

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 17200/H/2010/0005157270

Viackriteriálne programovanie v lokačných úlohách

Habilitačná práca

2010

Mgr. Juraj Pekár, PhD.

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Viackriteriálne programovanie v lokačných úlohách

Habilitačná práca

Študijný odbor: 3.3.25 Ekonometria a operačný výskum

Pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Bratislava 2010

Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum:

.....

ABSTRAKT

Pekár, Juraj, Mgr. PhD.: *Viackriteriálne programovanie v lokačných úlohách.* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie.– Bratislava: FHI EU, 2010, počet strán 103 s.

Cieľom predloženej práce je analýza možností použitia a prezentovanie modelov optimalizácie prepravných trás a lokačných modelov, ktoré môžu slúžiť na podporu rozhodovacieho procesu umiestňovania obslužných centier. Na báze viackriteriálneho programovania sú formulované a riešené novovytvorené modely vychádzajúce z modelov optimalizácie prepravných trás a lokačných modelov.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Prehľadom stavu poznania uvedenej problematiky na Slovensku ako aj v zahraničí sa zaoberá prvá kapitola. Druhá kapitola je orientovaná na modely optimalizácie prepravných trás. V tretej kapitole sú analyzované a riešené lokačné modely. Záverečná kapitola, ktorá je jadrom predloženej práce, rozširuje predchádzajúcu problematiku o úlohy viackriteriálneho programovania, ktoré slúžia na umiestnenie obslužných centier pri rešpektovaní viacerých kritérií.

Predložená práca na vybraných lokačných úlohách prezentuje možnosti využitia formulácie úloh matematického programovania pri rôznych cieľoch a podmienkach, ako aj ich riešenie pomocou programového produktu GAMS.

Kľúčové slová:

lokačné úlohy, optimalizácia prepravných trás, matematické programovanie, viackriteriálne programovanie, programový produkt GAMS

ABSTRACT

Pekár, Juraj, Mgr. PhD.: *Multi-criteria programming in location models* - The University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operations Research and Econometrics – Bratislava: FHI EU, 2010, number of pages 103.

The goal of the work is to present and analyse possible application of optimization location models and transportation routes, which can be used in decision making process when service centres need to be situated. The newly created models, derived from transportation and location models, are solved based on multi-criteria programming.

The work is divided into four chapters. First chapter is dedicated to give overview of knowledge about the introduced task in Slovakia and abroad. The second chapter focuses on the optimization models of transportation routes. The third chapter is based on analysis and solutions of location models. The last chapter, the main part of the work, expands the previous sections with the multi-criteria programming tasks which serve as for situating service centres by respecting more criteria.

The adduced work presents the utilization possibilities of the mathematical programming tasks in different conditions and goals of chosen location problems as well as their solutions by using the software product GAMS.

Key words:

location models, optimization of transportation routes, mathematical programming, multi-criteria programming, software product GAMS

Obsah

Úvod.....	7
1 Súčasný stav riešenej problematiky v SR a v zahraničí.....	10
2 Optimalizácia prepravných trás	15
2.1 Úloha najkratšej cesty v sieti	15
2.2 Úloha maximálneho toku v sieti	18
2.2.1 Modifikácia úlohy maximálneho toku v sieti na lokačnú úlohu.....	20
2.3 Úloha hľadania minimálnej kostry grafu	22
2.4 Úloha obchodného cestujúceho	25
2.5 Úloha rozvozu a zvozu materiálu	29
2.6 Úlohy s časovými oknami.....	33
2.6.1 Úloha najkratšej cesty v sieti s časovými oknami	35
2.6.2 Úloha obchodného cestujúceho s časovými oknami	37
2.6.3 Úloha rozvozu s časovými oknami	38
3 Lokačné modely.....	40
3.1 Lokalizácia obslužného centra v euklidovskej rovine	40
3.2 Lokalizácia v uzloch siete.....	43
3.3 Úloha umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti	45
3.3.1 Modifikácia úlohy umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier	48

3.4	Úloha nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier	50
3.5	Úloha celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier.....	52
3.6	Úloha maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti.....	54
4	Využitie metód viackriteriálneho programovania v lokačných úlohách	57
4.1	Cieľové programovanie v lokačných úlohách	57
4.2	Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť	61
4.3	Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: maximálne pokrytie a minimálny počet centier	65
4.4	Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a rovnomernosť vyťaženia obslužných centier	69
4.5	Umiestnenie obslužného centra pomocou kritérií: minimálna cestná sieť a minimálna prejdenná vzdialenosť	74
	Záver	81
	Literatúra.....	84
	Zoznam príloh.....	96
	Prílohy.....	97

Úvod

V súčasnosti, keď sa prejavuje výrazná fluktuácia kapitálu vo svete, prípadne reštrukturalizácia systému zabezpečovania verejnej siete štátom, nadobúda podporný proces založený na exaktných metódach čoraz väčší význam, nakoľko úspory vznikajúce z efektívneho výberu obslužného centra (napr. skladových, zberných, kompletizačných, recyklačných, zdravotnej pomoci, požiarnickej pohotovosti a pod.) prispievajú k lepšiemu zabezpečeniu služieb pre firmy, prípadne občanov. Predložená práca sa zaoberá práve možnými spôsobmi aplikácie metód viackriteriálneho programovania na lokačné úlohy, t. j. úlohy výberu lokality na umiestnenie obslužného centra. Súčasťou práce je tiež spôsob riešenia uvedených úloh pomocou programu GAMS, prípadne Riešiteľa v MS Exceli. Využívajú sa pritom formulácie úloh vo forme úloh matematického programovania, keďže realizácia výpočtu riešenia modifikovaných lokačných úloh je možná práve pomocou metód matematického programovania, aj keď k úlohám uvedeným v prvej časti existujú rôzne alternatívne prístupy na ich riešenie.

Cieľom predloženej práce je prezentovanie modelov (modely slúžiace na optimalizáciu prepravných trás, lokačné modely), ktoré môžu slúžiť na podporu rozhodovacieho procesu umiestňovania obslužných centier, ako aj prezentácia novovytvorených modelov postavených na báze viackriteriálneho programovania, vychádzajúcich z modelov optimalizácie prepravných trás a lokačných modelov.

Problematika umiestňovania obslužných centier, ktorou sa zaoberá predložená práca, je rozpracovaná vo veľkom množstve publikácií v zahraničí, ako aj na Slovensku. Prvá kapitola sa preto venuje prehľadu súčasného stavu poznania v jednotlivých oblastiach, ktoré sú obsahom predkladanej práce. Z literatúry sú známe rôzne prístupy, my sme sa však zamerali na optimalizáciu prepravných trás a rozpracovanie lokačných modelov na báze matematického programovania, pričom rozšírenie všetkých uvedených poznatkov spočíva v použití metód viackriteriálneho programovania. Uvedený prehľad príslušnej literatúry je metodologickým základom pre všetky nasledujúce kapitoly, preto v nich už budú literárne a časopisecké zdroje uvádzané len v špecifických prípadoch.

V druhej kapitole sú formulované základné modely slúžiace na optimalizáciu prepravných trás, a to úloha najkratšej cesty v sieti, úloha maximálneho toku v sieti, úloha optimálneho spojenia uzlov, úloha obchodného cestujúceho, úloha rozvozu a zvozu substrátu. V poslednej časti druhej kapitoly uvedieme úlohy s časovými oknami, pričom

ich aplikujeme na úlohu hľadania najkratšej cesty v sieti, úlohu obchodného cestujúceho a na úlohu rozvozu materiálu, t. j. poukazujeme na možnú modifikáciu úlohy použitím dodatočných podmienok (v tomto prípade časových požiadaviek).

Základné nástroje na podporu rozhodovania o umiestňovaní obslužných centier sú uvedené v tretej kapitole, ktorá sa zaoberá lokačnými modelmi či už na báze definovania cestnej siete, alebo v euklidovskom priestore. Prvé dve časti opisujú spôsob rozhodovania o výbere jedného obslužného centra za predpokladu, že uvažujeme s priamymi vzdušnými vzdialenosťami (Lokalizácia skladu v euklidovskej rovine) alebo s cestnými vzdialenosťami (Lokalizácia v uzloch siete medzi jej všetkými uzlami). Ďalšie časti obsahujú modely, na základe ktorých rozhodujeme o sieti obslužných centier, aby bol dosiahnutý požadovaný cieľ. V prvom modeli predpokladáme známu hodnotu maximálnej vzdialenosti, do ktorej musia byť dostupné obslužné centrá pre všetky uzly, pričom výsledok je systém minimálneho počtu takých obslužných centier, aby bola zabezpečená platnosť uvedenej vstupnej podmienky. V ďalšej časti opisujeme model, ktorého vstupným parametrom je stanovený počet obslužných centier a požadovaným cieľom je nájsť taký systém obslužných centier, ktorý zabezpečí pre každý uzol dostupnosť obslužného centra na maximálne vypočítanú minimálnu hodnotu. V tretej časti uvádzame model, pri ktorom sú definované rovnaké parametre ako v predchádzajúcej časti, cieľom je však zostaviť taký systém obslužných centier, ktorý zabezpečí, aby vzdialenosť celkovo prejdená zo všetkých uzlov do obslužných centier bola minimálna. Model zabezpečujúci maximálne pokrytie pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti, do ktorej musia byť dostupné obslužné centrá pre jednotlivé uzly, je náplňou poslednej časti tretej kapitoly.

Štvrtá kapitola je jadrom tejto práce, nakoľko v nej poukazujeme na možnosť aplikácie metód viackriteriálneho programovania v lokačných úlohách. Pri rozhodovaní na základe jednokriteriálnych modelov uvedených v predchádzajúcich kapitolách vzniká problém ich jednoznačnej orientácie, ktorý vychádza zo sledovaného cieľa. Pri hľadaní kompromisného riešenia použitím výsledkov viacerých modelov vzniká problém výberu lokalít na umiestnenie obslužných centier, pretože uvedené riešenia sú nezhodné (Brezina, Gežík, Čičková, Pekár, 2009). V prvej časti kapitoly sú rozobrané metódy cieľového programovania, ktoré sú použité pri riešení lokačných úloh s viacerými účelovými funkciami. Ako prvý je definovaný model umiestnenia obslužných centier pomocou dvoch kritérií, a to minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť. V ďalšej časti opisujeme model umiestnenia obslužných centier pomocou kritérií – maximálne pokrytie

a minimálny počet centier. Predposledná časť sa zameriava na model umiestnenia obslužných centier pomocou dvoch kritérií, pričom ako prvé kritérium je stanovená minimálna vzdialenosť a druhým kritériom je rovnomernosť vyťaženia obslužných centier. Model umiestnenia obslužného centra pomocou kritérií, kde ako prvé kritérium vystupuje minimalizácia cestnej siete a ako druhé minimalizácia prejdenej vzdialenosti, je obsahom záverečnej časti.

1 Súčasný stav riešenej problematiky v SR a v zahraničí

Problematika umiestňovania obslužných centier (lokačné úlohy) je rozpracovaná vo veľkom množstve publikácií, nakoľko ekonomická efektívnosť zabezpečovania dostupnosti substrátov a služieb pre subjekty na trhu výrazne ovplyvňuje celkový výsledok hospodárenia firiem. Prvá publikácia riešiaci lokačný problém pochádza z roku 1909 (Weber, 1909). Predložená práca sa zameriava nielen na problematiku umiestňovania obslužných centier (napr. skladových, zberných, kompletizačných a pod.), ale aj na riešenie problémov prepravy substrátu, ktoré takisto ovplyvňuje samotný výber lokality (obslužného centra). Prínosom práce je skĺbenie obidvoch oblastí na báze viackriteriálneho programovania, ktoré možno použiť na problematiku lokácie obslužných centier. V tejto kapitole je uvedený súčasný stav riešenia danej problematiky publikovaný v odborných periodikách v oblasti optimalizácie prepravných trás, modelovania umiestňovania obslužných centier, ako aj použitia metód viackriteriálneho programovania v lokačných úlohách.

Do prvej skupiny problémov optimalizácie prepravných trás možno zaradiť úlohu hľadania najkratšej cesty v sieti (Joksč, 1966), (Hansen, 1980), (Aneja, Aggarwal, Nair, 1983), (Jaffe, 1984), (Psaraftis, Solomon, Magnati, Kim, 1990), (Tsitsiklis, 1992), (Desaulniers, Villeneuve, 2000), (Donati, Montemanni, Gambardella, Rizzoli, 2003), (Qureshi, Taniguchi, Yamada, 2007), (Androutsopoulos, Zografos, 2008). Na riešenie takto formulovanej úlohy jestvuje množstvo prístupov, pričom pomerne často používaným spôsobom riešenia sú metódy bivalentného programovania (Pelikán, 2001). Uvedený problém bol formulovaný a riešený v prácach (Brezina, Ivaničová, Pekár, 2007). Detailnejší opis problému ako aj jeho riešenie je náplňou časti 2.1. Na riešenie problému hľadania najkratšej cesty z východiskového uzla do všetkých uzlov v sieti (*single-source shortest-path problem*) sa v literatúre často uvádzajú nasledujúce algoritmy: Dijkstrov algoritmus, Fordov-Fulkersonov algoritmus, Dantzigov algoritmus (Unčovský a kol., 1991). Problém výpočtu najkratších ciest medzi všetkými uzlami v sieti (*all-pairs shortest – path problem*) možno realizovať pomocou Floydovho algoritmu, algoritmu minimálneho sčítania matic (Fiala, 2008). Ďalším zo skupiny problémov optimalizácie prepravných trás je úloha maximálneho toku v sieti (Unčovský a kol., 1991), (Ahuja, Magnanti, Orlin, 1993), (Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, 2001), (Lawler, 2001), (Fiala, 2005), (Diestel, 2005). Uvedená úloha rieši problém priepustnosti siete pre distribučný systém, pričom sa

hľadá priepustnosť medzi dvomi vybranými uzlami; v časti 2.2 možno nájsť spôsob formulácie tohto problému. Úloha hľadania minimálnej kostry grafu (Kruskal, 1956), (Prim, 1957), (Ahuja, Magnanti, Orlin, 1993), (Sharaiha, Gendreau, Laporte, Osman 1997), (Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, 2001), (Pelikán, 2001), (Guo, Chen, Feng, Yu, 2007) slúži na riešenie problémov teórie grafov, kde sa konštruuje systém s minimálnou dĺžkou zabezpečujúci spojenie všetkých súčastí systému (každý uzol je spojený s ostatnými uzlami). Formuláciu problému ako aj spôsoby riešenia možno nájsť v časti 2.3.

Hľadanie najkratšej okružnej cesty (časť 2.4) možno takisto zaradiť do skupiny problémov, ktoré poskytujú informáciu využiteľnú pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier (Or, 1976), (Carpaneto, Toth, 1980), (Baker, 1983), (Savelsbergh, 1985), (Cyrus, 1988), (Desrochers, Desrosiers, Solomon, 1992), (Langevin, Desrochers, Desrosiers, Gelinas, Soumis, 1993), (Desrosiers, Dumas, Solomon, Soumis, 1995), (Carlton, Barnes, 1996), (Gendreau a kol., 1999), (Ascheuer, Fischetti, Grötschel, 2000), (Bar-Yehuda, Even, Shahr, 2003), (Fábry, 2006), (Zhang, Tang, 2007), (Pekár, Čičková, 2009). Pri hľadaní najkratšej okružnej cesty sa určuje, v akom poradí treba navštíviť ostatné uzly práve raz tak, aby východiskový uzol bol súčasne aj koncovým uzlom a celková dĺžka prejdenej trasy bola minimálna. Problém hľadania najkratšej okružnej cesty je v literatúre (Brezina, 2003), (Palúch, Peško, 2006), (Janáček, 2003) označovaný ako úloha obchodného cestujúceho. Doteraz nie je známy exaktný polynomiálny algoritmus na riešenie úlohy obchodného cestujúceho. Táto úloha patrí totiž k množine kombinatorických úloh známych ako NP – úplné úlohy, pri ktorých výpočtový čas najlepších dostupných metód rastie exponenciálne s veľkosťou problému. Na riešenie úlohy obchodného cestujúceho bolo vyvinuté veľké množstvo rôznych metód. Uvedené algoritmy možno rozdeliť na optimalizačné metódy (Little a kol., 1963), heuristické metódy (Lin, Kernighan, 1973) a kombinované metódy. V súčasnosti sa pomerne často používajú aj metaheuristické prístupy, ktoré poskytujú riešenie v prijateľnom čase.

Pri distribúcii substrátov sa vyskytuje problém určenia trás rozvozu a zvozu materiálu, v ktorom vzniká požiadavka, aby z nejakého obslužného centra bolo k jednotlivým uzlom odberu materiálu dovezené určité požadované množstvo substrátu pri minimálnych prepravných nákladoch (Magnanti, 1981), (Desrosiers, Soumis, Desrochers, 1984), (Laporte, Nobert, 1987), (Potvin, Rousseau, 1993), (Homburger, Gehring, 2005), (Tan, Lee, Zhu, Ou, 2001), (Peško, 2002), (Janáček, 2003), (Lau, Sim, Teo, 2003), (Bräysy, Gendreau, 2005), (Csiszár, 2005), (Hashimoto, Ibaraki, Imahori, Yagiura, 2006),

(Dondo, Cerdá, 2006), (Fábry, 2006), (Ibaraki, Imahori, Nonobe, Sobue, Uno, Yagiura, 2008). Táto trieda úloh sa nazýva úlohy rozvozu a zvozu (*Vehicle Routing Problem* – VRP). Úloha rozvozu a zvozu (časť 2.5) je niekedy zaraďovaná do kategórie úloh obchodného cestujúceho so špeciálnou štruktúrou (Müller, 1970) alebo je tento problém označovaný aj pojmom úloha okružných jázd (Janáček, 2003).

V úlohách určených na optimalizáciu prepravných trás sa v reálnom živote môžu dopĺňať dodatočné podmienky. Jednou z takýchto podmienok je podmienka možnosti prechodu cez jednotlivé uzly vo vopred definovanom čase (časť 2.6). Skupinu úloh zohľadňujúcu uvedené dodatočné podmienky nazývame úlohy s časovými oknami (Peško, 2002), (Fábry, 2006), (Čičková, Brezina, Pekár, 2008).

Pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier možno použiť rôzne typy modelov matematického programovania. V literatúre sú tieto modely (Brezina, 2003), (Brezina, Čičková, Gežík, Pekár, 2009) známe ako lokačné modely. Uvedenou problematikou sa zaoberá množstvo autorov, ako vidno zo zoznamu uvedenom v literatúre, od už spomínanej prvej publikácie (Weber, 1909) až po súčasnosť. Na Slovensku sa venujú problematike lokácie obslužných centier najmä pracovníci Žilinskej univerzity v Žiline (Janáček, 2006, 2008), (Jánošíková, 2007, 2008). V literatúre sa taktiež možno stretnúť s aplikáciami lokačných modelov (Geoffrion, Graves 1974), (Geoffrion a kol., 1982), (Gelders a kol., 1987), (Robinson a kol., 1993), (Fleischmann, 1993), (Geoffrion, Powers, 1995), (Galvao a kol., 2002), (Vasko a kol., 2003). Na Slovensku aplikovali lokačné modely v zdravotníctve pri konštrukcii minimálnej siete staníc rýchlej zdravotnej pomoci (Jánošíková, 2007), ako aj pri určovaní systému obslužných centier na recyklovaný materiál (Brezina, Pekár, Čičková, 2009).

Prvými modelmi zaoberajúcimi sa lokalizáciou obslužného centra (časť 3.1) boli modely založené na používaní vzdušných vzdialeností medzi jednotlivými uzlami (Weber, 1909), (Miehle, 1958), (Love a kol., 1988), (Wesolowsky, 1993), (Brezina, Pekár, 2006). V literatúre (Skýva, 1987) sa najčastejšie ako príklad pre tento prípad uvádza vybudovanie nového letiska medzi niekoľkými už existujúcimi letiskami. Druhou skupinou problémov výberu lokality známou z literatúry (Brezina, Čičková, Reiff, 2009) je výber prostredníctvom ukazovateľa tonokilometra (časť 3.2). Z hľadiska náročnosti získania optimálneho riešenia sa asi najčastejšie používa prípad optimálneho umiestnenia obslužného centra.

