1. Neefektivní jednotky mají skóre menší než 1. Skóre neefektivní jednotky vyjadřuje potřebnou redukci vstupů, díky které by se stala j jednotka efektivní.

3 APLIKACE

Každá produkční jednotka má dva vstupy a jeden výstup. Vstupy produkční jednotky jsou počty nakažených a zemřelých v daném dni a příslušném kraji. Výstup je počet obyvatel v daném dni a příslušném kraji v tisících. Skóre neefektivních produkčních jednotek bude vyjadřovat potřebnou redukci nakažených a mrtvých vzhledem k efektivním produkčním jednotkám.

Kraje České republiky jsou značeny pomocí zkratk, které jsou uvedeny v následující tabulce.

Kraj	Praha	Středočeský	Jihočeský	Plzeňský	Karlovarský	Ústecký	Liberecký
Značení	A	S	C	P	K	U	L
Kraj	Královéhradecký	Pardubický	Vysočina	Jihomoravský	Olomoucký	Zlínský	Moravskoslezský
Značení	H	E	J	B	M	Z	T

Tabulka 1: Značení krajů

V následující tabulce jsou uvedeny míry efektivity a průměrné míry efektivity v jednotlivých dnech a krajích.

Datum/Kraj	A	S	C	P	K	U	L	H	E	J	B	M	Z	T	σ
31.10.2020	0,06	0,03	0,03	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,06	0,05	0,03	0,04	0,04
30.10.2020	0,05	0,03	0,02	0,05	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,03	0,02	0,03	0,03
29.10.2020	0,04	0,04	0,03	0,03	0,04	0,03	0,04	0,02	0,03	0,03	0,04	0,03	0,03	0,05	0,03
28.10.2020	0,05	0,03	0,02	0,04	0,05	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,04	0,03	0,03	0,03	0,04
27.10.2020	0,04	0,03	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,04	0,03
26.10.2020	0,04	0,04	0,04	0,04	0,12	0,04	0,05	0,04	0,04	0,03	0,06	0,05	0,04	0,04	0,05
25.10.2020	0,07	0,08	0,06	0,05	0,03	0,05	0,05	0,03	0,07	0,05	0,10	0,05	0,04	0,06	0,06

24.10.2020	0,04	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,03	0,04	0,06	0,04	0,05	0,02	0,05	0,04
23.10.2020	0,04	0,04	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03
22.10.2020	0,04	0,04	0,03	0,03	0,06	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,05	0,03	0,03	0,04	0,04
21.10.2020	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,03	0,04	0,02	0,03	0,03	0,04	0,02	0,02	0,04	0,03
20.10.2020	0,04	0,04	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,07	0,04
19.10.2020	0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0,08	0,05	0,05	0,06	0,06	0,07	0,04	0,04	0,06	0,06
18.10.2020	0,09	0,09	0,12	0,06	0,07	0,05	0,11	0,09	0,22	0,07	0,16	0,12	0,06	0,07	0,10
17.10.2020	0,05	0,05	0,05	0,04	0,07	0,11	0,05	0,04	0,08	0,04	0,06	0,05	0,04	0,10	0,06
16.10.2020	0,04	0,04	0,04	0,03	0,06	0,06	0,05	0,04	0,05	0,03	0,05	0,04	0,03	0,06	0,05
15.10.2020	0,06	0,05	0,04	0,04	0,09	0,06	0,04	0,06	0,06	0,11	0,06	0,03	0,04	0,06	0,06
14.10.2020	0,05	0,06	0,05	0,05	0,07	0,05	0,06	0,05	0,06	0,04	0,06	0,05	0,04	0,05	0,05
13.10.2020	0,05	0,05	0,05	0,05	0,10	0,09	0,05	0,06	0,05	0,07	0,05	0,09	0,05	0,09	0,06
12.10.2020	0,09	0,09	0,17	0,08	0,10	0,16	0,11	0,09	0,12	0,06	0,16	0,07	0,10	0,13	0,11
11.10.2020	0,12	0,16	0,25	0,16	0,27	0,17	0,12	0,19	0,23	0,15	0,14	0,29	0,08	0,10	0,17
10.10.2020	0,09	0,08	0,10	0,10	0,20	0,10	0,09	0,08	0,16	0,10	0,10	0,14	0,09	0,12	0,11
9.10.2020	0,05	0,05	0,06	0,08	0,09	0,08	0,06	0,09	0,07	0,05	0,06	0,05	0,04	0,06	0,06
8.10.2020	0,08	0,10	0,08	0,09	0,21	0,10	0,12	0,12	0,08	0,08	0,11	0,08	0,07	0,11	0,10
7.10.2020	0,07	0,07	0,09	0,10	0,08	0,11	0,10	0,14	0,13	0,09	0,09	0,10	0,07	0,10	0,10
6.10.2020	0,07	0,11	0,09	0,13	0,13	0,20	0,09	0,10	0,26	0,09	0,10	0,13	0,10	0,15	0,12
5.10.2020	0,13	0,15	0,24	0,10	0,16	0,32	0,25	0,10	0,17	0,20	0,22	0,10	0,11	0,18	0,17
4.10.2020	0,12	0,17	0,74	0,20	0,18	0,41	0,19	0,53	0,76	0,26	0,29	1,00	0,27	0,23	0,38
3.10.2020	0,14	0,18	0,13	0,17	0,40	0,20	0,14	1,00	0,35	0,26	0,23	0,36	0,14	0,23	0,28
2.10.2020	0,12	0,12	0,14	0,15	0,26	0,15	0,15	0,21	0,14	0,15	0,13	0,10	0,09	0,14	0,15
1.10.2020	0,10	0,11	0,16	0,16	0,14	0,18	0,23	0,30	0,17	0,13	0,14	0,13	0,12	0,17	0,16
Ø	0,07	0,07	0,10	0,07	0,11	0,10	0,08	0,12	0,12	0,08	0,09	0,11	0,06	0,09	

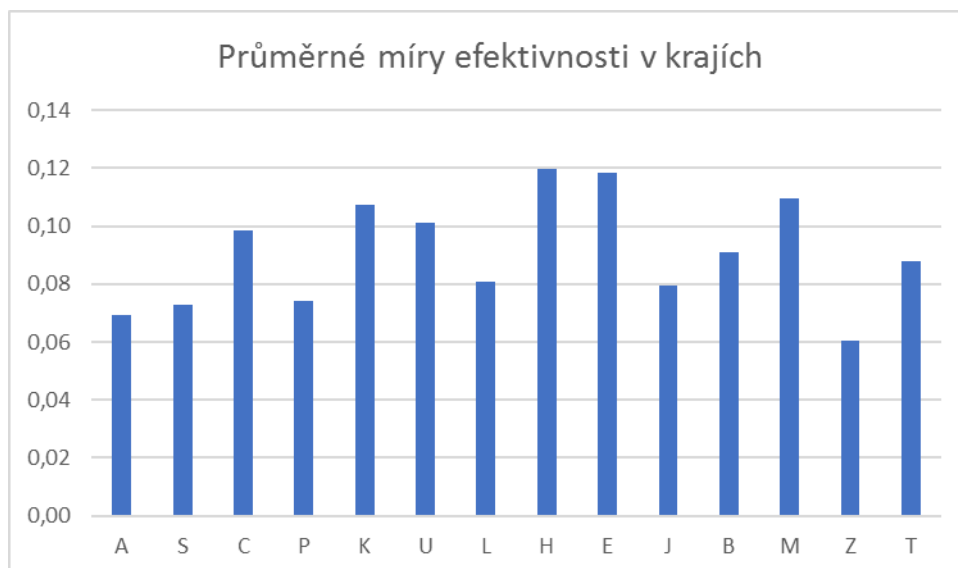
Tabulka 2: Výsledné a průměrné míry efektivity

Z výsledků je patrné, že většina produkčních jednotek dosahuje poměrně malých měr efektivity. Průměrná míra efektivity všech jednotek je pouze 0,09. Z výsledných měr efektivity můžeme snadno spočítat rozptyly podle vzorce (2) mezi jednotlivými kraji, dny a mezi všemi jednotkami. Efektivní jednotky byly v souboru nalezeny dvě. Jedná se o den 3.10.2020 v Královéhradeckém kraji a den 4.10.2020 v Olomouckém kraji. Oba tyto dny připadají na víkend a pochází ze začátku října.

$$VAR(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

Rozptyl mezi kraji = 0,000347; Rozptyl mezi dny = 0,00599; Rozptyl celkově = 0,010505

Míry efektivity mají mezi kraji řádově menší rozptyl, oproti mírám efektivity mezi jednotlivými dny. Můžeme tedy usoudit, že na epidemii má časový rozměr daleko větší význam než geografické faktory.



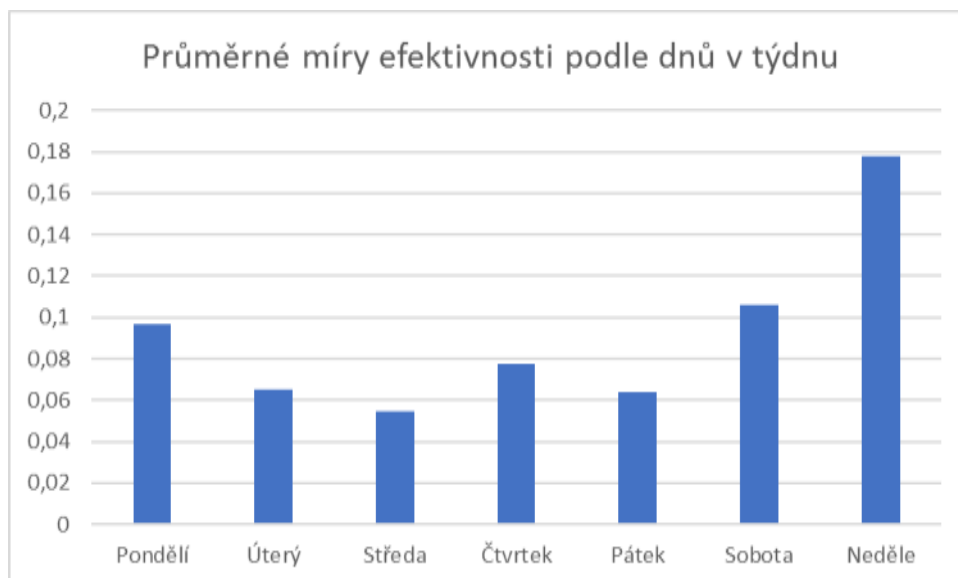
Graf 1: Průměrné míry efektivity v krajích

Nejlepších výsledků dosahuje Královéhradecký kraj. Nejhorších naopak kraj Zlínský.



Graf 2: Průměrné míry efektivity v jednotlivých dnech

Nejlepších výsledků dosahuje den 4.10.2020. Z grafu je patrná určitý cyklický trend mezi dny v týdnu. O víkendech se totiž provádělo zpravidla méně testů. V průměru jsou však míry efektivity vyšší v první polovině měsíce.



Graf 3: Průměrné míry efektivity podle dnů v týdnu

Z grafu je dobře patrný rozdíl efektivity mezi dny v týdnu. Z tohoto pohledu je na tom nejlépe neděle.

4 ZÁVĚR

Cílem příspěvku bylo analyzovat průběh pandemie COVID 19 v České republice v měsíci říjnu 2020 pomocí analýzy obalu dat. Měli jsme celkem 434 produkčních jednotek. Každá produkční jednotka představovala jeden den v měsíci říjnu 2020 a v jednom kraji České republiky. Efektivní jednotky byly spočítány dvě. Jednalo se o jednotky 3.10.2020 v Královéhradeckém kraji a 4.10.2020 v Olomouckém kraji. Rozptyl efektivity mezi dny je větší než mezi kraji. V průměru jsou více efektivní dny v první polovině měsíce. Toto je v souladu s vývojem pandemie na území České republiky. Všechny jednotky vykazují poměrně malé hodnoty efektivity. Průměrná míra efektivity v celém souboru je 0,09. Příčinou takto malé efektivity jsou velice malé vstupy dvou efektivních jednotek. 3.10.2020 v Královéhradeckém kraji a 4.10.2020 v Olomouckém kraji. V tyto dny v těchto krajích byla nově prokázána nákaza COVID 19 u rekordně mála lidí. Z analýzy efektivity je patrné, že na efektivnost mají vliv i dny v týdnu. Z tohoto pohledu je na tom nejlépe neděle.

Poděkování:

Článek vznikl za podpory projektu IGA F4/66/2019 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

1. HEBÁK P., HUSTOPECKÝ J., MALÁ I.; *Vícerozměrné statistické metody 2*; Informatorium, 2005; Třebíč
2. CHARNES, A., COOPER, W.W., LEWIN, A., SEIFORD, L.: *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications*. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1994, 422 s.
3. JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ, M.: *Modely hodnocení efektivity produkčních jednotek*. Praha: Professional Publishing, 2004, 183 s.

4. <https://www.oecd.org/coronavirus/en/>
5. <https://onemocneni-aktualne.mzcr.cz/covid-19>

Kontaktné údaje

Ing. Jakub Hanousek

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

Email: xhanj52@vse.cz

LITERATURE REVIEW OF EFFICIENCY OF PUBLIC LIBRARIES WITH FOCUS ON THE CZECH REPUBLIC

PŘEHLED LITERATURY EFEKTIVNOSTI VEŘEJNÝCH KNIHOVEN SE ZAMĚŘENÍM NA ČESKOU REPUBLIKU

Vladimír Holý

Abstract

Efficiency analysis is a popular tool in evaluating public services including operation of public libraries. In this short contribution, we review scientific studies dealing with efficiency of public libraries. We focus on the case of the Czech Republic and present 6 related papers. We also present 31 papers from different parts of the world.

Keywords: *Efficiency Analysis, Public Library, Czech Republic*

Abstrakt

Analýza efektivnosti je populární nástroj pro hodnocení veřejných služeb včetně provozu veřejných knihoven. V tomto krátkém příspěvku přineseme přehled vědecké literatury zabývající se analýzou efektivnosti veřejných knihoven. Zaměříme se na Českou republiku a představíme 6 souvisejících článků. Představíme také 31 článků z různých koutů světa.

Klíčová slova: *Analýza efektivnosti, Veřejná knihovna, Česká republika*

1 INTRODUCTION

Public libraries worldwide deal with declining interest in their traditional services and face new challenges in the digital era. The Czech Republic is a country with one of the densest networks of public libraries in the world. However, as shown in Figure 1, the number of public libraries in the Czech Republic is decreasing in recent years. Nowadays, more than ever, it is important to assess the efficiency of individual public libraries and thus justify their existence.

We review the scientific literature dealing with the topic of public library efficiency. In our review, we include studies dealing with all kinds of public libraries regardless of their founder or focus. For a literature review specifically targeted at university libraries, we refer to Tavares et al. (2018). We also highlight the literature review sections in Shahwan and Kaba (2013), Stroobants and Bouckaert (2014) and Holý (2020).

2 EFFICIENCY OF PUBLIC LIBRARIES IN THE WORLD

There are many studies addressing the issue of library efficiency in various countries across the world. We review 31 papers in total in this section.

Chen (1997) evaluates the efficiency of 23 university libraries in Taipei, Taiwan in 1995.

Kao et al. (1998) together with Kao and Lin (1999), Kao and Liu (2000), Kao and Liu (2003), Kao and Lin (2004) and Liu and Chuang (2009) thoroughly investigate the efficiency of 24 university libraries in Taiwan in 1997 from various perspectives including the Fuzzy logic, sizes of units and missing data.

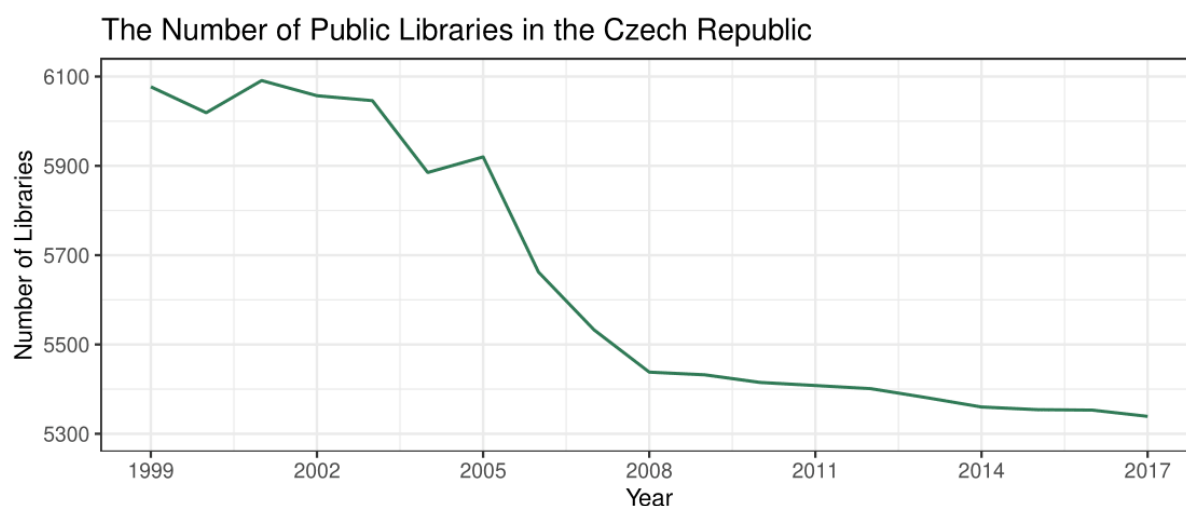


Figure 1: The number of public libraries in the Czech Republic. Source: NIPOS.

Vitaliano (1998) determines the efficiency of 184 public libraries in New York, United States in 1992 and finds that it is positively dependent on population, negatively on wages of the directors and positively on town or village associations.

Sharma et al. (1999) assess the performance and resource utilization efficiency of 47 public libraries in Hawaii, United States in 1996/1997.

Worthington (1999) evaluates the efficiency of 168 local government libraries in New South Wales, Australia in 1993.

Hammond (2002) assesses the efficiency of 99 public libraries in the United Kingdom in 1995/1996.

Saunders (2003) examines the cost efficiency of 88 academic member libraries of the Association of Research Libraries (ARL) in 1998/1999.

Shim (2003) determines the efficiency of 95 ARL member libraries in 1996 and 1997.

Reichmann (2004) together with Reichmann and Sommersguter-Reichmann (2006) compare 118 university libraries in Austria, Canada, Germany, Switzerland and the United States in 1998.

Chen et al. (2005) employ the context-dependent efficiency analysis for 23 public libraries in Tokyo, Japan.

Miidla and Kikas (2009) examine the efficiency of 20 central public libraries in Estonia from 2002 to 2004.

Reichmann and Sommersguter-Reichmann (2010) take a cross-section and longitudinal perspective to assess the efficiency of 68 university libraries in Austria, Germany and North America from 1998 to 2004.

De Witte and Geys (2011) use the conditional efficiency model for 290 municipal public libraries in Flanders, Belgium in 2007 and find that the efficiency increases with left-wing ideological stance of the local government, wealth of the population, population density and local funding.

Lai et al. (2011) evaluate the operational efficiency of 33 national university libraries in Taiwan in 1998.

Noh (2011) evaluates the resource utilization efficiency of 89 digital libraries in South Korea in 2009.

Simon et al. (2011) analyze the productivity growth, technical progress, and efficiency change of 34 university libraries in Spain from 2003 to 2007.

De Carvalho et al. (2012) employ Markovian analysis of transitions between efficient and inefficient states for 37 university libraries in Rio de Janeiro, Brazil in 2006 and 2007.

Shahwan and Kaba (2013) examine the efficiency of 11 academic libraries in the United Arab Emirates, Qatar, Oman and the Kingdom of Saudi Arabia in 2010/2011.

Li and Yang (2014) measure the efficiency of public libraries at the state level in the United States in 2010.

Stroobants and Bouckaert (2014) investigate the efficiency of 13 central libraries and 79 municipal libraries in Flanders, Belgium from 2006 to 2010.

Srakar et al. (2017) cluster 58 public general libraries in Slovenia from 2008 to 2014 according to their efficiency, size and spatial constraints.

Guajardo (2018) assesses the efficiency of 999 special district libraries in the United States in 2015.

Guccio et al. (2018) consider multi-process interactions to evaluate the efficiency of 44 public state libraries in Italy in 2011.

Ferreira Neto and Hall (2019) analyze the efficiency of 679 public libraries in West Virginia, United States from 2009 to 2015.

Guajardo (2020) evaluates the technical efficiency of 339 non-profit public libraries in the United States.

3 EFFICIENCY OF PUBLIC LIBRARIES IN THE CZECH REPUBLIC

There are also several papers dealing with the efficiency of public libraries specifically in the Czech Republic. We review 6 papers in total focusing on the Czech Republic.

Vrabková and Friedrich (2017) investigate relationships between the input and output variables using the correlation and linear regression analysis for 51 city libraries from 2011 to 2015.

Vaňková and Vrabková (2017) deal with changes in the public library efficiency aggregated over the whole country in annual periods from 1993 to 2014.

Vrabková (2017) studies decomposition of the efficiency for 33 city libraries in 2015.

Vrabková (2019) models the static and dynamic efficiency of 34 municipal libraries in 2011 and 2015.

Vrabková and Friedrich (2019) compare 48 large public libraries with 44 small public libraries from the Czech Republic and Slovakia in 2012 and 2016.

Finally, Holý (2020) analyzes the efficiency of 4 660 public municipal libraries in 2017 with respect to the operating environment.

References

1. Chen, T.-Y. A Measurement of the Resource Utilization Efficiency of University Libraries. *International Journal of Production Economics*. 1997, 53, 1, s. 71–80. ISSN 0925-5273. doi: 10.1016/S0925-5273(97)00102-3.
2. Chen, Y., Morita, H. & Zhu, J. Context-Dependent DEA with an Application to Tokyo Public Libraries. *International Journal of Information Technology & Decision Making*. 2005, 4, 3, s. 385–394. ISSN 0219-6220. doi: 10.1142/s0219622005001635.
3. De Carvalho, F. A., Jorge, M. J., Jorge, M. F., Russo, M. & De Sa, N. O. Library Performance Management in Rio de Janeiro, Brazil: Applying DEA to a Sample of University Libraries in 2006-2007. *Library Management*. 2012, 33, 4-5, s. 297–306. ISSN 0143-5124. doi: 10.1108/01435121211242335.
4. De Witte, K. & Geys, B. Evaluating Efficient Public Good Provision: Theory and Evidence from a Generalised Conditional Efficiency Model for Public Libraries. *Journal of Urban Economics*. 2011, 69, 3, s. 319–327. ISSN 0094-1190. doi: 10.1016/j.jue.2010.12.002.
5. Ferreira Neto, A. B. & Hall, J. C. Economies of Scale and Governance of Library Systems: nce from West Virginia. *Economics of Governance*. 2019, 20, 3, s. 237–253. ISSN 1435-6104. doi: 10.1007/s10101-018-0215-2.
6. Guajardo, S. A. Special District Libraries and Operating Costs: An Application of Data Envelopment Analysis (DEA) with Discretionary and Non-Discretionary Inputs. *Journal of Library Administration*. 2018, 58, 3, s. 241–263. ISSN 0193-0826. doi: 10.1080/01930826.2018.1436758.
7. Guajardo, S. A. Nonprofit Public Libraries and Technical Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Technology-Based Outputs. *Library & Information Science Research*. 2019. ISSN 0740-8188. doi: 10.1016/j.lisr.2019.100995.
8. Guccio, C., Mignosa, A. & Rizzo, I. Are Public State Libraries Efficient? An Empirical Assessment Using Network Data Envelopment Analysis. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2018, 64, s. 78–91. ISSN 0038-0121. doi: 10.1016/j.seps.2018.01.001.
9. Hammond, C. J. Efficiency in the Provision of Public Services: A Data Envelopment Analysis of UK Public Library Systems. *Applied Economics*. 2002, 34, 5, s. 649–657. ISSN 0003-6846. doi: 10.1080/00036840110053252.
10. Holý, V. The Impact of Operating Environment on Efficiency of Public Libraries. *Central European Journal of Operations Research*. 2020. ISSN 1613-9178. doi: 10.1007/s10100-020-00696-4.
11. Kao, C. & Lin, Y.-C. Comparing University Libraries of Different University Size. *Libri*. 1999, 49, 3, s. 150–158. ISSN 0024-2667. doi: 10.1515/libr.1999.49.3.150.
12. Kao, C. & Lin, Y.-C. Evaluation of the University Libraries in Taiwan: Total Measure Versus Ratio Measure. *Journal of the Operational Research Society*. 2004, 55, 12, s. 1256–1265. ISSN 0160-5682. doi: 10.2307/4101845.
13. Kao, C. & Liu, S.-T. Data Envelopment Analysis with Missing Data: An Application to University Libraries in Taiwan. *Journal of the Operational Research Society*. 2000, 51, 8, s. 897–905. ISSN 0160-5682. doi: 10.2307/254045.
14. Kao, C. & Liu, S.-T. A Mathematical Programming Approach to Fuzzy Efficiency Ranking. *International Journal of Production Economics*. 2003, 86, 2, s. 145–154. ISSN 0925-5273. doi: 10.1016/S0925-5273(03)00026-4.
15. Kao, C., Lin, Y.-C., Liang, L. C. & Lo, S. C. Ranking University Libraries: The Taiwan Case. *Libri*. 1998, 48, 4, s. 212–223. ISSN 0024-2667. doi: 10.1515/libr.1998.48.4.212.

16. Lai, M.-C., Wang, W.-K., Huang, H.-C. & Kao, M.-C. Linking the Benchmarking Tool to a Knowledge-Based System for Performance Improvement. *Expert Systems with Applications*. 2011, 38, 8, s. 10579–10586. ISSN 0957-4174. doi: 10.1016/j.eswa.2011.02.101.
17. Li, P. & Yang, Z. Performance Evaluation of the Public Libraries in USA Using Data Envelopment Analysis. *International Journal of Applied Science and Technology*. 2014, 4, 2, s. 10–19. ISSN 2221-0997. <http://www.ijastnet.com/journal/index/549>
18. Liu, S.-T. & Chuang, M. Fuzzy Efficiency Measures in Fuzzy DEA/AR with Application to University Libraries. *Expert Systems with Applications*. 2009, 36, 2, s. 1105–1113. ISSN 0957-4174. doi: 10.1016/j.eswa.2007.10.013.
19. Miidla, P. & Kikas, K. The Efficiency of Estonian Central Public Libraries. *Performance Measurement and Metrics*. 2009, 10, 1, s. 49–58. ISSN 1467-8047. doi: 10.1108/14678040910949684.
20. Noh, Y. Evaluation of the Resource Utilization Efficiency of University Libraries Using DEA Techniques and a Proposal of Alternative Evaluation Variables. *Library Hi Tech*. 2011, 29, 4, s. 697–724. ISSN 0737-8831. doi: 10.1108/07378831111189787.
21. Reichmann, G. Measuring University Library Efficiency Using Data Envelopment Analysis. *Libri*. 2004, 54, 2, s. 136–146. ISSN 0024-2667. doi: 10.1515/libr.2004.136.
22. Reichmann, G. & Sommersguter-Reichmann, M. University Library Benchmarking: An International Comparison Using DEA. *International Journal of Production Economics*. 2006, 100, 1, s. 131–147. ISSN 0925-5273. doi: 10.1016/j.ijpe.2004.10.007.
23. Reichmann, G. & Sommersguter-Reichmann, M. Efficiency Measures and Productivity Indexes in the Context of University Library Benchmarking. *Applied Economics*. 2010, 42, 3, s. 311–323. ISSN 0003-6846. doi: 10.1080/00036840701604511.
24. Saunders, E. S. Cost Efficiency in ARL Academic Libraries. *The Bottom Line*. 2003, 16, 1, s. 5–14. ISSN 0888-045X. doi: 10.1108/08880450310464009.
25. Shahwan, T. M. & Kaba, A. Efficiency Analysis of GCC Academic Libraries: An Application of Data Envelopment Analysis. *Performance Measurement and Metrics*. 2013, 14, 3, s. 197–210. ISSN 1467-8047. doi: 10.1108/pmm-07-2013-0023.
26. Sharma, K. R., Leung, P.-S. & Zane, L. Performance Measurement of Hawaii State Public Libraries: An Application of Data Envelopment Analysis (DEA). *Agricultural and Resource Economics Review*. 1999, 28, 2, s. 190–198. ISSN 2372-2614. doi: 10.1017/s1068280500008182.
27. Shim, W. Applying DEA Technique to Library Evaluation in Academic Research Libraries. *Library Trends*. 2003, 51, 3, s. 312–332. ISSN 0024-2594. <https://www.researchgate.net/publication/32962028>
28. Simon, J., Simon, C. & Arias, A. Changes in Productivity of Spanish University Libraries. *Omega*. 2011, 39, 5, s. 578–588. ISSN 0305-0483. doi: 10.1016/j.omega.2010.12.003.
29. Srakar, A., Kodrič-Dačić, E., Koman, K. & Kavaš, D. Efficiency of Slovenian Public General Libraries: A Data Envelopment Analysis Approach. *Lex Localis*. 2017, 15, 3, s. 559–581. ISSN 1581-5374. doi: 10.4335/15.3.559-581(2017).
30. Stroobants, J. & Bouckaert, G. Benchmarking Local Public Libraries Using Non-Parametric Frontier Methods: A Case Study of Flanders. *Library & Information Science Research*. 2014, 36, 3-4, s. 211–224. ISSN 0740-8188. doi: 10.1016/j.lisr.2014.06.002.

31. Tavares, R. S., Drumond, G. M., Angulo Meya, L. & Méxas, M. P. Efficiency Assessment in University Libraries. *Transinformação*. 2018, 30, 1, s. 65–79. ISSN 2318-0889. doi: 10.1590/2318-08892018000100006.
32. Vaňková, I. & Vrabková, I. Technical Efficiency of the Czech Republic Public Libraries. *Ekonomická revue - Central European Review of Economic Issues*. 2017, 20, 4, s. 119–132. ISSN 1212-3951. doi: 10.7327/cerei.2017.12.02.
33. Vitaliano, D. F. Assessing Public Library Efficiency Using Data Envelopment Analysis. *Annals of Public and Cooperative Economics*. 1998, 69, 1, s. 107–122. ISSN 1370-4788. doi: 10.1111/1467-8292.00075.
34. Vrabková, I. Decomposition of Technical Efficiency of Selected City Libraries from the Czech Republic. *Scientific Papers of the University of Pardubice, Series D: Faculty of Economics and Administration*. 2017, 24, 40, s. 222–233. ISSN 1211-555X. doi: 10.195/67940.
35. Vrabková, I. Models of Static and Dynamic Technical Efficiency of Municipal Libraries in the Czech Republic. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2019, 68, s. 100646/1:100646/26. ISSN 0038-0121. doi: 10.1016/j.seps.2018.09.001.
36. Vrabková, I. & Friedrich, V. Gaps in Performance: Benchmarking of the Czech and Slovak City Libraries. *Library Management*. 2017, 38, 4-5, s. 263–275. ISSN 0143-5124. doi: 10.1108/lm-11-2016-0085.
37. Vrabková, I. & Friedrich, V. The Productivity of Main Services of City Libraries: Using the Example from the Czech Republic and the Slovak Republic. *Library & Information Science Research*. 2019, 41, 3, s. 100962/1–100962/11. ISSN 0740-8188. doi: 10.1016/j.lisr.2019.100962.
38. Worthington, A. Performance Indicators and Efficiency Measurement in Public Libraries. *Australian Economic Review*. 1999, 32, 1, s. 31–42. ISSN 0004-9018. doi: 10.1111/1467-8462.00091.

Acknowledgement

The work on this paper was supported by the Internal Grant Agency of the Prague University of Economics and Business under project F4/27/2020.

Contact

Mgr. Vladimír Holý, PhD.

Prague University of Economics and Business

Winston Churchill Square 1938/4, 30 67 Prague 3, Czech Republic

Tel: +420 224 095 111

email: vladimir.holy@vse.cz

PRAKTICKÉ MOŽNOSTI KOMPLEXNÉHO HODNOTENIA FIRIEM V ZADANOM EKONOMICKOM PROSTREDÍ

PRACTICAL POSSIBILITIES OF COMPANY EVALUATION IN THE SPECIFIED ECONOMIC ENVIRONMENT

Eduard Hozlár

Abstrakt

V tomto príspevku sa autor venuje procesu modelovania a analyzuje prístupy pre hodnotenie pozície jednej alebo viacerých firiem napríklad v konkurenčnom prostredí iných firiem. Ide o komplexné hodnotenie podľa viacerých kritérií (spravidla ekonomických) v prostredí, ktoré si záujemca (rozhodovateľ) definuje sám podľa cieľa, ktorý mu umožní odhadnúť, resp. špecifikovať pozíciu hodnotených firiem vo zvolenom prostredí konkurenčných firiem.

Kľúčové slová: *viackriteriálne hodnotenie, podnikateľské prostredie, modelovanie*

Abstract

In this paper, the author deals with the modeling process and analyzes the approach for evaluating the position of one or more companies, for example in the competitive environment of other companies. which will allow him to estimate or specify the position of rated companies in the selected environment of competing companies.

Keywords: *multicriteria evaluation, business environment, modeling*

1 ŠPECIFIKÁCIA PROBLÉMU

Hodnoteniu firiem sa venuje veľa autorov a inštitúcií, je vypracované značné množstvo teoretických prístupov k modelovaniu hodnotenia firiem (napr. Mlynarovič (1998)). Najdôležitejšou časťou akéhokoľvek prístupu k hodnoteniu firiem je motivácia, prípadne účel, pre ktorý sa hodnotenie má vykonať. Podkladom pre hodnotenie firiem z ekonomickou motiváciou sú údaje z prostredia, v ktorom sa hodnotená firma nachádza a tiež ekonomické a finančné údaje hodnotenej firmy. Sila vplyvu hodnotenej firmy vo zvolenom prostredí sa posudzuje hlavne z jej absolútnych finančno-ekonomických údajov a efektívnosť hodnotenej firmy sa posudzuje na základe relatívnych (pomeroých) ukazovateľov. Zdrojom týchto údajov sú účtovné výkazy firiem, výročné správy, verejné údaje o záväzkoch voči verejným inštitúciám, bankám, poisťovniam, údaje o emisiách cenných papierov a pod. V Slovenskej republike sú takéto údaje povinne zverejňované v štátnych registroch, bankových a iných registroch. Podnikateľské prostredie okrem podnikateľských subjektov ovplyvňuje štát svojim zákonodarstvom, kontrolnými mechanizmami a vymoženosťou práva.

1.1 Motivácia pre hodnotenie a vstupné dáta

Pre zisťovanie postavenia firmy na lokálnom trhu sú dôležité rôzne veľkostné kritériá týkajúce sa kapitálu, zisku, tržieb, záväzkov, ďalej kritériá merajúce výkonnosť firmy, kvalita manažmentu, atď.. Napríklad pre účely predaja alebo kúpy firmy budeme pre hodnotenie tejto

firmy využívať iné kritériá ako pri hodnotení jej trhového podielu vyrábaného tovaru alebo poskytovanej služby. Okrem rebríčkov firiem stanovovaných podľa jedného kritéria (poradie firiem podľa dosiahnutého zisku po zdanení, podľa tržieb, podľa vlastného majetku a pod.) sú potrebné aj detailnejšie analýzy firiem podľa viacerých kritérií súčasne a získať tak komplexnú informáciu i pozíciu konkrétnej firmy.

Pre vzájomné porovnávanie firiem v celom systéme slovenských firiem je dôležité vychádzať z porovnateľnej kvality finančných údajov. Takúto kvalitu údajov spracovala pre rok 2018, spoločnosť CRIF – Slovak credit bureau, s.r.o. v spolupráci so spoločnosťou PROFINI n.o. (<https://www.profini.sk/informacie-o-projekte-nfp3140111717/>). Zo všetkých účtovných závierok bol vytvorený pre štatistickú analýzu súbor firiem s rovnakými vlastnosťami z hľadiska doby nepretržitého podnikania 3 roky, rovnakým hospodárskym rokom a schválenými účtovnými závierkami. Tento základný súbor tzv. štandardných podnikov má pre rok 2018 vyše 100000 firiem, ktoré slúžia na štatistické stanovenie benchmarkov pre odvetvové charakteristiky podielových finančných ukazovateľov.

V ďalšom budeme tento súbor dáť s hodnotami finančných údajov firiem považovať za reprezentatívny pre všetky typy úloh, ktoré budú vyhovovať popísanej metodike modelovania.

1.2 Formulácia problému

V príspevku Mlynarovič a Hozlár, (2020) bolo skúmané využitie viackritériálneho vyhodnotenia súboru firiem z pohľadu minimalizácie rizika pre finančnú investíciu. Za tým účelom boli vytypované podielové ukazovatele z finančných údajov firiem s vybranými vlastnosťami a následne metódou PROMETHEE II sa zostavilo ich poradie. Firmy na prvých pozíciách vykazovali menšie riziko z nesplácania svojich záväzkov aj v budúcnosti na základe kombinácie ukazovateľov pre likviditu, výkonnosť a rentabilitu. Rozhodovanie o finančnej investícii sa preto mohlo sústrediť na tie firmy, ktoré boli na popredných miestach získaného rebríčka, ale do ďalšej etapy rozhodovania sa pribrali ďalšie veľkostné kritériá a kvalita manažmentu.

V praxi sa stretávame s rozmanitými požiadavkami na porovnávanie firiem nielen medzi sebou, ale aj s inou skupinou firiem. Ide hlavne o problematiku mapovania konkurenčného prostredia, o získanie predstavy o pozícii jedného podniku vzhľadom k zadanej skupine podnikov aj z iného odvetia, iného regiónu a pod.

Z uvedeného vyplýva, že pre metódy prístupu k hodnoteniu firiem v praxi je dôležité definovať

- cieľ hodnotenia
- koho hodnotíme
- na základe koho hodnotíme
- kritériá hodnotenia a metódu hodnotenia

Definovanie prostredia, na základe ktorého hodnotíme pozíciu firmy v tomto prostredí, je z pohľadu disponibilných finančných a ekonomických dát kľúčová otázka. Výber kritérií pre hodnotenie a voľba metód hodnotenia je ďalším kľúčovým problémom.

1.3 Hodnotené a hodnotiace firmy

Pri finančno-ekonomických analýzach vybraného podniku sa predpokladá, že prostredie, v ktorom sa hodnotí podnik je to isté. Napríklad, ak sa hodnotí slovenský podnik s prevažujúcou činnosťou priemyselnej výroby, jeho hodnotenie bude vychádzať zo štatistických charakteristík odvetvia priemyselnej výroby na Slovensku (teda porovnáva sa s charakteristikami príslušného SK NACE). Teda hodnotený podnik a súbor hodnotiacich podnikov sú v tej istej organizačnej štatistickej štruktúre SK NACE.

V danom príspevku budeme rozlišovať množinu firiem, ktoré chceme hodnotiť a množinu firiem, na základe vlastností ktorých budeme hodnotiť, resp. porovnávať a ktorá vlastne definuje podnikateľské prostredie (príp. konkurenčné prostredie). Názorným jednoduchým príkladom je viackriteriálne usporiadanie všetkých firiem vo zvolenom odvetví podľa SK NACE. V tomto prípade je množina hodnotených aj hodnotiacich firiem tá istá.

2 MODELOVÉ ASPEKTY HODNOTENIA

Predpokladajme, že chceme posúdiť pozíciu jednej alebo viacerých firiem zo Slovenska alebo aj iných krajín v rámci vstupu na slovenský trh, ktorý reprezentuje viacero firiem ako konkurencia. Počet hodnotených firiem označme $k \geq 1$ a počet hodnotiacich firiem definujúcich konkurenčné podnikateľské prostredie označme $n \geq k$.

Ďalej predpokladajme, že máme k dispozícii absolútne aj podielové finančné ukazovatele pre použitie zvolených metód hodnotenia pre všetky $k + n$ firiem.

2.1 Modelová štruktúra

Ako kritériá sa ponúkajú niektoré alebo všetky podielové ukazovatele. Závisí to od účelu, na ktorý zostavujeme model. Môžeme vyberať kritériá, ktoré charakterizujú napr.:

1. likviditu, t.j. schopnosť splácať záväzky v horizonte jedného roka ;
2. aktivitu, t.j. viazanosť, resp. využitie majetku;
3. zadlženosť, ktorá podáva obraz o miere využívania cudzích zdrojov, ich štruktúre a schopnosti ich splácania;
4. rentabilitu a výkonnosť, teda efektívnosť činnosti podniku, resp. zhodnotenie kapitálu vloženého do podnikania.

Každú z týchto oblastí charakterizuje skupina podielových ukazovateľov, prípadne aj absolútnych veličín.

Nech počet vybraných kritérií je r . Na základe predpokladov máme teda k dispozícii dva sety údajov – Maticu **A** typu $k \times r$ pre hodnotené firmy a maticu **B** typu $n \times r$ pre hodnotiace firmy.

2.2 Modelové prístupy

Na hodnotenie môžeme použiť rôzne viackriteriálne prístupy. Napríklad pri využití metód triedy PROMETHEE môžeme údaje za hodnotené aj hodnotiace firmy spojiť do jednej matice a napríklad metódou PROMETHEE II zistiť poradie všetkých podnikov na základe čistého toku. V celkovom poradí budú umiestnené aj hodnotené podniky, čo by malo význam pre závery o umiestnení hodnotených podnikov v konkurenčnom prostredí.

Iným prístupom by bolo zistenie poradia pre hodnotené podniky na základe štatistických charakteristík podnikateľského prostredia vytváraného hodnotiacimi podnikmi. Pri tejto verzii sa ponúka viacero možností.

- a) Využitie metód typu PROMRTHEE pre usporiadanie hodnotených podnikov, kde preferenčné funkcie by boli definované so štatistickými charakteristikami hodnotiaceho súboru. Napríklad Gaussova preferenčná funkcia by pre každé kritérium využila iba priemer a štandardnú odchýlku každého kritéria zisteného pre hodnotiaci súbor podnikov.
- b) Pre praktickú názornosť možno pre hodnotiaci súbor podnikov a každé kritérium vypočítať pri dostatočne veľkom počte hodnotiacich podnikov percentily (výberovo definovanej podrobnosti), ktoré by tvorili etalón, resp. škálu pre porovnávanie hodnotených podnikov podľa jednotlivých kritérií. Vyhodnotenie rozdielov medzi hodnotami kritérií hodnoteného podniku a príslušnými percentilmi (napr. mediánom, kvartilmi, prípadne detailnejšími percentilmi) je tiež možno robiť viacerými spôsobmi. V tomto prípade sa ako jednoduchá preferenčná funkcia pre usporiadanie ponúka súčet preferenčných bodov za dosiahnutie v želanom smere (+, -) etalónových percentilových hodnôt. Výsledný skóring ako súčet dosiahnutých bodov za každé kritérium udáva pozíciu hodnoteného podniku vzhľadom na súbor hodnotených podnikov.
- c) Pre modely založené na percentiloch možno využiť pri komplexnom hodnotení podnikov aj preferenčné funkcie odvodené z preferenčných funkcií triedy PROMETHEE. V tomto prípade by sa do preferenčnej funkcie premietli vzdialenosti od mediánu v želanom alebo neželanom smere.

Záver

Pri rozhodovaní o finančných investíciách, o kúpe podniku alebo jeho časti, o vstupe na nový trh, o nadviazaní obchodných vzťahov a pod. je vždy potrebné analyzovať pozíciu jedného alebo viacerých podnikateľských subjektov vzhľadom na inú skupinu firiem tvoriacich konkurenčné podnikateľské prostredie. V danom príspevku sme sa snažili predstaviť niektoré prístupy, ktoré sú prakticky využiteľné za predpokladu existencie kompatibilných finančných údajov, čo v súčasnosti je v mnohých vyspelých štátoch splnené. Navyše je tu ukázaný aj prístup k hodnoteniu firiem bez požiadavky príslušnosti k tomu istému odvetviu ekonomiky.

Použitá literatúra

1. Mlynarovič, V. (1998). Modely a metódy viackritériálneho rozhodovania. Bratislava, Ekonóm.
2. Mlynarovič, V., Hozlár, E. (2020): Slovak firms robust multiple criteria risk and performance analysis. In: QUANTITATIVE METHODS IN ECONOMICS (MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING XX), Púchov, Slovakia 2020, ISBN 978-80-89962-60-0, s. 226-232
3. Stredné hodnoty finančných ukazovateľov ekonomických činností v Slovenskej republike za rok 2018, Bratislava : CRIF - Slovak Credit Bureau, 2019. - 389 s.

Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0628/20 „Medzinárodná investičná pozícia a jej vzťah k ekonomickému rastu - možný ukazovateľ vonkajších nerovnováh krajiny“

Kontaktné údaje:

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.
Comenius University in Bratislava,
Faculty of Social and Economic Sciences,
Institute of Economics
Mlynské luhy, 821 05 Bratislava Slovak Republic
email: eduard.hozlar@fses.uniba.sk

ÚLOHY CELOČÍSELNÉHO LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA A BALÍK PYTHON-MIP VO VÝUČBE

INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS AND THE PYTHON-MIP PACKAGE IN TEACHING

Michaela Chocholatá¹

Abstrakt

Predmetom príspevku je predstavenie riešenia úlohy celočíselného lineárneho programovania pomocou balíka Python-MIP v rámci výučby. Príspevok poskytuje stručný prehľad týkajúci sa všeobecnej matematickej formulácie úlohy (zmiešaného celočíselného) lineárneho programovania, programovacieho jazyka Python a programového balíka Python-MIP. Na konkrétnom príklade ilustruje riešenie úlohy lineárneho, celočíselného a zmiešaného celočíselného lineárneho programovania.

Kľúčové slová: celočíselné lineárne programovanie, Python-MIP

Abstract

This paper presents the solution of the integer linear programming problem using the Python-MIP package in teaching. The paper provides a brief overview of the general mathematical formulation of a (mixed integer) linear programming problem, the Python programming language, and the Python-MIP software package. Using a specific example, it illustrates the solution of the linear, integer and mixed integer linear programming problems, respectively.

Keywords: mixed integer linear programming, Python-MIP

1 ÚVOD

Lineárne programovanie je súčasťou matematického programovania a predstavuje jednu z najrozpracovanejších oblastí vednej disciplíny operačný výskum. História lineárneho programovania je však pomerne krátka, pričom viaceré pokusy riešiť praktické problémy s využitím aparátu lineárneho programovania sa objavili na prelome 30. a 40. rokov 20. storočia. Niektorí autori (Plesník a kol., 1990; Eiselt a Sandblom, 2007) síce poukazujú na to, že matematické myšlienky vzťahujúce sa na lineárne programovanie možno identifikovať už na konci 18., resp. na začiatku 19. storočia, zároveň však uvádzajú, že významný rozvoj v oblasti teórie a aplikácií lineárneho programovania nastal až po 2. svetovej vojne.

Oblasť lineárneho programovania zaznamenala značný rozvoj aj na Slovensku. V roku 1961 bola založená Katedra ekonomickej kybernetiky na VŠE v Bratislave, pričom sa „začali cieľavedome presadzovať do vysokoškolskej výučby ekonómov základné poznatky o uplatnení optimalizačných modelov a metód v ekonómii“ (Laščiak a kol., 1990). V súčasnosti vo výučbe predmetu Lineárne a celočíselné programovanie pokračuje „nástupnícka“ Katedra operačného výskumu a ekonometrie a tento predmet zabezpečuje ako povinný v rámci dvoch študijných programov druhého stupňa štúdia na Fakulte hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave, a to: Informačný manažment a Operačný výskum a ekonometria. Okrem zvládnutia teoretických východísk je súčasťou predmetu tiež

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0193/20.

aplikácia metód a modelov lineárneho a celočíselného programovania pre riešenie úloh ekonomického rozhodovania s využitím adekvátnych softvérových produktov (napr. MS Excel, Python).

V tomto príspevku sa zameriame na predstavenie riešenia konkrétnej úlohy celočíselného programovania s využitím balíka MIP (Mixed-Integer Linear Programming) v prostredí Python v rámci výučby.

Štruktúra príspevku je nasledujúca: druhá časť príspevku popisuje problematiku celočíselného a zmiešaného celočíselného programovania, ako aj zodpovedajúce matematické formulácie týchto úloh, v tretej časti je stručne popísaný programovací jazyk Python a balík Python-MIP, v štvrtej časti je predstavené riešenie konkrétnej úlohy celočíselného lineárneho programovania, príspevok uzatvára záver.

2 ÚLOHA CELOČÍSELNÉHO LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Úlohy celočíselného lineárneho programovania bývajú zvyčajne označované ako úlohy lineárneho programovania, kde na jednotlivé premenné je kladená podmienka celočíselnosti alebo diskretnosti. V tomto kontexte je však dôležité uvedomiť si (Laščiak a kol., 1990, Chocholatá, 2013), že v prípade celočíselných modelov v skutočnosti nejde o lineárne modely, ale o nelineárne modely, keďže ohraničujúce podmienky a tiež účelová funkcia sú definované len pre diskkrétne hodnoty. Pri abstrakcii od tejto skutočnosti možno však modely klasifikovať podľa tvaru ohraničení a účelovej funkcie na lineárne a nelineárne, pričom takejto klasifikácie sa budeme pridržať i v rámci tohto príspevku.

V rámci úloh celočíselného lineárneho programovania možno potom rozlišovať dve, resp. tri skupiny úloh (Taha, 2007; Laščiak a kol., 1990; Chocholatá, 2013):

- čisté celočíselné úlohy, kde na všetky premenné zodpovedajúcej úlohy je kladená podmienka celočíselnosti, resp. všetky premenné sú bivalentné (t.j. 0 alebo 1) a potom ide o úlohy s výlučne bivalentnými premennými,
- zmiešané celočíselné úlohy, kde na niektoré premenné je kladená podmienka celočíselnosti, resp. musia nadobúdať binárne (0/1) hodnoty, zvyšné premenné sú spojitý a môžu nadobúdať ľubovoľné nezáporné hodnoty.

Úlohu lineárneho programovania v zložkovom, resp. v maticovom tvare bez zohľadnenia podmienky celočíselnosti možno zapísať v tvare (Brezina a kol., 2007):

$$\max(\min) f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \qquad \max(\min) f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, \geq, = \} b_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad \mathbf{Ax} \{ \leq, \geq, = \} \mathbf{b} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (3)$$

kde c_j označujú koeficienty účelovej funkcie a x_j sú rozhodovacie premenné ($j = 1, 2, \dots, n$), a_{ij} označujú koeficienty sústavy ohraničení ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) a b_i sú koeficienty pravej strany ($i = 1, 2, \dots, m$). Čisté celočíselné úlohy získame, ak v úlohe (1) – (3) bude na premenné popri podmienke nezápornosti kladená aj dodatočná podmienka celočíselnosti (4), resp. ak budú premenné binárne (5), t. j. ak

$$x_j \text{ sú celočíselné pre } j = 1, 2, \dots, n \qquad (4)$$

$$\text{resp.} \quad x_j \in \{0; 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Úlohu zmiešaného celočíselného lineárneho programovania možno zapísať v tvare (6) – (9), kde vektor $\mathbf{x}$ obsahuje nezáporné premenné a na premenné vo vektore $\mathbf{y}$ je kladená dodatočná podmienka celočíselnosti:

$$\max(\min) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^r c_j x_j + \sum_{k=r+1}^n d_k y_k \quad \max(\min) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j + \sum_{k=r+1}^n d_{ik} y_k \left\{ \leq, \geq, = \right\} b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \left\{ \leq, \geq, = \right\} \mathbf{b} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, r \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (8)$$

$$y_k \text{ sú celočíselné} \quad k = r+1, r+2, \dots, n \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \text{ a celočíselné} \quad (9)$$

Vo všeobecnosti možno tvrdiť, že na riešenie úloh celočíselného lineárneho programovania je potrebné vyvinúť oveľa viac úsilia v porovnaní s riešením úloh lineárneho programovania bez podmienky celočíselnosti rovnakých rozmerov. Existuje viacero skupín metód na riešenie úloh celočíselného lineárneho programovania, pričom medzi najznámejšie patria metóda rezných nadrovin a metóda vetiev a hraníc (Laščiak a kol., 1990; Chocholatá, 2013). Uvedené typy úloh je možné riešiť tiež s využitím rôznych softvérov, ktoré sú užívateľsky viac alebo menej náročné.

3 PROGRAMOVACÍ JAZYK PYTHON A BALÍK PYTHON-MIP

Jednou zo softvérových možností, ktorú je možné využiť aj pri riešení úloh celočíselného lineárneho programovania, je programovací jazyk Python, ktorý začal vytvárať holandský programátor Guido van Rossum v roku 1989. Popularita Pythonu v poslednom období prudko rastie – na základe indexu TIOBE² možno v súčasnosti dokonca považovať Python za tretí najpopulárnejší programovací jazyk na svete (Obr.1). Zaujímavý je tiež prehľad popularity vybraných programovacích jazykov v dlhšom časovom horizonte (1985 – 2020, Obr. 2).

Obr. 1: Popularita programovacích jazykov v septembri 2020 na základe indexu TIOBE

Sep 2020	Sep 2019	Change	Programming Language	Ratings	Change
1	2	▲	C	15.95%	+0.74%
2	1	▼	Java	13.48%	-3.18%
3	3		Python	10.47%	+0.59%
4	4		C++	7.11%	+1.48%
5	5		C#	4.58%	+1.18%
6	6		Visual Basic	4.12%	+0.83%
7	7		JavaScript	2.54%	+0.41%

² Index TIOBE je indikátorom popularity programovacích jazykov. Index sa aktualizuje raz mesačne. Na výpočet hodnotení sa používajú populárne vyhľadávače ako Google, Bing, Yahoo!, Wikipedia, Amazon, YouTube a Baidu.

Zdroj: <https://www.tiobe.com/tiobe-index/>

Obr. 2: Popularita programovacích jazykov v období 1985 – 2020 na základe indexu TIOBE

Programming Language	2020	2015	2010	2005	2000	1995	1990	1985
Java	1	2	1	2	3	-	-	-
C	2	1	2	1	1	2	1	1
Python	3	7	6	6	20	20	-	-
C++	4	3	3	3	2	1	2	9
C#	5	5	5	7	9	-	-	-
JavaScript	6	8	8	10	6	-	-	-

Zdroj: <https://www.tiobe.com/tiobe-index/>

Python je voľne šíriteľný programovací jazyk, dnes je najčastejšie používanou verzia 3. Najnovšiu verziu Pythonu (Python 3.8.5) je možné stiahnuť zo stránky <https://www.python.org/>. Po stiahnutí je potrebné otvoriť inštalačný súbor „python-3.8.5.exe“, ktorý umožní inštaláciu Pythonu. Pri práci s Pythonom môžeme nielen vytvárať vlastné funkcie, ale aj používať tzv. moduly (balíky, knižnice), ktoré obsahujú súhrn funkcií. Konkrétnu knižnicu je možné nainštalovať napr. zo stránky <https://pypi.org/>. Vzhľadom na zameranie príspevku využijeme balík Python-MIP, ktorý poskytuje nástroje na modelovanie a riešenie úloh zmiešaného celočíselného lineárneho programovania (MIP) v Pythone. Predvoleným nastavením pre základnú triedu „Model“ je minimalizačná účelová funkcia a riešiteľ COIN-OR³ Branch-and-Cut, t.j. „CBC“. Výpočet optimálneho riešenia zabezpečuje metóda `optimize()`, ktorá poskytuje výsledný optimalizačný status algoritmu CBC (`OptimizationStatus`). V prípade, že bolo nájdené optimálne riešenie úlohy, program vypíše „`OptimizationStatus.OPTIMAL`“ (pre ďalšie statusy pozri napr. Santos a Toffolo, 2020). Balík Python-MIP má tiež široké využitie najmä riešení rôznych typov úloh v rámci sieťovej analýzy.

Súčasťou Pythonu je vývojové prostredie IDLE (Python's Integrated Development and Learning Environment), v ktorom vieme vytvoriť nový súbor (prípona .py) na napísanie programu (ide o tzv. programovací režim). Takto napísaný program spustíme pomocou „Run“, pričom výstup sa zobrazí v tzv. príkazovom režime v interaktívnom okne „Shell“ (Blaho, 2016).

4 ÚLOHA CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVANIA A JEJ RIEŠENIE

V rámci výučby pri úlohe celočíselného programovania môžeme najskôr uvažovať a riešiť úlohu lineárneho programovania bez zohľadnenia podmienky celočíselnosti. V ďalšom kroku budeme ilustrovať pridanie dodatočných podmienok celočíselnosti a v poslednom kroku transformujeme uvažovanú úlohu na úlohu zmiešaného celočíselného programovania.

Uvažujme teda úlohu lineárneho programovania s dvomi premennými a dvomi ohraničeniami v tvare (1) – (3), t.j. najskôr s nezápornými premennými x_1, x_2 bez zohľadnenia podmienky celočíselnosti:

³ Computational Infrastructure for Operations Research

$$\begin{aligned}\max f(\mathbf{x}) &= 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Uvedenú úlohu budeme riešiť v Pythone pomocou balíka Python-MIP, z ktorého importujeme všetky funkcie pomocou symbolu „*“ v prvom riadku programu. Na Obr. 3 ukážeme rôzne spôsoby vytvorenia programu na riešenie tejto úlohy. Kým v ľavej časti Obr. 3 budeme mať program špecifikovaný pre konkrétnu úlohu, vpravo budeme prezentovať univerzálnejšiu verziu programu s využitím for-cyklov. Najskôr popíšeme ľavú časť Obr. 3. V druhom riadku zadefinujeme model s názvom „m“ s maximalizačnou účelovou funkciou a riešiteľom CBC. Vytvorenie rozhodovacích premenných $x_1, x_2 \geq 0$ zrealizujeme pomocou funkcie „m.add_var()“, v rámci ktorej môžeme uviesť názvy premenných a ich typ („C“ bude označovať spojitú premennú, „I“ celočíselnú a „B“ označuje binárnu premennú). Nasleduje zahrnutie ohraničení (funkcia „m.add_constr()“, ktoré sú lineárnymi funkciami rozhodovacích premenných a vo všeobecnosti môžu byť jedným z typov ==, <=, >=, pričom na pravej strane ohraničenia sa nachádza koeficient pravej strany. Účelovú funkciu špecifikujeme pomocou „m.objective()“. Výpočet optimálneho riešenia zrealizujeme zadáním „m.optimize()“. Po spustení programu dostávame výstup v interaktívnom okne „Shell“ (Obr. 3 vľavo dolu) indikujúci, že bolo nájdené optimálne riešenie. Vypísanie optimálnych hodnôt riešenia ako aj optimálnej hodnoty účelovej funkcie je zabezpečené vďaka použitiu funkcie print() v programovacom režime.

V pravej časti Obr. 3 je definovaný model m=Model() bez určenia typu extremalizácie a bez uvedenia typu riešiteľa. Zadané sú tiež vektor koeficientov účelovej funkcie **c**, vektor koeficientov pravej strany **b**, ako aj matica koeficientov sústavy ohraničení **A**. Ďalšie riadky špecifikujú množiny indexov I a J v rozsahu od 0 po dĺžku vektora **b**, resp. **c**⁴. Pridávaný počet premenných „x“ teda zodpovedá počtu koeficientov účelovej funkcie. Účelová funkcia je maximalizačná a vzhľadom na to, že pri špecifikácii modelu v druhom riadku programu nebol špecifikovaný typ extremalizácie, je potrebné túto skutočnosť zadať pri pridávaní účelovej funkcie. Účelová funkcia je vytvorená pomocou funkcie „xsum(c[j]*x[j] for j in J)“. Pri pridávaní ohraničení je využitý for-cyklus umožňujúci vytvorenie počtu ohraničení zodpovedajúci počtu prvkov pravej strany (množina indexov I). Ohraničenia sú opäť vytvárané s pomocou funkcie „xsum()“. Po úspešnej optimalizácii úlohy nasleduje cyklus umožňujúci vypísať hodnoty rozhodovacích premenných. Program uzatvára výpis hodnoty účelovej funkcie zodpovedajúcej optimálnemu riešeniu.

Ak by sme vyššie uvedenú úlohu modifikovali a uvažovali, že obidve rozhodovacie premenné x_1, x_2 sú nezáporné a celočíselné, bolo by v programoch na Obr. 3 potrebné prešpecifikovať typ premenných na „I“, resp. „INTEGER“. Výsledok optimalizácie je na Obr. 4.

⁴ Indexovanie v Pythone začína indexom 0. Funkcia range(0,2) v našom príklade vygeneruje postupnosť prvkov od hodnoty start=0 po hodnotu stop-1=1.

Obr. 3: Programy na riešenie úlohy lineárneho programovania a výstupy riešenia

<pre> File Edit Format Run Options Window Help from mip import * m = Model(sense=MAXIMIZE, solver_name=CBC) x1 = m.add_var(name='x1', var_type="C") x2 = m.add_var(name='x2', var_type="C") ohr1=m.add_constr(x1 + 2*x2 <= 6) ohr2=m.add_constr(3*x1 -x2 <= 6) uf=m.objective = 4*x1 + x2 print("UF:",m.objective) print(ohr1) print(ohr2) status = m.optimize() print(status) print("x1=",m.vars[0].x) print("x2=",m.vars[1].x) print("HUF=",m.objective.x) Python 3.8.3 Shell File Edit Shell Debug Options Window Help Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020, 22:37:02) on win32 Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more >>> ===== RESTART: E:\Python\ UF: + 4.0x1 + x2 constr(0): +1.0 x1 +2.0 x2 <= 6.0 constr(1): +3.0 x1 -1.0 x2 <= 6.0 OptimizationStatus.OPTIMAL x1= 2.5714285714285716 x2= 1.7142857142857142 HUF= 12.0 >>> </pre>	<pre> File Edit Format Run Options Window Help from mip import * m = Model() c=[4,1] b=[6,6] A=[[1,2],[3,-1]] I=range(len(b)) J=range(len(c)) print("I=",I,"J=",J) x = [m.add_var(var_type="C") for j in J] m.objective= maximize(xsum(c[j]*x[j] for j in J)) print("UF:",m.objective) for i in I: ohr=m.add_constr(xsum(A[i][j]*x[j] for j in J)<=b[i]) print(ohr) status = m.optimize() print(status) for j in J: print(m.vars[j], "=",m.vars[j].x) print("HUF", m.objective.x) Python 3.8.3 Shell File Edit Shell Debug Options Window Help Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020, 22:37:02) on win32 Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more >>> ===== RESTART: E:\Python/IP a MIP obidve spojite I= range(0, 2) J= range(0, 2) UF: + 4.0var(0) + var(1) constr(0): +1.0 var(0) +2.0 var(1) <= 6.0 constr(1): +3.0 var(0) -1.0 var(1) <= 6.0 OptimizationStatus.OPTIMAL var(0) = 2.5714285714285716 var(1) = 1.7142857142857142 HUF 12.0 </pre>
--	---

Zdroj: vlastné výpočty

Obr. 4: Výsledok riešenia úlohy celočíselného lineárneho programovania (časť výstupu)

```

OptimizationStatus.OPTIMAL
x1=var(0)= 2.0
x2=var(1)= 2.0
HUF= 10.0

```

Zdroj: vlastné výpočty

Pokiaľ by vyššie uvedená úloha mala charakter úlohy zmiešaného celočíselného programovania so spojitou prvou premennou a celočíselnou druhou premennou, t.j. $x_1, x_2 \geq 0$ a x_2 je celočíselné, v programe na Obr.3 vľavo by sa zmenil iba typ druhej premennej zo spojitkej „C“ na celočíselnú „I“ – pozri Obr. 5 vľavo. Program v pravej časti Obr. 5 vychádza z formulácie úlohy zmiešaného celočíselného lineárneho programovania v tvare (6) – (9), čo znamená, že bola definovaná dvojica vektorov koeficientov účelovej funkcie **c** a **d**, dvojica koeficientov matíc sústavy ohraničení **A** a **D**, ktoré zodpovedajú nezáporným premenným vo vektore **x**, resp. nezáporným celočíselným premenným vo vektore **y**. Zodpovedajúcim spôsobom boli tiež modifikované účelová funkcia a pridávané ohraničenia. Vzhľadom na matematickú formuláciu tejto úlohy zmiešaného celočíselného programovania, má celočíselný charakter iba druhá premenná.

Obr. 5: Programy na riešenie úlohy zmiešaného celočíselného programovania a výstupy riešenia

The image shows two side-by-side screenshots of a Python 3.8.3 Shell environment. The left window displays the source code for a Mixed-Integer Programming (MIP) model. The code defines a model with two continuous variables, x_1 and x_2 , and two integer variables, $ohr1$ and $ohr2$. It includes constraints for the objective function and the variables, and prints the status and values of the variables. The right window shows the output of the program, which includes the status of the optimization, the values of the variables, and the optimal objective function value.

```

from mip import *
m = Model(sense=MAXIMIZE, solver_name=CBC)
x1 = m.add_var(name='x1', var_type="C")
x2 = m.add_var(name='x2', var_type="I")
ohr1=m.add_constr(x1 + 2*x2 <= 6)
ohr2=m.add_constr(3*x1 -x2 <= 6)
uf=m.objective = 4*x1 + x2
print("UF:",m.objective)
print(ohr1)
print(ohr2)
status = m.optimize()
print(status)
print("x1=",m.vars[0].x)
print("x2=",m.vars[1].x)
print("HUF=",m.objective.x)

Python 3.8.3 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020) on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "13"
>>>
===== RESTART: E:\Python
UF: + 4.0x1 + x2
constr(0): +1.0 x1 +2.0 x2 <= 6.0
constr(1): +3.0 x1 -1.0 x2 <= 6.0
OptimizationStatus.OPTIMAL
x1= 2.3333333333333335
x2= 1.0
HUF= 10.333333333333334
>>>

from mip import *
m = Model()
c=[4]
d=[1]
b=[6,6]
A=[[1],[3]]
D=[[2],[-1]]
I=range(len(b))
J=range(len(c))
K=range(len(d))
print("I=",I,"J=",J,"K=",K)
x = [m.add_var(var_type=CONTINUOUS) for j in J]
y = [m.add_var(var_type=INTEGER) for k in K]
m.objective= maximize(xsum(c[j]*x[j] for j in J)+xsum(d[k]*y[k] for k in K))
print("účelová funkcia:",m.objective)
for i in I:
    ohr=m.add_constr(xsum(A[i][j]*x[j] for j in J)+xsum(D[i][k]*y[k] for k in K)<=b[i])
    print(ohr)
status = m.optimize()
print(status)
print("celkový počet premenných modelu je",len(m.vars))
L=range(0,len(c)+len(d))
for l in L:
    print(m.vars[l],"=",m.vars[l].x)
print("HUF=", m.objective.x)

Python 3.8.3 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020, 22:37:02) [MSC v.1924 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
= RESTART: E:\Python\MIP len jedna premenna celociselná uloha nova cez sumyBib.p
y
I= range(0, 2) J= range(0, 1) K= range(0, 1)
účelová funkcia: + 4.0var(0) + var(1)
constr(0): +1.0 var(0) +2.0 var(1) <= 6.0
constr(1): +3.0 var(0) -1.0 var(1) <= 6.0
OptimizationStatus.OPTIMAL
celkový počet premenných modelu je 2
var(0) = 2.3333333333333335
var(1) = 1.0
HUF 10.333333333333334
>>>

```

Zdroj: vlastné výpočty

5 ZÁVER

Predmetom príspevku bolo predstaviť riešenie úlohy lineárneho, resp. celočíselného lineárneho programovania s využitím balíka Python-MIP. Ilustrovali sme riešenie konkrétnej úlohy vo viacerých krokoch s dôrazom na potrebnú modifikáciu príslušného programu. Funkcie využité vo všeobecnejších verziách programu (uvedené vo výstupoch z Pythonu na Obr. 3 a Obr. 5 vpravo) sú širšie využiteľné tiež pri riešení úloh sieťovej analýzy.

Vo všeobecnosti možno konštatovať, že využívanie informačných technológií vo výučbe významným spôsobom prispieva k zatraktívneniu a zefektívneniu celého výchovno-vzdelávacieho procesu, pričom popri využití vhodného softvéru sa vo výučbe kladie tiež dôraz na to, aby študenti neboli len pasívnymi zadávateľmi vstupných údajov, ale aby ovládali princíp riešenia formulovaných problémov.

Použitá literatúra

1. BLAHO, A. 2016. *Programovanie v Pythone. Časť 1.* [cit. 2020.06.18]. Dostupné na internete: <https://cloud2.edupage.org/cloud/Python1.pdf?z%3AeppyuQvJmhf0yqVOgLnKDxwYB44sjoT4BKXwJpkmfcDRVi%2BgPbUTLWdD5MgmtSnBxpISFgkyFR1T%2FIsTiSC50IA%3D%3D>
2. BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*. Bratislava: IURA Edition.