V literatúre sa najväčšia pozornosť venuje problematike umiestňovania uvažovaných obslužných centier (napr. skladových, zberných, kompletizačných, recyklačných, zdravotnej pomoci, požiarnickej pohotovosti a pod.), pričom cieľom je ich optimálne umiestnenie či už na báze stanovenia maximálnej vzdialenosti uzlov od obslužného centra, respektíve pri stanovenom počte obslužných centier ich umiestnenie. Všeobecne existujú dve základné koncepcie – jedna si kladie za cieľ pokryť všetkých obyvateľov minimálnym počtom obslužných centier, druhá pri obmedzenom počte obslužných centier maximalizovať pokrytie obyvateľov.

Do prvej skupiny patrí problém určenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti (časť 3.3), ktorá sa musí realizovať pri rozvoze substrátu (Drezner a kol., 2004), (Vidovic, Dimitrijevic, Ratkovic, 2008). Model si kladie za cieľ lokalizovať obslužné centrá tak, aby bola dodržaná požadovaná dostupnosť všetkých uzlov pri minimálnom počte obslužných centier.

V časti 3.4 je opísaný model, pomocou ktorého možno určiť minimálnu vzdialenosť potrebnú na pokrytie všetkých uzlov pri vopred danom počte obslužných centier (Handler, 1979), (Domschke, Drexler, 1996), (Boland, 2003), (Domínguez-Marín, 2003). Cieľ úlohy je postavený na myšlienke minimálnej dostupnosti obslužného centra pre každý uzol dopytu, t. j. pri stanovení počtu obslužných centier treba určiť minimálnu možnú vzdialenosť.

Do prvej skupiny patrí aj problém určenia minimálnej celkovo prejdenej vzdialenosti zo všetkých uzlov do obslužných centier (časť 3.5) pri vopred danom počte obslužných centier (Christofides, Beasley, 1982), (Hanjoul, Peeters, 1985), (Beasley, 1993). Cieľom úlohy je pri stanovení počtu obslužných centier určiť minimálnu možnú celkovo prejdenú vzdialenosť.

Do skupiny problémov, pri ktorej sa maximalizuje pokrytie, patrí model, pomocou ktorého pri zadanom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti (časť 3.6), ktorú musí substrát absolvovať, sa stanovujú uzly, v ktorých budú obslužné centrá pri maximálnom pokrytí obyvateľov (Schilling, 1993), (Daskin, 1995), (Galvao, ReVelle, 1996).

Na riešenie lokačných modelov možno použiť klasické prístupy riešenia úloh bivalentného programovania (Ivaničová a kol., 2007), enumeračné metódy (Plastria, Vanhaverbeke, 2008), ale v novšej literatúre (Turner, 2005) sa pomerne často uvádzajú aj

rôzne heuristiky, ktoré v relatívne dobrom čase umožňujú nájsť riešenia blízke optimálnemu. Medzi takéto heuristiky patria napr. Lagrangeova heuristika (Galvao, ReVelle, 1996), greedy heuristika, tabu search (Turner, 2005), genetické algoritmy (Chuang, Lin, 2007), (Arakaki, Lorena, 2001) a podobne.

Pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier možno okrem lokačných modelov použiť aj ich modifikáciu, ktorá napomôže pri ich výbere. V literatúre je prezentované pomerne veľké množstvo modelov vytvorených na báze metód viackriteriálneho programovania, ktoré poskytujú ďalšie možnosti pre rozhodovanie o umiestnení obslužných centier (Current a kol., 1990), (ReVelle, Laporte, 1996), (Cohon, 2004), (Fernandez, Puerto, 2003), (Jánošíková, 2008, 2009).

2 Optimalizácia prepravných trás

V tejto kapitole rozoberieme spôsob formulovania vybraných typov problémov určených na optimalizáciu prepravných trás (Unčovský a kol., 1991), (Brezina, 2003), (Fiala, 2005). Uvedené úlohy patria do skupiny problémov, ktorými sa zaoberá teória grafov. Ďalej sa budeme venovať nasledujúcim úlohám optimalizácie prepravy:

1. *úloha najkratšej cesty v sieti* je úloha výberu trasy spájajúcej dva ľubovoľné uzly v sieti tak, aby bola minimalizovaná celková dĺžka trasy,
2. *úloha maximálneho toku v sieti* – nájdenie optimálneho (maximálneho) toku v sieti medzi zdrojom a uzlom určenia,
3. *úloha hľadania minimálnej kostry grafu* – nájdenie takého spojenia centra s uzlami v sieti, aby súčet ohodnotení spojnic bol minimálny,
4. *úloha obchodného cestujúceho* – nájdenie najkratšej cesty medzi všetkými uzlami v sieti pri minimalizácii prejdenej trasy,
5. *úloha rozvozu, príp. zvozu materiálu* – nájdenie optimálneho rozvozu, príp. zvozu materiálu z centra do uzlov odberu substrátu pri dodržaní kapacitných ohraničení.

V poslednej časti uvedieme modifikácie úlohy najkratšej cesty v sieti, úlohy obchodného cestujúceho a úlohy rozvozu materiálu rozšírené o dodatočné podmienky nutnosti dodržania časových okien stanovených pre jednotlivé uzly.

2.1 Úloha najkratšej cesty v sieti

Metódy teórie grafov sú zamerané na riešenie rozhodovacích problémov, ktoré vznikajú predovšetkým v oblasti prepravy substrátu. Metódy zodpovedajúce problémom prepravy umožňujú zorganizovať prepravu substrátu tak, aby sa našla najkratšia alebo najdlhšia priama cesta medzi východiskovým a konečným uzlom. Ďalej opíšeme problém hľadania najkratšej cesty v sieti.

Definovanie problému

Máme skupinu uzlov, medzi ktorými existujú cesty. Predpokladajme, že počet všetkých uzlov je n . Ďalej máme maticu $C = \{c_{ij}\}$, ktorá je maticou ohodnotení ciest medzi i -tým a j -tým uzlom, pričom platí:

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{ak existuje priama cesta medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom,} \\ 0, & \text{ak } i = j, \\ +\infty, & \text{ak neexistuje priama cesta medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom.} \end{cases}$$

Okrem uvedených informácií je známy východiskový a konečný uzol. Cieľom úlohy je nájsť takú postupnosť ciest, pomocou ktorých sa možno prepraviť z východiskového do konečného uzla tak, aby celkovo prejdená trasa bola minimálna.

Formulácia úlohy

Uvedenú úlohu možno formulovať ako úlohu bivalentného programovania, v ktorej budú vystupovať binárne premenné $x_{ij} \in \{0,1\}$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$, pričom premenné nadobudnú hodnotu 1, ak sa cesta medzi i -tým a j -tým uzlom nachádza na trase medzi východiskovým a konečným uzlom, a hodnotu 0, ak táto cesta nie je na uvedenej trase.

Skôr, ako opíšeme spôsob formulácie účelovej funkcie a štruktúrnych ohraničení, musíme definovať množiny P_j a R_i , $i, j = 1, 2, \dots, n$, obsahujúce indexy uzlov, do ktorých (množina P_j), príp. z ktorých (množina R_i) existuje priama cesta.

$$P_j = \{p \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{pj} \neq 0 \wedge c_{pj} \neq \infty\}$$

$$R_i = \{r \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{ir} \neq 0 \wedge c_{ir} \neq \infty\}$$

Účelová funkcia by mala vyjadrovať celkovú dĺžku trasy medzi východiskovým a konečným uzlom. Cieľom je prejsť minimálnu vzdialenosť. Potom možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Štruktúrne ohraničenia možno rozdeliť do troch skupín. Prvá skupina definuje podmienky pre všetky uzly okrem prvého a posledného, pričom vyjadruje tranzitnosť uvedených uzlov, t. j. pre každý uzol musí platiť, že počet vstupov do uzla je zhodný s počtom výstupov z uvedeného uzla.

$$\sum_{i \in P_j} x_{ij} = \sum_{k \in R_j} x_{jk} \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

Druhá skupina reprezentuje podmienku pre prvý uzol. Na rozdiel od predchádzajúcich podmienok, musí o počte vstupov a výstupov z prvého uzla platiť skutočnosť, že z prvého uzla je nutné o jeden raz viac vyjsť ako vojsť.

$$1 + \sum_{i \in P_1} x_{i1} = \sum_{k \in R_1} x_{1k}$$

V poslednej skupine je definované štruktúrne ohraničenie pre posledný uzol. Platí opačná podmienka ako pri prvom uzle, t. j. do posledného uzla je potrebné o jeden raz viac vojsť ako vyjsť.

$$\sum_{i \in P_n} x_{in} = \sum_{k \in R_n} x_{nk} + 1$$

Formulácia úlohy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i \in P_j} x_{ij} &= \sum_{k \in R_j} x_{jk} \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \\ 1 + \sum_{i \in P_1} x_{i1} &= \sum_{k \in R_1} x_{1k} \\ \sum_{i \in P_n} x_{in} &= \sum_{k \in R_n} x_{nk} + 1 \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde

$$P_j = \{p \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{pj} \neq 0 \wedge c_{pj} \neq \infty\}, j = 1, 2, \dots, n$$

$$R_i = \{r \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{ir} \neq 0 \wedge c_{ir} \neq \infty\}, i = 1, 2, \dots, n$$

Na riešenie takto formulovanej úlohy sa používa množstvo prístupov. Niektoré z nich uvedieme:

- úlohu možno riešiť pomocou metód bivalentného programovania,
- problém hľadania najkratšej cesty z východiskového uzla do všetkých uzlov v sieti (*single-source shortest-path problem*) – nájdenie najkratšej cesty z jedného uzla do ostatných uzlov v sieti (stromové algoritmy): Dijkstrov algoritmus, Fordov-Fulkersonov algoritmus, Dantzigov algoritmus a ďalšie,
- problém výpočtu najkratších ciest medzi všetkými uzlami v sieti (*all-pairs shortest – path problem*) – nájdenie najkratšej cesty medzi všetkými uzlami v sieti: Floydov algoritmus, minimálne sčítanie matíc a ďalšie.

Pre úlohy nájdenia najkratšej cesty možno pomerne rýchlo a efektívne získať optimálne riešenie aj pri úlohách väčších rozmerov (pri veľkom počte uzlov). Uvedený problém bol formulovaný a riešený v prácach (Brezina, Ivaničová, Pekár, 2007), (Pekár, 2010).

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy hľadania najkratšej cesty v sieti (parametre označené kurzívou treba nahradiť reálnymi cieľovými hodnotami, ako aj hodnotami váh jednotlivých kritérií):

```
Sets
  i uzol /1*n/
  subi1(i) /1/
  subi2(i) /2*n-1/
  subi3(i) /n/
  alias (i,j)
  alias (i,k);
  table c(i,j);
Variables f;
Binary Variable x;
Equations
  prve(subi2)
  druhe(subi1)
  tretie(subi3)
  ucel;
  ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*x(i,j));
  prve(subi2(j)).. sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))=e=0;
  druhe(subi1(j)).. 1+sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))=e=0;
  tretie(subi3(j)).. sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))-1=e=0;
Model najcesta /all/;
Solve najcesta using mip minimizing f;
```

2.2 Úloha maximálneho toku v sieti

Ďalšou zo skupiny úloh optimalizácie prepravných trás je tzv. úloha maximálneho toku v sieti. Rieši problém priepustnosti siete pre distribučný systém, pričom sa hľadá priepustnosť medzi dvoma vybranými uzlami. V tejto časti uvedieme aj modifikovanú úlohu hľadania maximálneho toku v sieti, ktorej využitie je možné práve na výber obslužných centier za predpokladu, že je známa priepustnosť jednotlivých ciest medzi uzlami.

Definovanie problému

Predpokladajme, že počet všetkých uzlov je n . Nech je k dispozícii matica $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$, ktorá je maticou priepustnosti spojnic medzi i -tým a j -tým uzlom, pričom platí:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{ak priepustnosť spojnice medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom je } p_{ij}, \\ \infty, & \text{ak } i = j, \\ 0, & \text{ak medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom nie je priepustnosť.} \end{cases}$$

Cieľom je zistiť, aké maximálne množstvo substrátu možno prepraviť z východiskového uzla do konečného uzla s tým, že možno použiť jednotlivé spojnice s maximálnym množstvom definovaným maticou **P**.

Formulácia úlohy

Uvedenú úlohu možno formulovať ako úlohu lineárneho programovania, pričom v nej budú vystupovať premenné x_{ij} , kde $i, j = 1, 2, \dots, n$, pričom premenné nadobudnú nezápornú hodnotu toku medzi i -tým a j -tým uzlom.

Účelová funkcia by mala vyjadrovať celkové maximálne množstvo toku realizovaného medzi východiskovým a konečným uzlom. Jednotlivé premenné reprezentujú realizovaný tok medzi i -tým a j -tým uzlom. Potom možno tok vychádzajúci z počiatočného uzla definovať ako súčet všetkých tokov do všetkých uzlov. Musíme tiež uvažovať s prichádzajúcim tokom do počiatočného uzla, ktorý možno určiť ako súčet všetkých tokov z jednotlivých uzlov. Rozdiel medzi nimi reprezentuje celkový tok realizovaný medzi východiskovým a konečným uzlom, pričom však štruktúrne ohraničenia musia ďalej zabezpečiť nulové straty v jednotlivých tranzitných uzloch. Účelovú funkciu potom možno zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_{1j} - \sum_{j=1}^n x_{jn} \rightarrow \max$$

Štruktúrne ohraničenia definujú podmienky tranzitnosti pre všetky uzly okrem východiskového a konečného. Tranzitnosť jednotlivých uzlov znamená, že pre každý uzol musí platiť, že tok vstupujúci do uzla je zhodný z tokom vystupujúcim z príslušného uzla.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Okrem uvedených štruktúrnych ohraničení vystupujú v úlohe ohraničujúce podmienky pre jednotlivé premenné. Okrem podmienky nezápornosti premenných je potrebné zabezpečiť maximálnu hranicu toku, ktorá je na úrovni priepustnosti, reprezentovanú prvkami p_{ij} matice **P**.

$$0 \leq x_{ij} \leq p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Formulácia úlohy

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_{1j} - \sum_{j=1}^n x_{j1} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ji}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$0 \leq x_{ij} \leq p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Riešením uvedenej úlohy nájdeme spôsob prepravy maximálneho množstva substrátu z obslužného centra do uzla odberu pri dodržaní kapacít jednotlivých trás. Premenné x_{ij} reprezentujú množstvá prepravovaného substrátu z i -tého uzla do j -tého uzla, pričom nemožno prekročiť kapacitu uvedenej cesty.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy hľadania maximálneho toku v sieti:

```

Sets
  i uzol /1*n/
  sub1(i) /1/
  sub2(i) /2*n-1/
  sub3(i) /n/
  alias (i,j)
  alias (i,k);
  table p(i,j);
Variables f;
Positive Variable x;
Equations
  prve(sub1)
  druhe(i,j)
  ucel;
  ucel(sub1(k)).. f=e=sum(i,x(k,i))-sum(j,x(j,k));
  prve(sub2(i)).. sum(j,x(i,j))-sum(k,x(k,i))=e=0;
  druhe(i,j).. x(i,j)-p(i,j)=l=0;
Model maxtok /all/;
Solve maxtok using mip maximizing f;

```

2.2.1 Modifikácia úlohy maximálneho toku v sieti na lokačnú úlohu

V časti 1.2 bola prezentovaná úloha hľadania maximálneho toku v sieti, pričom jej cieľom bolo určiť, aké maximálne množstvo substrátu možno prepraviť z východiskového do koncového uzla, ak sú dané maximálne množstvá prepravy pre jednotlivé spojnice

uzlov. Modifikáciou uvedenej úlohy sa dá získať model, ktorý možno aplikovať pri problematike umiestňovania obslužných centier.

Definovanie problému

Predpokladajme, že sú známe vybrané uzly ako obslužné centrá. Celkový počet uzlov je n . Matica $\mathbf{C}$ reprezentuje priame vzdialenosti medzi jednotlivými uzlami. Ďalej poznáme maximálne možné množstvá prepravy substrátu medzi i -tým a j -tým uzlom p_{ij} , kapacity obslužných centier a požiadavky jednotlivých uzlov. Úlohou je prepraviť substrát z obslužných centier do jednotlivých uzlov v požadovaných množstvách tak, aby celkovo prejdená vzdialenosť bola minimálna za predpokladu, že po jednotlivých cestách nemožno prepravovať väčšie množstvo substrátu, ako je stanovené parametrami a_i . Tieto parametre pritom znamenajú, že v prípade ich kladnej hodnoty je uvedený uzol odberateľom substrátu, v prípade ich zápornej hodnoty je obslužným centrom a v poslednom prípade, ak sú rovné nule, uvedený uzol je tranzitný.

Formulácia úlohy

Na základe definovaného problému možno z formulácie úlohy hľadania maximálneho toku v sieti (časť 1.2) zostrojiť matematický model:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0 \leq x_{ij} &\leq p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde a_i – požiadavky, príp. ponuka i -tého uzla, pričom

ak $a_i > 0$, uvedený uzol má požiadavku na substrát,

ak $a_i = 0$, uvedený uzol je tranzitným uzlom,

ak $a_i < 0$, uvedený uzol je obslužným centrom.

Riešením tejto úlohy možno zistiť spôsoby prepravy jednotlivých substrátov z obslužných centier k jednotlivým uzlom pri prejdenej minimálnej celkovej vzdialenosti. Hodnoty premenných x_{ij} reprezentujú množstvá prepravovaného substrátu z i -tého uzla do j -tého uzla, pričom nemožno prekročiť kapacitu uvedenej cesty.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie modifikovanej úlohy hľadania maximálneho toku v sieti na lokačnú úlohu:

```
Sets
  i uzol /1*n/
  sub1(i) /1/
  sub2(i) /2*n-1/
  sub3(i) /n/
  alias (i,j)
  alias (i,k);
  table p(i,j);
  table c(i,j);
  parameters
  a(j) požiadavky miest;
  Variables f;
  Positive Variable x;
  Equations
  prve(i)
  druhe(i,j)
  ucel;
  ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*x(i,j));
  prve(i).. sum(j,x(i,j))-sum(k,x(k,i))-a(i)=e=0;
  druhe(i,j).. x(i,j)-p(i,j)=l=0;
  Model maxtokmod /all/;
  Solve maxtokmod using mip minimizing f;
```

2.3 Úloha hľadania minimálnej kostry grafu

V tejto časti opíšeme úlohu hľadania minimálnej kostry grafu, ktorá slúži na riešenie problémov teórie grafov, kde sa konštruuje systém s minimálnou dĺžkou zabezpečujúci spojenie všetkých súčastí systému.

Definovanie problému

Predpokladajme, že počet všetkých uzlov je n . Nech je známa matica $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$, ktorá je maticou priamych vzdialeností medzi i -tým a j -tým uzlom, pričom platí:

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{ak existuje priama cesta medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom,} \\ 0, & \text{ak } i = j, \\ +\infty, & \text{ak neexistuje priama cesta medzi } i\text{-tým a } j\text{-tým uzlom.} \end{cases}$$

Cieľom je vybrať zo skupiny priamych ciest také, ktoré tvoria systém, pomocou ktorého sa možno dostať z každého uzla do každého uzla tak, aby celková dĺžka používaných ciest bola minimálna. V tomto prípade ide o výber najkratšieho systému ciest spájajúcich všetky uzly, pričom je jedno, aký počet prepráv po jednotlivých cestách bude realizovaný.