3. EISELT, H. A. – SANDBLOM, C. L. 2007. *Linear Programming and its Applications*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
4. CHOCHOLATÁ, M. 2013. *Lineárne programovanie pre manažérov*. Bratislava: EKONÓM.
5. LAŠČIAK, A. a kol. 1990. *Optimálne programovanie*. 2. upravené vydanie. Bratislava: Alfa.
6. PLESNÍK, J. – DUPAČOVÁ, J. – VLACH, M. 1990. *Lineárne programovanie*. Bratislava: Alfa.
7. <https://pypi.org/> [cit. 2020.09.09]
8. <https://www.python.org/> [cit. 2020.09.09]
9. SANTOS, H.G. – TOFFOLO, T.A.M. 2020. *Mixed Integer Linear Programming with Python*. [cit. 2020.07.14]. Dostupné na internete: <https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/python-mip/latest/python-mip.pdf>
10. TAHA, H. A. 2007. *Operations Research: An Introduction*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
11. <https://www.tiobe.com/tiobe-index/> [cit. 2020.09.09]

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: michaela.chocholata@euba.sk

TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PRIAMYCH ZAHRANIČNÝCH INVESTÍCIÍ V PODMIENKACH DOKONALEJ A NEDOKONALEJ KONKURENCIE

THEORETICAL BASIS OF FOREIGN DIRECT INVESTMENT IN CONDITIONS OF PERFECT AND IMPERFECT COMPETITION

Miroslava Jánošová

Abstrakt

V posledných desaťročiach priame zahraničné investície (PZI) zaznamenávajú výrazný nárast a predstavujú veľmi významný tok kapitálu plynúci do hostiteľskej krajiny. Mnohé krajiny vychádzajú z predpokladu, že prilákanie významného množstva priamych zahraničných investícií môže významne ovplyvniť ich ekonomický rast. Vysvetlenie PZI môžeme nájsť v mnohých teóriách a práve tieto teórie popisujú rôzne determinanty ovplyvňujúce a vysvetľujúce priame zahraničné investície. V nasledujúcom príspevku sa budeme venovať bližšej charakteristike vybraných teórií popisujúcich priame zahraničné investície z pohľadu konkurenčného postavenia na trhu.

Kľúčové slová: *priame zahraničné investície, dokonalá konkurencia, nedokonalá konkurencia*

Abstract

In recent decades, foreign direct investment (FDI) has grown significantly and represents a very significant flow of capital to the host country. Many countries assume that attracting a significant amount of foreign direct investment can significantly affect their economic growth. An explanation of FDI can be found in many theories, and it is these theories that describe the various determinants influencing and explaining foreign direct investment. In the following article, we will focus on the characteristics of selected theories describing foreign direct investment in terms of competitive position in the market.

Keywords: *Foreign Direct Investment, Perfect Competition, Imperfect Competition*

ÚVOD

Priame zahraničné investície sú v súčasnosti jednou z hlavných zložiek podpory hospodárskeho rastu krajiny. Ich prínos možno najvýraznejšie vnímať z pohľadu rozvojových krajín a v ekonomikách, ktoré prechádzajú transformáciami a kde môžu vo výraznej miere prispieť k rastu hrubého domáceho produktu. Priame zahraničné investície prinášajú hostiteľským krajinám kapitál, transféry v oblasti technológií ako aj odborné znalosti v procesoch riadenia. Objem priamych zahraničných investícií rastie za posledné desaťročia niekoľko násobne. Zdroje tohto investičného rastu sú pripisované hlavne všeobecnej ekonomickej expanzii ako aj liberalizácii politík, priaznivejšiemu komunikačnému prostrediu. Objasnenie podmienok vplývajúcich na prílev PZI je záujmom mnohých vedcov, ktorí sa opierajú o základné teoretické poznatky v oblasti teórií PZI. Niektorí autori vychádzajú z teórií, ktoré definujú faktory vplývajúce na umiestnenie, iní berú prílev PZI ako súčasť prirodzeného procesu riadeného správaním firiem na trhu, či už v prostredí dokonalej alebo

nedokonalej konkurencie. Cieľom predkladaného príspevku je predstaviť niektoré vybrané teórie priamych zahraničných investícií z pohľadu trhového prostredia, na ktorom sú umiestnené.

1 TEÓRIE PRIAMYCH ZAHRANIČNÝCH INVESTÍCIÍ V PODMIENKACH DOKONALEJ KONKURENCIE

Prvý pokus o teoretické vysvetlenie PZI vychádzal z Heckscher-Ohlinovoho modelu teórie neoklasického obchodu, kde PZI boli považované za súčasť tohto obchodu v podobe kapitálu. Tento model vychádzal z predpokladu dvoch krajín s dvoma výrobnými faktormi a dvomi tovarmi, pričom sa predpokladal dokonale konkurenčný trh. Táto teória zároveň vychádza z toho, že medzi krajinami je nerovnomerné rozdelenie výrobných faktorov a teda relatívne bohatá krajina by mala buď exportovať kapitálovo náročné statky do zahraničia prípadne by mala presunúť do zahraničia kapitál, kde by jeho návratnosť bola vyššia. Tento model je považovaný za jeden zo základných modelov medzinárodného obchodu a aj v súčasnosti je predmetom skúmania viacerých vedcov, ktorí sa snažia o jeho prenesenie do súčasných trhových podmienok. Model PZI, ktorý bol založený na predpoklade dokonale konkurenčného trhu môžeme nájsť aj v práci MacDougall (1958). Ide o rovnovážny komparatívno-statický prístup, ktorý si kladie za cieľ preskúmať ako sú distribuované hraničné prírastky investícií, ktoré plynú do zahraničia. Ako hlavný výstup modelu možno považovať zistenie, že prílev zahraničného kapitálu zvýši hraničný produkt práce a zároveň zníži hraničný produkt kapitálu v krajine umiestnenia PZI. Podobný prístup založený na podmienkach dokonalej konkurencie mal aj Kemp (1964), ktorý pracoval rovnako s hypotézou dvoch krajín pričom jedna bola investujúca a druhá hostujúca krajina, cena kapitálu sa rovnala jeho hraničnej produktivite, pričom dochádzalo k vyrovnávaniu tejto marginálnej produktivity medzi týmito dvomi krajinami, čo viedlo k zvýšeniu efektívnosti využívania zdrojov a následne aj k zvýšeniu blahobytu v krajine. Rovnako z teórie podmienok dokonalej konkurencie vychádzal aj autor Alibert (1970), ktorý rozšíril teóriu o poznatky v rozdieloch v kapitálových výnosoch v dôsledku rozdielneho kapitálového vybavenia a úrokových sadzieb ako aj menových rozdielov. Neskôr sa môžeme stretnúť so štúdiou spracovanou autormi Aksen a Cukrowski (2001), ktorí prostredníctvom analýzy medzinárodného obchodu sa snažia o identifikáciu firiem na dokonale konkurenčných trhoch a ich averzie voči riziku. Štúdia tvrdí, že takýto obchod môže zlepšovať blahobyť krajiny, a teda má určité opodstatnenie. V podobnom ponímaní teórie priamych zahraničných investícií a teda skúmaniu determinantov priamych zahraničných investícií pri predpoklade dokonalých trhov, avšak zameranú na rozdielne miery návratnosti a diverzifikáciu portfólia ako aj veľkosť trhu sa zaoberali autori Adler a Hufbauer (2009), ktorí vo svojej štúdií dospeli k záveru, že v prípade nediskontovania budúcich peňažných tokov ich dlhodobé účinky na vonkajšie platby budú pozitívne. V súčasnosti sa autori stále venujú podmienkam na dokonale konkurenčných trhoch ale skorej v ponímaní na poukazovanie nedostatkov takýchto trhov vo vzťahu k PZI ako napríklad autori Hutzschenreuter a Izrael (2009) kde upozorňujú na skutočnosť, že konkurenčné pôsobenie nie je statický jav ale ide o vzájomné na seba nadväzujúce a pôsobiace akcie v priebehu času.

2 TEÓRIE PRIAMYCH ZAHRANIČNÝCH INVESTÍCIÍ V PODMIENKACH NEDOKONALEJ KONKURENCIE

Teórie založené na nedokonalých trhových štruktúrach sú podložené tvrdeniami, že krajiny ktoré vstupujú na trh hostiteľskej krajiny môžu vplývať na ich domáci trh dvomi rôznymi spôsobmi a teda na jednej strane môžu vylepšovať a podnecovať konkurenčné prostredie

avšak na strane druhej to môže viesť k vytvoreniu monopolu resp. oligopolu. Jedným z prvých autorov, ktorý svoju teóriu PZI založil na nedokonalom nastavení trhovej konkurencie bol Hymer (1976). Vo svojej teórii rozvíjal myšlienku, že firmy snažiac sa investovať v zahraničí musia znášať vysoké náklady spojené s jazykovými, právnymi ako aj kultúrnymi nevýhodami ako aj z hľadiska preferencií spotrebiteľov v hostiteľskej krajine, pričom práve tieto nevýhody by mali byť vyvážené trhovým systémom. Hymer naopak za najvýraznejšiu výhodu firmy uvažujúcej nad investíciou v zahraničí považoval technologickú vybavenosť krajiny vzhľadom na skutočnosť ľahšieho zavedenia nového produktu, ako aj jej vplyv na zlepšenie výrobného procesu. A teda PZI a ich umiestnenie bolo riadené snahou o rozšírenie si svojho dominantného postavenia na trhu v medzinárodnom meradle. Túto teóriu o nedokonalom trhu a podpore trhovej sily, ktorá motivuje k investovaniu v zahraničí podporili aj autori ako Graham a Krugman (1989), Sodersten (1970), Dixit a Norman (1980). V rovnakom duchu ponímali teóriu PZI aj autori Calvet (1984), Dunning a Rugman (1985). Niektorí autori sa viac prikláňali k názoru monopolného ovládnutia medzinárodných trhov a niektorí prepájali priame zahraničné investície skorej s oligopolnými trhovými štruktúrami.

2.1 Priame zahraničné investície v podmienkach monopolu

Teória monopolu vychádza z predpokladu, že priame zahraničné investície majú svoje uplatnenie z dôvodu, že podmienky nedokonalého trhu dávajú príležitosť firme získať monopolné postavenie v hostujúcej krajine. S týmto tvrdením sa stotožňoval vo svojej práci aj Kindleberger (1969), ktorý poukázal na to že PZI dávajú možnosť k silnej konkurencii na trhoch hostiteľskej krajiny vzhľadom na to, že majú vytvorené silné zázemie na svojom domácom trhu. Poukazuje na to, že príchodom PZI môže byť narušené prípadné dominantné postavenie určitej firmy v hostiteľskej krajine a tým sa vylepší konkurenčné prostredie avšak len do momentu ak domáce firmy dokážu konkurovať firme, ktorá priniesla do tejto krajiny investície. Monopolné výhody hostujúcich firiem spočívajú hlavne v nízkych nákladoch resp. žiadnych nákladoch investujúcej firmy na presun poznatkov a know-how. Teórie spojené s priamymi zahraničnými investíciami rozpracoval Hymer (1976) a následne ich ďalej rozšíril a rozpracoval pre rôzne formy výhod hostujúcej firmy v hostiteľskej krajine avšak nezameriava sa na žiadnu konkrétne z pohľadu najväčšej efektívnosti pre firmu. Ahsan a Musteen (2011) upozorňujú vo svojej práci, že generovanie monopolného zisku z medzinárodnej výroby je považované za obmedzené z dôvodu vysokých nákladov vstupu na tieto medzinárodné trhy. Zároveň je však aj otázne na koľko hostiteľská krajina resp. vláda tejto krajiny bude ochotná povoliť vstup hostujúcim firmám na ich územie.

2.2 Priame zahraničné investície v podmienkach oligopolu

V literatúre môžeme nájsť rôzne odlišné pohľady na PZI v oligopolných štruktúrach a to z pohľadu blahobytu, produkcie a stratégie. A teda niektorí autori poukazujú na to, že PZI na oligopolných trhoch môžu vplývať na blahobyt spoločnosti nepriaznivo v dôsledku zvýšenia cien resp. obmedzením výberu spotrebiteľa, na strane druhej pôsobia priaznivo z pohľadu zavádzania inovácií. Medzi takýchto autorov môžeme zaradiť Caves (1996) a Hymer (1968). Ďalšia skupina vedcov Reuber a kol. (1973) rieši PZI z pohľadu aký vplyv na efektívnosť a výkon krajiny majú v štruktúre oligopolu firmy, ktoré sú zapojené do cezhraničných fúzií a akvizícií. A potom je to ešte skupina autorov zameriavajúcich sa na stratégie v oligopolných štruktúrach v nadnárodných spoločnostiach. Knickerbocker (1973) z výsledkov svojej práce uvádza, že v prostredí oligopolnej trhovej štruktúry umiestnenie PZI má za následok, že iné firmy túto firmu nasledujú v snahe o zachovanie si svojho miesta na trhu. Túto oligopolnú reakciu sledoval hlavne pre priemyselné odvetia ako napríklad automobilový, chemický a elektronický priemysel, ktoré sa vyznačujú menším počtom avšak veľkých spoločností. Z novších prác, ktoré skúmajú reakcie v prostredí oligopolov môžeme spomenúť autorov ako

Ito, K. a Rose, E. L. (2002) ktorí rovnako vo svojej štúdii testovali vplyv oligopolnej reakcie súvisiacej s PZI v americkom priemysle výroby pneumatík a textilu. Ich výsledky poukazujú na to, že v prostredí oligopolu je umiestňovanie PZI založené na správaní konkurenčných firiem ako aj na faktoroch v hostiteľskej krajine. Na Knickerbockerovej teórii oligopolnej reakcie firiem založili svoj model aj Head K., Mayer T. a Ries J (2002) prostredníctvom, ktorého dospeli k záverom, že firmy, ktoré sú neutrálne k riziku budú mať nižšiu tendenciu umiestňovať svoje investície do zahraničia hneď ako k takémuto kroku pristúpia ich konkurenti. Ich hlavným prínosom je odvodenie minimálnej úrovne rizika, ktorá je potrebná pre vyvolanie oligopolnej reakcie firiem. Vysvetlenie oligopolistickej reakcie ponúkajú aj autori Alamonte C. a Pennings E. (2003), testovali model zostrojený z dát konkurenčných firiem, ktoré investovali v strednej a východnej Európe v rokoch 1990 – 1997. Na základe ich dosiahnutých výsledkov dospeli k záveru, že tieto firmy vykazujú silnú oligopolistickú reakciu avšak ich zistenia sú robustné vzhľadom na rôzne špecifikácie použitého modelu založenom na Bayesianom učení. Model na ilustráciu správania sa firiem v zmysle oligopolistickej reakcie predstavili aj Leahy D. a Pavelin S. (2003), ktorí ním demonštrovali pozitívnu vzájomnú závislosť medzi rozhodnutiami investovania PZI firiem a teda, že zahraničné investície jednej firmy prinášajú ďalšie stimuly pre ostatné firmy aby ich nasledovali.

ZÁVER

Priame zahraničné investície stále viac naberajú na význame z globálneho hľadiska a z hľadiska hospodárskeho rastu krajín, podpory zamestnanosti a inovácií. Aktuálna situácia vo svete, ktorú priniesla pandémia COVID-19, je testom investičnej politiky. Európska únia stále považuje za veľmi dôležité, aby zostala atraktívnou krajinou pre zahraničné investície. Práve v tomto kontexte je veľmi dôležité aj naďalej skúmať rôzne teoretické východiska k prístupu modelovania priamych zahraničných investícií vzhľadom na skutočnosť, že sú zdrojom pre identifikáciu správnych determinantov, ktoré vplyvajú na ich prílev do krajiny. Cieľom predkladaného príspevku bolo sprehľadnenie teoretických prístupov a historických východísk priamych zahraničných investícií v podmienkach dokonalej konkurencie a v podmienkach nedokonalej konkurencie. Cieľom zistení je poukázať na dôležitosť modelov priamych zahraničných investícií ako faktora ovplyvňujúceho vývoj krajiny a dôležitého faktora signalizujúceho možný vznik vonkajšej nerovnováhy krajiny.

Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu APVV-17-0551 „Vyrovnávanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia“ a riešenia projektu VEGA 1/0628/20 „Medzinárodná investičná pozícia a jej vzťah k ekonomickému rastu - možný ukazovateľ vonkajších nerovnováh krajiny“

Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. ADLER, M. a HUFBAER, G. C. 2009. "Policy Liberalization and US Merchandise Trade Growth, 1980--2006," Working Paper Series WP09-2, Peterson Institute for International Economics.
2. ALMOMONTE, C a PENNING, E. (2003). Oligopolistic Reaction to Foreign Investment in Discrete Choice Panel Data Models.
3. ALIBERT, R. Z. 1970. "A theory of foreign direct investment", in Kindleberger, C.P. (eds.): The international corporation, Cambridge, MA: MIT Press.

4. AKSEN, E. a CUKROWSKI, J. 2001. "Perfect Competition and Intra-Industry Trade," CASE-CEU Working Papers 0040, CASE-Center for Social and Economic Research.
5. ASHAN, M. a MUSTEEN, M. 2011. "Multinational enterprises' entry mode strategies and uncertainty: A review and extension", *International Journal of Management Reviews*, Vol. 13 No. 4, pp. 376–392.
6. CALVET, AL. 1984. A synthesis of foreign direct investment theories and theories of the multinational enterprise. *Journal of International Business Studies*, Spring/Summer 12: 43-59
7. CAVES, R.E. 1996. *Multinational enterprise and economic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
8. DIXIT, A. a NORMAN, V. 1980. *Theory of International Trade: A Dual General Equilibrium Approach*, Cambridge, Cambridge University Press
9. DUNNING, J.H. a RUGMAN, A.M. 1985. "The Influence of Hymer ' s Dissertation on the Theory of Foreign Direct Investment", *The American Economic Review*, Vol. 75, pp. 228– 232.
10. GRAHAM, E. a KRUGMAN, P. R. 1989. *Foreign Direct Investment in the United States*. Washington, D.C.: Institute for International Economics
11. HEAD, K., MAYER, T. and RIES, J. 2002. Revisiting Oligopolistic Reaction: Are Decisions on Foreign Direct Investment Strategic Complements?. *Journal of Economics & Management Strategy*, 11: 453-472.
12. HUTZSCHENREUTER, T. a ISRAEL, S. (2009) "A review of empirical research on dynamic competitive strategy", *International Journal of Management Reviews*, Vol. 11 No. 4, pp. 421–461.
13. HYMER, S.H. 1968. "The large multinational corporation: An analysis of some motives for the international integration of business", *Revue Economique*, Vol. 19 No. 6, pp. 949–973.
14. HYMER, S.H. 1976. *The international operations of national firms: A study of direct foreign investment*, MIT press Cambridge, MA, Vol. 14.
15. ITO, K., ROSE, E. (2002) *Foreign Direct Investment Location Strategies in the Tire Industry*. *J Int Bus Stud* 33, 593–602
16. KEMP, M.C. 1964. *The Theory of International Trade*. Prentice Hall, London.
17. KINDLEBERGER, C. P. 1969. *American Business Abroad: Six Lectures on Direct Investment*. New Haven: Yale Univesity Press, 225 s. ISBN 978- 0300010855.
18. KNICKERBOCKER, F. T. 1973. *Oligopolistic Reaction and Multinational Enterprise*. Boston: Harvard University Press, 1973, 236 s. ISBN 978-0875841023
19. LEAHY, D. a PAVELIN, S. 2003 "Follow-My-Leader FDI and Tacit Collusion", *International Journal of Industrial Organization* 21, 439-453.
20. MacDOUGALL, G.D.A. 1958. "The benefits and cost of private foreign investment abroad: A theoretical approach", In. *Economic Record*, vol. 36.
21. REUBER, G. et al. 1974. *Private Foreign Investment in Development*. Oxford: Clarendon Press.
22. SODERSTEN, B. 1970. *International Economics*. Harper and Row, New York.

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.
 Fakulta sociálnych a ekonomických vied UK
 Mlynské luhy 4
 821 05 Bratislava

email: miroslava.janosova@fsev.uniba.sk

ANALÝZA EFEKTOV ZAVEDENIA CLA NA ZAHRANIČNÝ OBCHOD

ANALYSIS OF THE EFFECTS OF MFN TARIFFS ON FOREIGN TRADE

Brian König

Abstrakt

Článok sa zaoberá spôsobmi odhadu unilaterálnych politík v štrukturálnych gravitačných modeloch. Dôraz je kladený odhadu efektu cla podliehajúceho doložke najvyšších výhod na bilaterálny obchodný tok. Z výsledkov dosiahnutých v aplikačnej časti článku možno predpokladať, že MFN clo má štatisticky významný efekt na bilaterálny obchodný tok obchodujúcich krajín (elasticita -8,78). Žiaduce je použiť model s vnútorným obchodom, ktorý napriek prítomnosti fixných efektov exportéra a importéra umožňuje odhad efektu unilaterálnych politík. V prípade nedostupnosti údajov o vnútornom obchode je možné použiť alternatívny prístup prostredníctvom aproximácie MR členov Taylorovým rozvojom - Baier a Bergstrand (2010).

Kľúčové slová: štrukturálny gravitačný model, nediskriminačné politiky, clo podliehajúce doložke najvyšších výhod

Abstract

The article deals with ways of estimating unilateral policies in structural gravity models. Emphasis is put on estimating the effect of the MFN tariffs on bilateral trade flows. From the results achieved in the application part of the article, it can be assumed that the MFN tariffs have a statistically significant effect on the bilateral trade flow (elasticity -8.78). It is favorable to use a model with internal trade, which, despite the presence of fixed effects of exporter and importer, allows estimating the effect of unilateral policies. In case of unavailability of internal trade data, an alternative approach can be used through the approximation of multilateral resistances by Taylor expansion introduced by Baier and Bergstrand (2010).

Keywords: structural gravity model, non-discriminatory policy, MFN tariffs

1 ÚVOD

Vo svete rýchleho rastu vplyvu globalizácie, ekonomickej prepojenosti jednotlivých krajín sveta a ich vzájomnej spolupráce zohráva medzinárodný obchod dôležitú úlohu, a to nielen na bilaterálnej úrovni, ale aj na multilaterálnej úrovni. Jeho analýza spolu s faktormi, ktoré ho priamo ovplyvňujú sú nevyhnutné pri skúmaní dopadov rôznych politík medzinárodného obchodu. Azda za najčastejšie využívaný nástroj analýzy zahraničného obchodu možno považovať gravitačný model, ktorý umožňuje skúmať efekty rôznych faktorov a politík na zahraničný obchod. Gravitačný model reprezentuje kľúčový nástroj aplikovanej literatúry zahraničného obchodu, ktorý je použitý v tisíckach analýz a výskumných článkoch zaoberajúcich sa zahraničným obchodom. Gravitačný model zahraničného obchodu je historicky spájaný s holandským ekonómom Jánom Tinbergenom, ktorý tento koncept predstavil v roku 1962. Pôvodná gravitačná rovnica (Tinbergen, 1962) predpokladala, že veľkosť vzájomného obchodu dvoch krajín závisí od ich ekonomickej veľkosti a vzdialenosti medzi nimi. Anderson (1979) položil základy štrukturálneho modelu založeného na

mikroekonomických teoretických východiskách. Prelomovým príspevkom ku gravitačným modelom bol článok autorov Andersona a Wincoopa (2003). Anderson a Wincoop, ktorí navrhli štrukturálny gravitačný model založený na čisto mikroekonomickom teoretickom základe, reprezentuje akýsi východiskový bod pri modelovaní zahraničného obchodu. Anderson a Wincoop poukázali na kľúčový fakt, že zavedenie „relatívnych“ obchodných nákladov (tzv. multilateral resistances) voči ostatným krajinám je nevyhnutné pre správne špecifikovaný štrukturálny model. Viacerí autori použili vlastnú podobu modelu, pričom aproximovali multilaterálne rezistencie Andersona a Wincoopa tzv. indexmi odľahlosti, ktoré boli konštruované ako funkcia bilaterálnych vzdialeností medzi krajinami a ich HDP. Avšak tento prístup bol vystavený kritike, pretože indexy odľahlosti niesli iba malú časť ekonomickej teórie z pôvodných multilaterálnych rezistencií. Alternatívny spôsob k indexom odľahlosti, ktorý bol však teoreticky konzistentný s modelom Andersona a Wincoopa a zároveň umožňoval využitie komparatívnej statiky, navrhli autori Baier a Bergstrand (2009, 2010). Tí odvodili teoretické multilaterálne rezistencie pre každú jednu premennú reprezentujúcu bilaterálne obchodné náklady, pomocou Taylorovho rozvoja prvého rádu. Olivero a Yotov (2012) rozšírili gravitačný model prierezných dát s fixnými efektmi o dvojrozmerné fixné efekty (exportér - čas, importér - čas), ktoré by mali byť použité v dynamickom gravitačnom modeli založenom na panelových dátach. Treba si však uvedomiť, že v prípade použitia fixných efektov ako aproximácie MR, fixné efekty absorbujú vplyv všetkých premenných, ktoré sú v čase premenlivé iba s hodnotami importéra alebo exportéra. Kľúčovým nedostatkom MNŠ pri jej použití v gravitačnom modeli je, že vynecháva pozorovania, kde sú nulové obchodné toky medzi krajinami. S myšlienkou použiť namiesto logaritmického tvaru gravitačného modelu multiplikatívny tvar prišli Silva a Tenreyro (2006). Ich prístup navrhuje použiť na odhad parametrov Poissonov estimátor pseudo maximálnej vierohodnosti (PPML). Endogénnosť niektorých vysvetľujúcich premenných gravitačných modelov bola jednou z ďalších komplikácií, ktorú bolo treba vyriešiť, aby bolo možné získať dôveryhodné odhady parametrov. Jednu z možností ako sa vysporiadať s potenciálnym problémom endogénnosti navrhli Baier a Bergstrand (2007). Autori navrhujú použiť prvé diferencie bilaterálneho obchodu, čím sa eliminuje informácia o objeme obchodu medzi krajinami. Ako alternatívny spôsob odporúčajú použiť fixné efekty pre dvojice exportér - importér. Ďalšími autormi, ktorí adresovali možné skreslenie odhadnutých parametrov v gravitačnom modeli v dôsledku endogénnosti premenných boli Bergstrand, Larch a Yotov (2015). Autori predpokladali, že zahrnutie časovo invariantných fixných efektov ako navrhovali Baier a Bergstrand (2007) nemusí byť postačujúce k zachyteniu neskresleného efektu dohôd o ekonomickej integrácii na bilaterálny obchod. Autori rozšírili gravitačný model o vnútorný obchod, ktorý umožnil sledovať vplyv dohôd o ekonomickej integrácii na bilaterálny obchod relatívne voči vnútornému obchodu. Odhady efektov rôznych unilaterálnych a nediskriminačných politík zahraničného obchodu sú často stredobodom pozornosti pri odhade parametrov štrukturálneho gravitačného modelu. Pod unilaterálnymi premennými rozumieme premenné, ktoré sú premenlivé buď s exportérom alebo importérom, avšak nie sú variabilné v rozmere importér-exportér ako je tomu napr. pri dohodách o voľnom obchode. Napriek veľkému záujmu výskumnej a akademickej sféry v oblasti teórie medzinárodného obchodu analyzovať efekty rôznych unilaterálnych politík zahraničného obchodu, odhad týchto efektov sa spája s viacerými úskaliami. Hlavným problémom odhadu efektov unilaterálnych politík v štrukturálnom gravitačnom modeli spočíva v tom, že v prípade použitia aproximácie MR členov pomocou fixných efektov premenlivých v rozmere importér-čas a exportér-čas, sú vplyvy týchto politík absorbované fixnými efektmi. Cieľom príspevku je poukázať na alternatívne spôsoby odhadu efektov týchto politík a ich dopad na odhad efektu zavedenia cla podliehajúceho doložke najvyšších výhod (MFN clo).

2 METODOLÓGIA

V tejto časti uvedieme základné vzťahy štrukturálneho gravitačného modelu Andersona a Wincoopa (2003) a poukážeme na vybrané spôsoby odhadu efektov unilaterálnych politík na zahraničný obchod.¹

2.1 Štrukturálny gravitačný model

V tejto časti budeme uvažovať s gravitačným modelom odvodeným z dopytovej strany ekonomiky podľa Andersona a Wincoopa (2003) založeného na Wincoop (1979).

Ak takto upravený vzťah (1.14) následne dosadíme do vzťahov (1.8) a (1.9) získame štrukturálnu podobu gravitačného modelu Andersona a Wincoopa (2003) v tvare:

$$X_{ij} = \frac{E_j Y_i}{Y_w} \left[\frac{t_{ij}}{\Pi_i P_j} \right]^{1-\sigma}, \quad (2.1)$$

$$P_j^{1-\sigma} = \sum_i \left(\frac{t_{ij}}{\Pi_i} \right)^{1-\sigma} \frac{Y_i}{Y_w}, \quad (2.2)$$

$$\Pi_i^{1-\sigma} = \sum_j \left[\frac{t_{ij}}{P_j} \right]^{1-\sigma} \frac{E_j}{Y_w}. \quad (2.3)$$

kde X_{ij} sú bilaterálne obchodné toky z krajiny i do krajiny j ; Y_w je príjem sveta (resp. produkcia); Y_i je domáca produkcia krajiny i ; E_j sú celkové výdavky krajiny j ; t_{ij} reprezentuje bilaterálne obchodné náklady medzi krajinami i a j ; σ je elasticita substitúcie medzi tovarmi z jednotlivých krajín;

Rovnicu (2.1) možno rozložiť na dve časti. Časť mimo zátvorky, hovoriacu o hypotetickej úrovni obchodu, ak by neexistovali obchodné náklady, bariéry a za predpokladu rovnakých cien. Druhá časť pozostáva z obchodných bariér, resp. nákladov a multilaterálnych rezistencií. Obchodné náklady t_{ij} sú v literatúre často aproximované geografickými premennými a premennými reprezentujúcimi politiku zahraničného obchodu ako napr. vzdialenosť, clá, spoločný jazyk, dohody o voľnom obchode, existencia spoločnej hranice atď. Vzťah (2.2) vyjadruje vnútornú multilaterálnu rezistenciu importéra j , ktorá hovorí o náročnosti vstupu na trh importéra j . Rovnica (2.3) reprezentuje vonkajšiu multilaterálnu rezistenciu a tá vyjadruje náročnosť vstupu exportéra i na trh.

2.2 Spôsobu odhadu efektu unilaterálnej politiky v štrukturálnom gravitačnom modeli

V rámci článku porovnáme odhady efektu ciel podliehajúcim doložke najvyšších výhod na bilaterálny obchod získané z alternatívnych prístupov odhadu efektov nediskriminačných politík v gravitačnom modeli. V jednotlivých modeloch budeme popri clách kontrolovať aj vplyvy premenných, ktoré predstavujú existenciu regionálnej obchodnej dohody (RTA). Okrem nich budú kontrolované aj efekty premenných uvedených v časti zaoberajúcej sa použitými údajmi. Prvým uvažovaným spôsobom zachytenia efektu unilaterálnej politiky na bilaterálny obchod bude prístup autorov Heida, Larcha a Yotova (2017), ktorí v štrukturálnom gravitačnom modeli s aproximáciou MR členov pomocou fixných efektov exportéra a importéra zachytili efekt unilaterálnej politiky zahrnutím údajov o vnútornom obchode do modelu. Budeme uvažovať s dvoma špecifikáciami modelu v závislosti od toho, či nás

¹ Označenie premenných budeme používať podľa Anderson (2011) a Yotov (2016).

zaujíma efekt bilaterálnych premenných invariantných v čase na bilaterálny obchodný tok (napr. vzdialenosť, existencia spoločnej hranice, spoločný jazyk atď.), alebo nie. Model s kontrolou efektov faktorov premenlivých v rozmere importér-exportér invariantných v čase sa často používa v prípade, že pracujeme s priereзовými dátami, kedy nie je možné použiť fixné efekty premenlivé v rozmere importér-exportér. Ak pracujeme s priereзовými dátami, resp. ak nás zaujíma efekt bilaterálnych premenných invariantných v čase na bilaterálny obchodný tok, v takom prípade možno použiť model v tvare:

$$X_{ij,t} = \exp(\beta_1 RTA_{ij,t} + \beta_2 \ln MFNT_{j,t} \times INTER_{ij} + \beta_3 \ln DIST_{ij} + \beta_4 CONTIG_{ij} + \beta_5 COMLANG_{ij} + \beta_6 INTER_{ij} + \gamma_{i,t} + \delta_{j,t}) \varepsilon_{ij,t} \quad (2.4)$$

kde t je index času; $X_{ij,t}$ je bilaterálny obchodný tok z krajiny i do krajiny j , pričom ak $i=j$ potom sa jedná o vnútorný obchod krajiny;² $INTER_{ij}$ je umelá premenná nadobúdajúcu hodnotu 1, ak sa jedná o cezhraničný obchod a inak sa rovná nule; $\gamma_{i,t}$ a $\delta_{j,t}$ sú fixné efekty premenlivé v rozmere exportér-čas a importér-čas. Takýmto spôsobom definovaný model nám umožní zachytiť efekt colných sadzieb podliehajúcich doložke najvyšších výhod, nakoľko ak krajina importéra je totožná s exportérom, colná sadzba sa rovná nule. V prípade, že pracujeme s panelovými dátami a nezaujíma sa o efekt premenných invariantných v čase, aby sme zohľadnili možnú endogénnosť premennej RTA , zahrnieme do modelu bilaterálne fixné efekty premenlivé v rozmere importér-exportér.³ Tie absorbujú všetky pozorovateľné i nepozorovateľné bilaterálne faktory invariantné v čase. Uvažovaný model v multiplikatívnej podobe možno zapísať nasledovne:

$$X_{ij,t} = \exp(\beta_1 RTA_{ij,t} + \beta_2 \ln MFNT_{j,t} \times INTER_{ij} + \phi_{ij} + \gamma_{i,t} + \delta_{j,t}) \varepsilon_{ij,t}, \quad (2.5)$$

kde ϕ_{ij} sú fixné efekty v rozmere importér-exportér. Keďže údaje o vnútornom obchode nemusia byť pre skúmané krajiny alebo časové obdobie vždy dostupné, ako alternatívny prístup odhadu efektu MFN cieľ bude použitá robustnejšia verzia aproximácie MR členov Taylorovým rozvojom podľa Baiera a Bergstranda (2010). Baier a Bergstrand pôvodne odvodili aproximáciu členov MR v log-linearizovanej forme pre odhad parametrov pomocou metódy najmenších štvorcov. Nakoľko Silva a Tenreiro (2006) poukázali na skutočnosť, že log-lin transformácia gravitačného modelu v prípade prítomnosti heteroskedasticity vedie k nekonzistentným odhadom parametrov, na odhad modelov s aproximáciou MR podľa Baiera a Bergstranda (2010) bude použitý PPML estimátor.⁴ Takto definovaný gravitačný model možno zapísať v multiplikatívnom tvare nasledovne:

$$X_{ij,t} = \exp[\beta_1 MR(RTA_{ij,t}) + \beta_2 MR(\ln DIST_{ij}) + \beta_3 MR(COMLANG_{ij}) + \beta_4 MR(CONTIG_{ij}) + \beta_5 \ln MFNT_{j,t} + \beta_6 \ln GDP_{O,t} + \beta_7 \ln GDP_{D,t} + \theta_y] \varepsilon_{ij,t}, \quad (2.6)$$

kde t je index obdobia; $X_{ij,t}$ je bilaterálny obchodný tok z krajiny i do krajiny j ; $\ln MFNT_{j,t}$ je premenná vychádzajúca z colnej sadzby importéra j podliehajúcej doložke najvyšších výhod (vzťahuje sa rovnako na všetkých exportérov i exportujúcich do krajiny j) počítaná ako

² Vnútorný obchod krajiny je počítaný ako rozdiel medzi hrubou produkciou krajiny a exportom.

³ Toto riešenie problému endogénnosti bilaterálnych obchodných dohôd navrhujú autori Baier a Bergstrand (2007).

⁴ Obdobne na odhad parametrov modelu s MR členmi aproximovanými podľa Baiera a Bergstranda použili PPML estimátor napr. autori Hoekman a Nicita (2011); Moise a Sorescu (2013); Bratt (2017); Sellner (2019).

$\ln(1+MFN_{clo})$,⁵ $\ln GDP_{O,t}$, $\ln GDP_{D,t}$ reprezentujú ekonomickú veľkosť krajiny exportéra resp. importéra vyjadrenú ako logaritmu HDP; θ_y sú fixné efekty pre jednotlivé roky; $\varepsilon_{ij,t}$ je náhodná zložka; $MR(t_{ij})$ je člen MR pre ľubovoľnú premennú bilaterálnych obchodných nákladov t_{ij} a pre každé jedno obdobie t , pre ktorý bude použitý viac robustný prístup navrhnutý Baierom a Bergstrandom (2010). Autori kvôli možnému problému s endogénnosťou odvodili prístup, v ktorom nahradili HDP váhy rovnakými váhami v tvare:

$$MR(t_{ij}) = t_{ij} - \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_{ij} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{ij} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} \right], \quad (2.7)$$

kde n je počet krajín.

Ako alternatíva k teoreticky konzistentným modelom bude odhadnutý ad-hoc model bez multilaterálnych rezistencií. Kvôli možnému problému s endogénnosťou obchodných zmlúv budú taktiež použité fixné efekty v rozmere importér-exportér. Uvažovaný model v multiplikatívnej forme bude mať tvar:

$$X_{ij,t} = \exp(\beta_1 RTA_{ij,t} + \beta_2 \ln MFNT_{j,t} + \beta_3 \ln GDP_{O,t} + \beta_4 \ln GDP_{D,t} + \phi_{ij}) \varepsilon_{ij,t}. \quad (2.8)$$

3 DÁTA

Nakoľko použité modely si vyžadujú zahrnutie vnútorného obchodu, aby sme využívali teoreticky konzistentne konštruovaný vnútorný obchod, ako závislá premenná je použitý bilaterálny obchodný tok vyjadrený v amerických dolároch (USD) získaný z databázy vytvorenej Thomasom Zylkinom použitej v práci Yotova a kolektívu (2016), ktorá obsahuje aj údaje o vnútornom obchode. Autori použili údaje o obchodnom toku agregovaného sektora výroby za obdobie 1986 – 2006 za 69 krajín. Napriek neveľkému počtu krajín a obmedzenému časovému intervalu, hlavná výhoda tejto databázy spočíva v teoreticky konzistentnom spôsobe výpočtu vnútorného obchodu. Údaje o regionálnych obchodných dohodách sú čerpané z databázy Egger, P. a Larch, M. (2008), ktorá okrem iného obsahuje aj informácie o dohodách o voľnom obchode (FTA), colných úniách (CU), dohodách o ekonomickej integrácii (EIA) a dohodách o čiastočnom rozsahu pôsobnosti (PS). Premenná regionálnych obchodných dohôd (RTA_{ij}) bude indikovať existenciu bilaterálnej alebo multilaterálnej dohody (FTA, CU, EIA, PS). Väčšina premenných je použitých z databázy francúzskeho centra pre výskum a expertízy o svetovej ekonomike CEPII (databáza Gravity), ktoré poskytuje rôzne databázy (okrem iného aj databázy slúžiace k tvorbe gravitačných modelov). Databáza „Gravity“ obsahuje informácie za obdobie rokov 1948 – 2015, pričom poskytuje zhruba 70 premenných za 224 krajín. Z tejto databázy boli použité premenné, ako napr. HDP exportéra (GDP_O) a importéra (GDP_D) vyjadrené ako nominálny HDP v amerických dolároch, existencia spoločného oficiálneho alebo hlavného jazyka medzi krajinami (COMLANG_OFF), existencia spoločnej meny (COMCUR), existencia spoločnej hranice (CONTIG), vzdialenosť (DISTW) vyjadrená v kilometroch a vážená populáciou jednotlivých krajín. Kľúčová premenná, ktorá bude stredobodom pozornosti tohto článku budú MFN clá, získané z databázy TRAINS (Trade Analysis Information System), ktorá poskytuje predovšetkým údaje o clách a rôznych netarifných ukazovateľoch súvisiacich so

⁵ Colné sadzby sa v štrukturálnych gravitačných modeloch štandardne vyjadrujú v tvare $\ln(1+clo)$. Nakoľko v dôsledku zavádzania cla dochádza k zmene ceny importov, parameter pri tomto člene reprezentuje elasticitu dopytu po importe vzhľadom na MFN clo. Pre detailné matematické odvodenie efektu ciel na bilaterálny obchod pozri napr. Yotov a kolektív (2016).

zahraničným obchodom. Použité MFN clá sú vyjadrené ako priemerné hodnoty ciel dovážaných produktov do krajiny importéra j. Aby sme zohľadnili možné oneskorenie bilaterálneho obchodu na zmenu obchodných politík pri odhade parametrov, budeme používať trojročné intervaly ako navrhujú Olivero a Yotov (2012). Ďalšia výhoda trojročných intervalov v porovnaní s intervalmi vyšších stupňov (štvorročné a päťročné intervaly) spočíva v tom, že je k dispozícii väčší počet pozorovaní. Použitý časový interval bude za roky 1994 – 2006.⁶

4 KOMPARÁCIA RÔZNYCH METODOLOGICKÝCH PRÍSTUPOV

V tejto časti sa zameriame na aplikáciu alternatívnych spôsobov odhadu efektov zavedenia ciel na bilaterálny obchod, pričom budú porovnané aj efekty regionálnych obchodných dohôd. V rámci vybraných metód budú porovnávané dva alternatívne spôsoby navrhnuté Baierom a Bergstrandom (2010), a Heidom, Larchom a Yotovom (2017). Bude sa jednať o aproximáciu MR členov pomocou Taylorovho rozvoja a model s vnútorným obchodom využitím panelového PPML estimátora (Poissonov estimátor psuedo maximálnej vierohodnosti) v softvérovom prostredí Stata.

Tabuľka 4.1 – Alternatívne formy odhadu efektu ciel podliehajúcich doložke najvyšších výhod

	(1) intra	(2) intra_fe	(3) bb	(4) ad_hoc_fe
rta	0.1748* (0.0998)	0.0940* (0.0500)		0.2141** (0.0899)
ln_mfnt	-12.9434*** (2.4030)	-8.7839*** (0.5707)	-5.7284*** (0.8097)	-2.7196*** (0.9522)
ln_dist	-0.6987*** (0.0667)			
comlang_off	0.2736** (0.1289)			
contig	0.4896*** (0.1572)			
rta_mr			0.1249 (0.1855)	
ln_dist_mr			-0.7630*** (0.1071)	
comlang_off_mr			0.2851** (0.1323)	
contig_mr			0.5356*** (0.1568)	
N	11440	11440	11100	11100
pseudo R ²	0.986	0.998	0.877	0.970

⁶ Napriek tomu, že databáza Yotov a kolektív (2016) obsahuje údaje od roku 1986, nakoľko viaceré krajiny mali nedostupné údaje MFN ciel v prvých rokoch, rozhodli sme sa použiť ako počiatočný rok 1994.

Standard errors in parentheses

* $p < 0.10$, ** $p < .05$, *** $p < .01$

Model (1) reprezentuje gravitačný model s vnútorným obchodom a obchodnými nákladmi invariantnými v čase (2.4). Model (2) reprezentuje gravitačný model s vnútorným obchodom a s párovými fixnými efektmi (2.5). Model (3) reprezentuje aproximáciu MR členov podľa Baiera a Bergstranda (2010) podľa vzťahu (2.6). Model (4) reprezentuje ad-hoc model (2.8).

Výsledky dosiahnuté jednotlivými prístupmi sú uvedené v tabuľke (Tabuľka 4.1). Model (1) reprezentuje často využívanú špecifikáciu najmä v prípade modelu založeného na prierezových údajoch, v rámci ktorých nie je možné do modelu zahrnúť fixné efekty premenlivé v rozmere importér-exportér, nakoľko by nezostali žiadne stupne voľnosti a odhad parametrov by nebol možný. Multilaterálne rezistencie sú v tomto modeli zahrnuté pomocou fixných efektov premenlivých v rozmere importér-čas a exportér-čas. Za účelom odhadu efektu skúmanej premennej MFN cla (*MFNT*) boli použité priemerné hodnoty ciel dovážaných produktov do krajiny j podliehajúcich doložke najvyšších výhod. Odhadnuté parametre a ich znamienka sú v súlade s našimi očakávaniami, pričom sú porovnateľné aj s empirickou literatúrou zaoberajúcou sa odhadmi gravitačných modelov. Pre porovnanie Head a Mayer (2014) vykonali meta-analýzu založenú na 159 článkoch, pričom použili viac ako 2500 odhadov. Na základe ich výsledkov priemerný efekt vzdialenosti vyšiel na úrovni -0,93 (štandardná odchýlka – s.d. 0,4); priemerný efekt spoločného jazyka dosiahol úroveň 0,54 (s.d. 0,44); priemerný efekt existencie spoločnej hranice sa rovnal 0,53 (s.d. 0,57) a priemerný efekt existencie RTA bol dosiahnutý vo výške 0,59 (s.d. 0,5). V prípade použitia iba štrukturálnych gravitačných modelov bol priemerný efekt RTA len 0,36 (s.d. 0,42). Kľúčovou informáciou tohto modelu je fakt, že napriek prítomnosti fixných efektov premenlivých v rozmere importér-čas a exportér-čas je možný odhad MFN ciel. Odhad parametra pri $\ln MFNT_{j,t}$ poukazuje na elasticitu dopytu po importe vzhľadom na clo podliehajúce doložke najvyšších výhod na úrovni -12,94. Uvedená hodnota je tiež v súlade s empirickou literatúrou analyzujúcou efekty MFN ciel, nakoľko Yotov a kolektív (2016) poukazujú na skutočnosť, že táto hodnota sa zvyčajne pohybuje v rozmedzí -2 až -12. Model (2) zahŕňa namiesto bilaterálnych premenných invariantných v čase, fixné efekty premenlivé v rozmere importér-exportér, ktoré absorbujú všetky pozorovateľné, ale aj nepozorovateľné bilaterálne premenné premenlivé v tomto rozmere. V prípade tejto špecifikácie efekt *MFNT* klesol na hodnotu -8,78. Problém modelov (1) a (2) spočíva v tom, že údaje o vnútornom obchode nie sú tak ľahko dostupné ako údaje o zahraničnom obchode a navyše sú k dispozícii len za určité krajiny a obdobia. Model (3) ponúka alternatívny spôsob odhadu efektu *MFNT*, pričom uvažuje s MR členmi aproximovanými podľa Baiera a Bergstranda (2010) v modeli bez vnútorného obchodu. Z výsledkov možno pozorovať, že odhady parametrov sú taktiež v súlade s empirickou literatúrou zaoberajúcou sa odhadmi gravitačných modelov. Odhad efektu MFN ciel klesol na úroveň -5,73, čo je o niečo nižšie ako v prípade modelu (2). Na druhú stranu v porovnaní s empirickou literatúrou je to menej extrémna hodnota ako v prípade modelu (1). Model (4) reprezentuje ad-hoc model bez členov MR, ktorého odhady by mali byť skreslené.⁷ Na kontrolu efektov bilaterálnych premenných invariantných v čase sú použité párové fixné efekty. Odhad elasticity dopytu po importe vzhľadom na clo MFN je na úrovni -2,72, čo je stále v súlade s empirickou literatúrou analyzujúcou efekty MFN ciel. Pokiaľ predpokladáme, že model (2) reprezentuje akési východiskové reprezentatívne odhady, potom odhad efektu cla MFN je v prípade ad-hoc modelu najvzdialenejší v porovnaní s vybranými modelmi.

⁷ Kvôli vynechaniu členov MR dochádza k skresleným odhadom. Pre detailnejšie informácie pozri Anderson a van Wincoop (2003).

ZÁVER

Článok sa venuje aplikácii alternatívnych spôsobov odhadu efektov zavedenia ciel na bilaterálny obchod, pričom sú kontrolované aj efekty rôznych iných faktorov (regionálne obchodné dohody, vzdialenosť, existencia spoločnej hranice, existencia spoločného jazyka). V rámci vybraných metód sú porovnávané dva alternatívne spôsoby navrhnuté Heidom, Larchom a Yotovom (2017) a Baierom a Bergstrandom (2010). Jedná sa o model s vnútorným obchodom a o aproximáciu MR členov pomocou Taylorovho rozvoja. Vybrané metodické postupy odhadu unilaterálnej politiky sú porovnávané s ad-hoc modelom, pričom všetky špecifikácie boli odhadnuté pomocou panelového PPML estimátora. Stredobodom pozornosti sú odhady efektu ciel podliehajúcich doložke najvyšších výhod na bilaterálny obchod. Z dosiahnutých výsledkov možno konštatovať, že odhadnuté parametre a ich znamienka sú v súlade s ekonomickými očakávaniami, pričom sú porovnateľné aj s empirickou literatúrou zaoberajúcou sa odhadmi gravitačných modelov. Model (2), ktorý reprezentuje gravitačný model s vnútorným obchodom a s párovými fixnými efektmi navrhnutý podľa Heida, Larcha a Yotova (2017) možno považovať za akýsi východiskový model, nakoľko obsahuje všetky tri typy fixných efektov a rovnako aj informáciu o vnútornom obchode. Efekt MFN ciel v tomto modeli vyšiel -8,78. V prípade modelu (3) reprezentujúceho aproximáciu MR členov pomocou Taylorovho rozvoja podľa Baiera a Bergstranda (2010) odhad efektu MFN ciel klesol na úroveň -5,73, čo je o niečo nižšie ako v prípade modelu (2). Odhad efektu MFN cla vyšiel v modeli (4) na úrovni -2,72, čo je stále v súlade s empirickou literatúrou analyzujúcou efekty MFN ciel. Pokiaľ však predpokladáme, že model (2) reprezentuje akési východiskové reprezentatívne odhady, potom odhad efektu cla MFN je v prípade ad-hoc modelu najvzdialenejší v porovnaní s vybranými modelmi.

Z výsledkov dosiahnutých v aplikačnej časti možno predpokladať, že MFN clo má štatisticky významný efekt na bilaterálny obchodný tok obchodujúcich krajín. Žiaduce je použiť model s vnútorným obchodom, ktorý napriek prítomnosti fixných efektov exportéra a importéra umožňuje odhad efektu unilaterálnych politík. V prípade nedostupnosti údajov o vnútornom obchode je možné použiť alternatívny prístup napr. prostredníctvom aproximácie MR členov Taylorovým rozvojom - Baier a Bergstrand (2010). Treba mať na zreteli, že v prípade použitia ad hoc modelu bude tento efekt pravdepodobne skreslený, kvôli vynechaniu členov MR.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu APVV-17-0551 „Vyrovnávanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia“ a riešenia projektu VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov".

Použitá literatúra

1. ANDERSON, J. E. – VAN WINCOOP, E. (2003). Gravity With Gravitas: a Solution to the Border Puzzle. *American Economic Review* 93[1], 170-192.
2. ANDERSON, J. E. (1979). A Theoretical Foundation for the Gravity Equation. *American Economic Review* 69[1], 106-116.
3. BAIER, S. L. – BERGSTRAND, J. H. (2007). "Do free trade agreements actually increase members' international trade", *Journal of International Economics*, 71:72-95.
4. BAIER, S. L. – BERGSTRAND, J. H. (2009). Bonus vetus OLS: A simple method for approximating international trade-cost effects using the gravity equation. *Journal of International Economics* 77 (1), 77–85.

5. BAIER, S. L. – BERGSTRAND, J. H. (2010). Approximating general equilibrium impacts of trade liberalizations using the gravity equation. In: Van Bergeijk, P., Brakman, S. (Eds.), *The gravity model in international trade: advances and applications*. Cambridge Univ. Press, Ch. 4, pp. 88–134.
6. BERGSTRAND, J. H. – LARCH, M. – YOTOV, Y. V. (2015). Economic Integration Agreements, Border Effects, and Distance Elasticities in Gravity Equations. *European Economic Review* 78, 307-327.
7. EGGER, P. – LARCH, M. (2008). Interdependent Preferential Trade Agreement Membership: an Empirical Analysis, *Journal of International Economics* 76: 384-399.
8. HARRIGAN, J. (1996). Openness to Trade in Manufactures in the OECD. *Journal of international economics* 40 (1-2), 23–39.
9. HEAD, K. – MAYER, T. (2014). Gravity Equations: Workhorse, Toolkit, and Cookbook, in Gopinath, G., Helpman, E., and Rogoff, K. (eds), *Handbook of International Economics*, Vol. 4, Oxford: Elsevier B.V.
10. HEID, B. – LARCH, M. – YOTOV, Y. (2017). Estimating the Effects of Non-discriminatory Trade Policies within Structural Gravity Models, CESifo Working Paper No. 6735.
11. OLIVERO, M. P. – YOTOV, Y. V. (2012). Dynamic Gravity: Endogenous Country Size and Asset Accumulation. *Canadian Journal of Economics* 45[1], 64-92.
12. SANTOS SILVA, J. – TENREYRO, S. (2006). The log of gravity. *The Review of Economics and Statistics* 88 (4), 641–658.
13. SELLNER, R. (2019). Non-discriminatory Trade Policies in Panel Structural Gravity Models: Evidence from Monte Carlo Simulations. *Review of International Economics*, 27(3):854-887.
14. TINBERGEN, J. (1962). *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*. 1st ed. New York: The Twentieth Century Fund.
15. YOTOV, Y. V. – PIERMARTINI, R. – MONTEIRO, J. A. – LARCH, M. (2016). *An Advanced Guide to Trade Policy Analysis: The Structural Gravity Model* (Geneva: WTO, 2016).

Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.,

a, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava.

b, Ekonomický ústav SAV,
Šancová 56, 811 05 Bratislava.

e-mail: brian.konig@euba.sk

TRANSFORMÁCIA MATICE SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA

SOCIAL ACCOUNTING MATRIX TRANSFORMATION

Veronika Miťková

Abstrakt

Článok prezentuje techniku transformácie matice spoločenského účtovníctva, ktorú vytvára Global Trade Analysis Project a obsahuje detailné daňové štruktúry a platby spojené s medzinárodným obchodom na štruktúru s týmito vnorenými platbami, ktorá je vhodná na analýzu multiplikátorov. Výsledky tejto analýzy budú vzhľadom na tie založených na input-output tabuľkách obohatené o daňové a transakčné platby.

Kľúčové slová: SAM, transformácia, GTAP, matica spoločenského účtovníctva

Abstract

The paper presents the technique of transforming the social accounting matrix provided by the Global Trade Analysis Project and contains detailed tax structures and payments associated with international trade into a structure with these nested payments, which is suitable for the analysis of multipliers. The results of this analysis will be enriched with tax and transaction payments with respect to those based on input-output tables.

Keywords: SAM, transformation, GTAP

1 MATICE SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA

Cieľom článku je prezentovať techniku transformácie schémy matice spoločenského účtovníctva (Social Accounting Matrix – SAM) tak, aby sa z údajov, ktoré poskytuje Global Trade Analysis Project (GTAP) vytvorila matica vhodná na analýzu multiplikačných efektov v hospodárstve.

GTAP poskytuje údaje o 141 krajinách (Obrázok 1), ktoré spolu tvoria 98% svetového HDP a pokrývajú 92% svetovej populácie. Pokrytie odvetví zodpovedá 65 unikátnym sektorom (Tabuľka 1) a výrobné faktory zahŕňajú spolu osem skupín: pôda; päť druhov pracovníkov: technici, úradníci, pracovníci v službách a obchode, funkcionári a manažéri, pracovníci v poľnohospodárstve a nekvalifikovaní; kapitál a prírodné zdroje.

Na základe týchto údajov je možné skonštruovať SAM pre ktorúkoľvek krajinu alebo zoskupenie krajín, a to na ľubovoľnom stupni agregácie údajov, čo vytvára komplexnú databázu využiteľnú na rôzne analýzy a komparácie. V tomto článku predstavíme transformáciu štruktúry takto vytvorených SAM.

Nie je cieľom tohto článku prezentovať princípy tvorby matice spoločenského účtovníctva, vychádzame z princípov prezentovaných napr. v Pyatt a Round, 1977 a Pyatt, 1991. Čiastočná inšpirácia pochádza z článku Ibragimova, 2017, kde je konštruovaná konsolidovaná SAM pre odhady multiplikačných efektov v hospodárstve Uzbekistanu.



Obrázok 1: Pokrytie GTAP databázy - krajiny (zdroj: GTAP)

Tabuľka 1: Pokrytie GTAP databázy – odvetvia (zdroj: GTAP)

#	kód	opis	#	kód	opis
1	pdr	nelúpaná ryža	34	bph	základné farmaceutické výrobky
2	wht	pšenica	35	rpp	výrobky z gumy a plastu
3	gro	obilniny	36	nmm	ostatné výrobky z minerálov
4	v_f	ovocie	37	i_s	železné kovy
5	osd	orechy a olejové semená	38	nfm	ostatné kovy
6	c_b	cukrová trstina	39	fmp	kovové výrobky
7	pfb	rastlinná vláknina	40	ele	počítače, elektronika a optické výrobky
8	ocr	ostatné plodiny	41	eeq	elektronické zariadenia
9	ctl	hovädzí dobytok, ovce, kozy, kone	42	ome	stroje a zariadenia
10	oap	živočíšne produkty	43	mvh	automobily a ich súčasti
11	rmk	surové mlieko	44	otn	dopravné zariadenia
12	wol	vlna, kokóny priadky morušovej	45	omf	ostatné výrobky
13	frs	lesníctvo	46	ely	elektrina
14	fsh	rybolov	47	gdt	výroba a distribúcia plynu
15	coa	uhlie	48	wtr	voda
16	oil	ropa	49	cns	stavebníctvo
17	gas	plyn	50	trd	obchod
18	oxt	ostatná ťažba	51	afs	ubytovanie a reštauračné služby
19	cmt	hovädzie, ovčie, kozie, konie mäso	52	otp	ostatná doprava
20	omt	mäsové výrobky	53	wtp	vodná doprava
21	vol	rastlinné oleje a tuky	54	atp	vzdušná doprava
22	mil	mliečne výrobky	55	whs	skladovanie a pomocné činnosti
23	pcr	spracovaná ryža	56	cmn	komunikácie
24	sgr	cukor	57	ofi	finančné služby
25	ofd	ostatné potraviny	58	ins	poistenie
26	b_t	nápoje a tabak	59	rsa	činnosti v oblasti nehnuteľností
27	tex	textil	60	obs	ostatné obchodné služby
28	wap	oblečenie	61	ros	rekreačné a iné služby
29	lea	výrobky z kože	62	osg	verejná správa a obrana
30	lum	výrobky z dreva	63	edu	vzdelávanie

31	ppp	papierenské výrobky a tlač	64	hht	zdravotníctvo a sociálna práca
32	p_c	výrobky z ropy a uhlia	65	dwe	bývanie
33	chm	chemické výrobky			

1.1 Štruktúra GTAP SAM

Matica spoločenského účtovníctva má štruktúru, ktorú znázorňuje Tabuľka 2. SAM je matica štvorcová a obsahuje nasledovné riadky a stĺpce: Komodity sú rozčlenené na importované a domáce, každej komodite prislúcha práve jedna aktivita. Ďalej sú v matici regionálna a súkromná domácnosť. V bloku daní sú obchodné dane, clo, dane z predaja, dane platené výrobnými faktormi, výrobné dane a priame dane. Medzi agentov patrí vláda a k sektoru zvyšku sveta prislúchajú tzv. import margins a export margins. Takto skonštruovaná matica obsahuje okrem agentov aj podrobnú dekompozíciu daňových platieb a platieb spojených so službami spojenými s dovozom a vývozom produkcie.

1.2 Transformovaná štruktúra SAM

Štruktúru matice spoločenského účtovníctva po transformácii prezentuje Tabuľka 3. V tejto matici sú zlúčené komodity dovážané a doma vyrobené, dane a clá sú reprezentované jedinou transakciou medzi vládou a komoditami. Ako vidno, štruktúra tejto matice je jednoduchšia, je teda potrebné agregovať určité toky platieb z GTAP matice tak, aby:

- agregované platby zodpovedali obsahu jednotlivých zadaných transakcií, a zároveň
- bola zachovaná podmienka rovnosti príslušných riadkov a stĺpcov.

Tabuľka 2: Štruktúra SAM z GTAP (zdroj: McDonald, Thierfelder)

	importované komodity	domáce komodity	aktivity	výr. faktory	reg. domácnosť	súkr. domácnosť	obchodné dane	clo	daň z predaja	daň z výr. fakt.	výrobná daň	priama daň	vláda	kapitál	import margin	export margin	zvyšok sveta
importované komodity			medzivstup			súkromný dopyt							dopyt vlády	investičný dopyt			
domáce komodity			medzivstup			súkromný dopyt							dopyt vlády	investičný dopyt		vývozné služby	vývoz
aktivity		matica ponuky															
výr. faktory			platby faktorom														
reg. domácnosť				distribúcia príjmov faktorov			dovozné a vývozné clo	daň z predaja import	daň z predaja domáce	daň z výr. fakt.	výrobná daň	daň z príjmu					
súkr. domácnosť					príjem domácnosti												
obchodné dane	dovozné clo	vývozné clo															
daň z predaja import			daň z predaja import			daň z predaja import							daň z predaja import	daň z predaja import			
daň z predaja domáce			daň z predaja domáce			daň z predaja domáce							daň z predaja domáce	daň z predaja domáce			
daň z výr. fakt.			daň z výr. fakt.														
výrobná daň			výrobná daň														
priama daň				daň z príjmu													
vláda					príjem vlády												
kapitál				depreciácia	úspory											obchodná bilancia	obchodná bilancia
import margin	poplatky pri importe																
export margin															dovozné služby		
zvyšok sveta	dovoz																

Tabuľka 3: Štruktúra transformovanej SAM

	aktivity	komodity	výrobné faktory	domácnosti	vláda	úspory-investície	zvyšok sveta	
aktivity		domáca ponuka						príjem aktivít
komodity	medzivstupy			dopyt domácností (C)	dopyt vlády (G)	investičný dopyt (I)	vývoz (E)	celkový dopyt
výrobné faktory	platby faktorom (pridaná hodnota)							celkový príjem faktorov
domácnosti			príjmy domácností z vlastníctva faktorov		sociálne transfery		zahraničné remitencie	celkový príjem domácností
vláda		dane z predaja a clá		priame dane			zahraničné dotácie a pôžičky	príjem vlády
úspory-investície				súkromné úspory	fiškálny prebytok		účet bežnej bilancie	celkové úspory
zvyšok sveta		dovoz (M)						odtok zahraničného obchodu
	hrubá produkcia	celková ponuka	celkové platby faktorom	celkové výdavky domácností	výdavky vlády	celkové investičné výdavky	prítok zahraničného obchodu	

2 POSTUP TRANSFORMÁCIE MATICE SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA

Jednotlivé kroky vedúce k transformácii GTAP matice spoločenského účtovníctva sú nasledovné:

1. Zlúčenie riadkových transakcií týkajúcich sa importovaných a domácich komodít do jednej → komodity:
 - importovaný medzivstup a domáci medzivstup → medzivstup,
 - importovaný súkromný dopyt a domáci súkromný dopyt → súkromný dopyt,
 - importovaný dopyt vlády a domáci dopyt vlády → dopyt vlády,
 - importovaný investičný dopyt a domáci investičný dopyt → investičný dopyt,
 - vývozné služby,
 - vývoz.
2. Zlúčenie stĺpcových transakcií týkajúcich sa importovaných a domácich komodít do jednej → komodity:
 - matica ponuky → domáca ponuka,
 - dovozné clo a vývozné clo,
 - poplatky pri importe,
 - dovoz.
3. Riadkové zlúčenie priamych daní prislúchajúcich výrobným faktorom:
 - daň z príjmu a distribúcia príjmov faktorov → príjmov domácností z vlastníctva faktorov.
4. Riadkové zlúčenie daní prislúchajúcich medzivstupom a výrobným faktorom:
 - daň z predaja import a medzivstup → medzivstup,
 - daň z predaja domáce a medzivstup → medzivstup,
 - daň z vyr. fakt. a platby faktorom → platby faktorom.
5. Stĺpcové zlúčenie regionálnej a súkromnej domácnosti:
 - súkromný dopyt → dopyt domácností
 - dane z predaja import a dane z predaja domáce,
 - príjem vlády → priame dane,
 - úspory → súkromné úspory.
6. Riadkové zlúčenie regionálnej a súkromnej domácnosti nie je potrebné, keďže transakcia príjem domácnosti je eliminovaná.
7. Distribúcia príjmov faktorov a dane z riadka regionálnej domácnosti (teraz už len domácnosti) sú poukázané na príslušné účty:
 - výrobným faktorom distribúcia príjmov faktorov a daň z výrobných faktorov → príjmy domácností z vlastníctva faktorov,

- dovozné a vývozné clo, daň z predaja import, daň z predaja domáce, výrobná daň a daň z príjmu → na účty prislúchajúcich transakcií.
8. Položku depreciácie nová štruktúra SAM nepozná, je teda včlenená do úspor.
9. Riadkové zlúčenie komodít a daní z predaja:
- dopyt vlády a daň z predaja import a daň z predaja domáce → dopyt vlády,
 - investičný dopyt a daň z predaja import a daň z predaja domáce → investičný dopyt.
10. Obchodná bilancia sa transformuje na účet bežnej bilancie.

Týmto postupom dostávame SAM, ktorá na jednej strane inkorporuje daňové a transakčné platby a na druhej strane je vhodná na analýzu multiplikátorov. V ďalšej práci sa zameriame na vytvorenie automatizovaného softwarového riešenia transformácie matíc v ľubovoľnej miere agregácie.

Použitá literatúra

1. Ibragimova, N. M. 2017. Modeling household income and expenditure multipliers in the SAM model: estimation for Uzbekistan. In: Economics and mathematical methods, roč. 53, č. 4, 2017, s. 75-88.
2. McDonald, S., Thierfelder, K. 2004. Deriving a Global Social Accounting Matrix from GTAP Versions 5 and 6 Data (GTAP Technical Paper No. 22). Purdue University, West Lafayette, In: Global Trade Analysis Project (GTAP). https://www.gtap.agecon.purdue.edu/resources/res_display.asp?RecordID=1645
3. Pyatt, G., Round, J.I. 1977. Social Accounting Matrices for Development Planning, In: Review of Income and Wealth, roč. 23, 1977, s. 339-364.
4. Pyatt, G. 1991. Fundamentals of Social Accounting. In: Economic Systems Research, roč. 3, 1991, s. 315-341.
5. http://apps.webofknowledge.com/full_record.do?product=WOS&search_mode=GeneralSearch&qid=2&SID=C1MrQxhq2rHP9Ue6zxj&page=2&doc=19

PodĎakovanie

Výskum bol podporený grantovou schémou Ministerstva školstva, vedy a výskumu Slovenskej republiky grantom VEGA 1/0795/18 „Komplexné prístupy k odhadu parametrov ekonometrickej štruktúry modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy” a grantovou schémou Agentúry pre výskum a vývoj grantom PP-COVID-20-0026 „Zotavíme sa z pandémie Covid19? - sociálne, ekonomické a právne perspektívy pandemickej krízy“.

Kontaktné údaje

Ing. Veronika Mitková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

MODELÝ METRÍK RIZIKA¹

RISK METRICS MODELS

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Článok prezentuje štatistické a pravdepodobnostné základy modelov metrík rizika, ktoré merajú zmenu hodnoty portfólia prostredníctvom logaritmických zmien ceny. Analyzujú sa predpoklady obvykle aplikované pri prognóze rozdelenia pravdepodobnosti výnosov portfólia a skúma sa empirická validita týchto predpokladov. Pre špecifické modely finančných cien a výnosov sa analyzuje metodológia prognózovania parametrov metrík rizika

Kľúčové slová: *random walk, metriky rizika, predikcia volatility a korelácie*

Abstract

The paper presents statistical and probabilistic basics of risk metric models that measure portfolio value changes through logarithmic price changes. Assumptions usually applied for returns probability distribution forecast are analyzed and empirical validity of the assumption is examined. For specific financial prices a returns models the methodology for forecasting risk metrics parameters is analyzed

Keywords: *random walk, risk metrics, volatility and correlation prediction*

1 ÚVOD

Model merania rizika je vždy pokusom charakterizovať budúce zmeny v hodnote portfólia. Často sa to robí prostredníctvom prognóz budúcich cien všetkých zložiek portfólia, a to na základe ich minulých cien. Úloha opísať budúce zmeny ceny vyžaduje modelovať dynamiku výnosov, t.j. modelovať vývoj cien v čase, a modelovať rozdelenie pravdepodobnosti výnosov v akomkoľvek časovom momente.