Formulácia úlohy

Uvedenú úlohu možno formulovať ako úlohu matematického programovania, pričom v úlohe budú vystupovať binárne premenné $x_{ij} \in \{0,1\}$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$. Premenné pritom nadobudnú hodnotu 1, ak sa cesta medzi i -tým a j -tým uzlom nachádza v systéme ciest, a hodnotu 0, ak uvedená cesta nie je v systéme. Ďalšími premennými sú $y_{ij} \in \{0,1\}$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$, ktoré nadobúdajú hodnoty z intervalu $\langle 0; (n-1) \rangle$, pričom reprezentujú počet použitia príslušnej cesty a zabezpečujú, aby existovala súvislá trasa od príslušného uzla k prvému uzlu.

Účelová funkcia by mala vyjadrovať celkovú dĺžku ciest v systéme. Cieľom je nájsť minimálny systém ciest spájajúci všetky uzly. Potom možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Štruktúrne ohraničenia možno zaradiť do štyroch skupín. Keďže predpokladáme, že prvý uzol je centrom, do ktorého smerujú trasy zo všetkých uzlov, definujeme podmienku pre tok z prvého uzla do všetkých ostatných ako rovný nule.

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 0$$

Druhá skupina ohraničení reprezentuje vlastnosť každého uzla, a to podmienku, že pri vytváraní systému ciest sa musia nájsť trasy z každého uzla do prvého uzla. V uvedených trasách sa pritom používa práve jedna cesta vychádzajúca z každého uzla okrem prvého uzla.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Podmienky zabezpečujúce existenciu trás z jednotlivých uzlov do prvého uzla sú zaradené do tretej skupiny. Uvedené podmienky definujeme pre všetky uzly okrem prvého. Ich význam možno interpretovať nasledujúcim spôsobom. Z každého uzla musíme použiť cesty o jeden raz viac ako cesty vchádzajúce do uvedeného uzla.

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Poslednou skupinou ohraničení sú ohraničujúce podmienky pre premenné y_{ij} . Dolná hranica reprezentuje nezápornosť premenných. Horná hranica môže nadobudnúť hodnotu $n-1$ alebo hodnotu 0. V prípade použitia cesty medzi i -tým a j -tým uzlom v systéme ciest zabezpečujúcej dostupnosť každého uzla zo všetkých uzlov (v kostre grafu) môže premenná y_{ij} nadobudnúť maximálnu hodnotu $n-1$. Ak sa uvedená cesta nepoužíva, nadobudne hodnotu 0.

$$0 \leq y_{ij} \leq (n-1) x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Potom formulácia úlohy minimálnej kostry grafu je nasledujúca:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=2}^n x_{1j} &= 0 \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} &= 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ 0 \leq y_{ij} &\leq (n-1) x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Riešením uvedenej úlohy získame systém trás určený na prepravu substrátov z obslužných centier k jednotlivým uzlom tak, aby bol minimálny.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy hľadania minimálnej kostry grafu:


```

Sets
  i vystup /1*n/
  subi1(i) /1/
  subi2(i) /2*n/
  alias (i,j)
  alias (i,k)
  alias (subi2,subj2)
  alias (subi1,subj1);
  table c(i,j)
Variables f;
Binary Variable x;
Positive Variable y;
Equations
  prve(subi1)
  prve2(subj2)
  druhe(subi2)
  tretie(i,j)
  ucel;
  ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*y(i,j));
  prve(subi1(i)).. sum(j,x(i,j))=e=0;
  prve2(subi2(i)).. sum(j,x(i,j))=e=1;
  druhe(subi2(i)).. sum(j,y(i,j))-sum(subj2(k),y(k,i))=e=1;
  tretie(i,j).. y(i,j)-137*x(i,j)=l=0;
Model kostra /all/;
Solve kostra using mip minimizing f;

```

2.4 Úloha obchodného cestujúceho

Pomerne častým problémom, ktorý sa v praxi nezriedka vyskytuje, je hľadanie najkratšej okružnej cesty. Pri hľadaní najkratšej okružnej cesty sa určuje, v akom poradí treba navštíviť ostatné uzly práve raz tak, aby východiskový (začiatočný) uzol bol súčasne aj koncovým uzlom a celková dĺžka prejdenej trasy bola minimálna. Tento problém je v literatúre označovaný ako *úloha obchodného cestujúceho* (resp. *úloha najkratšej okružnej cesty*) a má veľký počet praktických aplikácií nielen v oblasti dopravy. Dôležitosť tejto úlohy vychádza z využitia riešenia aj pre úlohy, ktoré na prvý pohľad nemajú žiadnu súvislosť s cestovnými trasami.

Na riešenie úlohy potrebujeme určiť minimálne vzdialenosti medzi všetkými uzlami, pričom možno použiť známe algoritmy na hľadanie najkratšej cesty v sieti, napr. Floydov algoritmus, metódu minimálneho sčítania matíc atď.

Definovanie problému

Podstatou úlohy obchodného cestujúceho je nájsť optimálnu, t. j. najkratšiu, najrýchlejšiu alebo v inom zmysle najmenej nákladnú okružnú trasu, ktorá spočíva v prepojení určitého počtu uzlov. Najčastejšie uvažujeme o odberateľoch tak, že začiatkový aj konečný uzol sú totožné a každý uzol je v okružnej trase zahrnutý práve raz. V takejto formulácii úlohy obchodného cestujúceho sa uvažuje len s jedným obchodným cestujúcim, resp. len s jedným dopravným prostriedkom. Predpokladá sa, že kapacita tohto vozidla je dostatočne veľká na to, aby boli splnené požiadavky všetkých odberateľov.

Cieľom úlohy obchodného cestujúceho je absolvovať najkratšiu cestu z východiskového uzla do určených uzlov a vrátiť sa späť do východiskového uzla, pričom je žiaduce navštíviť každý uzol len raz. V úlohách sa predpokladá, že je známy počet uzlov n a aj najkratšie vzdialenosti medzi jednotlivými uzlami d_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Formulácia úlohy

Túto úlohu možno formulovať ako úlohu matematického programovania. Možno ju definovať ako špeciálny prípad prirad'ovacieho problému, ktorého premenné sú bivalentné, t. j. ak sa cesta na príslušnej trase zrealizuje, hodnota premennej sa rovná 1, ak sa cesta neuskutoční, hodnota premennej sa rovná 0. Možné formulácie tohto problému možno nájsť napr. v (Pelikán, 2001), (Fábry, 2006).

Úlohu obchodného cestujúceho je z formálneho hľadiska vhodné formulovať v kategóriách bivalentného programovania, čo znamená, že sa v nej používajú premenné, ktoré môžu nadobúdať bivalentné hodnoty z množiny $\{0,1\}$. Pri matematickej formulácii vychádzame z toho, že máme n uzlov a poznáme maticu $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ najkratších vzdialeností medzi všetkými uzlami, resp. vo všeobecnosti maticu ohodnotenia trás.

Pre $i, j = 1, 2, \dots, n$ zavedieme bivalentné premenné x_{ij} s nasledujúcim významom:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak trasa je súčasťou okružnej cesty,} \\ 0, & \text{v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Cieľom úlohy je nájsť okružnú trasu s minimálnou celkovo prejdenou vzdialenosťou. Pri bivalentných premenných x_{ij} a danej matici minimálnych vzdialeností $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ účelová funkcia reprezentuje celkovo prejdenú vzdialenosť po okružnej trase:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

V nasledujúcej časti opíšeme význam jednotlivých ohraničení. Prvá skupina ohraničení reprezentuje, že z každého uzla musíme odísť práve jedenkrát.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

V druhej skupine zabezpečujeme, aby sme do každého uzla prišli práve jedenkrát.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j$$

Posledné ohraničenia zabezpečujú podmienku, aby nevzniklo zacyklenie. Pre každý uzol zavedieme pomocnú premennú y_i , ktorá môže nadobúdať ľubovoľné reálne hodnoty (Domschke, 1990), prípadne tieto hodnoty považujeme za nezáporné celé čísla (Korbut, 1972). Za týchto predpokladov treba formulovať anticyklické podmienky v tvare:

$$y_i + y_j - nx_{ij} \leq n-1 \quad i = 2, 3, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j$$

Podmienka zabráňuje vzniku takých podcyklov, ktoré neobsahujú uzol 1. Prípustné riešenie je potom okružnou trasou obsahujúcou všetky uzly. V literatúre je táto formulácia známa ako *Tuckerova formulácia* (Pelikán, 2001).

Matematický model je nasledujúci:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \\ y_i + y_j - nx_{ij} &\leq n-1 \quad i = 2, 3, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Doteraz nie je známy exaktný polynomiálny algoritmus na riešenie úlohy obchodného cestujúceho. Táto úloha patrí totiž k množine kombinatorických úloh známych ako NP – úplné úlohy, pri ktorých výpočtový čas najlepších dostupných metód rastie viac ako exponenciálne s veľkosťou problému. Exaktný optimalizačný algoritmus pre riešenie úlohy obchodného cestujúceho by v podstate vyžadoval prekontrolovať všetky

možnosti. Ak predpokladáme, že máme n uzlov, pri fixácii začiatočného (a súčasne aj koncového) uzla treba prekontrolovať $(n-1)!$ možností. Algoritmy na riešenie úlohy obchodného cestujúceho možno rozdeliť do nasledujúcich skupín:

- optimalizačné metódy (Littleho metóda na nájdenie okružnej cesty – metóda vetiev a hraníc, metóda rozhodovacieho stromu – metóda úplnej enumerácie, dynamické programovanie a pod.). Tieto metódy vedú k optimálnemu riešeniu, nie sú však vo všeobecnosti použiteľné pre úlohy s veľkým množstvom uzlov,
- heuristické metódy (algoritmus najbližšieho suseda, násobný algoritmus najbližšieho suseda, algoritmus postupného zväčšovania a pod.). Tieto metódy zvyčajne pracujú rýchlo, kvalita dosiahnutého riešenia však môže byť pomerne nízka,
- kombinované metódy.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy najkratšej okružnej cesty:

```
Sets
  i vystup /1*n/
  subi1(i) /1/
  subi2(i) /2*n/
  alias (i,j)
  alias (subi2,subj2)
  alias (subi1,subj1);
  Set ij1(i,j) /1*n. 2*n/
      ij2(i,j) /1.1,2.2,...,n.n/
      ij3(i,j) ;
  ij3(i,j)=ij1(i,j)-ij2(i,j);
  table c(i,j) ;
  Variables f;
  Binary Variable x;
  Free Variable y;
  Equations
  prve(subi2)
  prve2(subj2)
  anti(i,j)
  ucel;
  ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*x(i,j));
  prve(subi2(i)).. sum(j,x(i,j))-x(i,i)=e=1;
  prve2(subj2(j)).. sum(i,x(i,j))-x(j,j)=e=1;
  anti(i,j)$ij3(i,j).. y(i)-y(j)+n*x(i,j)=l=n-1;
  Model TSP /all/;
  Solve TSP using mip minimizing f;
```

2.5 Úlohy rozvozu a zvozu materiálu

Typickým problémom distribučných firiem je určenie trás rozvozu a zvozu materiálu, pri ktorých vzniká požiadavka, aby z nejakého obslužného centra bolo do jednotlivých uzlov odberu materiálu dovezené (resp. odvezené) určité požadované množstvo substrátu pri minimálnych prepravných nákladoch. Táto trieda úloh sa nazýva úlohy rozvozu a zvozu (*Vehicle Routing Problem* – VRP).

Takúto úlohu zvyčajne definujeme na dopravnej sieti. Za dopravnú sieť možno považovať napr. cestnú alebo železničnú sieť, ale aj telefónne alebo počítačové siete používané na prepravu informačných dát. Dopravnú sieť tvoria uzly (obce, mestá, telefónne ústredne, počítačové servery) a úseky – spojnice medzi nimi (cesty alebo káble). Typickú okružnú úlohu možno charakterizovať ako problém rozvozu z jedného strediska (dodávateľa, skladu) do určených uzlov.

Jednou z najčastejšie citovaných okružných úloh v literatúre zaoberajúcej sa optimalizáciou je úloha obchodného cestujúceho (predchádzajúca časť). Podstatou úlohy obchodného cestujúceho je nájsť optimálnu cestu, ktorá spočíva v prepojení určitého počtu uzlov, pričom začiatkový aj konečný uzol je totožný a každý uzol spotreby je v okružnej ceste zahrnutý práve raz. Pri takejto formulácii úlohy obchodného cestujúceho sa uvažuje len o jednom obchodnom cestujúcom, resp. len o jednom vozidle. Predpokladá sa, že kapacita tohto vozidla je dostatočne veľká na to, aby boli splnené požiadavky všetkých odberateľov. Vo všeobecnosti však firma môže mať veľké množstvo odberateľov, ktorých požiadavky presahujú kapacitu jedného vozidla, alebo musí rešpektovať iné obmedzenia týkajúce sa napr. času obsluhy zákazníka a pod.

Úloha takéhoto typu sa niekedy zaraďuje do kategórie úloh obchodného cestujúceho so špeciálnou štruktúrou (Müller, 1970), alebo je tento problém označovaný pojmom úloha okružných jázd (*Vehicle Routing Problem*) (Janáček, 2003). V tejto časti budeme používať názov *úloha rozvozu*. Takúto úlohu možno pri známych množstvách substrátu odberateľov a známej kapacite vozidla charakterizovať ako problém rozvozu z obslužného centra do jednotlivých uzlov odberu substrátu tak, že pri každej jazde vozidla je začiatkový a koncový uzol (obslužné centrum) totožný a každý uzol spotreby je v okružnej trase zahrnutý práve raz. Trasu je potrebné určiť tak, aby každý uzol (miesto spotreby) navštívilo iba raz jedno vozidlo, každá rozvozná trasa sa musí začínať a končiť v skladovom centre a pri preprave sa nesmie prekročiť kapacita vozidla. Cieľom za týchto

podmienok je nájsť najkratšiu alebo v inom zmysle najmenej nákladnú cestu. Pri tejto formulácii uvažujeme, že požiadavky jednotlivých uzlov možno zabezpečiť najviac jednou jazdou vozidla.

Definovanie problému

Predpokladajme, že je daná dopravná sieť s jedným obslužným centrom a viacerými rozvoznými uzlami. Cieľom je premiestňovanie určitého množstva substrátu z obslužného centra (stredisko, centrálny sklad alebo centrálna zásobovacia jednotka) do jednotlivých odberateľských uzlov (rozvozné miesta), ktoré požadujú dodávku rôznych množstiev substrátu. Ďalej predpokladáme, že obslužné centrum má k dispozícii prepravný prostriedok s ohraničenou prepravnou kapacitou V .

Predpokladajme teda, že existuje prepravná sieť s n uzlami a $n(n-1)/2$ cestami, ktorých ohodnotenie je dané maticou najkratších vzdialeností $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$. Obslužné centrum označíme u_1 , ostatné uzly siete postupne $u_2, u_3, \dots, u_n$. Každý z uzlov siete požaduje doviezť q_i jednotiek substrátu z obslužného centra u_1 . Pritom, ako sme už uviedli, obslužné centrum má k dispozícii prostriedok na prepravu s kapacitou V .

Ďalej budeme vychádzať z predpokladu, že platí $q_i \leq V$ pre všetky uzly v sieti ($i = 2, 3, \dots, n$). Takto požiadavka každého uzla môže byť uspokojená jedinou návštevou prepravného prostriedku. Úlohou je nájsť takú najkratšiu trasu prepravného prostriedku, aby v žiadnej z okružných rozvozných jász, z ktorých sa trasa skladá, nebola pri nakladaní a vykladaní substrátu prekročená jeho kapacita a aby všetky požiadavky odberu v jednotlivých uzloch boli uspokojené.

Matematická formulácia úlohy rozvozu (resp. zvozu)

Úlohu rozvozu je z formálneho hľadiska vhodné formulovať v kategóriách bivalentného programovania, čo znamená, že v úlohe používame premenné, ktoré môžu nadobúdať bivalentné hodnoty z množiny $\{0,1\}$. V literatúre (Skýva, 1987), (Pelikán, 2001) možno nájsť rôzne matematické formulácie úlohy rozvozu. Ďalej uvedieme model z práce (Pelikán, 2001). Obslužné centrum označíme uzlom u_1 .

Pre $i, j = 1, 2, \dots, n$ zavedieme bivalentné premenné x_{ij} s nasledujúcim významom:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak úsek je súčasťou okružnej cesty,} \\ 0, & \text{v opačnom prípade.} \end{cases}$$

Úloha je špeciálnym typom prirad'ovacieho problému, pričom je potrebné zabezpečiť, aby sa okružná cesta nerozpadla na viac nesúvisiacich podcyklov a aby nebola prekročená kapacita vozidla. Cieľom tejto úlohy je nájsť rozvoznú trasu pri minimálnych celkovo prejdenných kilometroch. Pri bivalentných premenných x_{ij} a danou maticou vzdialeností $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ účelová funkcia reprezentuje celkovo prejdenné kilometre pri všetkých rozvozoch substrátu:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

V nasledujúcej časti opíšeme význam jednotlivých ohraničení. Prvá skupina ohraničení reprezentuje, že z každého uzla musí vozidlo odísť práve jedenkrát (okrem 1. uzla – obslužného centra, keďže môže byť viac okruhov).

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j$$

V druhej skupine zabezpečujeme, aby vozidlo do každého uzla prišlo práve jedenkrát (okrem 1. uzla – obslužného centra).

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j$$

Posledné ohraničenia zabezpečujú podmienku, aby pri jednej rozvoznnej trase nebola prekročená kapacita vozidla a ani nevzniklo zacyklenie.

$$y_i + q_i - V(1 - x_{ij}) \leq y_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j$$

V uvedených ohraničeniach vystupujú premenné u_i , ktoré reprezentujú použitú kapacitu vozidla pri ceste do uzla i . Musí pritom platiť, že hodnota premennej u_i má nadobudnúť hodnotu väčšiu ako je požadovaná kapacita obslužného centra i a menšiu, ako je kapacita vozidla.

$$q_i \leq y_i \leq V \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Matematický model je potom takýto:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j \\
 y_i + q_i - V(1 - x_{ij}) &\leq y_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\
 q_i &\leq y_i \leq V \quad i = 2, 3, \dots, n \\
 x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

kde V – kapacita vozidla,

q_i – požiadavky i -tého uzla.

Pri riešení sa za typický považuje konflikt medzi výpočtovou náročnosťou a kvalitou dosiahnutého riešenia. Kým optimálne riešenie je zvyčajne možné identifikovať až po pomerne dlhom a často neakceptovateľnom čase, použitím heuristických metód je spravidla možné získať riešenie pomerne rýchlo, ale kvalita býva nižšia. Približné riešenie poskytujú heuristické prístupy, resp. metaheuristické postupy, založené väčšinou na metódach genetických algoritmov a pod. Pri hľadaní optimálneho riešenia tejto triedy úloh sa najčastejšie používajú metódy celočíselného programovania, ktoré sú z hľadiska zostavenia úlohy a výpočtovej časovej náročnosti veľmi náročné. Použitie optimalizačných metód pre riešenia úloh tohto typu je pomerne komplikované (NP-úplné úlohy), pri praktických riešeniach sa často využívajú heuristické metódy.

Heuristické metódy riešenia tejto úlohy možno rozdeliť na:

1. metódy, v ktorých sú trasy dopravných prostriedkov budované priamo postupným pridávaním uzlov s priebežnou kontrolou prípustnosti príslušných zväčšení – *Clarkova-Wrightova metóda* – najpoužívanější metóda skupiny, *kombinatorická metóda s obmedzeným návratom*, *násobný algoritmus postupného zväčšovania rozvozne trasy* a ďalšie,
2. metódy, ktoré úlohu dekomponujú na jednoduchšie úlohy, v ktorých všetky riešenia spĺňajú podmienky, a treba určiť iba najlepšie riešenie podúloh z hľadiska stanoveného kritéria – *stierací algoritmus* (*Sweep algoritmus*).