2 MODELOVANIE FINANČNÝCH CIEN A VÝNOSOV

Široko používaná trieda modelov, ktoré opisujú vývoj cenových výnosov je založená na predpoklade, že ceny aktív sa správajú v súlade s *random walk* vývojom. V tejto časti preto prezentujeme najskôr model pre aktívum s jednou cenou. Takýto model sa prirodzene aplikuje pre také aktíva ako sú výmenné kurzy, komodity a akcie, kde existuje len jedna cena aktíva. Základným modelom dynamiky ceny aktíva je *random walk* model v tvare

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$$

resp.

¹ Článok vznikol s podporou Agentúry pre podporu výskumu a vývoja, grant APVV-17-0551 „Vyrovnávanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia“ a grant PP-COVID-20-0026 „Zotavíme sa z pandémie Covid19? - sociálne, ekonomické a právne perspektívy pandemickej krízy“

$$P_t - P_{t-1} = \mu + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$$

kde *IID* je skratka pre identické a nezávislé rozdelenie a $N(0,1)$ označuje normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1. Tieto rovnice ukazujú vývoj cien a ich rozdelenie s poznámkou, že v akomkoľvek časovom bode bežná cena P_t závisí od fixného parametra μ , ceny predchádzajúceho obdobia P_{t-1} a od normálne rozdelenej náhodnej premennej ε_t . Jednoducho povedané, μ a σ ovplyvňujú strednú hodnotu a rozptyl rozdelenia pravdepodobnosti ceny P_t .

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti P_t pri danej cene P_{t-1} je normálne. Obvyklým problémom tohto modelu je potom skutočnosť, že vždy existuje nenulová pravdepodobnosť, že cena nadobúde zápornú hodnotu. Jedna možnosť ako garantovať nezápornosť cien je modelovať cez random walk log ceny p_t pri normálnom rozdelení zmien v tvare

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$$

Keďže modelujeme logaritmy cien, predchádzajúci model opisuje spojité výnosy, t.j.

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t,$$

na základe ktorého, pre cenu P_t pri známej cene P_{t-1} platí

$$P_t = P_{t-1} \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t) = P_{t-1} e^{\mu + \sigma \varepsilon_t}$$

a keďže obidve zložky predchádzajúceho súčinu sú nezáporné, je garantované, že P_t nebude nikdy záporná. Okrem toho, keďže rozdelenie pravdepodobnosti ε_t je normálne, tak rozdelenie pravdepodobnosti P_t je lognormálne.

Poznamenajme, že obidve uvedené verzie random walk modelu predpokladajú, že zmeny v log cenách majú konštantný rozptyl, t.j. σ sa nemení v čase. Tento (nerealistický) predpoklad možno relaxovať tým, že pripustíme, že rozptyl cenových zmien sa mení v čase. Okrem toho, rozptyl by mohol byť modelovaný ako funkcia minulých informácií, takých ako minulé rozptyly. Ak pripustíme možnosť zmeny rozptylu v čase, dostaneme model

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$$

Táto verzia modelu je dôležitá, pretože ďalej bude využívaná v modeloch rizika s dodatočnou podmienkou, podľa ktorej je hodnota parametra μ položená rovnou nule.

Pri aktívach s fixným dôchodkom sa berú do úvahy ako ich ceny, tak aj výnosy. Ak existujú ceny a výnosy, treba rozhodnúť či modelovať log zmeny vo výnosoch alebo v cenách. Napríklad pre dlhopisy je veľmi dobre zdokumentovaným zlyhaním modelovania cien podľa vyššie uvedeného modelu skutočnosť, že tento model ignoruje fenomén ťahania ceny dlhopisu smerom k nominálnej hodnote. To znamená, že dlhopis má špecifickú vlastnosť, že s tým ako sa blíži k momentu splatnosti, jeho cena konverguje k jeho nominálnej hodnote. Z toho vyplýva, volatilita ceny dlhopisu konverguje k nule.

Preto ak modelujeme dynamické správanie dlhopisov (a iných aktív s fixným dôchodkom) potom je lepšie modelovať podľa lognormálneho rozdelenia pravdepodobnosť výnosov bondov a nie ich ceny. Ak teda Y_t označuje výnos dlhopisu v období t , potom $y_t = \ln(Y_t)$ je modelované v tvare

$$y_t = \mu + y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1)$$

pričom analogicky ako vyššie možno do modelu zahrnúť zmenu rozptylu v čase. Okrem toho, ak zohľadníme fenomén ťahania ceny k nominálnej hodnobe dlhopisu, potom je ďalším dôležitým dôvodom pre modelovanie výnosu v prorovaní s cenou to, že sú garantované kladné výnosy.

Doteraz sme skúmali empirické vlastnosti časových radov individuálnych výnosov. Hoci analýzy ukazujú, že výnosy (zmeny log cien) sú nekorelované, nemusia byť nezávislé. V akademickej literatúre je takáto závislosť demonštrovaná prostredníctvom autokorelácie rozptylov výnosov. Ináč povedané, hoci výnosy nie sú autokorelované. Ich druhé mocniny, štvorce, korelované sú. A keďže očakávaná hodnota štvorcov výnosov vyjadruje rozptyl, ak sa predpokladá, že očakávaná hodnota výnosov je rovná nule, autokorelácia v štvorcoch výnosov implikuje autokoreláciu v rozptyloch. Vzťah medzi štvorcami výnosov a rozptylmi je evidentný z definície rozptylu:

$$\sigma_t^2 = E[r_t - E(r_t)]^2 = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2$$

Predpokladajúc, že stredná hodnota výnosov je rovná nule, teda

$$E(r_t) = 0$$

dostávame

$$\sigma_t^2 = E(r_t^2)$$

Otázku autokorelácie kovariancie budeme skúmať pomocou rovnakého prístupu, ako to bolo pri rozptyloch. Teraz použijeme rozvinutie vyššie uvedených vzťahov pre skúmanie kovariancie medzi dvomi radmi výnosov r_{it} a r_{jt} . Vzťah medzi kovarianciou a pozorovanými výnosmi možno odvodiť nasledovne. Začneme definíciou kovariancie medzi r_{it} a r_{jt} . Platí

$$\sigma_{ij,t} = E\{[r_{it} - E(r_{it})][r_{jt} - E(r_{jt})]\} = E(r_{it}, r_{jt}) - E(r_{it})E(r_{jt})$$

Ak predpokladáme, že stredné hodnoty výnosov sú rovné nule, dostávame

$$\sigma_{ij,t} = E(r_{it}, r_{jt})$$

Slovne povedané, tento výsledok ukazuje, že kovariancia medzi r_{it} a r_{jt} je rovná očakávanej hodnote súčinu výnosov mínus súčin očakávaných hodnôt výnosov. V modeli vysvetľujúcom rozptyly je centrum pozornosti zamerané na štvorce výnosov, pretože pri denných výnosoch sú štvorce očakávaných výnosov malé. Sústreďenie pozornosti na súčiny výnosov je založené na rovnakej úvahe. Takáto analýza modelovania vývoja výnosov v čase, je východiskom pre analýzu ich rozdelenia pravdepodobnosti.

3 METODOLÓGIA PROGNÓZOVANIA METRÍK RIZIKA

V tejto časti sa prezentuje metodológia prognózovania parametrov viacrozmerného podmieneného normálneho rozdelenia, t.j. variancie a kovariancie výnosov. Dôvodom pre prognózovanie rozptylov a kovariancií výnosov je ich využitie na prognózy zmien hodnoty portfólia v uvažovanom horizonte, ktorým môže byť jeden deň alebo niekoľko mesiacov.

Metriky rizika využívajú model exponenciálne váženého kĺzaveho priemeru (EWMA) na prognózy variancií a kovariancií (volatilit a korelácií) viacrozmerného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti. Tento prístup je formálne práve tak jednoduchý ako tradičná prognostická metóda založená na kĺzavých priemeroch s fixnými, rovnakými váhami, nazývaná model jednoduchého kĺzaveho priemeru (SMA), ale zlepšuje jej prognózy.

Jeden spôsob ako podchytiť dynamické vlastnosti volatility je využiť exponenciálny klzavý priemer historických pozorovaní, kde najnovšie pozorovania majú vyššiu váhu pri odhade volatility. Tento prístup má dve dôležité výhody v porovnaní s modelom s rovnakými váhami. Po prvé, volatilita reaguje rýchlejšie na šoky na trhu, pretože novšie údaje majú vyššiu váhu v porovnaní s údajmi vo vzdialenej minulosti. Po druhé, následne po šoku (napríklad vysokom výnose), volatilita klesá exponenciálne s tým, ako váha priradená pozorovaniu spojenému so šokom klesá. Na rozdiel od toho, využitie jednoduchého klzavého priemeru má za následok relatívne prudké zmeny v štandardnej odchýlke akonáhle šok vypadol z meraného rozsahu, čo v mnohých prípadoch môže byť niekoľko mesiacov po jeho výskyte.

Pre danú množinu T výnosov platia pre výpočet volatility (štandardnej odchýlky) nasledujúce vzťahy:

a) rovnaké váhy

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \tilde{r})^2}$$

b) exponenciálne váhy

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{T-t} (r_t - \tilde{r})^2}$$

kde $\tilde{r}$ je nejaký estimátor strednej hodnoty. Pri porovnávaní týchto dvoch estimátorov si všimnime, že exponenciálne vážený klzavý priemer závisí od hodnoty parametra λ ($0 < \lambda < 1$), ktorý sa často nazýva *decay faktor*. Tento parameter determinuje relatívne váhy, ktoré sú aplikované na pozorovania (výnosy) a efektívny rozsah údajov použitých pri odhade volatility. Poznamenajme, že pri odhade estimátora exponenciálne váženého klzavého priemeru sa obvykle používa aproximácia

$$\sum_{j=1}^T \lambda^{T-j} \cong \frac{1}{(1 - \lambda)}$$

Tieto dva výrazy sú ekvivalentné v limite, teda ak $T \rightarrow \infty$. Okrem toho, pre porovnávanie s faktorom rovnakých váh $1/T$ je vhodnejšou verziou estimatora s exponenciálnymi váhami jeho vyjadrenie v tvare

$$\frac{\lambda^{T-t}}{\sum_{j=1}^T \lambda^{T-j}}$$

ktorý pre $\lambda = 1$ nadobúda hodnotu $1/T$, v porovnaní s vyjadrením

$$(1 - \lambda)\lambda^{T-t}$$

Atraktívnou vlastnosťou exponenciálne váženého estimátora je skutočnosť, že ho možno zapísať v rekurzívnej forme, ktorá bude potom použitá ako základ pre prognózovanie volatility. Pri odvodení tejto rekurzívnej formy budeme predpokladať, že k dispozícii je nekonečný počet údajov. Ak kvôli jednoduchosti budeme predpokladať, že výberová stredná hodnota $\tilde{r} = 0$, potom možno prognózu rozptylu pre obdobie $t+1$ odvodiť na základe údajov známych v období t (jeden deň predtým) v tvare

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \lambda \sigma_{t|t-1}^2 + (1 - \lambda) r_t^2$$

a pre jednoduchú prognózu volatility a metriky rizika platí

$$\sigma_{t+1|t} = \sqrt{\lambda \sigma_{t|t-1}^2 + (1 - \lambda) r_t^2}$$

Index „ $t+1|t$ “ vyjadruje prognózu pre obdobie $t+1$ na základe informácií známych do obdobia t vrátane samotného obdobia t . Označenie zdôrazňuje skutočnosť, že rozptyl (volatilitu) skúmame ako časovo – závislú. Predchádzajúci vzťah možno odvodiť nasledovne:

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1|t}^2 &= (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2 \\ &= (1 - \lambda)(r_t^2 + \lambda r_{t-1}^2 + \lambda^2 r_{t-2}^2 + \lambda^3 r_{t-3}^2 + \dots) \\ &= (1 - \lambda) r_t^2 + \lambda(1 - \lambda)(r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \dots) \\ &= \lambda \sigma_{t|t-1}^2 + (1 - \lambda) r_t^2 \end{aligned}$$

Model exponenciálne vážených kľazových priemerov teraz použijeme na prognózy kovariancie a korelácie rovnakým spôsobom ako sme to urobili pri prognóze volatility s tým rozdielom, že namiesto práce so štvorcami jedného časového radu budeme pracovať so súčinom dvoch časových radov. Pričom, v prípade dvoch aktív i a j platí pre

a) rovnaké váhy

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \tilde{r}_i)(r_{jt} - \tilde{r}_j)$$

b) exponenciálne váhy

$$\sigma_{ij} = (1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{T-t} (r_{it} - \tilde{r}_i)(r_{jt} - \tilde{r}_j)$$

Analogicky so vzťahom pre prognózu variancie možno aj prognózu kovariancie zapísať v rekurzívnej forme, Napríklad, pre prognózu 1-dňovej kovariancie medzi dvomi časovými radmi výnosov v čase t platí

$$\sigma_{ij,t+1|t} = \lambda \sigma_{ij,t|t-1} + (1 - \lambda) r_{it} r_{jt}$$

pretože

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,t+1|t} &= (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k r_{i,t-k} r_{j,t-k} \\ &= (1 - \lambda)(r_{it} r_{jt} + \lambda r_{i,t-1} r_{j,t-1} + \lambda^2 r_{i,t-2} r_{j,t-2} + \lambda^3 r_{i,t-3} r_{j,t-3} + \dots) \\ &= (1 - \lambda) r_{it} r_{jt} + \lambda(1 - \lambda)(r_{i,t-1} r_{j,t-1} + \lambda r_{i,t-2} r_{j,t-2} + \lambda^2 r_{i,t-3} r_{j,t-3} + \dots) \\ &= \lambda \sigma_{ij,t|t-1} + (1 - \lambda) r_{it} r_{jt} \end{aligned}$$

Aby sme odvodili prognózy korelácie, využijeme zodpovedajúce prognózy variancie a volatility. Pripomeňme, že korelácia je definovaná ako kovariancia medzi dvomi časovými radmi výnosov, povedzme r_{it} a r_{jt} , vydelená súčinom ich štandardných odchýliek. Matematicky, jednoduchá predikcia korelácie je opísaná vzťahom

$$\rho_{ij,t+1|t} = \frac{\sigma_{ij,t+1|t}}{\sigma_{i,t+1|t}\sigma_{j,t+1|t}}$$

Doteraz sme sa sústredili na jednoduchové prognózy, ktoré boli definované pre obdobie od t do $t+1$, kde t reprezentuje jeden obchodný deň. Portfólio manažéri sa však často zaujímajú o predikcie pre obdobie dlhšie ako jeden deň. Teraz ukážeme ako skonštruovať predikcie variancie (štandardnej odchýlky) a kovariancie (korelácie) aplikáciou modelu kľzavého priemeru s exponenciálnymi váhami pre dlhšie časové horizonty. Všeobecne, pre T – obdobie, t.j. obdobie T dní, pre predikciu variancie a kovariancie platí

$$\sigma_{T+1|t}^2 = T\sigma_{T+1|t}^2$$

alebo

$$\sigma_{t+T|t} = \sqrt{T}\sigma_{t+1|t}$$

a

$$\sigma_{ij,T+1|t} = T\sigma_{ij,T+1|t}$$

Tieto vzťahy implikujú, že predikcie korelácie zostávajú nezmenené, bez ohľadu na horizont predikcie, keďže

$$\rho_{ij,t+T|t} = \frac{T\sigma_{ij,t+T|t}}{\sqrt{T}\sigma_{i,t+T|t}\sqrt{T}\sigma_{j,t+T|t}} = \rho_{ij,t+1|t}$$

Poznamenajme, že viacdnové predikcie su jednoducho násobky jednoduchových predikcií. Napríklad, ak definujeme jeden mesiac ako ekvivalent 25 dní, potom predikcie mesačného rozptylu a kovariancie sú 25- násobky jednoduchových predikcií a mesačná korelácia je ta istá, ako jednoduchová korelácia.

Po zistení, že predikcie volatility a kovariancie sa škálujú v čase, stojí zato uviesť niekoľko poznámok týkajúcich sa práve uvedeného vzťahu pre štandardnú odchýlku. V typickom prípade uvedené „*pravidlo druhej odmocniny času*“ vyplýva z predpokladu, že variancie sú konštantné. Avšak v predchádzajúcich analýzach sa o varianciách a kovarianciách predpokladá, že sa menia v čase. Čo sa však implicitne predpokladalo pri modelovaní variancií a kovariancií ako exponenciálne vážených kľzavých priemerov je to, vývoj variancií je nestacionárny. Z praktického hľadiska potom takéto predikcie volatility môžu viesť k skreslujúcim výsledkom, ktoré nemajú veľký zmysel, a to najmä v prípadoch, keď

- ceny/výnosy sú mean-reverting ,
- ohraničenia limitujú potenciálne pohyby v meurach a cenách,
- sa odhady volatility optimalizovaných kvôli predikcii pre špecifické obdobie použijú pre iné obdobie, napríklad preskočenie z denných predikcií na anualizované predikcie.

4 ZÁVER

Prezentovaná metodológia prognózovania parametrov modelov metrík rizika je teoretickým východiskom pre odhady parametrov modelov takéhoto typu, pro ktorých je potrebné vyriešiť otázky týkajúce sa odhadu strednej hodnoty výberového súboru a odhadu exponenciálneho decay faktora, ktoré sú dôležité pre predikciu volatility a korelácie.

Použitá literatúra

1. MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio Selection. *J. Finance* 7, 77 - 91
2. MLYNAROVÍČ, V. 2001. Finančné investovanie. Bratislava, IURA Edition.
3. RiskMetrics – Technical Dokument. *J.P. Morgan/Reures*. New YORK, 1996
4. SCHOOLEY, D.K. – WORDEN, D.D. 2016. Perceived and Realized Risk Tolerance. *Journal of Financial Counselling and Planning*, 27, No. 2, pp.265 - 276

Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4 1/b, 821 05 Bratislava

Tel: +421 2 20 66 98 60

email: vladimír.mlynarovic@fses.uniba.sk

METODY MODELOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI DEFAULTU FIREMNÍCH ZÁKAZNÍKŮ BANKY

METHODS FOR MODELING THE PROBABILITY OF DEFAULT OF THE BANK'S CORPORATE CLIENTS

Mariya Oleynik

Abstract

In this paper the credit scoring methods for prediction the probability of default of the bank's corporate clients in the Czech Republic are used. The models used for the prediction of binary dependent variable are support vector machine and decision tree. The models are applied on real data of corporate clients of a Czech bank. The decision tree seems to be the best model based on AUC and overall accuracy. On the other hand support vector machine correctly classified the largest number of defaulted clients.

Keywords: *probability of default, support vector machine, decision tree*

1 ÚVOD

Táto práca je inšpirovaná zavedením novej definície selhání Evropským orgánom pro bankovníctví (EBA). Cílem regulátora je sjednocení definice selhání mezi evropskými finančními institucemi. Se zavedením nové definice defaultu většina evropských finančních institucí stále používá klasické přístupy pro řízení kreditních rizik. Alternativou klasickým metodám mohou být metody strojového učení, které se samostatně mění na základě nových dat a zároveň poskytují lepší predikční schopnosti modelů. Metody strojového učení obvykle mají vysokou přesnost odhadu ve srovnání s tradičními přístupy, což je velkou výhodou při odhadu pravděpodobnosti selhání klientů finančních institucí. K modelování pravděpodobnosti defaultu byla použita metoda podpůrných vektorů, jejíž výsledky jsou porovnány s rozhodovacím stromem. [5]

Podobný přístup byl již využit například pro predikci defaultu firemních zákazníků jedné korejské organizace poskytující úvěrové záruky na podporu růstu malých a středních podniků [4], pro predikci defaultu ve stavebnictví, maloobchodě a průmyslu [2] nebo pro predikci defaultu britských veřejných společností v průmyslovém sektoru [6].

Hlavním přínosem práce je porovnání metod založených na strojovém učení za účelem snížení rizikovitosti spojenou s identifikací selhání klientů bank.

Práce dále obsahuje následující části. V metodologii je popsána metoda podpůrných vektorů a rozhodovací strom. Následující část obsahuje popis a úpravy datového souboru. Předposlední část obsahuje vlastní analýzu. Poslední část je věnována shrnutí a porovnání výsledků použitých metod.

2 METODOLOGIE

2.1 Metoda podpůrných vektorů

V této práci se pracuje s metodou podpůrných vektorů, která je založená na podpůrném vektorovém klasifikátoru. Podpůrný vektorový klasifikátor rozděluje p -dimenzionální prostor pomocí hyperplane, který je čarou ve dvoudimenzionálním prostoru. Pro p -dimenzionální prostor je hyperplane definován následovně: [1]

$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p = 0, \quad (1)$$

kde $\beta_0, \dots, \beta_p$ jsou parametry a $X_1, \dots, X_p$ jsou body na hyperplane. Za předpokladu neplatnosti rovnosti (1) budou body $X_1, \dots, X_p$ ležet na pravé nebo na levé straně od hyperplane.

Dále je potřeba definovat maximální okrajový hyperplane M , který představuje minimální vzdáleností nejbližších pozorování od hyperplane. Pozorování ležící na maximálním okrajovém hyperplane jsou podpůrné vektory, jelikož „podporují“ maximální okrajový hyperplane tím způsobem, že pokud by se tato pozorování mírně posunula, změnila by se i poloha maximálního okrajového hyperplane.

Podpůrný vektorový klasifikátor lze zapsat jako optimalizační problém (2) – (5):

$$\text{maximalizovat } M \quad (2)$$

$$\text{za podmíněk } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 = 1, \quad (3)$$

$$y_i(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}) \geq M(1 - \epsilon_i) \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\epsilon_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \epsilon_i \leq C, \quad (5)$$

kde $y_i \in \{-1, 1\}$, kde -1 reprezentuje jednu třídu a 1 druhou třídu, a $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ jsou koeficienty optimálního hyperplane. M je šířka okraje, kterou je potřeba maximalizovat. $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ jsou přidatné proměnné, které říkají, kde se i -té pozorování vzhledem k hyperplane a jeho okraji nachází. Pokud $\epsilon_i = 0$, pak se i -té pozorování nachází na správné straně okraje. Pokud $\epsilon_i > 0$, pak se i -té pozorování nachází na špatné straně okraje, což znamená, že i -té pozorování porušilo hranice okraje. Pokud $\epsilon_i > 1$, pak je i -té pozorování na špatné straně od hyperplane. C je nezáporný tuningový parametr, který ohraničuje sumu všech ϵ_i a určuje počet a tolerovanou velikost porušení hranic okrajů a hyperplane. Pokud $C = 0$, pak musí platit $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n = 0$. S růstem velikosti C se hranice okrajů také rozšiřují, což zároveň znamená růst tolerance k porušení hranic okrajů a hyperplane. [1]

Podpůrný vektorový klasifikátor se používá pro klasifikaci dvou tříd, pokud je hranice mezi třídami lineární. V případě reálných dat nelineární hranice jsou většinou pozorované pro rozdělení pozorování do tříd.

Rozšířením podpůrného vektorového klasifikátoru je metoda podpůrných vektorů, která je založená na rozšíření prostoru proměnných pomocí jader (kernels). [1]

Lineární podpůrný vektorový klasifikátor lze také zapsat jako:

$$f(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, x_i \rangle, \quad (6)$$

kde je n parametrů α_i , $i=1, \dots, n$, a $\langle x, x_i \rangle$ je vnitřní produkt (inner product) každé dvojice pozorování, který je definován jako suma součinů všech dvojic pozorování nebo:

$$K(x_i, x_{i'}) = \langle x_i, x_{i'} \rangle = \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{i'j}. \quad (7)$$

kde K je funkce, která určuje podobnost dvou pozorování. Tato funkce se jmenuje jádro neboli kernel. Rovnost (7) je lineárním jádrem, jelikož je podpůrný vektorový klasifikátor lineární v parametrech.

V této práci se pracuje s polynomiálním jádrem stupně d , které má následující zápis:

$$K(x_i, x_{i'}) = \left(1 + \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{i'j} \right)^d, \quad (8)$$

kde d je nezáporné celé číslo. Jádro s $d > 1$ zajišťuje lepší flexibilitu rozhodovacích hranic. Pokud podpůrný vektorový klasifikátor obsahuje nelineární jádro, pak se jedná o metodu podpůrných vektorů (SVM). V tomto případě podpůrný vektorový klasifikátor má tvar:

$$f(x) = \beta_0 + \sum_{i \in S} \alpha_i K(x, x_i), \quad (9)$$

kde S je množina podpůrných vektorů. [1]

2.2 Rozhodovací strom

Proces výstavby regresních stromů má dva kroky:

1. Rozdělení prostoru prediktorů $(X_1, \dots, X_p)$ na J odlišných a nepřekrývajících se oblastí $R_1, \dots, R_J$.
2. Každému pozorování, které spadá do oblasti R_j , se přiřadí stejný odhad, který je průměrem hodnot závislé proměnné u trénovacích pozorování v oblasti R_j .

Cílem je najít oblasti $R_1, \dots, R_J$, které minimalizují reziduální součet čtverců (RSS). Pro této účely existuje přístup, který se jmenuje rekursivní binární dělení (*recursive binary splitting*). V prvním kroku se vybere prediktor X_j a bod řezu s , který rozdělí prostor prediktoru na dvě oblasti $\{X|X_j < s\}$ a $\{X|X_j \geq s\}$, což vede k maximálně možnému snížení RSS. Pro všechna j a s lze poloroviny definovat následovně: [1]

$$R_1(j, s) = \{X|X_j < s\} \text{ a } R_2(j, s) = \{X|X_j \geq s\}. \quad (10)$$

V dalším kroku je potřeba najít hodnoty j a s , které minimalizují rovnici:

$$\sum_{i: x_i \in R_1(j, s)} (y_i - \hat{y}_{R_1})^2 + \sum_{i: x_i \in R_2(j, s)} (y_i - \hat{y}_{R_2})^2, \quad (11)$$

kde $\hat{y}_{R_1}$ je průměrem závislé proměnné trénovacích pozorování v oblasti $R_1(j, s)$ a $\hat{y}_{R_2}$ je průměrem závislé proměnné trénovacích pozorování v oblasti $R_2(j, s)$. Pak se proces opakuje a hledá pro dělení další nejlepší prediktor a bod řezu, jež minimalizují RSS v každé výsledné oblasti. [1]

Rozdílem klasifikačních stromů od regresních je kvalitativní závislá proměnná, kterou je potřeba predikovat. Klasifikační stromy přiřazují každé pozorování k nejčastěji se vyskytující třídě v dané oblasti trénovacích pozorování, proto je potřeba zkoumání poměru tříd v této oblasti. Dalším rozdílem je použití míry chybné klasifikace, která je alternativou RSS. Míra chybné klasifikace je část trénovacích pozorování v dané oblasti, která nepatří do nejčastěji se vyskytující třídy:

$$E = 1 - \max_k(\hat{p}_{mk}), \quad (12)$$

kde je $\hat{p}_{mk}$ podílem trénovacích pozorování z k -té třídy v m -té oblasti. Dále je potřeba definovat *Gini index*:

$$G = \sum_{k=1}^K \hat{p}_{mk}(1 - \hat{p}_{mk}). \quad (13)$$

Gini index nabývá malých hodnot, pokud se všechny podíly $\hat{p}_{mk}$ blíží nule nebo jedničce, proto je označován jako míra čistoty m -tého uzlu, jelikož malá hodnota znamená, že m -tý uzel obsahuje převážně pozorování z jedné třídy. [1]

3 EMPIRICKÁ ČÁST

3.1 Data

Vývoj modelů se provádí na aktuálních datech o klientech jedné české banky. Anonymizovaná data obsahují informace z finančních výkazů firemních klientů banky za období 2011 - 2016. Soubor s daty obsahuje 9166 záznamů, kde 259 záznamů odpovídají defaultním klientům.

Proměnná	Definice
exposure	dluh vůči bance
X_020_debt_pv	dluh / Hodnota produkce
X_044_lt_debt_fa	dluh / Celkový dlouhodobý majetek
X_048_eqty_lt_l_fa	(Čistý kapitál + Dlouhodobé závazky) / Celkový dlouhodobý majetek
X_069_eqty_ca	Čistý kapitál / Oběžné aktivum
X_075_cash_a	(Hotovost + Peněžní ekvivalenta) / Aktivum
X_083_wcap_a	Čistý pracovní kapitál / Celkové aktivum
X_117_ebit_a	EBIT / Aktivum
X_144_labor_cost_rev	EBIT / Výnosy
X_166_ebitda_int_exp	EBIDTA / Úrokové náklady
X_168_b_loans_bonds_a	(Bankovní půjčky + dluhopisy) / Aktivum
X_174_ebitda_net_debt	EBIT / Čistý dluh
X_183_eqty_le_a_yoy	(Čistý kapitál + závazky) / AktivUm
X_187_margin_yoy	Hrubá marže
X_192_tpo_rev	Závazky z obchodních vztahů / Čisté tržby * 365
X_193_tro_rev	Pohledávky z obchodního styku / Čisté tržbám * 365
X_194_tr_rev_inv_tp_cogs	(Pohledávky z obchodního styku / Tržby + Zásoby / Přímé náklady na prodané zboží – Závazky z obchodního styku / Přímé náklady na prodané zboží)*365
X_209_ebt_da_pv	EBTDA / Hodnota produkce
fx_rate_eur_czk	Směnný kurz eura ke koruně
dpd	Počet dnů po splatnosti dluhu

Tabulka 1: Definice proměnných

Datový soubor byl náhodně rozdělen na trénovací a testovací podmnožinu v poměru 70/30. Jelikož byla třída defaultních klientů v trénovací podmnožině výrazně menší než třída standardních klientů, při vývoji modelů by mohl nastat problém, že by modely identifikovaly převážně většinovou třídou, čímž by se predikční schopnost výsledných modelů snížila. [5]

Z výše uvedeného důvodu byla na podmnožinu trénovacích dat použita metoda převzorkování (*oversampling*), která vyrovnává počty pozorování v obou třídách. Vysvětlující proměnné byly vybrány na základě metody Best subset selection (BSS). Pomocí BSS byly z velkého množství finančních ukazatelů vybrány nekorelované a relevantní pro odhad proměnné, které jsou definovány v tabulce 1. Vysvětlovaná proměnná *flag_default12m* je binární proměnnou a nabývá hodnoty 0, pokud je klient považován za standardního, a hodnoty 1, pokud klient splnil podmínky zveřejněné Evropským orgánem pro bankovnínictví v závěrečné zprávě o návrhu regulačních technických norem (RTS) o prahové hodnotě pro úvěrový závazek po lhůtě splatnosti podle článku 178 nařízení (EU) 575/2013 dne 28. září 2016.

3.2 Metoda podpůrných vektorů

Při aplikaci metody podpůrných vektorů je možné nastavit typ jádra na několik možností, jež jsou: lineární, polynomiální nebo radiální. V této práci se používá polynomiální typ jader. Zároveň je tuningový parametr *C* nastaven na hodnotu 10, a zůstává beze změny pro všechny modely.

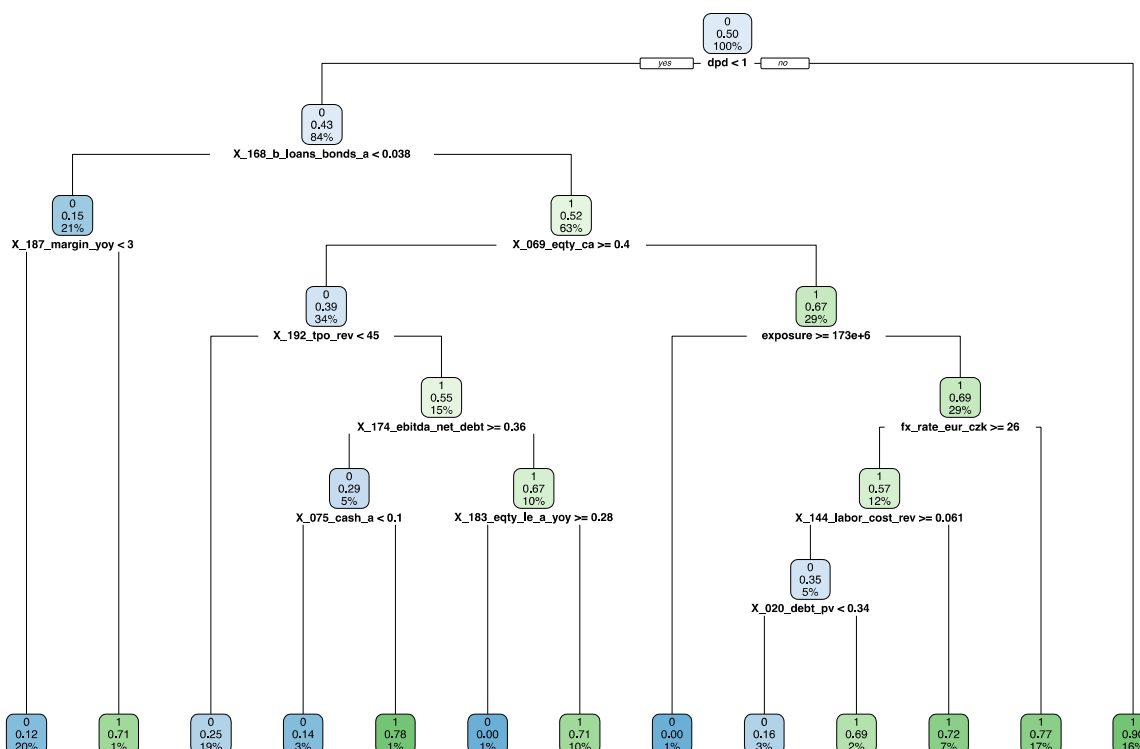
Pro hodnocení predikční schopnosti modelů se zkoumá správnost přiřazení klientů k binární vysvětlované proměnné. Pro tento účel byly použity ROC, AUC a matice záměn na testovací podmnožině datového souboru. Při zařazení všech proměnných, které prošly výběrem pomocí metody Best subset selection, model SVM s polynomiálním jádrem ukazuje nízkou predikční schopnost. AUC základního modelu se rovná 0,58. Při konstrukci matice záměn se ukazuje, že se pouze 23 klientů ze 76 defaultních klientů z testovací podmnožiny správně zařadí do třídy defaultních klientů.