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy rozvozu a zvozu materiálu:

```

sets
i vystup /1*n/
subi1(i) /1/
subi2(i) /2*n/
alias (i,j)
alias (subi2,subj2)
alias (subi1,subj1);
set ij1(i,j) /1*n. 2*n/
    ij2(i,j) /1.1,2.2,...,n.n/
    ij3(i,j);
ij3(i,j)=ij1(i,j)-ij2(i,j);
table d(i,j);
parameters
q(j) poziadavky miest;
scalar v kapacita auta /V/
variables f;
binary variable x;
free variable y;
equations
prve(subi2)
prve2(subj2)
anti(i,j)
kap1(subi2)
kap2(subi2)
ucel;
ucel..f=e=sum((i,j),d(i,j)*x(i,j));
prve(subi2(i))..sum(j,x(i,j))-x(i,i)=e=1;
prve2(subj2(j))..sum(i,x(i,j))-x(j,j)=e=1;
anti(i,j)$ij3(i,j)..y(i)+q(j)-f*(1-x(i,j))=l=y(j);
kap1(subi2(i))..q(i)=l=y(i);
kap2(subi2(i))..y(i)=l=v;
model Rozvoz /all/;
Solve Rozvoz using mip minimizing f;

```

2.6 Úlohy s časovými oknami

V úlohách určených na optimalizáciu prepravných trás sa môžu dopĺňať dodatočné podmienky, ktoré spresňujú definované problémy uvedené v predchádzajúcich častiach. Jednou z takýchto podmienok je podmienka možnosti prechodu cez jednotlivé uzly vopred definovanom čase. Skupinu úloh, zohľadňujúcu uvedené dodatočné podmienky, nazývame úlohy s časovými oknami. Pretože ide o úlohy, ktoré berú do úvahy časový faktor, parametre d_{ij} sú uvažované ako časové jednotky spájajúce i -tý a j -ty uzol. V tejto časti ukážeme všeobecnú formuláciu dodatočných podmienok, ako aj aplikáciu na úlohu

hľadania najkratšej cesty v sieti, úlohu obchodného cestujúceho a úlohu rozvozu a zvozu materiálu.

Uvažujme o možnosti rozšíriť uvedené úlohy o požiadavku obslúžiť j -ty obslužný uzol v určitom časovom intervale (časovom okne) $\langle D_j; H_j \rangle$. Časový interval obsluhy j -teho uzla definujeme najskôr možným príchodom D_j a najneskôr prípustným odchodom z uzla H_j . Časový okamih začiatku reálnej obsluhy v j -tom uzle označme ako Z_j , pričom predpokladáme $Z_j \geq D_j$. Reálne ukončenie obsluhy (najneskôr prípustný časový okamih reálnej obsluhy) v j -tom obslužnom uzle vypočítame tak, že k reálnemu začiatku obsluhy v j -tom obslužnom uzle Z_j pripočítame dobu obsluhy v j -tom uzle t_j , t. j. $Z_j + t_j$, pričom predpokladáme $Z_j + t_j \leq H_j$.

Reálny začiatok obsluhy v j -tom obslužnom uzle Z_j pritom vypočítame, keď k času ukončenia obsluhy v predchádzajúcom i -tom obslužnom uzle $Z_i + t_i$ pripočítame čas prechodu do j -teho obslužného uzla d_{ij} .

Binárne premenné x_{ij} opäť reprezentujú použitie trasy z i -tého uzla do j -teho uzla pri optimálnom spôsobe prepravy z obslužného centra k odberateľovi; hodnota 1 znamená využitie príslušnej cesty, hodnota 0 jej nevyužitie. Opäť pritom predpokladajme, že počet uzlov je n .

Na rozdiel od formulácie úloh pribudnú k uvedeným úlohám ďalšie tri skupiny ohraničení. Prvá zabezpečí, v prípade použitia cesty (trasy) medzi i -tým a j -tým uzlom, aby premenné Z_i nadobudli kladnú hodnotu reprezentujúcu čas začatia obsluhy i -tého uzla, pričom je známy čas obsluhy v i -tom uzle t_i :

$$x_{ij} (Z_i + t_i + d_{ij} - Z_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j$$

V druhej a tretej skupine doplnených štruktúrnych ohraničení definujeme podmienky na časy realizácie obsluhy jednotlivých uzlov. Dolnú hranicu D_j , t. j. najskôr možný čas začatia obsluhy j -teho uzla, pre premenné Z_j reprezentujú nasledujúce podmienky:

$$Z_j \geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

V poslednej skupine definujeme hornú hranicu ukončenia obsluhy j -teho uzla, pričom ukončenie obsluhy (čas $Z_j + t_j$) musí byť realizované do času H_j .

$$Z_j + t_j \leq H_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

2.6.1 Úloha najkratšej cesty v sieti s časovými oknami

Na rozdiel od ďalších úloh, ktoré uvádzame tejto kapitole, v úlohe hľadania najkratšej cesty v sieti s časovými oknami nerealizujeme obsluhu, ale sú stanovené časy, kedy možno prechádzať cez jednotlivé uzly. Potom možno definovať hodnoty t_i rovnajúce sa nule pre $i = 1, 2, \dots, n$. Na základe toho prvá skupina ohraničení bude nadobúdať nasledujúci tvar (v úlohe vystupujú parametre c_{ij} , ktoré predstavujú priame časové spojenie medzi i -tým a j -tým uzlom):

$$x_{ij} (Z_i + c_{ij} - Z_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j$$

Podmienky pre dolnú hranicu, t. j. najskorší možný čas prechodu cez j -ty uzol, pre premenné Z_j zostanú nezmenené:

$$Z_j \geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Definovanie hornej hranice pre najneskorší možný čas prechodu cez j -ty uzol musí vychádzať z podmienky dodržania horného ohraničenia H_j ($t_i = 0$).

$$Z_j \leq H_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Matematická formulácia úlohy hľadania najkratšej cesty v sieti s časovými oknami:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) &= Z_n \rightarrow \min \\ \sum_{i \in P_j} x_{ij} &= \sum_{k \in R_j} x_{jk} \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \\ 1 + \sum_{i \in P_1} x_{i1} &= \sum_{k \in R_1} x_{1k} \\ \sum_{i \in P_n} x_{in} &= \sum_{k \in R_n} x_{nk} + 1 \\ x_{ij} (Z_i + c_{ij} - Z_j) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\ Z_j &\geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ Z_j &\leq H_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde c_{ij} – najkratší čas prechodu z i -tého uzla do j -teho uzla, medzi ktorými existuje spojnice,

D_j – najskorší možný čas vstúpenia do j -teho uzla,

H_j – najneskorší možný čas opustenia j -teho uzla,

$P_j = \{p \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{pj} \neq 0 \wedge c_{pj} \neq \infty\}, j = 1, 2, \dots, n$,

$R_i = \{r \in \{1, 2, \dots, n\} / c_{ir} \neq 0 \wedge c_{ir} \neq \infty\}, i = 1, 2, \dots, n$.

Riešením uvedenej úlohy získame spôsob prepravy substrátu z obslužného centra do miesta odberu pri minimálnej prejdenej celkovej vzdialenosti, pričom sa musia dodržať časové podmienky pre jednotlivé uzly. Premenné x_{ij} reprezentujú použitie trasy z i -tého uzla do j -tého uzla pri optimálnom spôsobe prepravy z obslužného centra k odberateľovi.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy hľadania najkratšej cesty v sieti s časovými oknami:

```
Sets
  i uzol /1*n/
  sub1(i) /1/
  sub2(i) /2*n-1/
  sub4(i) /2*n/
  sub3(i) /n/
  alias (i,j)
  alias (i,k);
  set ij1(i,j) /1*n. 2*n/
  ij2(i,j) /1.1,2.2,...,n.n/
  ij3(i,j);
  ij3(i,j)=ij1(i,j)-ij2(i,j);
  table c(i,j);
  parameters
    D(j) dolne ohranicenie
    H(j) horne ohranicenie
  Variables f;
  Binary Variable x(i,j);
  Positive Variable Z;
  Equations
    prve(subi2)
    druhe(subi1)
    tretie(subi3)
    stvrte(i,subi4)
    piate(j)
    sieste(j)
    ucel;
  ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*x(i,j));
  prve(subi2(j)).. sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))=e=0;
  druhe(subi1(j)).. 1+sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))=e=0;
  tretie(subi3(j)).. sum(i,x(i,j))-sum(k,x(j,k))-1=e=0;
  stvrte(i,subi4(j))$ij3(i,j)..x(i,j)*(Z(i)+c(i,j)-Z(j))=l=0;
  piate(j)..Z(j)=g=D(j);
  sieste(j)..Z(j)=l=H(j);
  Model pokus /all/;
  Solve pokus using rminlp minimizing f;
```

2.6.2 Úloha obchodného cestujúceho s časovými oknami

Uvažujme o možnosti rozšíriť úlohu obchodného cestujúceho (časť 3.4) o požiadavku obslúžiť j -ty obslužný uzol v určitom časovom intervale (časovom okne) $\langle D_j; H_j \rangle$ – úloha obchodného cestujúceho s časovými oknami. Reálny začiatok obsluhy v j -tom obslužnom uzle Z_j pritom vypočítame, keď k času ukončenia obsluhy v predchádzajúcom i -tom obslužnom uzle $Z_i + t_i$ pripočítame čas prechodu do j -teho obslužného uzla d_{ij} .

Matematická formulácia úlohy obchodného cestujúceho s časovými oknami je takáto:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + t_j) x_{ij} \rightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \\
 y_i + y_j - nx_{ij} &\leq n-1 \quad i = 2, 3, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\
 x_{ij} (Z_i + t_i + d_{ij} - Z_j) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\
 Z_j &\geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 Z_j + t_j &\leq H_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

kde d_{ij} – najkratší čas prechodu z i -tého uzla do j -teho uzla,

D_j – najskorší možný čas vstúpenia do j -teho uzla,

H_j – najneskorší možný čas opustenia j -teho uzla,

t_j – čas obsluhy j -teho uzla.

Úloha patrí do triedy NP-ťažkých úloh a obsahuje pomerne vysoký počet premenných a predovšetkým ohraničujúcich podmienok, pričom niektoré dodatočné možno len ťažko formulovať. Takto formulovanú úlohu by bolo možné riešiť pomocou metód celočíselného programovania. Pre veľkú výpočtovú zložitosť týchto metód sa javí ako efektívne využitie iných prístupov. Za veľmi vhodné sa považujú algoritmy z množiny evolučných techník (Čičková, Brezina, Pekár, 2007).

2.6.3 Úloha rozvozu s časovými oknami

Uvažujme o možnosti rozšíriť úlohu rozvozu materiálu (časť 3.5) o požiadavku obslužiť j -ty obslužný uzol v určitom časovom intervale $\langle D_j; H_j \rangle$ – rozvozné úlohy s časovými oknami. Časový interval je v j -tom rozvoznom uzle definovaný najskôr možným príchodom D_j a najneskôr prípustným odchodom z rozvozného uzla H_j . Časový okamih začiatku reálnej obsluhy v j -tom rozvoznom uzle označme ako Z_j , pričom predpokladáme $Z_j \geq D_j$. V prípade, ak nie je splnená uvedená požiadavka, je príslušný uzol zaťažený penále, ktoré v praxi znamenajú presunutie rozvozného uzla do novej rozvoznej trasy. Reálne ukončenie obsluhy (najneskôr prípustný časový okamih reálnej obsluhy) v j -tom obslužnom uzle vypočítame tak, že k reálnemu začiatku obsluhy v j -tom obslužnom uzle Z_j pripočítame dobu obsluhy v j -tom rozvoznom uzle t_j , t. j. $Z_j + t_j$, pričom predpokladáme $Z_j + t_j \leq H_j$.

Reálny začiatok obsluhy v j -tom obslužnom uzle Z_j pritom vypočítame, keď k času ukončenia obsluhy v predchádzajúcom i -tom obslužnom uzle $Z_i + t_i$ pripočítame čas prechodu do j -teho obslužného uzla d_{ij} .

Formulácia úlohy

Predchádzajúce úvahy možno na základe jednoduchého modelu pre rozvoznú úlohu (napr. Fábry, 2006) rozšíriť do nasledujúcej úlohy matematického programovania:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + t_j) x_{ij} \rightarrow \min \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j \\
 \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j \\
 y_i + q_i - V(1 - x_{ij}) &\leq y_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\
 q_i &\leq y_i \leq V \quad i = 2, 3, \dots, n \\
 x_{ij}(Z_i + t_i + d_{ij} - Z_j) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\
 Z_j &\geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 Z_j + t_j &\leq H_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

kde d_{ij} – najkratší čas prechodu z i -tého uzla do j -tého uzla,

D_j – najskorší možný čas vstúpenia do j -teho uzla,

H_j – najneskorší možný čas opustenia j -teho uzla,

t_j – čas obsluhy j -teho uzla,

q_i – požiadavka i -tého uzla,

V – kapacita vozidla.

Takto formulovanú úlohu by bolo možné riešiť pomocou metód matematického programovania. Pre veľkú výpočtovú zložitosť týchto metód sa opäť javí ako efektívne využitie iných prístupov (napr. algoritmy z množiny evolučných techník). V práci (Čičková, Brezina, Pekár, 2009) je uvedený spôsob riešenia pomocou samoorganizujúceho sa migračného algoritmu (SOMA) (Zelinka, 2002).

3. Lokačné modely

Pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier možno použiť rôzne typy modelov matematického programovania. V tejto kapitole poukazujeme na možnosť použitia optimalizačných metód riešenia uvedeného problému. Tieto modely sú v literatúre známe ako lokačné modely.

V prvej časti kapitoly je naznačený prístup na lokalizáciu oblasti umiestnenia obslužného priestoru založený na metódach používajúcich vzdušné vzdialenosti medzi jednotlivými uzlami. V druhej časti ide o výber lokality prostredníctvom ukazovateľa tonokilometra (osobokilometrov), pričom predpokladáme znalosť parametrov jednotlivých uzlov (kapacita prepravovaného substrátu v tonách, vzdialenosť medzi uzlami v kilometroch). V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať problematike umiestňovania obslužných centier. Ich cieľom je ich optimálne umiestnenie či už na báze stanovenia maximálnej vzdialenosti uzlov od obslužného centra, alebo stanovenia optimálneho počtu obslužných centier. V literatúre je rozpracovaných veľké množstvo modelov, z ktorých väčšina je založená na koncepcii pokrytia. Všeobecne existujú dve základné koncepcie – jedna si kladie za cieľ pokryť všetkých obyvateľov minimálnym počtom obslužných centier – tzv. lokačno- pokrývacia úloha (*Location Set Covering Problem – LSCP*), druhá má pri obmedzenom počte obslužných centier maximalizovať pokrytie obyvateľov (*Maximal Covering Location Problem – MCLP*).

3.1 Lokalizácia obslužného centra v euklidovskej rovine

Umiestnenie objektu v podstatnej miere závisí od vzdialenosti jeho najkratšieho spojenia vzdušnou čiarou od ostatných uzlov (napr. skladových, triediacich centier). Táto vzdialenosť predstavuje dĺžku úsečky medzi bodom umiestnenia a bodom daného uzla.

V literatúre sa v tomto prípade najčastejšie ako príklad uvádza vybudovanie nového letiska medzi niekoľkými už existujúcimi letiskami. Letisko treba postaviť tak, aby lietadlá absolvovali najkratšie vzdialenosti na ostatné letiská. V tomto prípade letisko možno vybudovať v ľubovoľnom bode priestoru. Situácia nie je determinovaná vopred danými možnosťami, ako je to v ďalšom prípade. Teoreticky nie je potrebné, aby do určeného uzla viedli komunikácie (ide o takú veľkú investíciu, že dobudovanie ciest nepredstavuje rozhodujúcu časť nákladov).

Na meranie vzdialenosti dvoch bodov (bodov) $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{R}^k$ budeme používať funkciu

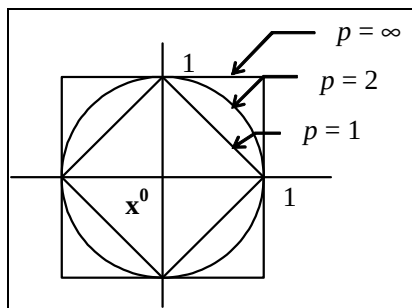
$$d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|,$$

kde pravá strana uvedeného výrazu vyjadruje určitú veľkosť (normu) vektora $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2$. Budeme rozlišovať triedu L_p -metrík, kde

$$\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_p = \left[\sum_{i=1}^k |x_i^1 - x_i^2|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

p – parameter metriky,

k – rozmer priestoru.



Obrázok 3.1 Obrisy L_p -metrík

Na obrázku 3.1 sú zobrazené body, ktoré sú vzdialené jednu jednotku od bodu $\mathbf{x}^0$ podľa troch L_p -metrík (pre $p = 1, 2, \infty$).

Pre naše potreby pre n bodov budeme používať L_2 -metriku. Nech $[x_1^0, x_2^0]$ sú súradnice hľadaného bodu $\mathbf{x}^0$ a $[x_1^i, x_2^i]$ sú súradnice jednotlivých cieľových uzlov $\mathbf{x}^i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

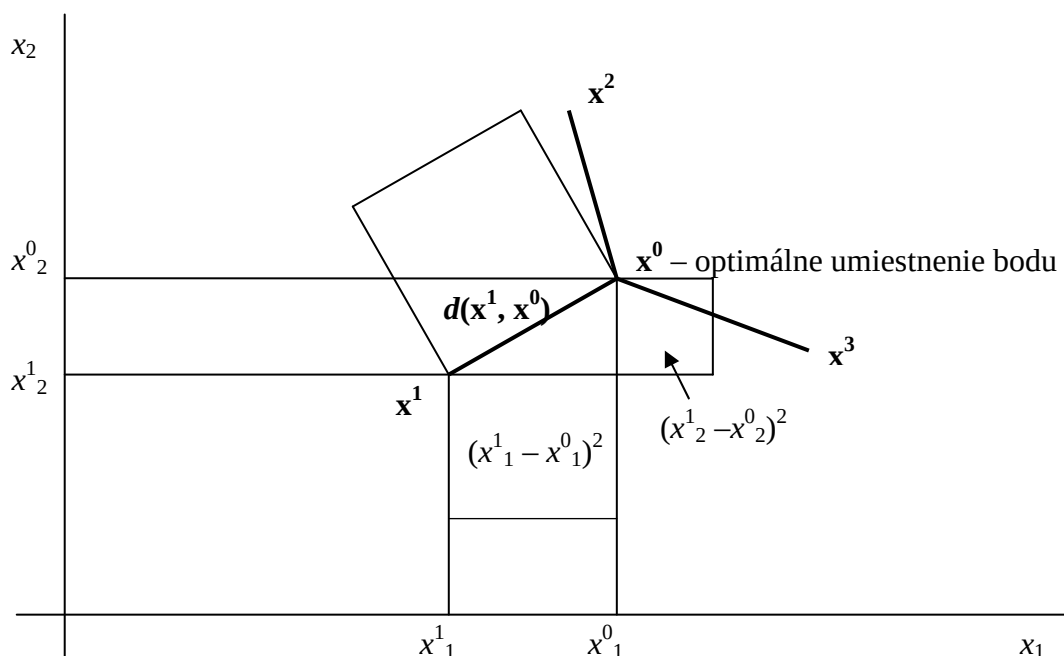
Potom vzdialenosť medzi hľadaným bodom a daným i -tým uzlom (pre $i = 1, 2, \dots, n$) je pri meraní vzdialeností pomocou L_2 -metriky:

$$d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0) = \sqrt{(x_1^i - x_1^0)^2 + (x_2^i - x_2^0)^2}$$

Takýmto spôsobom možno nájsť bod s celkovo najkratšou vzdialenosťou z východiskového uzla do všetkých n ostatných uzlov (odberateľských uzlov). Uvedený problém možno formulovať ako úlohu nájdenia voľného extrém:

$$f(x_1^0, x_2^0) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_1^i - x_1^0)^2 + (x_2^i - x_2^0)^2} \rightarrow \min$$

Na obrázku 3.2 sú znázornené tri objekty. Optimálne umiestnený objekt $\mathbf{x}^0$ je v strede a má súradnice $[x_1^0, x_2^0]$. Vzdialenosť $d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0)$ sa počíta podľa vzťahu $d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0) = \sqrt{(x_1^i - x_1^0)^2 + (x_2^i - x_2^0)^2}$, čo je na obrázku 3.2 zrejmé. Treba minimalizovať súčet všetkých vzdialeností $d(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nie všetky uzly sú však pre lokalizáciu nového objektu rovnako dôležité. Podľa dôležitosti ich možno ohodnotiť váhami (váhy uzlov môžu napríklad vyjadrovať, ako často treba do daných uzlov lietať, aké sú požiadavky odberateľov a podobne).