Z výše uvedených důvodů byly proměnné zařazeny do modelu postupně, a s přidáním každé proměnné se kontrolovala predikční schopnost každého modelu. Pokud AUC s přidáním proměnné klesala, proměnná se pro další vývoj nepoužívala. Čtyři modely s nejvyšší AUC jsou zobrazeny v tabulce 2. Poslední čtvrtý model má nejvyšší hodnotu AUC, proto hodnocení SVM bude probíhat na základě modelu č.4. [5]

Číslo modelu	Proměnné v modelu	AUC
1	exposure, X_020_debt_pv, X_044_lt_debt_fa, X_048_eqty_lt_l_fa, X_069_eqty_ca, X_075_cash_a, X_083_wcap_a	0,594
2	exposure, X_020_debt_pv, X_044_lt_debt_fa, X_048_eqty_lt_l_fa, X_069_eqty_ca	0,599
3	exposure, X_020_debt_pv, X_044_lt_debt_fa, X_048_eqty_lt_l_fa, X_069_eqty_ca, X_075_cash_a	0,618
4	exposure, X_020_debt_pv, X_044_lt_debt_fa, X_048_eqty_lt_l_fa, X_069_eqty_ca, X_075_cash_a, X_117_ebit_a	0,620

3.3 Rozhodovací strom

Výsledek odhadu rozhodovacího stromu pro trénovací vzorek je zobrazen na grafu 1, kde je v jednotlivých listech v prvním řádku označená hodnota vysvětlované proměnné: 0 je pro standardního klienta, 1 pro třídu defaultních klientů. Ve druhém řádku je uvedena odhadnutá pravděpodobnost defaultu. Poslední hodnota v listu uvádí procento pozorování v listu z celkového souboru. [3]



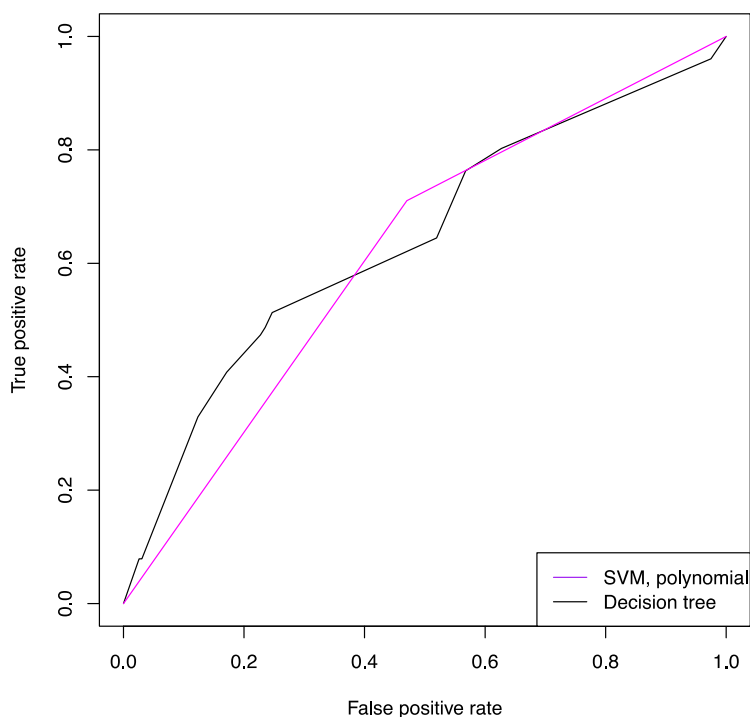
Graf 1: Rozhodovací strom, vlastní výpočet a zpracování v RStudio

Z grafu 1 lze odvodit postup, kterým se jednotliví klienti zařadí do jedné ze dvou tříd. První list obsahuje všechna data v trénovací podmnožině, kde se pravděpodobnost defaultu rovná 50 %. Následně se list rozdělí na další dva listy na základě hodnoty vysvětloující proměnné *dpd*. Pokud je hodnota *dpd* větší než 1, pak bude klient s pravděpodobností 90 % zařazen do defaultní třídy. Pokud je *dpd* menší než 1, pak bude klient defaultní s pravděpodobností 43 %. Další list se rozděluje na základě proměnné *X_168_b_loans_bonds_a* tak, že bude klient při hodnotách menších než 0,038 považován za standardního klienta v 63 %. Pokud je hodnota proměnné větší 0,038, klient bude s pravděpodobností 21 % defaultní. Stejný postup platí pro další zobrazené listy.

3.4 Hodnocení modelů

Nyní lze porovnat predikční schopnost metody podpůrných vektorů a rozhodovacího stromu. Pro hodnocení predikční schopnosti se zkoumá jejich schopnost správného přiřazení klienta k binární vysvětlované proměnné. Správnost přiřazení defaultních klientů banky hraje velkou roli při modelování pravděpodobnosti defaultu, jelikož chybné zařazení defaultních klientů znamená velké finanční ztráty. V této práci byly použity ROC, AUC a matice záměn, která

slouží pro zobrazení počtů správně a chybně zařazených pozorování. Hodnocení modelů se provádí na testovací podmnožině datového souboru.



Graf 2: ROC pro SVM a rozhodovací strom, vlastní výpočet a zpracování v RStudio

Pro numerickou interpretaci ROC na grafu 2 se používá AUC. Hodnota AUC pro metodu podpůrných vektorů se rovná 0,620, což znamená, že výsledný SVM byl schopen v 62 % správně přiřadit klienta k vysvětlované proměnné. AUC pro rozhodovací strom se rovná 0,642, což znamená, že rozhodovací strom byl schopen v 64 % případů předpovědět selhání klienta.

Model	TP	TN	FP	FN	AUC	Celková správnost
Metoda podpůrných vektorů	1408	54	22	1250	0,620	0,535
Rozhodovací strom	2002	39	37	656	0,642	0,747

Tabulka 3: Hodnocení modelů, vlastní výpočet a zpracování v MS Excel

Dále se v tabulce 3 uvádějí počty správně a chybně zařazených pozorování. Hodnota TP udává počet správně přiřazených standardních klientů, hodnota TN slouží pro zobrazení počtu správně přiřazených defaultních klientů. Celková správnost se počítá jako $(TP + TN)/n$. Rozhodovací strom má vyšší hodnotu celkové správnosti, jelikož model správně přiřadil 2002 standardních klientů. Metoda podpůrných vektorů správně zařadila pouze 1408 klientů, ale zároveň správně zařadila 54 defaultních klientů, kteří představují velké riziko pro banku.

4 ZÁVĚR

Cílem této práce bylo modelování pravděpodobnosti defaultu firemních zákazníků banky. Modelování bylo provedeno na reálných anonymizovaných datech klientů banky. Pro

predikci defaultu byly použity metody strojového učení: metoda podpůrných vektorů s polynomiálním jádrem a rozhodovací strom.

Rozhodovací strom má vyšší hodnoty AUC a celkové správnosti, jelikož model správně přiřazuje velký počet standardních klientů. Výhodou SVM je velký počet správně přiřazených defaultních klientů, což je klíčovým bodem při predikci defaultu zákazníků banky.

Každý z modelu má své výhody, které lze využít pro přesnější predikci defaultu. Porovnání obou modelů může v praxi sloužit pro výběr proměnných a také pro pochopení vztahů mezi finančními ukazateli a pravděpodobnosti defaultu klienta.

Použitá literatura

- [1] JAMES, G., WITTEN, D., HASTIE, T. a TIBSHIRANI R. An introduction to statistical learning: with applications in R [online]. New York: Springer, [2013]. Springer texts in statistics. ISBN 978-1-4614-7138-7.
- [2] LEE, S., CHOI, W. S. A multi-industry bankruptcy prediction model using back-propagation neural network and multivariate discriminant analysis: Individual probability estimates using machine learning. Expert Systems with Applications [online]. 2013, 40(8), 2941-2946. DOI: 10.1016/j.eswa.2012.12.009. ISSN 09574174. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S095741741201250X>
- [3] MILBORROW, S.. *Plotting rpart trees with the rpart.plot package* [online]. Dostupné z: <http://www.milbo.org/rpart-plot/prp.pdf>
- [4] MIN, J. a LEE Y. Bankruptcy prediction using support vector machine with optimal choice of kernel function parameters. Expert Systems with Applications [online]. 2005, 28(4), 603-614. DOI: 10.1016/j.eswa.2004.12.008. ISSN 09574174. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957417404001526>
- [5] OLEYNIK, M. Metody modelování pravděpodobnosti defaultu firemních zákazníků banky. Praha, 2020. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Vedoucí práce doc. Ing. Tomáš Formánek, Ph.D.
- [6] TSENG, F., HU, Y. Comparing four bankruptcy prediction models: Logit, quadratic interval logit, neural and fuzzy neural networks. Expert Systems with Applications [online]. 2010, 37(3), 1846-1853. DOI: 10.1016/j.eswa.2009.07.081. ISSN 09574174. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957417409006836>

Kontaktní údaje

Ing. Mariya Oleynik
Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
Nám. Winstona Churchilla 1938/4,
Praha 3 130 67
Email: xolem05@vse.cz

Tento příspěvek byl vytvořen za podpory projektu č. IGA F4/34/2020 Interní grantové agentury, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

VOĽBA A ZORADENIE BÁNK POMOCOU SIEŤOVEJ ANALÝZY OBALU DÁT SO SPOLOČNÝMI VÁHAMI

BANK SELECTION AND RANKING USING NETWORK DATA ENVELOPMENT ANALYSIS WITH COMMON WEIGHTS

Michal Pieter

Abstrakt

V analýze obalu dát (DEA), každá jednotka určuje vlastné váhy vstupov a výstupov tak, aby boli čo najvhodnejšie pre ňu. To má ale za následok obmedzenú schopnosť DEA pri porovnaní a zoradení jednotiek. Modely so spoločnými váhami (CSW) boli skonštruované ako riešenie a umožňujú zmysluplné vzájomné porovnávanie jednotiek. V sieťovej DEA, kde každá jednotka je zložená z viacerých prepojených procesov, CSW sú používané len za špeciálnych podmienok. Tento príspevok aplikuje nedávno predstavený 2-stupňový model s CSW na reálny problém voľby a zoradenia bánk na českom trhu. Miery efektívnosti na základe tohto a ďalších troch modelov sú vypočítané a analyzované. Na ich základe sú získané zoradenia bánk, ktoré sú medzi sebou porovnané a podľa nich sú zvolené banky s najlepšimi mierami.

Kľúčové slová: analýza obalu dát, sieťová DEA, banky, spoločné váhy, CSW

Abstract

In data envelopment analysis (DEA) each unit is allowed to choose input and output weights in a way that is most advantageous to it. This however limits the usefulness of DEA in directly comparing and ranking of units. Models with common set of weights (CSW) have been proposed to fix this and allow for meaningful inter-unit comparison. In Network DEA, where each unit is composed of multiple interconnected processes, CSW are modelled only for special cases. In this paper, a recently developed novel approach for using CSW in 2-stage DEA is applied to a problem of selecting and ranking retail banks on the Czech market. Efficiency scores using this approach and three other models are obtained and analyzed. Based on these, rankings of banks are obtained and compared and best performing banks are chosen.

Keywords: data envelopment analysis, network DEA, banks, common set of weights, CSW

1 INTRODUCTION

Data envelopment analysis (DEA) is an area of operations research comprised of methods and techniques for evaluating units in a given group based on their relative efficiency. These units (decision-making unit, DMU) produce certain outputs by consuming and transforming various inputs, together called factors, and the way in which these two sets relate determine the efficiency of the unit. The first model in the family was put forward by Charnes, Cooper and Rhodes (1) mainly as a way to determine the efficiency of government agencies and non-profit organizations in absence of clear-cut metrics such as profit. Over the years, improvements and expansions have been made to the original model, the two most notable by Banker, Charnes and Cooper (2), which allowed for variable returns to scale and by Tone (3), which introduced a new slacks-based measure. These traditional models, however, treat

DMUs as indivisible and black-box entities with inputs coming in, outputs coming out, but not being able to say anything about the transformation itself. In most real world scenarios, that is a far too simplistic approach. Network DEA (NDEA), introduced by Färe and Grosskopf (4) models the internal structure of the unit as a number of interconnected processes (also divisions, stages, sub-processes) with additional factors – intermediaries, or links – connecting them, serving as output from one process and input to another. These processes can be connected in a series pattern, in parallel, or a combination of the two. By better approximating the real-world system in the model, NDEA aims to provide more accurate and relevant evaluation than traditional, black-box models. They also allow to calculate not only the overall efficiency of the units, but of the individual processes as well, and generally result in more discriminating efficiency scores.

One distinct feature of DEA models in general – black-box or not – is that when calculating the efficiency score, each unit gets to choose its own set of input and output weights, that are most advantageous to it in achieving as good a score as possible. These weights in one form or another are used to calculate the efficiency score, e.g. in the CCR model (1) as a weighted ratio of outputs to inputs. This does not pose a problem when DEA is used to evaluate the units' performance. But because these weights are different for each unit, some authors question the applicability of DEA when it comes to inter-unit comparison and/or ranking of the units. To solve this problem, several approaches have been proposed. Sinuany-Stern et al. (5) use a two phase method combining pair-wise DEA to construct a matrix of efficiency scores base on each units weights, then extract a common ranking score using AHP method. Darehmiraki and Behdani (6) construct a virtual aggregate DMU and rank all real units based on the effect of their deletion on its score. One obvious solution is to use common set of weights (CSW) instead of individual weights for every unit. However, trying to optimize the efficiency of all units at the same time leads to a multi-objective programming (MOP) problem. To transform it into a single objective problem and obtain the weights, various methods have been proposed, such as maximizing the average efficiency score (7), minimizing the distance to ideal solutions vector (8), or using goal programming (9). Adler et al. (10), Jablonský (11) and Hosseinzadeh Lotfi et al. (12) all present additional approaches to compare and rank the units.

The use of common weights as a basis for meaningful comparison and ranking of units in the context of Network DEA has not been extensively studied, and models haven proposed only for special cases and limited number of processes. This paper applies the latest of such models to a bank selection scenario. Kiaei and Mazemi (13) proposed a model that allows for meaningful comparison of units composed of 2 processes connected in series, based on a common set of weights. This model is described in chapter 2, along with 3 other models for comparison – regular 2 stage NDEA model where each unit chooses its own weights, black-box CSW model and black-box regular model. The modelled network structure is also presented. In chapter 3, dataset consisting of 15 retail banks operating in the Czech republic in 2019 is presented. Applying the 4 models to it, the results are calculated and bank selection and ranking based on the network CSW model results is performed. The results of all 4 models are compared there as well. Chapter 4 offers a brief summary and some concluding remarks.

2 METHODOLOGY

The banks studied in this paper are each characterized by 11 values – factors. As mentioned, they are modelled as consisting of two series-connected processes, henceforth referred to as stages. What these stages represent and how the factors relate to them, i.e. the structure of the

model, is presented in this chapter, as well as the precise mathematical formulations of the ranking model, as well as the other three models that are used for comparison.

2.1 Network structure

By investigating the internal workings of the bank, many processes can be identified. In this paper, the simplest network structure is considered and thus bank operations are separated into just two distinct processes - marketability, or attracting new customers and convincing the existing to use their products by making deposits and getting loans and profitability, or making sure these generate income and contribute to the overall health of the bank. This breakdown is similar to that of Seiford and Zhu (14), but from the perspective of the consumer. In the marketability stage, the bank's inputs are its assets – workforce (number of employees), number of branches, total equity value, as well as operating costs. Using these assets, the bank attracts clients (in retail segment more commonly referred to as customers) who in turn generate deposits and take out loans – these three factors serve as links, and are therefore outputs of marketability stage and inputs of profitability. In the profitability stage the number of clients and value of deposits and loans are transformed into two types of income – from fees and interest – and two ratio measures of bank rentability – ROAE (return on average equity) – and health – CAR (capital adequacy ratio). This structure is illustrated in figure 1.

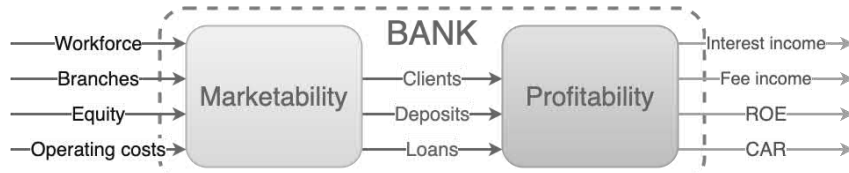


Figure 1 – 2-stage network structure of a bank

2.2 Mathematical models

In addition to the main network model with common weights, 3 additional models are used for comparison. To better understand them, it is best to start with the simplest one. The CCR model (1) measures efficiency θ_q of the examined unit q as a weighted ratio of outputs to inputs. The weights are chosen so that θ_q is highest, while making sure all inputs and outputs are used and the score of each unit using those weights is at most 1 (efficient). The model can be written as

$$\theta_q = \frac{\sum_{o=1}^s u_o y_{oq}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{iq}} \rightarrow MAX$$

$$\frac{\sum_{o=1}^s u_o y_{oj}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_o \geq \varepsilon, \quad o = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

where n is the number of DMUs (banks), r of inputs, s of outputs, v_i , x_{ij} , u_o and y_{ij} the weight and value of i -th input and weight and value of o -th output, respectively, and for unit j . ε is a non-archimedean infinitesimal and $\theta_q \in (0; 1)$ is the efficiency score of unit q , where the model needs to be calculated for every $q=1, 2, \dots, n$. Because every set of weights is calculated independently, the units cannot be compared between each other or ranked. Chiang et al. (15) proposed to calculate common weights such that a separation vector λ between weighted inputs and weighted outputs of all units in n -space is minimized. Thus, only one model, namely

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^r v_i x_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{o=1}^s u_o y_{oj} \rightarrow MIN,$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r v_i x_{ij} &\geq \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{o=1}^s u_o y_{oj} &\leq \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$u_o \geq \varepsilon, \quad o = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

is ever calculated. On obtaining optimal values of common weights – v_i^* and u_o^* , individual unit efficiency scores θ_j^* for each unit j , by which they can be compared, are calculated as

$$\theta_j^* = \frac{\sum_{o=1}^s u_o^* y_{oj}}{\sum_{i=1}^r v_i^* x_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

After breaking the bank down into two processes, the following model – a generalization of CCR model for 2 series-connected stages with fixed links – by Kao and Hwang (16), given as

$$\begin{aligned}\theta_q &= \sum_{o=1}^s u_o y_{oq} \rightarrow MAX, \\ \sum_{i=1}^r v_i x_{iq} &= 1, \\ \sum_{o=1}^s u_o y_{oj} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ij} &\leq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{l=1}^t w_l z_{lj} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ij} &\leq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{o=1}^s u_o y_{oj} - \sum_{l=1}^t w_l z_{lj} &\leq 0, & j = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$u_o \geq \varepsilon, \quad o = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad w_l \geq \varepsilon, \quad l = 1, 2, \dots, t.$$

is used. While most terms are as in the CCR model above, t links are introduced. Their weights and values are then w_l and z_{lj} , respectively, for l -th link and j -th unit. The overall efficiency score θ_q for the examined unit q can also be decomposed into stage efficiencies as $\theta_q = \theta_q^{(1)} \times \theta_q^{(2)}$. After calculating optimal weights for q , these divisional scores for $j=q$ can be calculated as

$$\theta_j^{*(1)} = \frac{\sum_{l=1}^t w_l^* z_{lj}}{\sum_{i=1}^r v_i^* x_{ij}}, \quad \theta_j^{*(2)} = \frac{\sum_{o=1}^s u_o^* y_{oj}}{\sum_{l=1}^t w_l^* z_{lj}}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Again, these weights are individual for each unit and do not allow for meaningful comparison or ranking. Kiaei and Kazemi Matin (13) therefore proposed a generalization of the aforementioned model by Chiang et al. for a case of 2-stage series network structure as

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^r v_i x_{ij} - \sum_{l=1}^t w_l z_{lj}) + \sum_{j=1}^n (\sum_{l=1}^t w_l z_{lj} - \sum_{o=1}^s u_o y_{oj}) &\rightarrow MIN, \\ \sum_{i=1}^r v_i x_{ij} &\geq \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{l=1}^t w_l z_{lj} &= \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{o=1}^s u_o y_{oj} &\leq \lambda_j, & j = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

$$u_o \geq \varepsilon, \quad o = 1, 2, \dots, s, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad w_l \geq \varepsilon, \quad l = 1, 2, \dots, t.$$

In this model, all terms are as defined previously and the overall and divisional efficiency scores of individual units can be calculated using formulae (1) and (2), respectively. By using these scores, the units can be compared. They also proposed to further optimize individual efficiency scores by applying the separation vector approach to both stages of each unit, while preserving the calculated common weights v_i^* , u_o^* and w_l^* . They do this by decreasing the inputs while simultaneously increasing outputs, with links staying unchanged, using the CSW-VS model as

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r v_i^* x'_{iq} - \sum_{o=1}^s u_o^* y'_{oq} &\rightarrow MIN, \\ \sum_{l=1}^t w_l^* z_{lq} - \sum_{i=1}^r v_i^* x'_{iq} &\leq 0, \\ \sum_{o=1}^s u_o^* y'_{oq} - \sum_{l=1}^t w_l^* z_{lq} &\leq 0, \\ x'_{iq} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'_{oq} - \sum_{j=1}^n \mu_j y_{oj} &\leq 0, & o &= 1, 2, \dots, s, \\
z_{lq} - \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{lj} &\leq 0, & l &= 1, 2, \dots, t, \\
z_{lq} - \sum_{j=1}^n \mu_j z_{lj} &\geq 0, & l &= 1, 2, \dots, t, \\
\lambda_j &\geq 0, \mu_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

where variables x'_{iq} and y'_{oq} represent the changed i -th input or o -th output, respectively, of examined unit q and λ and μ are the separation vectors of stage 1 and 2, respectively. Efficiency scores are calculated as previously, only substituting x_{iq} with x'_{iq} and y_{oq} with y'_{oq} .

3 BANK SELECTION

All 4 models discussed in previous chapter are applied to a problem of bank selection and ranking. The banks can all be considered to be primarily operating in the retail segment, i.e. focused on providing services to natural persons of average requirements, as opposed to private or business segments. By including the profitability stage and final outputs of income, ROAE and CAR, this selection problem can be considered to be primarily from the viewpoint of a potential investor. However, it can also be useful to an average client, or to government, as a general statement on the efficiency of these banks and prospects of their continued operation.

3.1 Data

The data consists of 15 banks operating on the Czech market (11 domestic banks and 4 branches or divisions of foreign banks) in the year 2019. In table 1, values for 11 factors, as described in chapter 2.1 are shown, as are the units used. Most of the data was gathered from annual reports, while others were found in additional sources, all freely available online. All values are valid for 31.12.2019, unless they are annual averages for year 2019, where applicable.

DMU	Name	Work- force #	Bran- ches #	Clients #	Equity mil. CZK	ROAE %	CAR %	Costs mil. CZK	Interest mil. CZK	Fees mil. CZK	Deposits mil. CZK	Loans mil. CZK
U1	Air Bank	816	35	788 000	9 785	20,97	15,40	1 759	3 535	153	107 067	55 571
U2	Creditas	365	35	95 000	4 424	6,64	19,54	585	1 035	8	68 525	14 664
U3	Hello Bank	544	11	421 000	1 287	20,40	15,50	1 307	1 248	340	3 265	11 184
U4	Česká spořitelna	9 873	483	4 957 170	137 339	16,50	21,77	19 352	30 261	8 591	993 257	720 739
U5	ČSOB	8 626	620	4 241 000	98 678	20,70	19,19	19 034	32 004	8 518	957 221	762 450
U6	Equa bank	669	59	424 000	5 462	9,28	16,51	1 282	1 967	1	55 474	46 623
U7	Fio banka	53	85	980 000	4 454	51,87	18,24	839	2 398	376	140 442	20 148
U8	ING Bank	360	9	400 000	1 481	9,40	17,90	1 919	1 617	369	102 005	37 411
U9	Komerční banka	8 167	548	2 365 000	105 540	14,50	19,72	14 816	23 591	5 983	821 507	647 259
U10	mBank	6 771	226	5 630 500	96 433	6,60	19,46	15 743	23 898	5 761	696 466	627 895
U11	Moneta	3 074	179	1 098 539	24 411	19,70	18,00	5 019	7 925	1 950	181 523	156 409
U12	Oberbank	2 150	177	340 000	75 227	7,54	20,23	7 342	8 787	4 143	304 428	426 181
U13	Raiffeisenbank	3 166	128	665 000	34 355	17,18	18,70	8 544	9 047	1 915	290 188	247 157
U14	Sberbank	755	24	110 846	9 243	6,72	16,59	1 582	1 787	426	69 568	63 059
U15	UniCredit Bank	3 249	126	750 000	78 613	14,70	19,81	7 445	14 578	4 002	414 953	440 760

Table 1 – Dataset consisting of 15 banks and values for 11 factors

3.2 Calculation and results

All models presented in chapter 2.2 were calculated using LocalSolver software, after being transcribed into LSP, its proprietary mathematical programming language. For individual weight models and the second phase from Kiaei and Kazemi Matin, optimizing vector separation (CSW-VS) were calculated for each unit separately, while the black-box model and first phase the main model, 2-stage CSW model, needed only one execution to obtain

common weights, with which the efficiency scores of each unit could be calculated. In table 2, all these efficiency scores can be seen. For network models, overall score and scores of both marketability and profitability stage are included. Shown are also ranks based on black-box CSW model, and 2-stage CSW model without and with VS-optimized efficiency scores.

DMU	Black-box		2-stage ind. weights			2-stage CSW			2-stage CSW-VS			RANK (CSW)		
	ind.	CSW	Overall	market.	profit.	Overall	market.	profit.	Overall	market.	profit.	BB	2s	2s-VS
U1	1	1	,894	,994	,899	,416	,969	,429	,918	,999	,919	1	12	6
U2	1	,570	,658	,658	1	,211	,441	,479	,387	,465	,834	15	14	15
U3	1	1	1	1	1	,492	,548	,899	,814	,906	,898	1	10	12
U4	,936	,902	,349	,690	,506	,688	,761	,904	,947	,960	,986	9	3	4
U5	1	1	,396	,442	,897	,662	,704	,940	,941	,952	,989	1	5	5
U6	,795	,627	,593	1	,593	,195	,685	,285	,976	,998	,978	14	15	2
U7	1	,990	1	1	1	,510	1	,510	,658	1	,658	5	8	14
U8	1	,929	,786	1	,786	,407	,641	,635	,727	,805	,904	7	13	13
U9	,838	,814	,639	,757	,845	,583	,655	,890	,880	,897	,981	10	6	8
U10	,970	,970	,332	,961	,345	,673	1	,673	,983	1	,983	6	4	1
U11	,917	,906	,364	,804	,453	,575	,575	1	,975	,977	,998	8	7	3
U12	1	,715	1	1	1	,758	,758	1	,831	,834	,997	13	2	11
U13	,759	,751	,283	,862	,329	,432	,502	,862	,863	,877	,984	11	11	9
U14	,894	,726	,566	,622	,911	,493	,639	,771	,834	,846	,985	12	9	10
U15	1	1	,776	,776	1	,911	,911	1	,911	,914	,997	1	1	7

Table 2 – Efficiency scores for all 4 models and VS-optimized CSW network model (leading zeroes omitted for readability), ranks for CSW black-box and VS models

3.3 Interpretation

In black-box model with individual weights, 8 banks were identified as efficient. However, beyond the classification to efficient and inefficient groups, this model does not allow further comparison. Using common weights, this becomes possible, however, full ranking is not achieved, as 4 banks still have the unity score – one therefore cannot choose between Air Bank, Hello Bank, ČSOB and UniCredit. In 2-stage model with individual weights, only 3 banks are overall efficient – Hello Bank, Fio banka and Oberbank. At process level, there are 5 banks that are efficient at each stage. In CSW model, 2 banks are efficient in marketability stage and 3 in profitability, but since no bank is efficient in both and the model is multiplicative, there is no overall efficient bank. But this also means there is no ambiguity and full ranking is achieved. UniCredit bank, one of black-box efficient, is therefore chosen as best, followed by Oberbank and Česká spořitelna. By minimizing the separation vector for each bank while maintaining common weights, a different ranking is achieved – mBank is chosen as best, followed by Equa Bank and Moneta. Of note is that Equa Bank was previously second worst and worst bank. On the other hand, Creditas is consistently ranked at or near the bottom. Both overall and stage efficiencies are significantly increased in CSW-VS model, changing the rank of many banks, such as UniCredit (1 to 7), Oberbank (2 to 12), Fio banka (8 to 14), Air Bank (12 to 6) and Equa bank (15 to 2). Most consistently ranked are ČSOB (in black-box ranks 1-4 are shared), Creditas, Sberbank and Reiffeisenbank. Other ranks depend more strongly on the chosen model. Of note is also Česká spořitelna, which ranks near the top for both models, at places 3 and 4.

4 CONCLUDING REMARKS

The purpose of this paper was to examine issues of choice and comparison in Network DEA and their solutions and to apply one of them – a recently developed novel approach – to

a practical problem of bank selection based on real-world data. A 2-stage model with common weights was presented and the corresponding network structure of a bank was proposed. Three additional models were presented for comparison with the main one. Using these, the efficiency scores were calculated and rankings for all CSW models obtained, after which these results were interpreted and best ranked bank chosen for each model. With regards to further research, one avenue is to apply the presented 2-stage CSW model to other practical scenarios. However, theoretical developments may be more beneficial at this point. Current model does not guarantee full ranking, even though it just happened to be in this particular case. It is also restricted to a case of 2 processes connected in series. It would be of interest to see it modified to guarantee full ranking in all cases, or to generalize it for an arbitrary network structure.

Acknowledgements

This work was supported by grant no. IGA F4/66/2019 of the Internal Grant Agency of the Faculty of Informatics and Statistics, Prague University of Economics and Business.

References

1. CHARNES, A., W. W. COOPER and E. RHODES. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* [online]. 1978, 2(6), 429–444. ISSN 0377-2217. Available at: doi:10.1016/0377-2217(78)90138-8
2. BANKER, R. D., A. CHARNES and W. W. COOPER. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* [online]. 1984, 30(9), 1078–1092. ISSN 0025-1909. Available at: doi:10.1287/mnsc.30.9.1078
3. TONE, Kaoru. A Slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*. 2001, 130(3), 498–509.
4. FÄRE, Rolf and Shawna GROSSKOPF. Network DEA. *Socio-Economic Planning Sciences* [online]. 2000, 34(1), 35–49. ISSN 0038-0121. Available at: doi:10.1016/S0038-0121(99)00012-9
5. SINUANY-STERN, Zilla, Abraham MEHREZ and Yossi HADAD. An AHP/DEA methodology for ranking decision making units. *International Transactions in Operational Research* [online]. 2000, 7(2), 109–124. ISSN 0969-6016. Available at: doi:10.1016/S0969-6016(00)00013-7
6. DAREHMIRAKI, Majid and Zahra BEHDANI. A new DEA approach to rank alternatives in MCDA. *Data Envelopment Analysis and Decision Science* [online]. 2013, 2013 [accessed. 2017-11-14]. ISSN 21954496. Available at: <http://www.ispacs.com/journals/dea/2013/dea-00013/abstract/>
7. ROLL, Y and B. GOLANY. Alternate methods of treating factor weights in DEA. *Omega* [online]. 1993, 21(1), 99–109. ISSN 0305-0483. Available at: doi:10.1016/0305-0483(93)90042-J
8. KAO, C. and H.-T. HUNG. Data envelopment analysis with common weights: The compromise solution approach. *Journal of the Operational Research Society* [online]. 2005, 56(10), 1196–1203. ISSN 0160-5682. Available at: doi:10.1057/palgrave.jors.2601924
9. DAVOODI, Alireza and Hamed ZHIANI REZAI. Common set of weights in data envelopment analysis: A linear programming problem. *Central European Journal of Operations Research* [online]. 2011, 20(2), 355–365. Available at: doi:10.1007/s10100-011-0195-6
10. ADLER, Nicole, Lea FRIEDMAN and Zilla SINUANY-STERN. Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational*

- Research* [online]. 2002, **140**(2), 249–265. ISSN 0377-2217. Available at: doi:10.1016/S0377-2217(02)00068-1
11. JABLONSKY, Josef. Multicriteria approaches for ranking of efficient units in DEA models. *Central European Journal of Operations Research*. 2012, **20**(3), 435–449.
 12. HOSSEINZADEH LOTFI, F., G. R. JAHANSHAHLOO, M. KHODABAKHSHI, M. ROSTAMY-MALKHLIFEH, Z. MOGHADDAS and M. VAEZ-GHASEMI. A Review of Ranking Models in Data Envelopment Analysis. *Journal of Applied Mathematics* [online]. 2013, **2013**, 20. Available at: doi:10.1155/2013/492421
 13. KIAEI, Hamid and Reza KAZEMI MATIN. Common set of weights and efficiency improvement on the basis of separation vector in two-stage network data envelopment analysis. *Mathematical Sciences* [online]. 2020, **14**(1), 53–65. ISSN 2251-7456. Available at: doi:10.1007/s40096-019-00315-7
 14. SEIFORD, Lawrence M. and Joe ZHU. Profitability and Marketability of the Top 55 U.S. Commercial Banks. *Management Science* [online]. 1999, **45**(9), 1270–1288. ISSN 0025-1909. Available at: doi:10.1287/mnsc.45.9.1270
 15. CHIANG, Chin-I, Ming-Jiu HWANG and Y LIU. Determining a common set of weights in a DEA problem using a separation vector. *Mathematical and Computer Modelling* [online]. 2011, **54**, 2464–2470. Available at: doi:10.1016/j.mcm.2011.06.002
 16. KAO, Chiang and Shiuh-Nan HWANG. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research* [online]. 2008, **185**, 418–429. Available at: doi:10.1016/j.ejor.2006.11.041

Contact information

Ing. Michal Pieter

Prague University of Economics and Business, Faculty of Informatics and Statistics,

Department of Econometrics, W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague 3, Czech Republic

email: michal.pieter@vse.cz

PROBLÉMY SOUVISEJÍCÍ S UŽITÍM GENETICKÉHO ALGORITMU NA SHLUKOVACÍCH ÚLOHÁCH

NOTE ON PROBLEMS RELATED TO USING GENETIC ALGORITHM FOR CLUSTER ANALYSIS

Ondřej Sokol

Abstrakt

Některé shlukovací problémy nelze řešit s použitím standardním metod jako jsou k-means. Místo toho je nutné je formulovat jako nelineární optimalizační úlohu a tu poté řešit standardními optimalizačními nebo heuristickými metodami. V tomto příspěvku se zaměříme na problémy spojené s hledáním optimálního shlukování pomocí genetického algoritmu. Zejména v případě křížení dochází k provádění operací, které mají blíže k prohledávání hrubou silou než k původní myšlence křížení genetického algoritmu. To je způsobeno přirozenou povahou shluků, kdy jednotlivé shluky jsou kategoriální proměnné. Metody, které lze využít pro eliminaci této povahy, se pak v kontextu genetického algoritmu ukazují jako neefektivní.

Klíčová slova: *shlukování, genetický algoritmus, nelineární optimalizace*

Abstract

Some clustering problems cannot be solved using standard methods such as k-means. Instead, it is necessary to formulate them as a nonlinear optimization problem and then solve them with standard optimization or heuristic methods. In this paper, we focus on the problems associated with finding optimal clustering using a genetic algorithm. Especially in the case of crossover, crossover operations are performed that are closer to the search by brute force than to the original idea of crossover in the genetic algorithm. This is due to the natural nature of clusters, where individual clusters are categorical variables. Several methods that can be used to eliminate this property are however proven ineffective in the context of the genetic algorithm.

Keywords: *clustering, genetic algorithm, nonlinear optimization*

1 ÚVOD

Shlukování je populární vícerozměrná statistická metoda, jejíž cílem je klasifikovat objekty z dané množiny v závislosti na jejich vzájemné podobnosti. Snahou je najít takové shluky, pro které platí, že objekty přiřazené do stejného shluku jsou si vzájemně podobnější než objekty z různých shluků.

Existují dvě základní ideje, jak by mělo výsledné shlukování vypadat a jaké by mělo mít vlastnosti. První je hierarchické shlukování do systému podmnožin, kde dochází s rostoucím

počtem shluků ke větvení jednotlivých shluků, to lze vyjádřit dendrogramem. Pro rozhodnutí, jak vytvořit hierarchickou strukturu se obvykle používá míra podobnosti (*similarity*), případně nepodobnosti (*dissimilarity*), což mohou být standardní geometrické míry vzdáleností, například euklidovská, Manhattanská, maximální, nebo Mahalanobisova vzdálenost

Druhou myšlenkou je pak shlukování do disjunktních množin. Pro rostoucí počet shluků, pak žádná pravidla pro větvení jako v případě hierarchických metod neplatí. Nejznámější metodou nehierarchického shlukování je k-means. Metoda k-means pracuje s předem daným počtem shluků, je nutné tedy dopředu zadat do kolika skupin má algoritmus objekty rozdělit. Algoritmus nalezne středy shluků, tzv. centroidy, a objekty jsou přiřazeny k nejbližšímu centroidu. Algoritmus funguje iterativně tak, že v každé iteraci posouvá centroidy za účelem snížení sumy vnitroskupinových rozptylů, čímž se zároveň maximalizuje meziskupinový rozptyl. Existuje několik různých algoritmů pro volby posunů centroidů, například Loydův algoritmus [1] nebo modernější Hartigan-Wongův algoritmus [2].

Další populární metodou v posledních letech je metoda DBSCAN, která spočívá ve vytváření skupin podle vzdálenosti od nejbližších m bodů. Pokud je nějaký bod blíže než předem zadaná vzdálenost od m bodů stejného shluku, pak je do daného shluku přiřazen také. Hlavní výhodou je jak interpretace výsledných shluků, tak i výpočetní rychlost. Algoritmus je v porovnání s ostatními shlukovacími algoritmy velmi rychlý. Zároveň dokáže efektivně využít struktur databázových systémů.

V tomto článku se budeme zabývat úlohou shlukování v případě, že lze problém formulovat jako optimalizační úlohu, ale zároveň je nemožné, nebo nevýhodné z důvodu například výpočetní složitosti, vypočítat vzdálenosti mezi jednotlivými prvky. Nemožnost využití vzdáleností ani jednoduché účelové či nákladové funkce významně omezuje možnosti, jak nalézt optimální shlukování. Nelze použít populární metody jako například k-means, DBSCAN nebo metody používané pro hierarchické shlukování. Místo toho je nutné problém formulovat jako optimalizaci a řešit ho standardními metodami pro hledání optimálního řešení úloh nelineárního programování, případně heuristickými metodami jako je například genetický algoritmus. V tomto příspěvku zaměříme právě na problémy související s hledáním řešení složitých shlukovacích problémů pomocí genetického algoritmu.

Příspěvek je koncipován následovně. V kapitole 2 je definován obecně problém shlukování, kterým se zabýváme. V kapitole 3 je popsán základní princip genetického algoritmu a v kapitole 4 jsou diskutovány některé problémy, které se k jeho použití vážou. V závěru jsou pak shrnuty základní body příspěvku.

2 SHLUKOVÁNÍ JAKO OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA

Nechť x_i je shluk i -tého objektu a nabývá celočíselné hodnoty od 1 do n_c , kde n_c je celkový počet hledaných shluků. Optimalizační model pak spočívá v minimalizaci penalizační funkce $f(\mathbf{x})$, což lze zapsat následovně

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

za podmínek

$$x_i \leq n_c \text{ for } i = 1, \dots, n_p,$$

$$x_i \in \mathbb{N} \text{ for } i = 1, \dots, n_p,$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor se složkami x_i a n_p je počet objektů, které chceme shlukovat.

Na penalizační funkci $f(\mathbf{x})$ přitom nejsou kladeny žádné nároky. Můžeme předpokládat, že se jedná o nelineární funkci, která nemá žádné *pěkné* vlastnosti. Předpokládejme, že i spočtení rozdílu mezi $f(\mathbf{x}^1)$ a $f(\mathbf{x}^2)$, kde $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, nelze spočítat v lineárním čase.

Příkladem toho problému je například hledání substitutů z transakčních dat na základě incidenční matice výskytů produktů na stejné účtence, viz [3]. V tomto modelu se minimalizuje počet rozhodnutí zákazníka, které vedou k výskytu dvojic substitutů na stejné účtence. Takový celočíselný problém se svojí složitostí řadí mezi NP-obtížné úlohy (důkaz viz [4]) a i použití heuristických metod je pro daný případ problematické. Na druhou stranu výsledné shlukování je dobře interpretovatelné a logické, takže má smysl se takovým modelem zabývat i přes zjevné nedostatky týkající se výpočetní stránky modelu.

3 GENETICKÝ ALGORITMUS

Jednou z možností, jak prohledávat prostor možných shlukování, je použít genetický algoritmus. V tomto příspěvku probereme některé vlastnosti a problémy, se kterými se lze u tohoto typu problému setkat.

Genetický algoritmus má obvykle následující fáze:

1. Vytvoření počáteční populace, kde populací myslíme množinu různých shlukování $\mathbf{x}$. V kontextu genetického algoritmu budeme shlukování $\mathbf{x}$ nazývat *jedincem* a jednotlivý objekt *jedince* pak nazveme *genem*.
2. Označení části nejlepších *jedinců* za elitní za účelem jejich zachování.
3. Modifikování neelitních *jedinců*.
 - a. Křížením, kdy se náhodně vyberou dva různé *jedinci* a náhodným prohozením jednotlivých *genů* vzniknou dva nové *jedinci*, která původní nahradí.
 - b. Mutací, kdy dochází k náhodné záměně náhodně vybraných *genů*.
4. Pokud není dosaženo zadaného počtu generací nebo dostatečně kvalitního výsledku, vrací se algoritmus ke kroku 2.
5. Výpis nejlepšího *jedince*, tedy shlukování, dle účelové funkce.

Při použití genetického algoritmu se standardně nastavuje několik základních parametrů. Prvním je velikost *populace*, tedy s kolika různými *jedinci*, tedy shlukováními $\mathbf{x}$, se pracuje v jedné iteraci. Čím je populace větší, tím je algoritmus časově náročnější, ale zároveň s větším počtem *jedinců* je větší šance na nalezení lepšího řešení. Populace je na počátku algoritmu generována náhodně, případně může být vložena formou návrhu. Pro účely shlukování stovek objektů je standardním rozsah populace v řádu stovek až tisíců.

Z každé iterace, v genetickém algoritmu někdy nazývané *generace*, se určité procento nejlepších jednotlivců zachová. Tím se zabrání ztrátě zatím nejlepších nalezených řešení. Tito *jedinci* se nazývají elitní a parametrem se určuje jaké procento, případně absolutní počet, zůstane zachováno. Nevýhodou jsou v případě vysokého počtu elitních *jedinců* malé změny mezi iteracemi algoritmu.

Třetím zásadním parametrem je pravděpodobnost mutace jedinců. V každé generaci se náhodně vyberou *jedinci*, jejich některé *geny* budou zmutovány – náhodně zaměněny za jiný *gen*. I tato operace je v zásadě náhodné prohledávání prostoru. Často se v genetických úlohách zavádí i nějakou formu lokální prohledávání, tedy prohledání bezprostředního okolí pomocí hrubé síly.

4 DISKUZE

Problém se kterými se model definovaný v kapitole 2 potýká v případě použití genetického algoritmu je zejména křížení. Idea křížení je postavena na prohození několika genů mezi dvěma jedinci. V případě našeho problému to ale nedává smysl, pokud nejsou čísla shluků sjednocena.

Uvažujme dva různé jednotlivce $\mathbf{x}^1$ a $\mathbf{x}^2$ níže:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že číslo shluku je kategoriální proměnná, není mezi jednotlivci žádný rozdíl – jsou totožným shlukováním, které je pouze jinak očíslováno. V tu chvíli se křížení stává pouze variací na prohledávání prostoru hrubou silou. Je třeba říci, že se jedná o poměrně efektivní prohledávání hrubou silou, viz výsledky simulací v [3], ale struktury dat zde není dostatečně využíváno.

Existuje několik metod, které lze v tomto případě použít. Jednou z nich je párování jednotlivců a jejich očíslování na základě statistik podobnosti, například *purity*. Statistika *purity* je míra podobnosti dvou jednotlivců. Značí, do jaké se shluky jednoho jednotlivce shodují s jiným jednotlivcem. Vypočítá se tak, že u každého shluku z jednotlivce $\mathbf{x}^1$ se spočte počet objektů z nejběžnější shluku z druhého jednotlivce $\mathbf{x}^2$. Alternativou je pak užití Rand statistiky [5].

Nevýhodou obou metod je však vysoká náročnost výpočtu těchto statistik, které nelze spočítat v lineárním čase. V takovém případě se extrémně prodlouží výpočetní doba genetického algoritmu.

Další možností je jednoduché přečíslování dle prvního výskytu nového shluku. V tom případě by $\mathbf{x}^2$ bylo přeznačeno na přesnou podobu $\mathbf{x}^1$, který již toto pravidlo splňuje. Zde je velkou nevýhodou značná nerobustnost metody – v případě změny malého počtu shluků může dojít ke značně rozdílnému očíslování shluků. Na druhou stranu je vždy vyřešen problém se symetrickým řešením.

Výpočetní experimenty ukazují, že obě zmíněné metody – sjednocení s maximalizací *purity*, tak jednoduché přečíslování dle prvního výskytu – mají značné nedostatky. Sjednocení přes statistiku *purity* je náročné do takové míry, že i základní verze genetického algoritmu s křížením je rychlejší a nalezne optimální (nebo alespoň velmi dobré) řešení výrazně rychleji. Nestává se přitom, že by se jednalo o řešení horší. Přečíslování dle prvního výskytu výpočetně pomalejší není – v omezené simulační studii se nepotvrdilo statisticky významné

zpomalení času běhu genetického algoritmu, ale zároveň nedošlo ani ke zlepšení rychlosti konvergence genetického algoritmu k řešení, které je uznáno za nejlepší.

5 ZÁVĚR

V příspěvku jsme se zabývali diskuzí problematiky užití genetického algoritmu na složité shlukovací úlohy formulované jako optimalizační úlohy. Křížení často využívané v genetických algoritmech vede v některých případech spíše na prohledávání prostoru hrubou silou, což je v rozporu s jednou z hlavních myšlenek genetického algoritmu. Dvě navržené metody úprav genetického algoritmu pro zachování struktury spočívající v párování kategoriálních proměnných mezi různými shluky se ale ukázaly jako neefektivní.

Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory projektu IGA F4/27/2020 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

- [1] Lloyd, S. P. (1957). Least square quantization in PCM. *Bell Telephone Laboratories Paper*.
- [2] Hartigan, J.A. (1975) Clustering algorithms. John Wiley & Sons.
- [3] Holý, V., Sokol, O., and Černý, M. (2017). Clustering Retail Products Based on Customer Behaviour. *Applied Soft Computing*, 60, pp. 752–762.
- [4] Sokol, O. (2020). *Analysis of Client and Product Base: Specifics of Retail Transaction Data*. Dizertační práce. Vysoká škola ekonomická v Praze.
- [5] Rand, W. M. (1971). Objective criteria for the evaluation of clustering methods. *Journal of the American Statistical Association*. American Statistical Association. 66 (336), pp. 846–850.

Kontaktní údaje

Ing. Ondřej Sokol, PhD.
Vysoká škola ekonomická v Praze
Fakulta informatiky a statistiky
náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3
Email: ondrej.sokol@vse.cz

ODHAD ELASTICITY SUBSTITÚCIE VSTUPOV POMOCOU PANELOVÝCH ÚDAJOV PRE RÔZNE KRAJINY¹

ESTIMATION OF ELASTICITY OF SUBSTITUTION USING PANEL DATA IN DIFFERENT ECONOMIES

Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková

Abstrakt

V práci sú pomocou panelových údajov odhadnuté hodnoty elasticity substitúcie vstupov pre rôzne ekonomiky sveta. Aby sa preskúmal vzťah medzi rastom, rozvojom a otvorenosťou ekonomík a elasticitou substitúcie vstupov, sú v práci realizované odhady na údajoch, ktoré zodpovedajú krajinám a obdobiam s rôznymi hodnotami hospodárskeho rastu, hospodárskeho rozvoja a otvorenosti krajiny. Na odhad sú použité ekonometrické špecifikácie vyplývajúce z podmienok prvého rádu firmy maximalizujúcej zisk. Na odfiltrovanie cyklických vplyvov sú časové rady upravené frekvenčným filtrom. Odhadnuté hodnoty elasticity substitúcie vstupov sú vždy menšie ako 1, čím sa potvrdzujú súčasné empirické výsledky spochybňujúce relevantnosť produkčnej funkcie Cobb-Douglasovho typu. Analýza preukázala súvis medzi hodnotami elasticity substitúcie vstupov a hospodárskym rastom, hospodárskym rozvojom a mierou otvorenosti, potvrdzujúc súčasný teoretický výskum.

Kľúčové slová: *elasticita substitúcie vstupov, frekvenčné filtre, panelové dáta*

Abstract

The paper estimates the elasticity of substitution in various world economies. The relationship between the value of elasticity substitution and various characteristics of countries such as growth, development, openness and size is examined. Econometric specifications resulting from the first-order conditions of the profit-maximizing firm are used for estimation. To filter out cyclical effects, a frequency filter adjusts the time series. The specifications are estimated by the least squares method and also as systems of two equations with correlated random terms. The estimated values of the elasticity of substitution are usually less than 1, which confirms the current empirical results questioning the relevance of the production function in the Cobb-Douglas form. There is a relationship between the values of elasticity of substitution and average growth, which confirms current theoretical research.

Keywords: *elasticity of substitution, frequency filters, panel data*

1 ÚVOD

Elasticita substitúcie vstupov je kľúčový ekonomický parameter, ktorý hrá rolu vo vysvetlení mnohých ekonomických javov (Chirinko a Malick, 2017). Z pohľadu analýzy dynamického vývoja slovenskej ekonomiky, ktorá sa aj po realizácii mnohých spoločenských zmien neustále nachádza v tranzitívnom stave, sú zaujímavé vzťahy medzi elasticitou substitúcie vstupu a ekonomickým bohatstvom a medzi elasticitou substitúcie vstupu a hospodárskym

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a VEGA 1/0193/20, Vplyv priestorových spillover efektov na inovačné aktivity a rozvoj regiónov EÚ.

rastom. Tieto vzťahy sú detailne teoreticky spracované v prácach de La Grandvilla (2017) a Klumpa et al. (2012).

Preto je cieľom tejto práce realizácia odhadu elasticity substitúcie vstupov pre rôzne krajiny sveta. Odhady sú realizované na panelových údajoch získaných z databáz Penn World Tables (Feenstra et al. 2015). Údaje sú upravené frekvenčným filtrom Baxterovej a Kinga (1999) podľa návrhu autorov a tiež Chirinka a Malicka (2017). Aby sa preskúmal vzťah medzi rastom, rozvojom a otvorenosťou ekonomík a elasticitou substitúcie vstupov, v práci ponúkame realizáciu odhadov na údajoch, ktoré zodpovedajú krajinám a obdobiam s rôznymi hodnotami hospodárskeho rastu, hospodárskeho rozvoja a otvorenosti krajiny.

Prehľad prác zaoberajúcich sa odhadom elasticity substitúcie vstupov a ďalších parametrov produkčnej funkcie sú dostupné v súčasnej ekonomickej literatúre. Klump et al. (2012) a Chirinko (2008) ponúkajú ucelené a podrobne klasifikované prehľady. Podľa rôznych prehľadov, vo svetovej literatúre absentujú práce, ktoré sa zaoberajú odhadom elasticity substitúcie vstupov pre množstvo krajín v danom časovom období. Pre takýto odhad využijeme údaje upravené.

2 METODOLÓGIA

Odhadom parametrov produkčnej funkcie sa zaoberalo množstvo ekonómov, pozri (Chirinko, 2008), (Klump et al. 2012). Výskum zaoberajúci sa odhadom produkčných funkcií využíva ekonometrické špecifikácie vzťahov na ponukovej strane hospodárstva. Sú nimi linearizovaný tvar produkčnej funkcie a podmienky prvého rádu reprezentatívnej firmy maximalizujúcej zisk. Tieto podmienky vysvetľujú kapitálový dopyt a pracovný dopyt.

Odhad týchto ekonometrických špecifikácií je spojený s teoretickými aj štatistickými problémami, ktoré sťažujú výber vhodného prístupu na odhad parametrov produkčnej funkcie. Hlavným teoretickým problémom je nevyhnutnosť normalizovať všeobecný tvar produkčnej funkcie s konštantnou nejednotkovou elasticitou substitúcie vstupov. Z prác (de La Grandville, 2017) a (Klump et al. 2012) vyplýva, že odhad linearizovaného tvaru produkčnej funkcie je spojený s chybou ekonometrickej špecifikácie, ak nie je produkčná funkcia správne normalizovaná. Normalizácia produkčnej funkcie by nemala vplyv na odhad parametrov iba za predpokladu jednotkovej elasticity substitúcie vstupov, t.j. v prípade Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie.

Za najväčší problém zo štatistického hľadiska považujeme nestacionárnosť prislúchajúcich procesov generujúcich časové rady a z toho vyplývajúcu prípadnú nepravú regresiu lineárnych vzťahov na ponukovej strane. Obvyklým riešením nestacionarity premenných je odhad prislúchajúceho kointegračného vzťahu modelom s korekčným členom, ako to vo svojej práci využil Caballero (1994). Okrem toho, kointegračný vzťah prislúcha teórii racionálneho správania reprezentatívnej firmy maximalizujúcej zisk, ktorá je relevantná z dlhodobého hľadiska. Chirinko a Mallick (2011) kritizovali tento prístup, pretože kointegračný vzťah medzi podielmi vstupu (práce alebo kapitálu) a produkcie na jednej strane a ich podielmi cien na druhej strane podľa nich nemeria elasticitu substitúcie vstupov. Podrobne ich argumentáciu rozoberáme v Szomolányi et al (2019).

Chirinko a Mallick (2017) navrhli ako riešenie získať údaje dlhodobého správania pomocou frekvenčných filtrov. Tento prístup využijeme aj v našej práci. Zameriame sa na odhad vzťahov upravujúcich podmienky prvého rádu firmy maximalizujúcej zisk. Vzťah možno vo všeobecnosti zapísať v tvare (Chirinko a Mallick, 2017):

$$\Delta(y_t) = \beta_0 - \sigma \Delta(x_t) + u_t \quad (1)$$

kde y je prirodzený logaritmus podielu vstupu kapitál a výstupu a x je prirodzený logaritmus podielu ich cien. Časové rady sú upravené o krátkodobé cyklické výkyvy frekvenčným filtrom Baxterovej a Kinga (1999). Elasticitu substitúcie vstupov meriame ako zápornú hodnotu elasticity vplyvu podielov cien kapitálu a produkcie na podiele ich množstiev.

Na parametre špecifikácie (1) odhadujeme metódami na panelové údaje. Aplikujeme odhad s fixnými aj náhodnými efektmi. Štandardné odchýlky parametrov sú vypočítavané procedúrou odolnou voči autokorelácii a heteroskedasticite, aby boli získané odhady konzistentné.

Aby sa preskúmal vzťah medzi rastom, rozvojom a otvorenosťou ekonomík a elasticitou substitúcie vstupov, v práci realizujeme odhady na údajoch, ktoré zodpovedajú krajinám a obdobiam s rôznymi hodnotami hospodárskeho rastu, hospodárskeho rozvoja a otvorenosti krajiny. Vykonalí sme odhady s výberom údajov, ktoré zodpovedali časovým obdobiam a krajinám, v ktorých bola priemerná medziročná miera rastu v období šesť rokov vyššia ako 2 % a v ktorých bola miera rastu menšia alebo rovnajúca sa 2 %. V ďalšom odhade sa výber údajov vzťahoval na hodnotu priemerného reálneho hrubého domáceho produktu na obyvateľa v období šesť rokov. Hraničná hodnota je 13.000 USD na obyvateľa. Nakoniec sú urobené odhady s výbermi údajov vzhľadom na priemernú mieru otvorenosti krajiny v období šesť rokov. Hraničná hodnota pre otvorenosť je zvolená na úrovni 75 %.

3 ÚDAJE

Všetky použité údaje pochádzajú z voľne dostupnej databázy Penn World Tables. Výstup v každej krajine je reprezentovaný časovými radmi reálneho HDP v stálych národných cenách v miliónoch amerických dolárov (USD) z roku 2011 (označenie v Penn World Tables je *rgdpna*).

Vstup kapitál je reprezentovaný časovými radmi reálneho kapitálu v stálych národných cenách v miliónoch USD z roku 2011 v každej krajine (*rkna*, 1. koncepcia). Vstup práca je reprezentovaný časovými radmi počtu ľudí zapojenými na trhu práce v miliónoch (*emp*, 2. koncepcia) alebo priemerného ročného počtu odpracovaných hodín osobami zapojenými na trhu práce (*avh*, 3. koncepcia) v každej krajine.

Cena výstupu je reprezentovaná časovými radmi deflátoru HDP v každej krajine. Deflátor HDP je vypočítaný ako podiel reálneho a nominálneho HDP (*rgdpna/cgdp*). Cena kapitálu je v každej krajine vypočítaná podľa vzťahu:

$$p_K = (1 + irr) \frac{ck}{rkna} \quad (2)$$

kde *irr* je reálna vnútorná miera návratnosti, *ck* je nominálny kapitál a *rkna* reálny kapitál. Nominálna vnútorná miera návratnosti je vyjadrená z reálnej pomocou deflátoru kapitálu.

Časové rady logaritmov kapitálu a HDP a ich cien sú upravené frekvenčným filtrom. Použitie tohto filtra vyžaduje nastavenie intervalu, ktorý odfiltruje frekvencie hospodárskeho cyklu a keďže sa využívajú kľzavé priemery, je potrebné zvoliť počet období kľzavého priemeru. Chirinko a Mallick (2017) vo svojej analýze preukázali, že americký hospodársky cyklus zodpovedá parametrom navrhnutým Baxterovou a Kingom (1999), podľa ktorých je periodicita hospodárskeho cyklu 2–8 rokov a počet období kľzavého priemeru 3. V analogickej analýze Szomolányi et al. (2019) potvrdili túto voľbu pre slovenský hospodársky cyklus. V tejto analýze zvolíme rovnaké parametre frekvenčného filtra na úpravu dát. Voľbou počtu období kľzavého priemeru 3 strácame 6 pozorovaní. Do štúdie sú zaradené iba tie časové rady, ktorých počet pozorovaní je po aplikovaní frekvenčného filtra väčší ako 30.

Pre výber rôznych údajov v rôznych odhadoch sme vytvorili šesťročné priemery reálneho HDP na obyvateľa, medziročnej miery rastu reálneho HDP na obyvateľa a miery otvorenosti, kde reálny HDP je reprezentovaný časovými radmi reálneho HDP v stálych národných cenách v miliónoch amerických dolárov (USD) z roku 2011 (*rgdpna*) a miera otvorenosti je súčet podielov vývozu a dovozu na HDP (z Penn World Tables vypočítaný ako $cs_h_x - cs_h_m$). Reálny HDP a miera otvorenosti sú priemerované aritmeticky, miera rastu je priemerovaná geometricky.

4 VÝSLEDKY

V tab. 1. uvádzame získané odhady. Tri hviezdičky označujú štatistickú významnosť na 1% hladine významnosti, dve hviezdičky na 5% hladine významnosti a jedna hviezdička na 10% hladine významnosti. Väčšina odhadov je štatisticky významných na 1% hladine významnosti. Štandardné odchýlky parametrov sú vypočítavané procedúrou odolnou voči autokorelácii a heteroskedasticite, aby boli získané odhady konzistentné. Konštatujeme, že odhady s fixnými aj náhodnými efektmi sa použitím rovnakých vzoriek údajov podstatne nelíšia.

Tab. 1: Výsledky odhadov modelov s fixnými a náhodnými prierezoými efektmi

Model	Výber	Sigma	Št. odch.	n	Test modelu	Štatistika	Krit. hodnota	
FEM	všetky údaje	0,144***	0,019	6065	F pool test	7,408***	1,213	
REM	všetky údaje	0,149***	0,019	6065	Hausmanov	1,370	3,841	
Model	Výber	Sigma	Št. odch.	n	Výber	Sigma	Št. odch.	n
FEM	$growth_t > 1,02$	0,118***	0,023	3158	$growth_t \leq 1,02$	0,192***	0,022	2907
REM	$growth_t > 1,02$	0,119***	0,022	3158	$growth_t \leq 1,02$	0,199***	0,022	2907
FEM	$growth_{t-6} > 1,02$	0,211***	0,024	3198	$growth_{t-6} \leq 1,02$	0,074***	0,016	2867
REM	$growth_{t-6} > 1,02$	0,214***	0,024	3198	$growth_{t-6} \leq 1,02$	0,083***	0,016	2867
FEM	$openess_t > 0,75$	0,064***	0,023	1250	$openess_t \leq 0,75$	0,146***	0,019	4815
REM	$openess_t > 0,75$	0,087***	0,025	1250	$openess_t \leq 0,75$	0,152***	0,019	4815
FEM	$development_t > 13000$	0,198***	0,032	2332	$development_t \leq 13000$	0,134***	0,018	3733
REM	$development_t > 13000$	0,194***	0,033	2332	$development_t \leq 13000$	0,138***	0,018	3733
FEM	$development_{t-6} > 13000$	0,216***	0,034	2017	$development_{t-6} \leq 13000$	0,131***	0,018	4048
REM	$development_{t-6} > 13000$	0,219***	0,033	2017	$development_{t-6} \leq 13000$	0,134***	0,018	4048

Zdroj: Vlastné výpočty

Najskôr sme realizovali odhady pre celú vzorku údajov. Odhad predpovedá svetovú hodnotu elasticity substitúcie vstupov medzi 0,14 a 0,15. Podľa testov významnosti sú tieto hodnoty väčšie ako 0 a nižšie ako 1, avšak bližšie k 0 ako k 1.

Výber údajov v ďalších odhadoch zodpovedá rôznej hodnote priemernej miery rastu. Porovnaním odhadov možno konštatovať, že dynamicky sa rozvíjajúce krajiny majú o málo menšiu elasticity substitúcie vstupov. Tento výsledok môže byť vnímaný sporne vzhľadom na teóriu (de La Grandville, 2017), ktorá predpokladá pozitívny vzťah medzi ustáleným stavom a elasticitou substitúcie vstupov. V ďalšom experimente sme do odhadu vybrali údaje vzhľadom na 6 rokov oneskorený priemerný rast. Podľa výsledkov, krajiny priemerná medziročná miera rastu bola v predchádzajúcich 6 rokov vyššia ako 2 % majú štatisticky významne vyššiu hodnotu elasticity substitúcie vstupov.

Ak sa výber údajov vzťahuje na mieru otvorenosti ekonomiky, možno konštatovať, že elasticita substitúcie vstupov v zatvorených krajinách je štatisticky významne vyššia.

Elasticita substitúcie vstupov je vyššia v rozvinutejších krajinách. Tento rozdiel je výraznejší, ak rozdelíme údaje podľa priemerného reálneho HDP na obyvateľa v predchádzajúcich 6 rokoch.

5 ZÁVER

V práci sme odhadli elasticitu substitúcie vstupov v rôznych krajinách sveta. Podľa odhadov sú hodnoty elasticity menšie ako 1. Potvrdzujú sa tak empirické závery Klumpa et al. (2007), Chirinka a Mallicka (2017) a Szomolányiho et al. (2019). Jednotková elasticita substitúcie vstupov zodpovedá často používanej produkčnej funkcii v jednoduchom Cobbovom-Douglasovom tvare. V skutočnosti však súčasný empirický výskum nepotvrdzuje relevantnosť použitia Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie. Aj preto Chirinko a Mallick (2017, s. 251) navrhujú: „že by sa malo upustiť od často využívaného predpokladu Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie v mnohých oblastiach ekonomickej analýzy. Dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy s predpokladom jednotkovej elasticity substitúcie vstupov nadhodnocujú skutočný vplyv zmien cien – vrátane tradičného kanála monetárnej politiky – v porovnaní s modelmi s nižšou elasticitou substitúcie vstupov. Simulačné modely zdanenia využívajúce Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu predpovedajú podobné nadhodnotenie vplyvu daňových škrtov. Dôsledkom neuvažovania Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie bude rozšírenie neoklasického modelu rastu o ďalšie faktory, ako význam zmeny technológie, ktorá vplýva na podiely vstupov na produkcii a na vybilancovaný rast.“

Podľa odhadov z tejto práce existuje súvis medzi hodnotou elasticity substitúcie vstupov a otvorenosťou krajiny. Hodnota elasticity substitúcie vstupov je nižšia v otvorených krajinách a vyššia v zatvorených.

Výsledky práce podporujú teóriu (de La Grandville, 2017), ktorá predpokladá pozitívny vzťah medzi ustáleným stavom, hospodárskym rozvojom a elasticitou substitúcie vstupov. Hodnota elasticity substitúcie vstupov je vyššia v rozvinutých krajinách. Hodnota elasticity substitúcie vstupov je v krajine vyššia, ak krajina v predchádzajúcich 6 rokoch vykazovala vyšší hospodársky rast. Tento výsledok je dôležitý s ohľadom na dynamický vývoj tranzitívnych ekonomík akou sú (boli) európske postkomunistické krajiny, medzi ktoré patrí aj Slovensko.

Z výsledkov však tiež vyplýva, že krajiny, v ktorých sa aktuálne realizuje vyšší hospodársky rozvoj, majú nižšiu hodnotu elasticity substitúcie vstupov. Ponúka sa jednoduché vysvetlenie tohto výsledku. Podľa teórie rastu vysoký hospodársky rozmach v krajine môže byť reakciou na štrukturálne zmeny, vďaka ktorým sa zvýši ustálený stav. Tieto zmeny môžu byť tiež spojené so sektorovými zmenami, v ktorých sa vytvárajú nové odberateľsko-dodávateľské reťazce, implementovaním nových technológií, atď. V rannom štádiu tohto procesu, kým sa vytvoria fungujúce ekonomické relácie, môže byť nižšia substituovateľnosť medzi prácou a kapitálom. Je však známe, že podobnými ekonometrickými analýzami ako táto nemožno robiť závery o príčinách a dôsledkoch. Preto konštatujeme, že takúto interpretáciu vzťahu medzi okamžitým rastom a hodnotou elasticity substitúcie vstupov potrebujeme podrobiť ďalšiemu výskumu.

Pri interpretácii výsledkov treba zohľadniť slabiny výskumu spojené s problémami databázy Penn World Tables, ktorá spája údaje získané rôznymi metódami systémov národných účtov s rôznymi podielmi tieňovej ekonomiky. Pre identifikáciu hlbších vzťahov medzi elasticitou substitúcie vstupov a charakteristikami rôznych ekonomík bude potrebný ďalší výskum.

Použitá literatúra

1. BAXTER, M., KING, R. G. 1999. Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. *Review of Economics and Statistics*, roč. 81, 1999, č. 4, s. 575-593.
2. CABALLERO, R. J. 1994. Small Sample Bias and Adjustment Costs. *The Review of Economics and Statistics*, roč. 76, 1994, č. 1, s. 52-58.

3. CHIRINKO, R. S. 2008. σ : The long and short of it. *Journal of Macroeconomics*, roč. 30, 2008, č. 2, s. 671-686.
4. CHIRINKO, R. S., MALLICK, D. 2011. Cointegration, factor shares, and production function parameters. *Economics Letters*, roč. 112, 2011, č. 2, s. 205-206.
5. CHIRINKO, R. S., MALLICK, D. 2017. The Substitution Elasticity, Factor Shares, and the Low-Frequency Panel Model. *American Economic Journal: Macroeconomics*, roč. 9, 2017, č. 4, s. 225-253.
6. DE LA GRANDVILLE, O. 2017. *Economic Growth: A Unified Approach (2nd ed.)*. Cambridge University Press, 2017.
7. FEENSTRA, R. C., INKLAAR, R., TIMMER, M. P. 2015. The Next Generation of the Penn World Table. *American Economic Review*, roč. 105, 2015, č. 10, s. 3150-3182.
8. KLUMP, R., MCADAM, P., WILLMAN, A. 2007. Factor Substitution and Factor-Augmenting Technical Progress in the United States: A Normalized Supply-Side System Approach. *Review of Economics and Statistics*, roč. 89, 2007, č. 1, s. 183-192.
9. KLUMP, R., MCADAM, P., WILLMAN, A. 2012. The Normalized CES Production Function: Theory and Empirics. *Journal of Economic Surveys*, roč. 26, 2012, č. 5, s. 769-799.
10. SZOMOLÁNYI, K., LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2019. Estimate of Elasticity of Substitution of Inputs in Slovak Economy. *Politická Ekonomie*, roč. 67, 2019, č. 6, s. 611-630.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 822, (421 2) 67 295 822, (421 2) 67 295 829
 email: karol.szomolanyi@euba.sk, martin.lukacik@euba.sk, adriana.lukacikova@euba.sk

KORPORÁTNE STRATÉGIE AKO HRA THE GAME OF CORPORATE STRATEGIES

Zoltán Végh

Abstrakt

V príspevku je analyzovaný dynamický efekt odchodu a hierarchického postupu zamestnancov v korporátnom prostredí. Dôraz sa pritom kladie predovšetkým na vytvorenie modelu, ktorý minimalizuje počet potrebných novo najatých ľudí do korporátnej spoločnosti so zohľadnením fluktuácie v danom prostredí. Na tento účel boli použité dynamické vzťahy odchodov a povyšovaní zamestnancov na hierarchickú štruktúru spoločnosti, pričom sme rozšírili model o personálno-finančnú plánovaciu funkciu tak, aby bol vhodný aj pre podporu rozhodovania.