Obrázok 3.2 Optimálne umiestnenie bodu $\mathbf{x}^0$

Takto možno nájsť minimum zo súčtov, ktoré pozostávajú zo súčinov váh a vzdialeností. Uvedený problém možno formulovať takto:

$$f(x_1^0, x_2^0) = \sum_{i=1}^n w_i \sqrt{(x_1^i - x_1^0)^2 + (x_2^i - x_2^0)^2} \rightarrow \min$$

Pri riešení problému umiestnenia nového skladu je teda potrebné zaviesť váhy jednotlivých odberateľských uzlov (w_i). Jednou z možností určenia váh môže byť podiel odpadu produkovaného v obslužnom centre k celkovému množstvu vyprodukovaného odpadu.

Takto vypočítané riešenie udáva bod s celkovo najkratšou vzdialenosťou z určeného uzla do jednotlivých uzlov.

Takéto riešenie predchádzajúcej úlohy môže byť východiskom na riešenie problému určenia uzla, v ktorom je vhodné umiestniť obslužné centrum, pričom uvažujeme o doprave prostredníctvom cestnej siete. Riešením uvedeného problému lokalizácie obslužného centra v euklidovskom priestore získame lokalitu. V jej okolí vyberieme uzly, na ktoré budeme aplikovať algoritmy teórie grafov. Na získanie východiskového riešenia možno použiť úlohu vyhľadávania ťažiska, ľahko riešiteľnú pomocou vzťahov:

$$x_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_1^i}{n} \quad x_2^0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_2^i}{n}.$$

Prípadne pri použití váh:

$$x_1^0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_1^i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad x_2^0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_2^i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Tieto vzťahy určujú obidve súradnice hľadaného bodu ako aritmetické priemery, príp. vážené aritmetické priemery súradníc daných uzlov.

Riešenie úloh v tejto časti možno realizovať pomocou programu MS Excel, ktorý poskytuje nástroj na hľadanie extrému funkcií s viacerými premennými (Riešiteľ). Na hľadanie ťažiska možno použiť taktiež uvedený program, kde pomocou definovania vzorcov vypočítame požadované hodnoty.

3.2 Lokalizácia v uzloch siete

Z ekonomického hľadiska asi najdôležitejší a najčastejší prípad optimálneho umiestnenia obslužného centra je práve tento. Vychádza z predpokladu, že obslužné centrum možno lokalizovať len do vopred daných uzlov, pretože k nim vedú cesty. Úlohou v praxi môže byť optimálne umiestnenie skladu alebo výrobného závodu, respektíve umiestnenie pobočky distribučnej spoločnosti. Na prepravu sa používajú rovnorodé dopravné prostriedky, napríklad automobily. Cieľom je minimalizovať prepravné náklady (prejdenú vzdialenosť), pričom sa ako celkové prepravné náklady (celková prejdená vzdialenosť) určí suma individuálnych prepravných nákladov (vzdialeností) z obslužného

centra do jednotlivých uzlov. Výhoda vhodne vybraného obslužného centra sa môže prejaviť nielen v úsporách v palive, ale aj v čase, v nižšom opotrebení áut a v celkovej efektívnosti práce.

V týchto prípadoch sa zväčša postupuje iným spôsobom ako pri lokalizácii centra v euklidovskej rovine, pretože obslužné centrum nemožno postaviť v ľubovoľnom bode, kam nevedie žiadna cesta. Pri riešení tohto problému možno sledovať dva druhy cieľov. Prvým je minimalizácia celkovo prejdenej vzdialenosti z obslužného centra do jednotlivých uzlov, ak uvažujeme individuálnu dopravu k jednotlivým uzlom. V druhom prípade možno použiť váhy jednotlivých uzlov, pričom na výpočet váh použijeme požadované hodnoty množstiev substrátov jednotlivých uzlov. Možno ich vyjadriť pre názornosť napríklad v tonách (m^3 atď.), pričom vytvárajú vektor $\mathbf{x}$ s rozmerom $(n \times 1)$. Matica najkratších vzdialeností $\mathbf{D}$ má rozmer $(n \times n)$.

Vynásobením matice najkratších vzdialeností $\mathbf{D}$ a jednotkového vektora $\mathbf{e}$ vzniká vektor $\mathbf{y}$, ktorý je vyjadrený v jednotkách vzdialenosti, pričom reprezentuje celkovo prejdenú vzdialenosť medzi obslužným centrom a jednotlivými uzlami.

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$$

Na optimálne zvolenie obslužného centra treba vybrať ten uzol, ktorý má vo výslednom vektore najnižšiu hodnotu prepravy.

$$\min \{y_i, i = 1, 2, \dots, n \mid \mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}\}$$

Násobením matice najkratších vzdialeností $\mathbf{D}$ a vektora požiadaviek jednotlivých uzlov $\mathbf{x}$ vzniká vektor $\mathbf{y}$, ktorý je vyjadrený v tonokilometroch (príp. osobokilometroch).

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

Jeho jednotlivé prvky vyjadrujú objem prepravy, ktorý by sa realizoval, keby bol daný uzol zvolený ako obslužné centrum. Preto na optimálne zvolenie obslužného centra treba vybrať ten uzol, ktorý má vo výslednom vektore najnižšiu hodnotu prepravy.

$$\min \{y_i, i = 1, 2, \dots, n \mid \mathbf{y} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}\}$$

Ak v nejakom uzle nemôže byť obslužné centrum z objektívnych príčin (nebolo by vydané stavebné povolenie, nevedie k nemu dostatočne kvalitná cesta, nemá pracovné sily a pod.), tak nemusíme príslušný riadok matice násobiť vektorom požiadaviek.

Najjednoduchší prípad v situácii, keď uvažujeme s prepravou substrátov z jednotlivých uzlov, ktorý sa zaobíde aj bez výpočtu, nastane vtedy, ak existuje jeden taký uzol, ktorého požiadavky predstavujú minimálne polovicu z celkových požiadaviek. V tom prípade optimálny uzol bude práve v danom uzle.

Taktiež možno riešiť úlohu pre obidve situácie, kde môže byť potenciálne obslužné centrum aj uzol mimo uvažovaných dodávateľských uzlov. V tomto prípade sa hodnota množstva substrátu, prípadne zložka jednotkovej matice bude rovnať nule. Postup riešenia je identický s postupom uvedeným v predchádzajúcej časti. Samozrejme, maticu najkratších vzdialeností musíme rozšíriť o uvedené potenciálne obslužné centrá.

Pri riešení problému uvedenom v tejto časti možno použiť program MS Excel. Tento program obsahuje maticovú funkciu (násobenie matic), ktorú potrebuje na získanie hodnôt parametrov opísaných v tejto časti. Následným použitím funkcie MIN získame hodnotu minimálnej prejdenej vzdialenosti, prípadne hodnotu tonokilometrov pri individuálnej doprave z obslužného centra do jednotlivých uzlov.

3.3 Úloha umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti

V tejto časti opíšeme dva spôsoby formulácie problému určenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti, ktorá sa musí realizovať pri rozvoze substrátu. Model umožní lokalizovať obslužné centrá tak, aby bola dodržaná požadovaná dostupnosť (vzdialenosť) všetkých uzlov pri minimálnom počte obslužných centier.

Cieľ, ktorý bol stanovený, je založený na myšlienke dostupnosti obslužného centra pre každý uzol dopytu. Treba teda stanoviť maximálnu hodnotu vzdialenosti K každého uzla od uvedeného centra. V našom prípade chceme určiť minimálny počet obslužných centier, aby boli dostupné maximálne na vzdialenosť K . V nasledujúcej časti uvedieme dve možné formulácie modelu.

V prvom rade možno problém formulovať ako úlohu bivalentného programovania, kde máme premenné $x_j \in \{0,1\}$, $j=1, 2, \dots, n$, n – počet uzlov, pričom ak nadobudne hodnotu 0, centrum sa neotvorí v uvedenom uzle, a hodnotu 1, ak sa otvorí. Keďže cieľom je minimalizovať počet obslužných centier, možno účelovú funkciu zapísať:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

Pri tomto prvotnom probléme chceme zabezpečiť dostupnosť všetkých uzlov, čo možno zapísať nasledujúcimi štruktúrnymi ohraničeniami:

$$\min_{j \in J} \{d_{ij} \cdot x_j\} \leq K, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad J = \{j | x_j = 1\}$$

Ohraničení je n , pričom pre každý uzol musí byť splnená podmienka, že vzdialenosť od najbližšieho obslužného centra je maximálne K . Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi uzlami i a j , t. j. matica $\mathbf{D}$ je matica minimálnych vzdialeností medzi uzlami.

Ďalšou podmienkou je existencia aspoň jedného obslužného centra, t. j.:

$$\sum_{j=1}^n x_j \geq 1$$

Formulácia úlohy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min \\ \min_{j \in J} \{d_{ij} \cdot x_j\} &\leq K, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad J = \{j | x_j = 1\} \\ \sum_{j=1}^n x_j &\geq 1 \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde d_{ij} – najkratšia vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom,

K – maximálna možná vzdialenosť.

Problém taktiež možno formulovať ako úlohu bivalentného programovania, v ktorej vystupujú premenné $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet uzlov. Pritom ak premenná nadobudne hodnotu 0, obslužné centrum nebude v uzle zriadené, ak hodnotu 1, obslužné centrum sa zriadi. Na základe cieľa, ktorým je minimalizovať počet obslužných centier, možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

Ohraničenia musia zabezpečiť, aby pre každý uzol bola splnená podmienka, že vzdialenosť od najbližšieho obslužného centra je maximálne K . Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi uzlami i a j , t. j. matica $\mathbf{D}$ (s rozmerom $n \times n$) je matica minimálnych vzdialeností medzi všetkými uzlami. Na základe uvedenej matice $\mathbf{D}$ možno zostrojiť maticu $\mathbf{A}$ (tiež s rozmerom $n \times n$), ktorej prvky a_{ij} nadobúdajú hodnoty 0, ak vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom je väčšia ako K , alebo 1, ak vzdialenosť je menšia alebo sa rovná K :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Ohraničeniami treba zabezpečiť dostupnosť uzla aspoň od jedného obslužného centra na maximálnu vzdialenosť K , čo možno zapísať nasledujúcimi štruktúrnymi ohraničeniami:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Uvedená formulácia musí obsahovať definičný obor premenných, t. j. ich bivalentný charakter:

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Formulácia úlohy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kde a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -tého uzla do vzdialenosti K ,

K – maximálna možná vzdialenosť.

Na riešenie druhého modelu možno použiť klasické prístupy riešenia úloh bivalentného programovania, enumeračné metódy, ale v novšej literatúre sa pomerne často

uvádzajú aj rôzne heuristiky, ktoré v pomerne dobrom čase umožňujú nájsť prijateľné riešenia. K takýmto heuristikám patria napr. Lagrangeova heuristika, greedy heuristika, tabu search, genetické algoritmy a podobne.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Table a(i,j) ;
Variables z;
Positive variable x;
Equations sklady
ohr(j);
sklady.. z=e=sum(i,x(i));
ohr(j).. sum(i,a(i,j)*x(i))=g=1;
Model vzdial /all/;
Solve vzdial using mip minimizing z;
```

3.3.1 Modifikácia úlohy umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier

Pri riešení problémov umiestňovania obslužných centier bola definovaná úloha umiestnenia minimálneho počtu centier, pričom bol definovaný parameter maximálnej možnej vzdialenosti uzla od obslužného centra. V tejto časti uvedieme dve možné úpravy uvedenej úlohy. Prvá zahŕňa podmienky zriadenia obslužných centier vo vopred vybraných uzloch a druhá možnú modifikáciu účelovej funkcie odzrkadľujúcu veľkosť príslušného uzla.

1. Doplnenie úlohy o nevyhnutnosť zriadiť obslužné centrum v požadovaných uzloch

Pri riešení problémov umiestňovania obslužných centier rozhodovateľ často stanovuje požiadavky na ich zriadenie v definovaných lokalitách. Na základe týchto požiadaviek možno úlohu umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier modifikovať nasledujúcim spôsobom.

Nech je potenciálne umiestnenie centier vo všetkých uzloch pri požiadavke, že vo vybraných uzloch musí byť centrum, množina vybraných uzlov – N_k , rozhodovacie premenné pre vybrané uzly $x_j = 1, j \in N_k$.

Formulácia úlohy

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j = 1, \quad j \in N_k$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kde a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -teho uzla do vzdialenosti K ,

K – maximálna možná vzdialenosť.

Riešenie v programovom produkte GAMS je zhodné so zápisom uvedeným v časti 3.3, pričom je rozšírené o dodatočné podmienky pre premenné, ktoré nadobúdajú hodnotu 1.

2. Modifikácia koeficientov účelovej funkcie

Druhou modifikáciou uvedenej úlohy je zohľadnenie veľkosti dopytu v jednotlivých uzloch. Riešenie príslušného problému možno dosiahnuť definovaním koeficientov účelovej funkcie zahŕňajúcich uvedený parameter.

Nech potenciálne umiestnenie obslužných centier je vo všetkých možných uzloch. Pri zohľadnení počtu požiadaviek v jednotlivých uzloch, ich počet spolu je P a P_j je počet požiadaviek j -teho uzla. Koeficienty účelovej funkcie možno vypočítať ako $c_j = 1 - \frac{P_j}{P}$, $j = 1, 2, \dots, n$, pričom c_j reprezentuje potenciálny počet požiadaviek prichádzajúcich do obslužného centra.

Formulácia úlohy

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kde c_j – potenciálny počet požiadaviek prichádzajúcich z j -teho uzla do obslužného centra,

a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -teho uzla do vzdialenosti K ,

K – maximálna možná vzdialenosť.

Riešenie v programovom produkte GAMS je taktiež zhodné so zápisom uvedeným v časti 3.3, pričom rozdiel je pri definovaní koeficientov účelovej funkcie, ktoré nadobúdajú hodnotu potenciálneho počtu požiadaviek prichádzajúcich z j -teho uzla do obslužného centra $c_j = 1 - \frac{P_j}{P}$, $j = 1, 2, \dots, n$ na rozdiel od pôvodných koeficientov 1.

V prílohe 1 možno nájsť aplikáciu pôvodnej úlohy ako aj modifikovaných úloh na mestá Slovenskej republiky.

3.4 Úloha nájdania minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier

V tejto časti opíšeme model, pomocou ktorého možno určiť minimálnu vzdialenosť potrebnú na pokrytie všetkých uzlov pri vopred danom počte obslužných centier. Cieľ, ktorý bol stanovený, je založený na myšlienke minimálnej dostupnosti obslužného centra pre každý uzol dopytu, t. j. pri stanovení počtu obslužných centier treba určiť minimálnu možnú vzdialenosť.

Problém možno formulovať ako úlohu matematického programovania, kde máme premenné $y_{ij} \in \{0,1\}$, $x_i \in \{0,1\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $z \geq 0$, n – počet potenciálnych obslužných centier, ako aj všetkých uzlov. Premenné $y_{ij} \in \{0,1\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujú, či j -ty uzol bude odoberať substrát z i -tého obslužného centra. Na druhej strane v modeli vystupujú premenné $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ktoré nadobúdajú bivalentné hodnoty, pričom ak nadobudnú hodnotu 0, tak sa potenciálne j -te obslužné centrum neotvorí. V prípade nadobudnutia hodnoty 1 je potrebné otvoriť obslužné centrum, aby bol dosiahnutý sledovaný cieľ. Poslednou premennou modelu je premenná z , ktorá nadobudne hodnotu najväčšej vzdialenosti obslužného centra od jednotlivých uzlov. Na základe cieľa, ktorým je nájsť minimálnu vzdialenosť medzi obslužnými centrami a uzlami, možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = z \rightarrow \min$$

Ohraničenia možno rozdeliť do štyroch skupín. Prvá skupina definuje podmienky nevyhnutnosti používania jednej cesty pre každý uzol do obslužného centra.

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Do druhej skupiny štruktúrnych ohraničení zaraďujeme podmienky, ktoré v prípade použitia prevozu substrátu do i -tého obslužného centra zabezpečia otvorenie uvedeného centra.

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Už zo samotného názvu problému vidíme, že je potrebné zaviesť ohraničenie obmedzujúce počet obslužných centier. Keďže premenné $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujú, či obslužné centrum bude otvorené, možno uvedenú podmienku zapísať takto:

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

Posledné skupina ohraničení musia zabezpečiť, aby premenná z , ktorá vystupuje v účelovej funkcii, nadobudla hodnotu maximálnej vzdialenosti pre používané prepravné trasy medzi skladovými centrami a jednotlivými uzlami v príslušnom riešení. Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi obslužnými centrami i a jednotlivými uzlami j , t. j. matica **D** je matica minimálnych vzdialeností.

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z \leq 0$$

Formulácia úlohy

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = z \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$z \geq 0$$

kde p – počet obslužných centier,

d_{ij} – najkratšia vzdialenosť z i -tého uzla do j -tého uzla.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/;
Table d(i,j)
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable z;
Equations uf
prve(j)
druhe(i,j)
tretie
stvrte(j);
uf.. f=e=z;
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
stvrte(j).. sum(i,d(i,j)*y(i,j))-z=l=0;
Model minimalnavzdialenost /all/;
solve minimalnavzdialenost using mip minimizing f;
```

V prílohe 2 uvádzame aplikáciu uvedenej úlohy na mestá Slovenskej republiky.

3.5 Úloha celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier

V tejto časti opíšeme model, pomocou ktorého možno určiť minimálnu celkovo prejdenú vzdialenosť zo všetkých uzlov do obslužných centier pri vopred danom počte obslužných centier. Cieľ, ktorý bol stanovený, je založený na myšlienke prejdenej vzdialenosti zo všetkých uzlov do obslužných centier spolu, t. j. pri stanovení počtu obslužných centier, treba určiť minimálnu možnú celkovo prejdenú vzdialenosť.

Problém možno formulovať ako úlohu bivalentného programovania, kde máme premenné $y_{ij} \in \{0,1\}$, $x_i \in \{0,1\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, n – počet potenciálnych obslužných centier, ako aj všetkých uzlov. Premenné $y_{ij} \in \{0,1\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujú, či j -ty uzol získa substrát z i -tého obslužného centra. Na druhej strane v modeli vystupujú premenné $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ktoré nadobúdajú bivalentné hodnoty, pričom ak nadobudne hodnotu 0, tak sa potenciálne j -te obslužné centrum neotvorí. V prípade

nadobudnutia hodnoty 1 uvedené obslužné centrum je potrebné otvoriť, aby bol dosiahnutý stanovený cieľ.

Na zostrojenie účelovej funkcie potrebujeme parametre $d_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, ktoré udávajú hodnoty minimálnej vzdialenosti medzi obslužnými centrami i a jednotlivými uzlami j , t. j. matica $\mathbf{D}$ je matica minimálnych vzdialeností. Okrem uvedených parametrov je nutné definovať hodnoty $b_j, j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujúce množstvo substrátu dodávaného do j -teho uzla. Na základe cieľa možno účelovú funkciu zapísať týmto spôsobom:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

Ohraničenia možno rozdeliť do troch skupín. Prvá skupina definuje podmienky nutnosti používania jednej cesty pre každý uzol do obslužného centra.

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Do druhej skupiny štruktúrnych ohraničení zaraďujeme podmienky, ktoré zabezpečia v prípade použitia prevozu substrátu do i -tého obslužného centra nutnosť otvorenia uvedeného centra.