***Kľúčové slová:** hra, hráči, fluktuácia, korporácia, povýšenie*

Abstract

In the following paper we've analyzed the dynamic effect of employee leaves and their promotion process in the company hierarchy. We've concentrated on creating a model which minimizes the amount of new hires needed by the company by also taking into account the natural employee turnover of the given environment. To achieve this, we've used the dynamic relationships of the turnover and promotion rates and the corporate hierarchic structure, while we've also expanded the model by adding an HR-finance planning function which makes it suitable for decision support.

***Keywords:** game, players, turnover, corporation, promotion*

1 Úvod

Korporácie a nadnárodné spoločnosti sa čoraz viac zaujímajú o humánnu stránku zamestnania svojich zamestnancov. Napriek obrovským pokrokom v procese automatizácie aktivít, spoločnosti zaoberajúce sa predajom služieb stále aktívne hľadajú „zamestnávateľných ľudí“. V prípade mnohých spoločností predstavujú osobné náklady viac ako polovicu ich celkových nákladov. Takto sa dá minimálnymi optimalizačnými činnosťami usporiť značné finančné náklady a zvýšiť ziskovosť spoločnosti.

V príspevku sa zaoberáme optimalizáciou potreby nových zamestnancov použitím vzťahov založených na fluktuácii zamestnancov a na rýchlosti ich kariérneho rastu pri zachovaní existujúcej hierarchie. Na túto optimalizáciu sme použili model inšpirovaný princípmi teórie hier.

2 Údaje

Ako východiskové údaje sme použili počty zamestnancov, fluktuáciu a pomer povýšených v existujúcej spoločnosti. Zamestnanci boli rozdelení do piatich úrovní, z ktorých posledná skupina predstavuje vrcholový manažment a títo zamestnanci už nemôžu byť povýšení. Pre účely modelovania sme použili trojročný priemer týchto ukazovateľov a posledný dostupný stav zamestnancov.

3 Formulácia modelu

Počet zamestnancov na jednotlivých zamestnaneckých úrovniach sme vyjadrili z ich dynamického vývoja v čase a do modelu sme vložili ich vyrovnané stavy (Shone, 2003).

Ukazovatele použité pri modelovaní boli:

P_i – pravdepodobnosť povýšenia,

F_i – pravdepodobnosť nepovýšenia;

O_j – pravdepodobnosť odchodu zamestnanca

Z_j – pravdepodobnosť, že zamestnanec zostane v spoločnosti.

Tieto pravdepodobnosti predstavujú stratégie zamestnávateľa (P_i ; F_i) a stratégie zamestnanca (O_j ; Z_j). Vďaka faktu, že súčet stratégií každého hráča sa má rovnať jednej a existujú iba dve stratégie pre každého hráča, redukovali sme počet stratégií na polovicu v našich ďalších úvahách.

3.1 Dynamizácia počtu zamestnancov

Dynamický vzťah každej zamestnaneckej úrovne vyplýva z logickej postupnosti, že na danom úrovni zostanú nepovýšení zamestnanci, ktorí sa zároveň rozhodli zostať v spoločnosti plus ich povýšení podriadení, teda:

$$X_t = P_{X-1} * X - 1_{t-1} + (1 - P_X - O_X) * X_{t-1}$$

kde X je počet zamestnancov na danej zamestnaneckej úrovni a $X-1$ je počet zamestnancov o úroveň nižšie. V najnižšej zamestnaneckej úrovni je skupina počet novo najatých zamestnancov, označená ako H . Ak poslednú, najvyššiu manažérsku úroveň označíme ako N^* , potom počet potrebných nových zamestnancov má tvar:

$$H = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} P_i} * \frac{O_n}{(1 - O_H)} * N^*$$

V uvedenom vzťahu vyjadruje O_n pravdepodobnosť odchodu jedného člena najvyššieho manažmentu za dané obdobie.

Tvar tejto rovnice bol tvorený použitím dynamickej rovnice hore uvedenej tak, že sme z nej vyjadrili bod konverencie.

3.2 Hra korporácie

Korporácie tvoria hlavnú ťažnú silu slovenskej ekonomiky (Matijek, 2018). Napriek tomu, že ich predmety podnikania sa líšia výrazne od agrokultúry cez priemysel až k administratívnym a vedeckým činnostiam, všetky obsahujú základné črty, ktoré sú spoločné, a to hierarchia funkcií, väčšie množstvo zamestnancov, ktorí tvoria viaceré homogénne skupiny podľa ich pracovných činností alebo funkcií, právomoci a v rámci jedného sektora majú veľmi podobné organizačné schémy a zvyky. Hierarchia funkcií znamená, že spoločnosť má určitú postupnosť funkcií od začiatocníkov až k najvyšším vedúcim zamestnancom. Na každom stupni tohto rebríčka sa môže nachádzať viac funkcií, ktoré ale majú podobné právomoci, povinnosti a úlohy.

Korporácie majú vyšší počet zamestnancov z jednoduchého dôvodu: čím viac pracovníkov má daná spoločnosť, tým väčší je jej potenciálny výstup, čo znamená vyššie tržby, ktoré kvôli znižovaniu efektu fixných nákladov a za predpokladu nezmenenia sadzby variabilných nákladov znamená vyšší zisk.

Zamestnanci spoločností odvedú svoje pracovné výkony týmto spoločnostiam za zmluvne dohodnutú protihodnotu. Je jasné, že výkon zamestnancov, teda množstvo a nie v poslednom rade kvalita ich práce majú veľmi významný vplyv na úspešnosť podnikania ich zamestnávateľa.

Preto je dôležitým faktorom vo finančnom a personálnom plánovaní spoločnosti počet zamestnancov, ktorých chce spoločnosť v blízkej budúcnosti zamestnať. Pri náboe má personálne oddelenie obmedzené údaje o uchádzačovi, jeho záujmoch, odborných

vedomostiach, získaných zručnostiach, pracovnej morálke a iných faktoroch, ktoré sú dôležité pre prácu špecifickú pre korporátne prostredie. Je zrejmé, že spoločnosť sa snaží minimalizovať množstvo ľudí, ktorých chce prijímať. Táto jej snaha vychádza z faktu, že noví zamestnanci sa zúčastnia na školeniach ešte predtým, než začnú vykonávať svoju prácu a počas týchto školení im vypláca spoločnosť mzdu. Tieto náklady, plus náklady na lektorov, študijný materiál, atď. predstavujú pre spoločnosť tzv. slepé náklady, lebo uchádzač sa môže rozhodnúť počas skúšobnej doby hocikedy okamžite skončiť pracovný pomer. Vtedy sa stávajú tieto náklady neefektívnymi: daný zamestnanec korporácii neodviedol žiadne výkony, náklady neprispeli k vytvoreniu výnosov.

Z tohto vyplýva, že každá korporácia sa má snažiť minimalizovať počet nových zamestnancov. V reálnom svete vie každá spoločnosť vyčíslieť náklady na jedného nového zamestnanca, a tak môže s použitím tejto funkcie vypočítať aj konkrétnu peňažnú hodnotu nákladov. Pretože však tieto náklady majú konštantný charakter, nemajú vplyv na umiestneniach extrémov účelovej funkcie.

Upravením funkcie na maximalizačný tvar dostaneme základnú účelovú funkciu nášho modelu, funkciu platieb korporácie:

$$f(P_i, F_i): -H = -\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} P_i} * \frac{O_n}{(1 - O_H)} * N^* \rightarrow \max$$

3.3 Hra zamestnancov

V prezentovanom modeli vystupujú aj zamestnanci v zastúpení jednotlivých zamestnaneckých úrovní ako hráči. Kým korporácia rozhoduje medzi stratégiami povýšiť-nepovýšiť zamestnancov a pracuje so stratégiami P_i , zamestnanci sa rozhodujú medzi stratégiami zostať-odísť zo spoločnosti. Ak sa zamestnanec rozhodne odísť zo spoločnosti, spoločnosť musí nájsť náhradu ak nechce prísť o tú časť svojho podnikania, ktorú vykonával odchádzajúci zamestnanec. Pretože v každej spoločnosti existuje určitá miera fluktuácie zamestnancov, spoločnosti musia robiť nábor v nejakej prirodzenej výške, aby aspoň zachovali počet ich zamestnancov, no zároveň musia motivovať ich zamestnancov, aby zostali v spoločnosti. Motivácia alebo stimulovanie zamestnancov môže mať finančný aj nefinančný charakter, a podľa Urbana (Urban, 2017) tieto typy motivácií majú iný optimálny pomer pre každého zamestnanca. V prezentovanom modeli predpokladáme, že kariérny rast je dostatočným ukazovateľom pre ohodnotenie motivácie zamestnanca, preto sme ako účelovú funkciu zamestnaneckých úrovní navrhli minimalizovať podiel povýšení a odchodov na danej

úrovni, t. j. čím vyššia pravdepodobnosť povýšenia, tým menej zamestnancov odchádza z danej úrovne.

3.4 Kompilácia hry

V poslednom kroku sme nastavili cieľové počty zamestnancov na jednotlivých zamestnaneckých úrovniach a maximálne odchýlky uvažované manažmentom spoločnosti. V tomto kroku boli do modelu zaradené ďalšie štyri nové premenné: T_i – cieľový počet zamestnancov na i -tej úrovni, E_i – začiatkový počet zamestnancov na i -tej úrovni, r – počet rokov sledovania alebo plánovania a s_i – tolerancia rozdielu výsledku od želaných hodnôt. Tieto premenné použijeme ako dodatočné ohraničenia v modeli, ktorý bude formulovaný v ďalšej časti.

Tieto ohraničenia vyplývajú z aproximácie dynamického vývoja zamestnancov na daných úrovniach. Ak spoločnosť nechce zvýšiť ani znížiť počet jej zamestnancov, potom $T_i = E_i$. Potom model ako hra má nasledujúci tvar pre spoločnosť s piatimi zamestnaneckými úrovňami:

$$\max f(P_i, O_i) = -\frac{\prod_{i=1}^4 (P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^4 P_i} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} - \sum_{i=1}^4 \frac{P_i}{O_i} - \sum_{i=1}^4 (u_i + v_i)$$

pri ohraničeniach:

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{k=1}^4 (P_k + O_k)}{\prod_{k=1}^4 P_k} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} * \frac{O_i}{P_i(P_i + O_i)} - \frac{1}{O_i} - u_i &\leq 0 \text{ pre } i = 1, \dots, 4 \\ -\frac{\prod_{k=1}^4 (P_k + O_k)}{\prod_{k=1}^4 P_k} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} * \frac{1}{(P_i + O_i)} + \frac{1}{O_i^2} - v_i &\leq 0 \text{ pre } i = 1, \dots, 4 \\ P_i + F_i &= 1 \text{ pre } i = 1, \dots, 4 \\ O_i + Z_i &= 1 \text{ pre } i = 1, \dots, 4 \\ \frac{P_i}{P_{i+1} + O_{i+1}} &\leq 1 \text{ pre } i = 1, \dots, 3 \\ \frac{P_4}{O_5} &\leq 1 \end{aligned}$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * (1 - O_H)H + (1 - P_i - O_i)^r E_i + s_i \text{ pre } i = 1$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{t-1} - T_{t-1}}{2} + (1 - P_i - O_i)^r E_i + s_i \text{ pre } i = 2, 3, 4$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{t-1} - T_{t-1}}{2} + (1 - O_i)^r E_i + s_i \text{ pre } i = 5$$

$$s_i \leq 3 \text{ pre } i = 1, \dots, 5$$

$$P_i, F_i, O_i, Z_i > 0 \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

3.5 Aplikácia modelu

Začiatkový a želaný počet zamestnancov podľa jednotlivých úrovní zamestnancov získané od skutočnej spoločnosti sú uvedené v tabuľke č. 1.

Tabuľka č. 1: Začiatkové a želané počty zamestnancov po zamestnaneckých úrovniach

	1	2	3	4
E(i)	187	122	60	28
T(i)	190	130	60	30

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Počet rokov sledovania vývoja je päť. Do výpočtu vstúpili aj exogénne údaje: začiatkový počet najvyšších manažérov (7), ktorý sa rovná aj ich želanému počtu, ich pravdepodobnosť odchodu ($O(5)=0,1067$), ďalej pravdepodobnosť odchodu nového zamestnanca v prvom roku ($O(H)=0,2000$), kým dlhodobý optimálny počet zamestnancov potrebných na prijatie je súčasťou výstupu výpočtu. Výsledok optimalizácie vo forme pomerov povýšení a odchodov po zamestnaneckých úrovniach je takýto:

Tabuľka č. 2: Pravdepodobnosti potrebné na dosiahnutie želaného výsledku

	1	2	3	4
P(i)	0,030	0,015	0,016	0,023
O(i)	0,029	0,015	0,015	0,023

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Na základe uvedených údajov sme vypočítali optimálny počet potrebných nových zamestnancov každý rok pomocou účelovej funkcie korporátu a určili sme tento počet v hodnote 14,2256. Tento počet sme zadali do dynamického modelu, ktorý používa dynamické vzťahy ustanovené vyššie a výsledný vývoj je zobrazený v tabuľke č. 3.

Tabuľka č. 3: Päťročný vývoj počtu zamestnancov za optimálnych podmienok vypočítaných pomocou modelu teórie hier

Obdobie	1	2	3	4	5	Spolu:
0	187	122	60	28	7	404
1	187	124	60	28	7	406
2	188	126	60	27	7	408
3	188	128	60	27	7	410
4	188	130	60	27	7	412
5	189	130	60	27	7	413

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

4 Diskusia a záver

Obmedzenie tohto modelu je v aproximácií a v predpoklade účelovej funkcie zamestnancov. Túto funkciu by sme museli odhadnúť pre každú spoločnosť zvlášť.

Ako vidíme na simulácii, v päťročnom horizonte sa podarilo dostať počty zamestnancov na jednotlivých úrovniach na želané počty v rámci definovanej tolerancie. Táto vlastnosť môže byť skutočnou pomôckou pre podporu rozhodovania.

V danej forme môže model použiť každá spoločnosť s hierarchickou štruktúrou viac-menej homogénnych zamestnaneckých skupín, ktorá má k dispozícii historické údaje o fluktuácií a o povýšeníach svojich zamestnancov.

Literatúra

- [1] AL-MADI, F. N. – ASSAL, H. – SHRAFAT, F. – ZEGLAT, D. The Impact of Employee Motivation on Organizational Commitment. In: European Journal of Business and Management. International Institute of Science, Technology & Education, roč. 9, č. 15, s. 134 – 145. ISSN 2222-2839. Dostupné na internete: <<https://iiste.org/Journals/index.php/EJBM/issue/view/2989>>.
- [2] DLOUHÝ, M. – FIALA, P. *Teorie ekonomických a politických her*. Praha : Nakladatelství Oeconomica, 2015, 170 s. ISBN 978-80-245-1609-7.
- [3] GOGA, M. *Teória hier*. Bratislava : IURA Edition, 2013, 140 s. ISBN 978-80-8078-613-7.
- [4] HANSON, Morgan A. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Cambridge : Academic Press, 1981, roč. 22, č. 80, 618 s. ISSN 0022-247X.

- [5] ManPower Group: Fluktuácia zamestnancov v SR je v rozmedzí 14 – 16 %. Bratislava : Camit.sk, 2018. Dostupné na internete: <https://camit.sk/sk/novinky/13067_manpowergroup-fluktuacia-zamestnancov-v-sr-je-v-rozmedzi-14-16>.
- [6] MARTIŠKOVÁ, M. Budúcnosť pracujúcich v automobilovom priemysle na Slovensku. Bratislava : Stredoeurópsky inštitút pre výskum práce, 2018. Dostupné na internete: <<http://library.fes.de/pdf-files/bueros/slowakei/15459.pdf>>.
- [7] MATIJEK, P. 50 firiem tvorí 60 percent HDP Slovenska. To je rebríček Forbes Top 50. In: Forbes Slovensko. Bratislava : 2018. ISSN 1338-2527. Dostupné na internete: <<https://www.forbes.sk/50-firiem-60-percent-hdp-slovenska-to-je-rebricek-forbes-top-50/>>.
- [8] OPTIMISING HUMAN CAPITAL: Evolving strategies for skills, space and service. CBRE, 2019. Dostupné na internete: <http://cbre.vo.llnwd.net/grgservices/secure/EMEA_Occupier_Survey_2019.pdf?e=1580565250&h=293bedab838cf7494860ab0481aaff50>.
- [9] SAPORTA, I. – FARJOUN, M. The Relationship Between Actual Promotion and Turnover Among Professional and Managerial-Administrative Occupational Groups. In: Work and Occupations. Nashville : Vanderbilt University, USA, 2003, roč. 30, č. 3, s. 255-280. ISSN 0730-8884. Dostupné na internete: <https://www.researchgate.net/publication/249690527_The_Relationship_Between_Actual_Promotion_and_Turnover_Among_Professional_and_Managerial-Administrative_Occupational_Groups>.
- [10] SHONE, Ronal. *An introduction to economic dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003, 224 s. ISBN 0-521-80478-7.
- [11] URBAN, Jan. *Motivace a odměňování pracovníků*. Praha : Grada Publishing, 2017. 160 s. ISBN 978-80-271-9598-5.
- [12] VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944, 739 s. ISBN 978-0-691-13061-3.

Kontaktné údaje

Ing. Zoltán Végh
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Katedra operačného výskumu a ekonometrie
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: zoltan.vegh@euba.sk

AUDIT KAMPANÍ TELEVIZNÍ REKLAMY

AN AUDIT OF CAMPAIGN OF TV COMMERCIALS

Petra Zýková, Jan Malý

Abstrakt

Článek se zabývá auditem kampaní televizní reklamy, tj. jak je konkrétní televizní reklama efektivní vzhledem k ostatním televizním reklamám se stejnými vlastnostmi. K výpočtu efektivnosti jsou použity modely analýzy obalu dat (DEA modely). Konkrétně primární BCC model a primární BCC model s omezením vah výstupů. V DEA modelech je použit jeden vstup GRP a dva výstupy Reach a Afinita.

Klíčová slova: *modely analýzy obalu dat, televizní reklama, efektivnost*

Abstract

The article deals with the audit of television advertising campaigns. In concrete, how efficient is a particular television commercial compare to other television commercials with the same characteristics. Data envelopment analysis models (DEA models) are used to calculate the efficiency score. Specifically, the primary BCC model and the primary BCC model with output weight limitation. There is used one input GRP (Gross rating point), which is transformed into two outputs: Reach and Affinity.

Keywords: *time series, data envelopment analysis, window analysis*

1 ÚVOD

Vysílání televize se v dnešní době již neobejde bez televizní reklamy. Většina lidí nemá televizní reklamy ráda. V tomto článku se zabýváme opačnou stranou mince a to, jak efektivní jsou reklamní televizní kampaně jednotlivých zadavatelů. Abychom mohli vypočítat „úspěšnost“ konkrétních televizních reklam, je třeba vědět, kolik lidí reklamu vidělo.

Podíl osob, které v konkrétní dobu tráví čas u televize, se běžně nazývá sledovanost a měří se již od roku 2002 pomocí TV metrů / Peplemetrů na reprezentativním vzorku domácností, které mají zajištěnou anonymitu podle [5].

Český reklamní televizní trh je tvořen téměř duopolem, tj. skupinami Nova Group a Media Club. Skupina Nova Group zastupuje televizní kanály televize Nova. Skupina Media Club zastupuje kanály televize Prima, Barrandov, Óčko a v naprosté většině případů i Atmedia (uskupení tematických televizí). Vliv České Televize je značně omezený Zákonem č. 231/2001 Sb., Zákonem o provozování rozhlasového a televizního vysílání a o změně dalších zákonů, kde je v páté části psáno, že: „Čas vyhrazený reklamě v televizním vysílání provozovatele vysílání ze zákona na programech ČT 2 a ČT 4 nesmí přesáhnout 0,5 % denního vysílacího času na každém z těchto programů, přičemž vysílání reklam nesmí v době od 19.00 hodin do 22.00 hodin překročit 6 minut v průběhu jedné vysílací hodiny na žádném z těchto programů.“ podle [6]. Proto jsou v tomto článku zkoumány pouze skupiny Nova

Group a Media Club jako hlavní inzerenti televizního reklamního prostoru. Jednotlivé obchodní skupiny cílí na různé věkové skupiny, pro které je měřena sledovanost. Nova Group cílí na diváky ve věku od 15 do 54 let a Media Club cílí na diváky ve věku 15 až 69 let. Jednotlivým odvysílaným televizním reklamám určitého zadavatele reklamy se říká reklamní spot. Z reklamních spotů jsou tvořeny jednotlivé reklamní bloky. Reklamní blok je vymezený čas pro odvysílání reklamních spotů v průběhu televizního vysílání [4].

V tomto článku jsou použity Modely analýzy obalu dat. Modely analýzy obalu dat (Data Envelopment Analysis – DEA) obecně zkoumají efektivnost jednotlivých produkčních jednotek, které transformují množinu několika vstupů na množinu několika výstupů, které vynalezl Charnes a kolektiv [1] podle myšlenky Farrella [3]. Tyto modely rozdělují výchozí množinu produkčních jednotek na jednotky efektivní a neefektivní.

Článek je rozdělen do několika kapitol. V následující kapitole jsou vysvětleny základní pojmy televizní reklamy. V další kapitole jsou popsány základní DEA modely a DEA modely použité pro výpočet auditu kampaní televizní reklamy. Dále je proveden výpočet a rozebrány výsledky pro jednotlivé použité modely. Závěrečná kapitola se věnuje shrnutí výsledků.

2 ZÁKLADNÍ POJMY TELEVIZNÍ REKLAMY

Channel mix je udáván procentuálním zastoupením jednotlivých obchodních skupin, tj. Nova Group a Media Club. Channel mixů je pět a jsou uvedeny v tabulce 1.

Označení channel mixu	Podíl Nova Group v %	Podíl Media Club v %
MC (Media Club)	$\langle 0,3 \rangle$	$(97,100)$
NG LOW (Nova Group low)	$(3,35)$	$(65,97)$
BOTH (Nova Group & Media Club)	$(35,65)$	$(35,65)$
MC LOW (Media Club low)	$(65,97)$	$(3,35)$
NG (Nova Group)	$(97,100)$	$\langle 0,3 \rangle$

Tabulka 1: Podíly Nova Group a Media Club v jednotlivých channel mixech.

U jednotlivých channel mixů se sleduje:

- GRP – Gross rating point je základní jednotka pro výpočet ceny za reklamu, udává kumulovanou sledovanost v populaci.
- TRP – Target rating point, je kumulované procento sledovanosti v dané cílové skupině (CS), což je předem definovaná skupina lidí, na kterou má reklamní kampaň cílit.
- Afinita se vypočte, jako

$$AFF = \frac{TRP}{GRP} \quad (1),$$

tj. podíl TRP a GRP. Afinita vyjadřuje, jak daná cílová skupina sleduje dané medium ve vztahu k populaci. Čím větší afinita, tím lepší medium.

- Reach udává procento cílové skupiny, která byla „zasažena“. Reach je ještě doplněn o informaci, kolikrát byl divák reklamou „zasažen“: Reach 1+, 2+, 3+, ...

3 DEA MODELY

Modely analýzy obalu dat (DEA modely – Data Envelopment Analysis) byly navrženy na hodnocení efektivnosti, výkonnosti nebo produktivity produkčních jednotek. Každá jednotka produkuje určité výstupy a zpracovává určité vstupy. Efektivnost dané jednotky se dá vyjádřit poměrem

$$\text{efektivnost} = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}. \quad (2)$$

Cílem je maximalizovat efektivnost zkoumané j_0 -té jednotky. Základní DEA model lze zapsat následovně:

Maximalizovat

$$U_{j_0} = \frac{\sum_{r=1}^t u_r y_{rj_0}}{\sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0}}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^t u_r y_{rj}}{\sum_{k=1}^w v_k x_{kj}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, t, \\ v_k &\geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, w, \end{aligned} \quad (3)$$

kde $\mathbf{Y} = \{y_{rj}; r = 1, \dots, t, j = 1, \dots, n\}$ je matice hodnot výstupů, $\mathbf{X} = \{x_{kj}; k = 1, \dots, w, j = 1, \dots, n\}$ je matice hodnot vstupů, u_r je váha r -tého výstupu, v_k je váha k -tého vstupu, ε je infezimální konstanta (velmi malé číslo).

Množina přípustných řešení je určena tzv. efektivní hranicí. Produkční jednotky ležící na efektivní hranici jsou efektivní. Tj. není možná kombinace nižších vstupů se stejnými výstupy, nebo stejných vstupů s vyššími výstupy.

Model (3) není lineární v účelové funkci ani v omezujících podmínkách, ale může se pomocí Charnes-Cooperovy transformace přepsat na lineární model. Lineární verze modelu orientovaného na vstupy se nazývá CCR model a jeho formulace je následující:

Maximalizovat

$$U_{j_0} = \sum_{r=1}^t u_r y_{rj_0}$$

$$\sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0} = 1,$$

za podmínek

$$\sum_{r=1}^t u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^w v_k x_{kj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, t,$$

$$v_k \geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, w.$$

(4)

3. 1 DEA modely s variabilními výnosy z rozsahu

V naší analýze předpokládáme variabilní výnosy z rozsahu, proto je model (4) doplněn o proměnnou μ , která je libovolná. Tento model se označuje jako BCC model orientovaný na vstupy (BCC input-oriented) a jeho matematická formulace je následující:

Maximalizovat

$$U_{j_0} = \sum_{r=1}^t u_r y_{rj_0} + \mu$$

$$\sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0} = 1,$$

za podmínek

$$\sum_{r=1}^t u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^w v_k x_{kj} + \mu \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, t,$$

$$v_k \geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, w,$$

$$\mu - \text{libovolné.}$$

(5)

Předchozí model (5) lze doplnit o omezení vah jednotlivých vstupů a výstupů podle [2]. Váhy jsou omezeny nepřímo pomocí poměru vah zvoleného s -tého a p -tého vstupu $d_{sp} \leq \frac{v_s}{v_p} \leq h_{sp}$

nebo zvoleného s -tého a p -tého výstupu $d_{sp} \leq \frac{u_s}{u_p} \leq h_{sp}$, kde d_{sp} je dolní omezení pro daný poměr a h_{sp} je horní omezení pro daný poměr vah. Celý primární BCC model orientovaný na vstupy s omezením vah výstupů má následující tvar:

Maximalizovat

$$\begin{aligned}
 U_{j_0} &= \sum_{k=1}^r u_k y_{j_0 k} + \mu \\
 \sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0} &= 1, \\
 \text{za podmíněk} \quad \sum_{r=1}^t u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^w v_k x_{kj} + \mu &\leq 0, & j = 1, \dots, n, \\
 u_r &\geq \varepsilon, & r = 1, \dots, t, \\
 v_k &\geq \varepsilon, & k = 1, \dots, w, \\
 d_{sp} &\leq \frac{u_s}{u_p} \leq h_{sp}, & s, p = 1, \dots, t, \quad s \neq p, \\
 \mu &\text{ -- libovolné.}
 \end{aligned} \tag{6}$$

4 AUDIT

V analýze transformujeme vstup GRP na výstupy Reach a Afinitu. Úkolem auditu je porovnat efektivnost klientových kampaní s efektivností kampaní ostatních zadavatelů se stejnými vlastnostmi: shodné TRP, shodný channel mix a odvysílání ve stejném časovém období.

Kampaně byly porovnávány v květnu 2019 s hodnotou ukazatele TRP 500. V každém channel mixu byla náhodně vybrána jedna neefektivní kampaň, kterou byla porovnávána s ostatními kampaněmi. Parametry těchto hodnocených kampaní jsou v tabulce 2.

	MC	NG LOW	BOTH	MC LOW	NG
GRP	614,28	623,81	573,90	506,51	475,29
Reach	57,93	58,38	58,12	58,01	55,75
AFF	80,60	79,90	86,71	97,42	102,37

Tabulka 2: Parametry porovnávaných kampaní.

4.1 Výsledky auditu podle modelu (5)

V tabulce 3 jsou uvedeny výsledky auditu vypočtené modelem (5). První řádek uvádí relativní efektivnost porovnávané kampaně pomocí modelu (5). Druhý řádek udává průměrnou efektivnost všech hodnocených kampaní z daného channel mix. Třetí řádek udává procento překonaných kampaní, tj. kolik kampaní bylo horších než zkoumaná kampaň. Z tabulky je vidět, že nejlépe dopadla kampaň v channel mixu Nova Group. Tato kampaň byla lepší než 70 % kampaní daného channel mixu.

	MC	NG LOW	BOTH	MC LOW	NG
Klientova efektivnost	0,776	0,779	0,837	0,944	0,927
Průměrná efektivnost	0,750	0,799	0,853	0,923	0,880
% horších kampaní	57,10 %	25,00 %	66,70 %	40,00 %	70,00 %

Tabulka 3: Výsledky auditu kampaní vypočtené pomocí modelu (5).

4.2 Výsledky auditu podle modelu (6)

Každý klient může mít vlastní preference ohledně vah jednotlivých parametrů. Proto byl k výpočtu použit model s omezením na váhy jednotlivých výstupů (6). Přáním klienta bylo, aby měl ukazatel Reach větší váhu než afinita. Po několika experimentech byla váha afinity nastavena v rozpětí $\left\langle \frac{3}{7}; \frac{3}{4} \right\rangle$ váhy ukazatele Reach. Pro tyto váhy byl průměrný pokles relativní efektivnosti 8 %. Průměrný pokles efektivnosti vypočtené modelem (6) oproti efektivnosti vypočtené modelem (5) pro jednotlivé channel mixy je uveden v tabulce 4.

MC	NG LOW	BOTH	MC LOW	NG
-0,091	-0,175	-0,112	-0,033	-0,001

Tabulka 4: Průměrný pokles efektivnosti vypočtené modelem (6) oproti efektivnosti vypočtené modelem (5) pro jednotlivé channel mixy je uveden.

V tabulce 5 jsou uvedeny výsledky auditu vypočtené modelem (6). První řádek uvádí relativní efektivnost porovnávané kampaně pomocí modelu (6). Druhý řádek udává průměrnou efektivnost všech hodnocených kampaní z daného channel mix. Třetí řádek udává procento překonaných kampaní, tj. kolik kampaní bylo horších než zkoumaná kampaň. Z tabulky je vidět, že nejlépe dopadla kampaň v channel mixu Nova Group. Tato kampaň byla lepší než 70 % kampaní daného channel mixu.

	MC	NG LOW	BOTH	MC LOW	NG
Klientova efektivnost	0,639	0,641	0,814	0,927	0,927
Průměrná efektivnost	0,684	0,660	0,760	0,896	0,879
% horších kampaní	42,90 %	25,00 %	66,70 %	40,00 %	70,00 %

Tabulka 5: Výsledky auditu kampaní vypočtené pomocí modelu (6).

Při použití modelu (6) se snížily průměrné míry efektivnosti a míry efektivnosti klientových kampaní, ale procento překonaných kampaní zůstalo téměř totožné. Jediná změna nastala u channel mixu Media Club, kde kleslo procento překonaných kampaní o 25 %.

Celkově je vhodnější pro audit použít model (6), kde si klient upraví váhy a jejich vliv podle svých preferencí.

5 ZÁVĚR

Analýzou provedenou v tomto článku byla porovnávána efektivnost televizní reklamní kampaně klienta s efektivností televizních reklamních kampaní ostatních zadavatelů, které měly stejné vlastnosti: shodné TRP, shodný channel mix a byly odvysílány ve stejném časovém období. Efektivnost televizních reklamních kampaní byla vypočítána pomocí dvou modelů analýzy obalu dat s variabilními výnosy z rozsahu. Konkrétně modelem primárním modelem BCC a primárním modelem BCC s omezením vah výstupů. Relativní míry efektivnosti byly vyšší při výpočtu pomocí BCC modelu než pomocí BCC modelu s omezenými váhami výstupů. Cílem analýzy bylo zjistit, jak dobře si vedly klientovy kampaně oproti ostatním srovnatelným kampaním. Bylo vypočítáno procento překonaných kampaní, tj. jaký podíl kampaní dané kategorie byl horší než zkoumaná klientova kampaň. Tyto výsledky jsou uvedeny v tabulce 2 a 4. Procenta překonaných kampaní se výrazně nelišila v závislosti na použitém modelu, přesto se zdá, že model s omezením vah výstupů je vhodnější pro toto použití, protože klient může udat svoje preference významnosti jednotlivých výstupů.

Optimalizační výpočty byly provedeny v programu Lingo.

Použitá literatura

1. CHARNES, A., COOPER, W., RHODES, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), pp. 429-444.
2. JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ M., ZÝKOVÁ P. *Modely analýzy obalu dat*. Praha: Professional Publishing, 2019.
3. FARRELL, M. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 120(3): 253-290.
4. *Mediaguru* [online]. [cit. 15. 11. 2019]. Dostupné z: <https://www.mediaguru.cz/slovník-a-mediatypy/slovník/>
5. NIELSEN-ADMOSPHERE. *Parametry aktuálního měření sledovanosti televize v České republice 2018-2022* [online]. [cit. 22. 11. 2019]. Dostupné z:

<https://www.nielsen-admosphere.cz/produkty-a-sluzby/mereni-sledovanosti-tv-v-cr/parametry/>

6. ZAKONYPROLIDI. *Zákon č. 231/2001 Sb.* [online]. [cit. 22. 11. 2019]. Dostupné z: <https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2001-231>

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu Interní grantové agentury Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze F4/29/2020 - Dynamické modely analýzy obalu dat v ekonomickém rozhodování.

Kontaktní údaje

Ing. Bc. Petra Zýková

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

email: petra.zykova@vse.cz

Bc. Jan Malý

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

email: honza.rcc@gmail.com