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Už zo samotného názvu problému je zrejmá potreba zavedenia ohraničenia obmedzujúceho počet obslužných centier. Keďže premenná $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$ reprezentuje, či obslužné centrum bude otvorené, možno uvedenú podmienku zapísať takto:

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

Formulácia úlohy

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kde p – počet obslužných centier,

d_{ij} – najkratšia vzdialenosť z i -tého uzla do j -tého uzla,

b_j – množstvo substrátu dodávaného do j -tého uzla.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/;
Parameters b(j) ;
Table d(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Equations uf
prve(j)
druhe(i,j)
tretie;
uf.. f=e=sum((i,j),b(j)*d(i,j)*y(i,j));
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
Model celkovavzdialenost /all/;
solve celkovavzdialenost using mip minimizing f;
```

V prílohe 3 uvádzame aplikáciu uvedenej úlohy na mestá Slovenskej republiky.

3.6 Úloha maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti

V tejto časti opíšeme model na stanovenie uzlov, v ktorých budú obslužné centrá, pričom budú zadané počty obslužných centier a maximálna vzdialenosť. Cieľom je určiť uvedené obslužné centrá tak, aby bolo pokryté maximálne množstvo požiadaviek.

Problém možno taktiež formulovať ako úlohu bivalentného programovania, v ktorej vystupujú premenné $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet uzlov. Pritom ak premenná nadobudne hodnotu 0, obslužné centrum sa v uzle nezriadi, ak dosiahne hodnotu 1, obslužné centrum sa zriadi. Ďalšími premennými v modeli sú $y_j \in \{0,1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Tieto premenné nadobudnú hodnotu 0, ak v okolí uzla j nie je dostupné obslužné centrum na vzdialenosť K . Hodnota 1 zasa reprezentuje, že do vzdialenosti K je pre uvedený uzol

dostupné obslužné centrum. Koeficienty účelovej funkcie nadobúdajú hodnoty množstva substrátu požadované v príslušnom uzle $b_j, j=1, 2, \dots, n$. Na základe cieľa, ktorý je maximalizovať pokrytie jednotlivých uzlov obslužnými centrami možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n b_j y_j \rightarrow \max$$

Prvá skupina ohraničení musí zabezpečiť, aby hodnota premennej $y_j \in \{0, 1\}, j=1, 2, \dots, n$ nadobudla hodnoty 1, ak vzdialenosť od najbližšieho obslužného centra je maximálne K , a 0, ak v okolí nie je obslužné centrum. Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi uzlami i a j , t. j. matica $\mathbf{D}$ (s rozmerom $n \times n$) je matica minimálnych vzdialeností medzi všetkými uzlami. Na základe tejto matice $\mathbf{D}$ možno zostrojiť maticu $\mathbf{A}$ (tiež s rozmerom $n \times n$), ktorej prvky a_{ij} nadobúdajú hodnoty 0, ak vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom je väčšia ako K , alebo hodnoty 1, ak je vzdialenosť menšia alebo sa rovná K :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Na tomto základe možno uvedené ohraničenie zapísať takto:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n$$

V modeli je potrebné taktiež zaviesť ohraničenie obmedzujúce počet obslužných centier. Keďže premenná $x_j \in \{0, 1\}, j=1, 2, \dots, n$ reprezentuje, či obslužné centrum bude otvorené, možno uvedenú podmienku zapísať

$$\sum_{j=1}^n x_j = p$$

Formulácia úlohy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n b_i y_i \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i &\geq 0, i=1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_j &= p \\ x_j, y_j &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kde p – počet obslužných centier,

a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -teho uzla do vzdialenosti K ,

K – maximálna možná vzdialenosť,

b_j – množstvo substrátu dodávaného do j -teho uzla.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/;
Parameters b(j) ;
Table a(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Equations uf
prve(i)
druhe;
uf.. f=e=sum(i,b(i)*y(i));
prve(i).. sum(j,a(i,j)*x(j))=g=y(i);
druhe.. sum(i,x(i))=e=p;
Model pokrytie /all/;
solve pokrytie using mip maximizing f;
```

V prílohe 4 uvádzame aplikáciu uvedenej úlohy na mestá Slovenskej republiky.

4 Využitie metód viackriteriálneho programovania v lokačných úlohách

V predchádzajúcich častiach boli opísané modely určené na optimalizáciu prepravných trás a lokačné modely. Pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier možno okrem uvedených modelov použiť aj ich modifikáciu, ktorá môže poskytnúť viac informácií pri výbere týchto obslužných centier. Na základe toho sú v nasledujúcej časti pomocou metód viackriteriálneho programovania riešené problémy s viacerými cieľmi, ktoré poskytujú ďalšie nástroje pre rozhodovanie o umiestnení obslužných centier.

Všeobecne možno použiť modely a metódy viackriteriálneho programovania (Steuer, 1986), (Mlynarovič, 1998), (Cohon, 2004) na riešenie lokačných problémov, pričom základný tvar úlohy viackriteriálneho programovania možno zapísať takto:

$$\text{"max"} \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \mid \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \}$$

kde y_i – i -tá kriteriálna funkcia, $i = 1, 2, \dots, k$,

$\mathbf{y}$ – kriteriálny vektor,

$\mathbf{Y}$ – množina prípustných riešení v kriteriálnom priestore.

4.1 Cieľové programovanie v lokačných úlohách

V tejto časti opíšeme metódy cieľového programovania pomocou, ktorých možno riešiť lokačné úlohy s viacerými účelovými funkciami. Zámerom úlohy cieľového programovania je určiť prípustnú alternatívu, ktorá sa približuje k požiadavkám rozhodovateľa, t. j. stanovenému cieľu danej úlohy. Pri riešení úloh cieľového programovania riešime jednokriteriálnu optimalizačnú úlohu v tvare

$$\min d(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0)$$

za podmienok

$$\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$$

Ciele sú reprezentované bodom $\mathbf{y}^0$ a predstavujú bod kriteriálneho priestoru reprezentujúceho hodnoty, ktoré chce rozhodovateľ dosiahnuť. Aby bolo možné určiť bod z množiny prípustných riešení (Brezina, Ivaničová, Pekár, 2007), ktorý čo najlepšie spĺňa

uvedené ciele, stanovíme funkciu vzdialenosti $d(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0)$, ktorá meria vzdialenosť od cieľa, t. j. ako významne sa nejaká alternatíva $\mathbf{y}$ odlišuje od $\mathbf{y}^0$. Na meranie vzdialenosti dvoch bodov (bodov) $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbf{R}^k$ budeme používať funkciu

$$d(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2) = \|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\|,$$

kde pravá strana uvedeného výrazu vyjadruje určitú veľkosť (normu) vektora $\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2$. Na meranie vzdialenosti budeme používať triedu vážených L_p -metrík, kde

$$\|\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2\|_p = \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i^1 - y_i^2|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

p – parameter metriky,

k – rozmer priestoru,

λ_i – váha i -tého kritéria, pričom $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$.

Riešenie úlohy potom pozostáva z hľadania alternatívy $\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}$ z množiny prípustných alternatív $\mathbf{Y}$, ktorá sa čo možno najmenej, podľa hodnoty $d(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^0)$, odlišuje od zadaného vektora $\mathbf{y}^0$. Túto úlohu možno riešiť ako nasledujúcu jednokriteriálnu optimalizačnú úlohu

$$\min d_p(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \left\{ \sum_{i=1}^k (\lambda_i |y_i^0 - y_i|)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

za podmienok

$$\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$$

ktorou sa hľadá prípustná alternatíva, nachádzajúca sa čo najbližšie k cieľovému vektoru $\mathbf{y}^0$ podľa vybranej váženej L_p -metriky. Parametre $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k$ definujú významnosť jednotlivých kritérií a parameter $p = 1, 2, \dots, \infty$ definuje výber metriky.

V nasledujúcej časti opíšeme spôsoby riešenia úlohy cieľového programovania pre váženú L_1 -metriku a váženú L_∞ -metriku. V prípade váženej L_1 -metriky dostávame účelovú funkciu optimalizačnej úlohy v tvare:

$$\min d_1(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i^0 - y_i|$$

Uvedenú účelovú funkciu možno transformovať na lineárnu účelovú funkciu pomocou odchýlkových premenných:

- o_i^+ , ktorá reprezentuje prekročenie i -tého cieľa,
- o_i^- , ktorá reprezentuje nesplnenie i -tého cieľa.

Potom možno zapísať účelovú funkciu nasledujúcim spôsobom:

$$\min d_1(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(o_i^+ + o_i^-)$$

Pritom medzi štruktúrne ohraničenia treba zaradiť podmienky, ktoré zabezpečia, aby odchýlkové premenné nadobudli hodnoty rozdielu medzi cieľom a hodnotou príslušného riešenia:

$$\begin{aligned} y_i - o_i^+ + o_i^- &= y_i^0, \quad i=1, 2, \dots, k \\ o_i^+, o_i^- &\geq 0, \quad i=1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Na základe toho možno úlohu cieľového programovania formulovať ako úlohu lineárneho programovania pre váženú L_1 -metriku takto:

$$\begin{aligned} \min d_1(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i(o_i^+ + o_i^-) \\ y_i - o_i^+ + o_i^- &= y_i^0, \quad i=1, 2, \dots, k \\ \mathbf{y} &\in \mathbf{Y} \\ o_i^+, o_i^- &\geq 0, \quad i=1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

V prípade, keď parameter p nadobúda hodnotu nekonečno, t. j. keď uvažujeme s váženou L_∞ -metrikou, možno vzdialenosť medzi $\mathbf{y}^0$ a $\mathbf{y}$ definovať ako maximálny prvok z hodnôt

$$\lambda_i |y_i^0 - y_i|, \quad i=1, 2, \dots, k$$

Na základe toho možno zapísať účelovú funkciu pre danú úlohu takto:

$$\min d_\infty(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \max \lambda_i |y_i^0 - y_i|, i=1, 2, \dots, k$$

Uvedenú účelovú funkciu možno pomocou premennej α transformovať na lineárnu funkciu, ak predpokladáme, že $y_i^0 \geq y_i, i=1, 2, \dots, k, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$. Premenná α nadobudne hodnotu:

$$\alpha = \max \{ \lambda_i (y_i^0 - y_i) | i=1, 2, \dots, k \}$$

Z toho vyplýva, že pre premennú α musí platiť

$$\alpha \geq \lambda_i(y_i^0 - y_i), i = 1, 2, \dots, k$$

Účelovú funkciu potom možno zapísať nasledujúcim spôsobom:

$$\min d_{\infty}(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \alpha$$

Medzi štruktúrne ohraničenia je pritom nutné zaradiť podmienky, ktoré zabezpečia, aby premenná α nadobudla váženú hodnotu maximálnej odchýlky od cieľovej hodnoty. To zabezpečia nasledujúce ohraničenia:

$$\alpha \geq \lambda_i(y_i^0 - y_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Na tomto základe možno úlohu cieľového programovania formulovať ako úlohu lineárneho programovania pre váženú L_{∞} -metriku takto:

$$\min d_{\infty}(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}) = \alpha$$

$$y_i + \frac{\alpha}{\lambda_i} \geq y_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$$

$$\alpha \geq 0$$

Pri riešení úloh tohto typu sa stretávame s problémom, že hodnoty jednotlivých účelových funkcií sú neporovnateľné. V takom prípade možno použiť normovanie odchýlkových premenných. Predpokladajme nasledujúci tvar štruktúrneho ohraničenia pre odchýlkové premenné:

$$y_i + o_i^- - o_i^+ = y_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Hodnoty o_i^- a o_i^+ zodpovedajú cieľovým odchýlkam premennej y_i od cieľovej hodnoty y_i^0 . Ak by sme použili štruktúrne ohraničenie v tvare

$$y_i + y_i^0 o_i^- - y_i^0 o_i^+ = y_i^0$$

budú sa hodnoty premenných o_i^- a o_i^+ rovnať priamo percentuálnej odchýlke.

4.2 Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť

Pri riešení úloh nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier sme sa stretli s problémom umiestňovania obslužných centier do uzlov s nižším dopytom, keďže v tejto úlohe sa neprihliada na veľkosť dopytu potenciálneho obslužného centra. Pri úlohe celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier zasa vznikol problém s uzlami s nižším dopytom umiestnenými mimo oblastí s väčšou hustotou uzlov. To spôsobovalo zhoršenú dostupnosť uvedených uzlov.

Tento druh problémov možno riešiť konštrukciou úlohy viackriteriálneho programovania ako kombinácie týchto dvoch úloh (počet kritérií sa rovná dvom, $k = 2$). Nakoľko štruktúra úloh je zhodná, t. j. úlohy majú zhodné premenné, štruktúrne ohraničenia sa líšia iba v skupine ohraničení zabezpečujúcich nadobudnutie hodnoty premennej z , ktorá reprezentuje hodnotu účelovej funkcie pre problém nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier.

Potom možno uvedenú úlohu viackriteriálneho programovania zapísať takto:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= z \rightarrow \min \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i &= p \\ \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Pri konštrukcii modelu cieľového programovania (časť 4.1) bol stanovený predpoklad pre všetky účelové funkcie, ktoré sú typu maximalizácie. Na tomto základe musíme uvedenú úlohu viackriteriálneho programovania upraviť na požadovaný tvar (Brezina, Ivaničová, Pekár, 2007). Problém nemožno riešiť agregovaním účelových funkcií pomocou metódy váh, lebo kritériá nie sú homogénne. Pri riešení využijeme metódy cieľového programovania uvedené v predchádzajúcej časti. Povedzme, že rozhodovateľ stanovil váhy $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ pre obidve kritériá. Jedným zo spôsobov stanovenia váh je

určenie najnižšej (y_1^0 a y_2^0) a najvyššej (y_1^1 a y_2^1) hodnoty pre jednotlivé kritériá, pričom na základe vzťahu

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{y_1^1 - y_1^0}{y_2^1 - y_2^0}$$

možno vypočítať hodnoty váh. Rozhodovateľ ďalej stanoví cieľové hodnoty pre obidve kritériá, prípadne uvažuje s optimálnymi riešeniami jednotlivých jednokriteriálnych úloh za uvedený cieľ, a rieši ju použitím percentuálnych odchýlkových premenných.

Pri použití váženej L_1 -metriky formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu lineárneho programovania nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{o}) &= \lambda_1 o_1^+ + \lambda_2 o_2^+ \rightarrow \min \\ z - y_1^0 o_1^+ &\leq y_1^0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} - y_2^0 o_2^+ &\leq y_2^0 \\ \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i &= p \\ \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ z, o_1^+, o_2^+ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ako možno pozorovať na základe účelovej funkcie, výsledkom bude minimálna hodnota váženej priemernej percentuálnej odchýlky od cieľových hodnôt y_1^0 a y_2^0 . Riešením bude p vybraných uzlov, v ktorých bude postavené obslužné centrum, pričom sa bude zabezpečovať na jednej strane rovnomernosť rozloženia uzlov (1. kritérium) a súčasne sa bude brať do úvahy aj hustotu požiadaviek v regiónoch (2. kritérium). Ak predpokladáme, že uvedené cieľové hodnoty sú minimálne hodnoty prvého a druhého kritéria, tak výsledkom po stanovení príslušných váh bude riešenie odzrkadľujúce požiadavky kladené pri praktických aplikáciách na lokačné úlohy. Z riešenia na základe odchýlkových premenných možno taktiež získať informáciu, o koľko percent sa zhoršia jednotlivé cieľové riešenia, t. j. pre prvé kritérium maximálna vzdialenosť, ktorú musí absolvovať požiadavka z uzla dopytu do najbližšieho obslužného centra, v druhom prípade pre druhé kritérium, koľko percentný nárast celkovo prejdenej vzdialenosti sa v danom

systéme realizuje. Riešenie uvedenej úlohy cieľového programovania bolo realizované pre mestá SR. Z porovnania výsledkov jednokriteriálnych lokačných úloh (minimalizácia maximálnej vzdialenosti (Príloha 2) – 1. kritérium a minimalizácia celkovo prejdenej vzdialenosti (Príloha 3) – 2. kritérium) a úlohy cieľového programovania (Prílohy 5 a 6) možno pritom pozorovať vplyv obidvoch kritérií na riešenie uvedenej úlohy.

Konštrukcia zápisu v programovom systéme GAMS vychádza zo zdrojových kódov uvedených v častiach 3.3 a 3.4, pričom účelové funkcie po modifikácii sa stali štruktúrnymi ohraničeniami a pribudla novo formulovaná účelová funkcia ako vážený priemer odchýlkových premenných. Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálnej vzdialenosti a celkovej minimálnej vzdialenosti použitím váženej L_1 -metriky:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/
l1 /l1/
l2 /l2/
c1 /c1/
c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table d(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable z
o1
o2;
Equations uf
piate
sieste
prve(j)
druhe(i,j)
tretie
stvrte(j);
uf..f=e=l1*o1+l2*o2;
piate.. z-c1*o1=l=c1;
sieste.. sum((i,j),b(j)*d(i,j)*y(i,j))-c2*o2=l=c2;
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
stvrte(j).. sum(i,d(i,j)*y(i,j))-z=l=0;
Model CPvzdialL1 /all/;
solve CPvzdialL1 using mip minimizing f;
```

Pri riešení úloh cieľového programovania je potrebné použiť mieru merania vzdialenosti dvoch bodov. Ako sme už uviedli v predchádzajúcej časti, pri riešení sa zväčša používajú vážené L_p -metriky. V prvom prípade bola použitá vážená L_1 -metrika, i keď na riešenie úloh cieľového programovania možno použiť aj váženú L_∞ -metriku, pričom za predpokladu lineárnej úlohy viackriteriálneho programovania sa jej charakter nezmení. Pri použití váženej L_∞ -metriky formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu lineárneho programovania nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \alpha) &= \alpha \\ z - \frac{y_1^0}{\lambda_1} \alpha &\leq y_1^0 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} - \frac{y_2^0}{\lambda_2} \alpha &\leq y_2^0 \\ \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i &= p \\ \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ z, \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

Rozdiel v riešení použitím váženej L_1 -metriky a váženej L_∞ -metriky spočíva v tom, že v prvom prípade je cieľom minimalizovať vážený priemer odchýlok od cieľových hodnôt, v prípade použitia druhej váženej L_∞ -metriky minimalizujeme váženú najväčšiu odchýlku pre jednotlivé ciele. Uvedený jav spôsobuje maximálne možné vyrovňovanie vážených odchýlok od cieľov. Rozdiel v aplikovaní váženej L_1 -metriky a váženej L_∞ -metriky možno pozorovať v prílohe 6. Pri riešení reálnych úloh z danej oblasti možno uvedený záver o vyrovnanosti odchýlok pre váženú L_∞ -metriku potvrdiť. Z riešenia v prílohe 6 pritom vidieť výraznejšiu odchýlku pre váženú L_1 -metriku pri prvom kritériu (maximálna vzdialenosť medzi obslužným centrom a uzlom odbytu) na rozdiel od riešenia pri použití váženej L_∞ -metriky.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálnej vzdialenosti a celkovej minimálnej vzdialenosti použitím váženej L_∞ -metriky:


```

Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/
l1 /l1/
l2 /l2/
c1 /c1/
c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table d(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable z
alfa;
Equations uf
piate
sieste
prve(j)
druhe(i,j)
tretie
stvrte(j);
uf..f=e=alfa;
piate.. z-c1*alfa/l1=l=c1;
sieste.. sum((i,j),b(j)*d(i,j)*y(i,j))-c2*alfa/l2=l=c2;
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
stvrte(j).. sum(i,d(i,j)*y(i,j))-z=l=0;
Model CPvzdialLnek /all/;
solve CPvzdialLnek using mip minimizing f;

```

4.3 Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: maximálne pokrytie a minimálny počet centier

Ďalším problém, s ktorým sa možno stretnúť pri riešení lokačných úloh, je problém maximálneho pokrytia. Vstupné parametre definované rozhodovateľom uvedenej úlohy sú maximálne pokrytie uzlov obslužnými centrami a počet obslužných centier, pričom rozhodovateľ musí vhodne zvoliť uvedené parametre, prípadne riešiť úlohu s rôznymi parametrami. Jedným z riešení je zostrojenie úlohy viackriteriálneho programovania. Nech prvá účelová funkcia reprezentuje percentuálne pokrytie uzlov a druhá účelová funkcia počet obslužných centier. Potom možno uvedenú úlohu viackriteriálneho programovania zapísať takto:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i y_i}{dm} \rightarrow \max$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \in \{0, 1\}$$

kde dm – celkový dopyt uzlov,

a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -teho uzla do vzdialenosti K ,

b_j – množstvo substrátu dodávaného do j -teho uzla.

Takisto ako predchádzajúci model, aj tento musíme upraviť na požadovaný tvar, pričom v tomto prípade upravíme iba druhú účelovú funkciu. Nech $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ reprezentujú váhy jednotlivých kritérií. Potom rozhodovateľ stanoví cieľové hodnoty pre obidve kritériá. Uvedené hodnoty pritom nemožno získať riešením jednokriteriálnych úloh, nakoľko je konštruovaná z úlohy stanovenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti, t. j. pri 100 % pokrytí uzlov dopytu (uvedenú hodnotu možno stanoviť ako hornú hranicu počtu obslužných centier) a úlohy maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti. Pri konštruovaní, takisto ako v predchádzajúcej časti, možno použiť percentuálne odchýlkové premenné, pričom na riešenie sa použijú metódy cieľového programovania.

V prvom prípade použijeme váženú L_1 -metriku a formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu lineárneho programovania nasledujúcim spôsobom. Úloha je pritom upravená na tvar, v ktorom koeficienty pravej strany nadobúdajú nezáporné hodnoty:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{o}) = \lambda_1 o_1^- + \lambda_2 o_2^+ \rightarrow \min$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_i y_i}{dm} + y_1^0 o_1^- \geq y_1^0$$

$$\sum_{j=1}^n x_j - y_2^0 o_2^+ \leq y_2^0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \in \{0, 1\}$$

$$o_1^-, o_2^+ \geq 0$$

Pri stanovenej úrovni cieľovej hodnoty pokrytia a cieľovej hodnoty počtu obslužných centier, riešenie uvedenej úlohy reprezentuje lokality, kde majú byť umiestnené príslušné obslužné centrá (premenné x_j) a uzly (premenné y_i), ktoré budú pokryté do vzdialenosti K , zahrnuté v koeficientoch a_{ij} (spôsob konštrukcie týchto koeficientov je vysvetlený v časti 3.3). Problém pri riešení tejto úlohy vzniká vtedy, ak je stanovený malý počet obslužných centier ako cieľová hodnota, nakoľko druhá účelová funkcia nadobúda celočíselné hodnoty a pri minimálnej zmene nastáva vysoká percentuálna odchýlka od cieľa. Realizácia výpočtov, kde vstupnými dátami sú mestá Slovenska, je uvedená v prílohe 7.

Východiskom pri konštrukcii zdrojového kódu pre program GAMS je zápis úlohy maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti (časť 3.6). Potom na riešenie úlohy umiestnenia obslužných centier pomocou kritérií maximálneho pokrytia a minimálneho počtu centier s použitím váženej L_1 -metriky možno zdrojový kód pre program GAMS definovať nasledujúcim spôsobom:

```
Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar l1 /l1/
      l2 /l2/
      c1 /c1/
      c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table a(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable o1
o2;
Equations uf
prve(i)
druhe
tretie;
uf.. f=e=l1*o1+l2*o2;
druhe..sum(i,b(i)*y(i))/dm+c1*o1=g=c1;
tretie..sum(i,x(i))-c2*o2=l=c2;
prve(i).. sum(j,a(i,j)*x(j))=g=y(i);
Model CPpokrytieL1 /all/;
solve CPpokrytieL1 using mip minimizing f;
```

Ako v predchádzajúcej časti, aj tu možno na meranie vzdialenosti použiť váženú L_∞ -metriku. Úlohu formulujeme ako úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) &= \alpha \rightarrow \min \\
 \frac{\sum_{i=1}^n b_i y_i}{dm} + \frac{y_1^0}{\lambda_1} \alpha &\geq y_1^0 \\
 \sum_{j=1}^n x_j - \frac{y_2^0}{\lambda_2} \alpha &\leq y_2^0 \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\
 x_j, y_j &\in \{0, 1\} \\
 \alpha &\geq 0
 \end{aligned}$$

Na rozdiel od problému v predchádzajúcej časti 4.2 sa ako vhodnejšie javí použitie váženej L_1 -metriky. Pri riešení totiž môže dochádzať k zhoršeniu prvého kritéria (pokrytie uzlov dopytu) pri nižšej odchýlke druhého kritéria (počet obslužných centier), čo je výhodou z dôvodu špecifického charakteru hodnôt druhej účelovej funkcie.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenia obslužných centier pomocou kritérií maximálneho pokrytia a minimálneho počtu centier použitím váženej L_∞ -metriky:

```

Sets i /1*n/
alias (i,j);
Scalar    l1 /l1/
          l2 /l2/
          c1 /c1/
          c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table a(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable alfa;
Equations uf
prve(i)
druhe
tretie;
uf.. f=e=alfa;
druhe..sum(i,b(i)*y(i))/dm+c1*alfa/l1=g=c1;
tretie..sum(i,x(i))-c2*alfa/l2=l=c2;
prve(i).. sum(j,a(i,j)*x(j))=g=y(i);
Model CppokrytieLnek /all/;
solve CppokrytieLnek using mip minimizing f;

```

4.4 Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a rovnomernosť vytťaženia obslužných centier

Pri riešení úloh nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier umiestňujeme obslužné centrá na základe jediného kritéria, ktoré neberie do úvahy množstvo požiadaviek v jednotlivých oblastiach. Môže to však spôsobiť nadbytočné zriadenie obslužných centier v oblastiach s nízkym dopytom. Uvedenú situáciu umožňuje odstrániť uplatnenie druhého kritéria zohľadňujúce rovnomernosť zaťaženia jednotlivých obslužných centier.

Zaťaženie i -tého obslužného centra získame zo vzťahu $\sum_{j=1}^n b_j y_{ij}$, kde binárna premenná y_{ij} nadobúda hodnotu 1 v prípade, že dopyt j -tého uzla je zabezpečený i -tým obslužným centrom a hodnota parametra b_j reprezentuje hodnotu dopytu j -tého uzla. Ak predpokladáme, že pm reprezentuje priemerný dopyt uzlov určený vzťahom $pm = \frac{dm}{p}$, kde dm je celkový dopyt uzlov a p počet obslužných centier, rozdiel hodnôt zaťaženia obslužného centra a priemerného dopytu uzlov vyjadruje, ako je dané obslužné centrum zaťažené oproti požadovanej hodnote. Štruktúrne ohraničenie, ktoré zabezpečí nadobudnutie odchýlok od požadovanej hodnoty pre odchýlkové premenné, možno potom zapísať takto:

$$\left(\left(\sum_{j=1}^n b_j y_{ij} \right) - pm \cdot ro_i^+ + pm \cdot ro_i^- - pm \right) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kde ro_i^+ – percentuálny nadbytok dopytu v i -tom obslužnom centre,

ro_i^- – percentuálny deficit dopytu v i -tom obslužnom centre.

Násobenie premennou x_i (v prípade nadobudnutia hodnoty 1 sa obslužné centrum zriadi) zabezpečí, aby hodnoty rozdielu nadobudli iba odchýlkové premenné pre uzly, v ktorých je vybudované obslužné centrum. Účelovú funkciu vyjadrujúcu priemernú percentuálnu odchýlku od požadovanej hodnoty zapíšeme nasledujúcim spôsobom:

$$f_1(\mathbf{ro}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n ro_i^+ + ro_i^- \rightarrow \min$$

Zápis úlohy viackriteriálneho programovania vychádza z úlohy nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier, ktorá je rozšírená o uvedené štruktúrne ohraničenie a účelovú funkciu. Potom možno úlohu formulovať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{ro}) &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n ro_i^+ + ro_i^- \rightarrow \min \\
 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= z \rightarrow \min \\
 \left(\left(\sum_{j=1}^n b_j y_{ij} \right) - pm \cdot ro_i^+ + pm \cdot ro_i^- - pm \right) x_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= p \\
 \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 z, ro_i^+, ro_i^- &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Opäť predpokladajme, že rozhodovateľ stanovil hodnoty váh $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ pre obidve kritériá. Pri riešení využijeme metódy cieľového programovania, pričom rozhodovateľ stanoví cieľové hodnoty pre prvé kritérium – priemernú percentuálnu odchýlku dopytu v obslužných centrách a druhé kritérium – maximálnu vzdialenosť medzi uzlom a obslužným centrom, ktorú rieši použitím percentuálnych odchýlkových premenných. Na rozdiel od predchádzajúcich úloh prvé kritérium je konštruované použitím odchýlkových premenných, t. j. pri riešení pomocou metód cieľového programovania budú okrem odchýlkových premenných slúžiacich na agregáciu účelových funkcií použité aj odchýlkové premenné vyjadrujúce percentuálnu odchýlku od požadovanej hodnoty dopytu v obslužnom centre.

V ďalšej časti formulujeme uvedenú úlohu použitím váženej L_1 -metriky a váženej L_∞ -metriky. Ak použijeme váženú L_1 -metriku, uvedenú úlohu formulujeme ako úlohu matematického programovania nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \mathbf{ro}, \mathbf{o}) &= \lambda_1 o_1^+ + \lambda_2 o_2^+ \rightarrow \min \\
 \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n ro_i^+ + ro_i^- - y_1^0 o_1^+ &\leq y_1^0 \\
 z - y_2^0 o_2^+ &\leq y_2^0 \\
 \left(\left(\sum_{j=1}^n b_j y_{ij} \right) - pm \cdot ro_i^+ + pm \cdot ro_i^- - pm \right) x_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= p \\
 \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 z, ro_i^+, ro_i^-, o_1^+, o_2^+ &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Výber uzlov, v ktorých budú zriadené obslužné centrá, je riešením uvedenej úlohy pri stanovenej úrovni cieľovej hodnoty odchýlky od rovnomerného rozloženia dopytu medzi jednotlivé obslužné centrá a odchýlky od požadovanej maximálnej vzdialenosti medzi uzlom a obslužným centrom. Problémom pri riešení úlohy je nelineárnosť štruktúrnych ohraničení zabezpečujúcich nadobudnutie hodnôt odchýlok od priemernej hodnoty počtu požiadaviek na jedno obslužné centrum. Uvedený jav spôsobuje, že sa zvyšuje náročnosť výpočtu riešenia danej úlohy.

Pri riešení úlohy umiestnenia obslužných centier pomocou kritérií minimálnej vzdialenosti a rovnomernosti vyťaženia centier použitím váženej L_1 -metriky pomocou programu GAMS sme na rozdiel od predchádzajúcich úloh použili Solver RMINLP určený na riešenie úloh zmiešaného celočíselného nelineárneho programovania. Zdrojový kód pre program GAMS je nasledujúci:

```

Sets
i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/
pm /pm/
l1 /l1/
l2 /l2/
c1 /c1/
c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table d(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable z
ro1
ro2
o1
o2;
Equations
uf
piate
sieste
siedme(i)
prve(j)
druhe(i,j)
tretie
stvrte(j);
uf..f=e=l1*o1+l2*o2;
piate.. z-c1*o1=l=c1;
sieste.. sum(i,ro1(i)+ro2(i))/p-c2*o2=l=c2;
siedme(i).. x(i)*(sum(j,b(j)*y(i,j))-pm*ro1(i) + pm*ro2(i) -pm)=e=0;
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
stvrte(j).. sum(i,d(i,j)*y(i,j))-z=l=0;
Model CP3L1 /all/;
solve CP3L1 using rminlp minimizing f;

```

V prípade dosiahnutia riešenia, ktoré zabezpečí vyrovnanosť odchýlok jednotlivých kritérií, možno opäť použiť váženú L_∞ -metriku. Pri jej použití formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu matematického programovania nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \mathbf{ro}, \alpha) &= \alpha \rightarrow \min \\
 \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n ro_i^+ + ro_i^- - \frac{y_1^0}{\lambda_1} \alpha &\leq y_1^0 \\
 z - \frac{y_2^0}{\lambda_2} \alpha &\leq y_2^0 \\
 \left(\left(\sum_{j=1}^n b_j y_{ij} \right) - pm \cdot ro_i^+ + pm \cdot ro_i^- - pm \right) x_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n y_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 y_{ij} - x_i &\leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= p \\
 \sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 x_j, y_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\
 z, ro_i^+, ro_i^-, \alpha &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

V časti 4.2 sme opísali úlohu výberu obslužných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a celková minimalizácia vzdialenosti, ktorá bola konštruovaná z dôvodu výberu obslužných centier ako kombinácia uvedených kritérií. V tejto úlohe obdobne riešime problematiku, kde kritérium minimálnej vzdialenosti neberie do úvahy dopyt jednotlivých uzlov, pričom spôsob eliminácie uvedeného javu realizujeme pomocou kritéria rovnomernosti vytťaženia obslužných centier. Toto kritérium sa na rozdiel od kritéria celkovej minimálnej vzdialenosti, keď sa obslužné centrá umiestňovali do lokalít z vyšším dopytom, snaží lokalizovať obslužné centrá tak, aby zabezpečovali dopyt v rovnakej výške. Ako sme už uviedli, pri danej úlohe nastáva problém s jej riešiteľnosťou, nakoľko sme ju formulovali ako úlohu nelineárneho programovania.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenia obslužných centier pomocou kritérií minimálnej vzdialenosti a rovnomernosti vytťaženia centier použitím váženej L_∞ -metriky:

```

Sets
i /1*n/
alias (i,j);
Scalar p /p/
pm /pm/
l1 /l1/
l2 /l2/
c1 /c1/
c2 /c2/;
Parameters b(j);
Table d(i,j);
Variables f;
Binary variable y;
Binary variable x;
Positive variable z
ro1
ro2
alfa;
Equations uf
piate
sieste
siedme(i)
prve(j)
druhe(i,j)
tretie
stvrte(j);
uf..f=e=alfa;
piate.. z-c1*alfa/l1=l=c1;
sieste.. sum(i,ro1(i)+ro2(i))/p-c2*alfa/l2=l=c2;
siedme(i).. x(i)*(sum(j,b(j)*y(i,j))-pm*ro1(i) + pm*ro2(i) -pm)=e=0;
prve(j).. sum(i,y(i,j))=e=1;
druhe(i,j).. y(i,j)-x(i)=l=0;
tretie.. sum(i,x(i))=e=p;
stvrte(j).. sum(i,d(i,j)*y(i,j))-z=l=0;
Model CP3Lnek /all/;
solve CP3Lnek using rminlp minimizing f;

```

4.5 Umiestnenie obslužného centra pomocou kritérií: minimálna cestná sieť a minimálna prejdená vzdialenosť

V tejto časti opíšeme použitie úlohy hľadania minimálnej kostry grafu, ktorá slúži na riešenie určitej skupiny problémov teórie grafov, kde sa konštruuje systém s minimálnou dĺžkou. Tento systém zabezpečuje vzájomné spojenie všetkých jeho súčastí

a svojou podstatou môže byť predpokladom na riešenie problému umiestnenia obslužného centra pomocou metód viackriteriálneho programovania (ako jedno z kritérií).

Úloha hľadania minimálnej kostry grafu je uvedená v časti 2.3. Cieľom je vybrať zo skupiny priamych ciest také, ktoré tvoria systém, umožňujúceho dostať sa z každého uzla do každého uzla tak, aby celková dĺžka používaných ciest bola minimálna. V tomto prípade ide o výber najkratšieho systému ciest spájajúcich všetky uzly, pričom nezáleží na tom, aký počet prechodov po jednotlivých cestách sa bude realizovať.

V uvedenej úlohe hľadania minimálnej kostry grafu je stanovený cieľ minimalizujúci celkovú dĺžku používaných ciest, premenné x_{ij} nadobúdajú bivalentné hodnoty, ktoré reprezentujú používanie cesty z i -tého do j -tého uzla, účelová funkcia má tvar $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, kde c_{ij} je priama vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom, hodnota účelovej funkcie teda reprezentuje celkovú dĺžku používaných ciest.

Pri možnej aplikácii riešení týchto úloh na umiestňovanie obslužného centra vzniká určitý problém, nakoľko aj uzly, ktoré sú blízko zvoleného centra (1. uzol) v prípade nižšej vzdialenosti iného ako vybraného obslužného centra, vyberá cestu práve do uvedeného uzla. Ak použijeme uvedený model, môžeme vytvoriť druhú účelovú funkciu, ktorá okrem cieľa na prevádzkovanie minimálnej cestnej siete prevádzkovateľom zabezpečí aj minimálnu hodnotu prejdenej vzdialenosti v prípade individuálnej dopravy z obslužného centra do jednotlivých uzlov (problém lokalizácie v uzloch siete).

V úlohe hľadania minimálnej kostry grafu sa používajú aj premenné y_{ij} , ktoré reprezentujú početnosť prejdenej cesty medzi i -tým a j -tým uzlom. Potom funkciou v tvare $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij}$ vypočítame celkovú vzdialenosť, ktorú treba prejsť, aby substrát bol doručený z obslužného centra do jednotlivých uzlov.

Formulácia úlohy viackriteriálneho programovania založenej na úlohe hľadania minimálnej kostry grafu je potom nasledujúca:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$0 \leq y_{ij} \leq (n-1) x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Ako aj pri úlohách v predchádzajúcich častiach, opäť možno konštatovať, že jednotlivé kritériálne funkcie nadobúdajú v prvom prípade hodnotu minimálnej cestnej siete a v druhom celkovo prejdenú vzdialenosť pri zabezpečovaní prepravy substrátu z obslužného centra do jednotlivých uzlov, na základe čoho nemožno (neporovnateľné hodnoty účelových funkcií) použiť metódu váh na hľadanie kompromisného riešenia pri známych hodnotách váh jednotlivých kritérií. Riešenie možno opäť nájsť prostredníctvom metód cieľového programovania, pričom pri použití váženej L_1 -metriky formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu matematického programovania nasledujúcim spôsobom:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{o}) = \lambda_1 o_1^+ + \lambda_2 o_2^+ \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - y_1^0 o_1^+ \leq y_1^0$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} - y_2^0 o_2^+ \leq y_2^0$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$0 \leq y_{ij} \leq (n-1) x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$o_1^+, o_2^+ \geq 0$$

Prvý cieľ pôvodnej úlohy viackriteriálneho programovania je reprezentovaný prvým štruktúrnym ohraničením v uvedenej úlohe matematického programovania a hodnota y_1^0 reprezentuje maximálnu hodnotu používaných ciest slúžiacich na zabezpečenie prepravy substrátu z obslužného centra do všetkých uzlov. Prvé ohraničenie zabezpečuje, aby odchýlková premenná o_1^+ , vystupujúca v účelovej funkcii, nadobudla hodnotu percentuálnej odchýlky od požadovanej hodnoty.

Druhý cieľ pôvodnej úlohy viackriteriálneho programovania je reprezentovaný druhým štruktúrnym ohraničením v uvedenej úlohe matematického programovania (hodnota y_2^0 požadovanej maximálnej prejdenej vzdialenosti z obslužného centra do všetkých uzlov), ktoré reprezentuje nadobudnutie percentuálnej odchýlky pre premennú o_2^+ .

Na základe toho možno konštatovať, že riešenie uvedenej úlohy matematického programovania pri stanovenej hodnote váh pre kritériá zabezpečí, aby jeho získané hodnoty (systém používaných cestných spojení) odstránili problém opísaný v časti 2.3, t. j. zrealizovali možnosti na využitie úlohy hľadania minimálnej kostry pri výbere lokality na umiestnenie obslužného centra.

Pri riešení úloh viackriteriálneho programovania používame transformáciu na úlohu cieľového programovania. Následným použitím váženej L_1 -metriky určenej na meranie vzdialenosti možno zostrojiť uvedenú úlohu zmiešaného celočíselného programovania, ktorú riešime pomocou softvérového produktu GAMS.

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenia obslužného centra pomocou kritérií minimálnej cestnej siete a minimálnej prejdenej vzdialenosti použitím váženej L_1 -metriky:

```

Sets
  i vystup /1*n/
  subi1(i) /1/
  subi2(i) /2*n/
  alias (i,j)
  alias (i,k)
  alias (subi2,subj2);
  Scalar  l1 /l1/
  l2 /l2/
  c1 /c1/
  c2 /c2/;
Table c(i,j);
Variables z
  uc;
  Binary Variable x;
  Positive Variable y
  o1
  o2;
Equations
  prve(subi1)
  prve2(subi2)
  druhe(subi2)
  tretie(i,j)
  plate
  sieste
  ucel;
  ucel.. uc=e=l1*o1+l2*o2;
  plate.. sum((i,j),c(i,j)*x(i,j))-c1*o1=l=c1;
  sieste.. sum((i,j),c(i,j)*y(i,j))-c2*o2=l=c2;
  prve(subi1(i)).. sum(j,x(i,j))=e=0;
  prve2(subi2(i)).. sum(j,x(i,j))=e=1;
  druhe(subi2(i)).. sum(j,y(i,j))-sum(subj2(k),y(k,i))=e=1;
  tretie(i,j).. y(i,j)-(n-1)*x(i,j)=l=0;
Model CPkostraL1 /all/;
Solve CPkostraL1 using mip minimizing uc;

```

Okrem uvedeného spôsobu merania vzdialenosti pomocou váženej L_1 -metriky, keď sa vzdialenosť meria ako vážený súčet odchýlok od cieľa, možno použiť váženú L_∞ -metriku. Táto metrika na rozdiel od predchádzajúcej meria vzdialenosť ako maximálnu váženú odchýlku od jednotlivých cieľov. Potom pri použití váženej L_∞ -metriky formulujeme uvedenú úlohu ako úlohu matematického programovania nasledujúcim spôsobom:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha) = \alpha \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \frac{y_1^0}{\lambda_1} \alpha \leq y_1^0$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} - \frac{y_2^0}{\lambda_2} \alpha \leq y_2^0$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$0 \leq y_{ij} \leq (n-1) x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha \geq 0$$

Pri formulácii úlohy sme okrem cieľových hodnôt y_1^0, y_2^0 pre jednotlivé účelové funkcie použili premennú α , ktorá reprezentuje hodnotu váženej percentuálnej odchýlky cieľového bodu od príslušného riešenia. Opäť možno konštatovať, že použitím váženej L_∞ -metriky získame riešenie, ktorého vážené odchýlky od stanovených cieľov sa minimálne odlišujú, t. j. v prvom prípade pri použití váženej L_1 -metriky sme mohli v špecifických prípadoch získať riešenie, v ktorom je jeden z cieľov splnený a pre druhý nastane výraznejšia odchýlka od požadovanej hodnoty na úkor splnenia prvého.

V jednotlivých častiach sme uvádzali zápisy príslušných úloh v softvérovom produkte GAMS. Nakoľko sme uvedenú úlohu formulovali ako úlohu zmiešaného celočíselného programovania, možno takisto použiť Solver MIP (Mix Integer Programming).

Zdrojový kód pre program GAMS na riešenie úlohy umiestnenia obslužného centra pomocou kritérií minimálnej cestnej siete a minimálnej prejdenej vzdialenosti použitím váženej L_∞ -metriky:

```

Sets i vystup /1*n/
    subi1(i) /1/
    subi2(i) /2*n/
    alias (i,j)
    alias (i,k)
    alias (subi2,subj2);
Scalar l1 /l1/
l2 /l2/
c1 /c1/
c2 /c2/;
Table c(i,j);
Variables uc;
Binary Variable x;
Positive Variable y
alfa;
Equations prve(subi1)
prve2(subi2)
druhe(subi2)
tretie(i,j)
plate
sieste
ucel;
ucel.. uc=e=alfa;
plate.. sum((i,j),c(i,j)*x(i,j))-c1*alfa/l1=l=c1;
sieste.. sum((i,j),c(i,j)*y(i,j))-c2*alfa/l2=l=c2;
prve(subi1(i)).. sum(j,x(i,j))=e=0;
prve2(subi2(i)).. sum(j,x(i,j))=e=1;
druhe(subi2(i)).. sum(j,y(i,j))-sum(subj2(k),y(k,i))=e=1;
tretie(i,j).. y(i,j)-(n-1)*x(i,j)=l=0;
Model CPkostraLnek /all/;
Solve CPkostraLnek using mip minimizing uc;

```


Záver

Rozhodovanie o umiestňovaní obslužných centier je problém, s ktorým sa stretáva väčšina firiem, ako aj orgány decíznej sféry. O význame možnosti získať príslušný systém rozloženia obslužných centier svedčí aj pozornosť, ktorá sa uvedenému problému venuje vo vedeckých periodikách. Prehľad publikácií zaoberajúcich sa danou problematikou, ktoré môžu slúžiť na rozhodovanie o lokácii obslužných centier, prinášame v prvej kapitole predloženej práce. Už z tejto kapitoly je zrejmé aj štruktúra nasledujúcich kapitol.

Uvedená štruktúra predloženej práce sleduje cieľ, ktorým je analýza a prezentovanie modelov slúžiacich na podporu rozhodovacieho procesu pri umiestňovaní obslužných centier, ako aj formulácia a prezentácia novovytvorených modelov. Prezentované modely sú postavené na báze viackriteriálneho programovania aplikovaného na modely optimalizácie prepravných trás a lokačné modely. V predloženej práci rozvíjame existujúcu teóriu práve o možné spôsoby aplikácie metód viackriteriálneho programovania na lokačné úlohy, t. j. na úlohy výberu lokality na umiestnenie obslužného centra. Súčasťou práce je tiež spôsob riešenia uvedených úloh pomocou programu GAMS. Využívajú sa pritom formulácie úloh vo forme úloh matematického programovania, lebo realizácia výpočtu riešenia modifikovaných lokačných úloh je možná práve pomocou metód matematického programovania.

Pretože komplexný problém možno chápať tak, že po výbere obslužných centier sa bude realizovať preprava substrátu do jednotlivých uzlov dopytu, vyplýva z toho potreba analyzovať aj úlohy, ktoré optimalizujú prepravu. Nemenej dôležitou úlohou je zostavenie časového plánu prepravy substrátu, ktorej analýzou sa zaoberáme v poslednej časti druhej kapitoly. V tejto časti je okrem štandardných úloh teórie grafov zostrojená modifikovaná úloha (časť 2.2.1) napomáhajúca pri rozhodovaní o stanovovaní spôsobu prepravy od obslužných centier k uzlom, v ktorých je stanovená úroveň dopytu. V danej úlohe uvažujeme s parametrom priepustnosti ciest, ktorý v súčasnosti nadobúda čoraz väčší význam v súvislosti so zvyšovaním záťaže jednotlivých ciest. Riešenie uvedeného modelu s hodnotami priepustnosti ciest v exponovaných časových intervaloch by mohlo prispieť k efektívnemu využitiu prepravných kapacít dopravných prostriedkov. Pri úlohách uvedených v poslednej časti, úlohy s dodatočnými podmienkami (časové podmienky), bola konštruovaná úloha najkratšej cesty v sieti s časovými oknami, ktorá vychádza z úlohy uvedenej v časti 2.1. Ďalšie úlohy s časovými oknami uvedené v časti 2.6 nie sú riešené

použitím programového produktu GAMS, keďže ich výpočtová zložitosť nedovoľuje získať optimálne riešenie už pre menší počet uzlov. Na základe toho sme uvedené problémy riešili pomocou samoorganizujúceho migračného algoritmu SOMA (Čičková, Brezina, Pekár, 2009), ktorá patrí do skupiny evolučných algoritmov.

V tretej kapitole rozoberáme samotné úlohy vytvorené na podporu procesu rozhodovania o umiestňovaní obslužných centier, od základných úloh zameraných na výber jednej lokality slúžiacej ako obslužné centrum až po úlohy rozhodujúce o lokácii systému obslužných centier na základe stanoveného kritéria. Takisto ako v predchádzajúcej kapitole okrem úloh známych z literatúry rozoberáme aj modifikáciu úlohy minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti. Prvým spôsobom modifikácie je stanovenie doplňujúcich podmienok, ktoré reprezentujú nutnosť zriadiť obslužné centrum vo vopred vybraných uzloch. Ďalšou úpravou je zmena koeficientov účelovej funkcie. K uvedenej modifikácii sme pristúpili na základe zistenej skutočnosti pri riešení pôvodnej úlohy, ktorá neprihliada na výšku dopytu v uzle. Tento jav môže spôsobiť lokáciu obslužných centier do uzlov s nižším dopytom. Pri konštrukcii boli ako koeficienty účelovej funkcie definované hodnoty odzrkadľujúce výšku dopytu v uzle.

Značná časť úloh prezentovaných v druhej a tretej kapitole je pomerne známa z literatúry. V týchto kapitolách sme sa zamerali na detailnejší spôsob konštrukcie úloh ako úloh matematického programovania. Uvedený postup bol zvolený na základe cieľa predloženej práce, t. j. využitia metód viackriteriálneho programovania v lokačných úlohách. Na základe úloh s jedným cieľovým kritériom boli vytvorené viackriteriálne úlohy, ktoré lepšie odzrkadľujú reálne požiadavky rozhodovateľov na umiestnenie obslužných centier. V štvrtej kapitole opisujeme štyri vytvorené úlohy na báze predchádzajúcich úloh. Problém výberu obslužných centier pri použití kritéria minimálnej vzdialenosti, ktorá neprihliada na výšku dopytu, ako aj problém pri použití kritéria celkovej minimálnej vzdialenosti (diskriminácia obyvateľov v regiónoch s nižšou úrovňou dopytu) možno vyriešiť práve použitím metód viackriteriálneho programovania (časť 4.2). Druhou zo skupiny úloh riešených v tejto kapitole je umiestnenie obslužných centier pri využití kritérií maximálneho pokrytia a minimálneho počtu obslužných centier. Pri riešení nastal problém pri nízkej cieľovej hodnote počtu obslužných centier, nakoľko uvedená účelová funkcia nadobúda celočíselné hodnoty. Ďalšou úlohou riešenou aplikovaním metód cieľového programovania bolo umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálnej vzdialenosti a rovnomernosti vytťaženia obslužných centier. Obdobne ako

v časti 4.2, aj tu sa rieši problém, ktorý nastáva pri riešení úlohy pri kritériu minimálnej vzdialenosti, t. j. neberie do úvahy dopyt. Kritérium rovnomernosti vytťaženia zahŕňa práve vplyv dopytu na lokalizáciu obslužných centier. Problém, ktorý vzniká pri riešení tejto úlohy, je nelineárnosť štruktúrnych ohraničení zabezpečujúcich nadobudnutie percentuálnych odchýlok od priemernej hodnoty dopytu, t. j. od požadovanej hodnoty dopytu na jedno obslužné centrum. Posledná úloha v štvrtej kapitole je, na rozdiel od predchádzajúcich, postavená na úlohách opísaných v druhej kapitole (úlohy optimalizácie prepravných trás). Význam tejto úlohy spočíva vtom, že dopyt je zabezpečený obslužným centrom v špecifických situáciách (napr. živelné pohromy atď.). Riešenie potom reprezentuje množina ciest, ktoré musia byť udržiavané na zabezpečenie plynulého zásobovania jednotlivých uzlov tak, aby bol získaný kompromis medzi kritériom minimálnej cestnej siete a minimálnou prejdenou vzdialenosťou, ak uvažujeme individuálnu dopravu z obslužného centra do uzlov siete.

Prezentovaná práca si nekladie za cieľ vyčerpávajúco analyzovať a opísať všetky možné situácie, s ktorými sa stretáva rozhodovateľ pri umiestňovaní obslužných centier v závislosti od určených cieľov, ale na vybraných problémoch prezentuje možnosti využitia formulácie úloh matematického programovania a ich riešenie pomocou programového produktu GAMS. Takéto skĺbenie vedie k rozvoju moderných metód na podporu rozhodovania pre efektívne rozmiestňovanie akýchkoľvek objektov na báze viacerých cieľov pri špecifických požiadavkách.

Literatúra

- AHUJA, R. – MAGNANTI, T. – ORLIN, J. 1993. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. New Jersey : Prentice Hall, 1993. 864 s. ISBN 013617549X.
- ANDROUTSOPOULOS, K. N. – ZOGRAFOS, K. G. 2008. Solving the k-shortest path problem with time windows in a time varying network. In: *Operations Research Letters*. ISSN 0167-6377, 2008, vol. 36, no. 6, p. 692-695.
- ANEJA, Y. P. – AGGARWAL, V. – NAIR, K. P. K. 1983. Shortest chain subject to side constraints. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1983, vol. 13, p. 295-302.
- ARAKAKI, R. G. I. – LORENA, L. A. N. 2001. A Constructive Genetic Algorithm for the Maximal Covering Location Problem. In: *Proceedings of the 4th Metaheuristics International Conference*. Porto : 2001. ISBN:1-4020-7653-3, p. 13-17.
- ASCHEUER, N. – FISCHETTI, M. – GRÖTSCHEL, M. 2000. A Polyhedral Study of the Asymmetric Traveling Salesman Problem with Time Windows. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 2000, vol. 36, no. 2, p. 69-79.
- BAKER, E. K. 1983. An exact algorithm for the time-constrained traveling salesman problem. In: *Operations Research*. ISSN 0103-6513, 1983, vol. 31, no. 5, p. 938-945.
- BAR-YEHUDA, R. – EVEN, G. – SHAHAR, S. 2003. On Approximating A Geometric Prize-Collecting Traveling Salesman Problem With Time Windows. In: *Lecture notes in computer science*. Berlin : Springer, 2003. p. 55-66.
- BEASLEY, J.E. 1993. Lagrangean heuristics for location problems. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1993, vol. 65, p. 383-399.
- BOLAND, N. – DOMÍNGUEZ-MARÍN, P. – NICKEL, S. – PUERTO, J. 2003. Exact procedures for solving the discrete ordered median problem. In: *Technical Report, Institut Techno und Wirtschaftsmathematik*. Kaiserslautern : 2003. ISSN 1434-9973 vol. 43, p. 41-52.
- BRÄYSY, O. – GENDREAU, M. 2005. Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I: Route Construction and Local Search Algorithms. In.: *Transportation Science*. ISSN: 1526-5447, 2005, vol. 39, no. 1, p. 104-118.
- BREZINA, I. 2003. *Kvantitatívne metódy v logistike*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2003. 294 s. ISBN 80-225-1735-6.

BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2006. Optimálne umiestnenie objektu. In: *EKONOMIKA A INFORMATIKA*. ISSN 1336-3514, 2006, roč. 4, č. 2, s. 3-15

BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – GEŽÍK, P. – PEKÁR, J. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009. 220 s. ISBN 978-80-225-2825-2.

BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*. Bratislava : Iura Edition, 2007. 243 s. ISBN 978-80-8078-176-7.

BREZINA, I. – PEKÁR, J. – ČIČKOVÁ, Z. 2009. Modelling of the collection centers in Slovak Republic. In: *Strategic management : international journal of strategic management and decision support systems in strategic management*. Subotica : University of Novi Sad, Faculty of Economics Subotica, ISSN 1821-3448, 2009. Vol. 14, No. 3 s. 31-36.

BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2009. Application of evolutionary approach to solving vehicle routing problem with time windows. In: *Ekonomické rozhľady : vedecký časopis Ekonomickej univerzity v Bratislave = Economic review = quarterly journal of the University of Economics Bratislava*. Bratislava : Ekonomická univerzita v Bratislave, ISSN 0323-262X, 2009. Roč. 38, č. 4, s. 529-539.

BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2009. Application of multiple criteria decision analysis for finding the optimum location for a new depot. In: *Statistical analysis of the economic and social consequences of transition processes in Central-East European countries*. Krakow : Cracow University of Economics Press, ISBN 978-83-7252-457-7. - ISSN 1899-6205, 2009. s. 9-18.

BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2009. Model of the collection centres in communes of Slovak Republic. In: *Mathematical methods in economics 2009 : 27th international conference, 9 -11 September 2009*. Prague : Czech University of Life Sciences Prague, ISBN 978-80-213-1963-9, 2009. s. 29-32.

BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2009. Heuristický prístup na riešenie problému lokácie p-uzlov. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu [elektronický zdroj] : mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 2.-4. prosinec*. Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze – Nakladatelství Oeconomica, ISBN 978-80-245-1605-9, 2009.

- BREZINA, I. – PEKÁR, J. – ČIČKOVÁ, Z. 2006. Storage location problem. In: *Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XIII : proceedings of the international conference : 6th-8th december 2006, Bratislava, Slovakia*. Bratislava : IURA EDITION, ISBN 80-8078-129-X, 2006. s. 5-10.
- BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2009. *Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov*. Bratislava : EKONÓM 2009, ISBN 978-80-225-2648-7.
- CARLTON, W.B. – BARNES, J. W. 1996. Solving the Traveling Salesman Problem with Time Windows Using Tabu Search. In: *Institute of Industrial Engineering Transactions*. 1996, Vol. 28, No. 8, p. 617-629.
- CARPANETO, O. – TOTH, P. 1980. Some new branching and bounding criteria for the asymmetric traveling salesman problem. In: *Management Science*. ISSN 1526-5501, 1980, vol. 26, no. 7, p. 736-743.
- CHRISTOFIDES, N. – BEASLEY, J. E. 1982. A tree search algorithm for the p-median problem. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1982, vol. 10, no. 2, p. 196–204.
- CHUANG, C. – LIN, R. 2007. A Maximum Expected Covering Model for an Ambulance Location Problem. In: *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*. ISSN: 1017-0669, 2007, vol. 24, no. 6, p. 468-474.
- COHON, J. L. 2004. *Multiobjective programming and planning*. New York : Academic Press, 2004, p. 352, ISBN 0-486-43263-7.
- CORMEN, T. H. – LEISERSON, C. E. – RIVEST, R. L. – STEIN, C. 2001. 26. *Maximum Flow. Introduction to Algorithms*. Second Edition. Cambridge : MIT Press and McGraw-Hill. 2001. 668 p. ISBN 0-262-03293-7.
- CSISZÁR, S. 2005. Route Elimination Heuristic for Vehicle Routing Problem with Time Windows. In: *Acta Polytechnica Hungarica*. ISSN 1785-8860, 2005, Vol. 2, No. 2, p. 77-89.
- CURRENT, J. – MIN, H. – SCHILLING, D.A., 1990. Multiobjective analysis of facility location decisions. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1990, vol. 49, no. 3, p. 295–307.

CYRUS, J. P. 1988. *The vehicle scheduling problem: Models, complexity and algorithms* : Ph.D. Thesis, Halifax : Technical University of Nova Scotia, Department of Engineering, 1988. p. 126.

ČIČKOVÁ, Z. – BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2008 SOMA for solving the vehicle routing problem with time Windows. In: *Zbornik radova: SYM-OP-IS 2008, XXXV Simpozijum o operacionim istraživanjima*. Soko Banja. – Beograd : Univerzitet u Beogradu, ISBN 978-86-7395-248-2, 2008, p. 305–308.

ČIČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2009. Nájdenie najkratšej cesty pre všetky mestá v SR. In: *Ekonomika a informatika : vedecký časopis FHI EU v Bratislave a SSHI*. ISSN 1336-3514, 2009, roč. 7, č. 1, s. 1-7.

DASKIN, M. S. 1995. *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1995, 498 p. ISBN 0-471-01897-X.

DESAULNIERS, G. – VILLENEUVE, D. 2000. The shortest path problem with time windows and linear waiting costs. In: *Transportation Science*. ISSN 1526-5447, 2000, vol. 34, no. 3, p. 312-319.

DESROCHERS, M. – DESROSIERS, J. – SOLOMON, M. 1992. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. In: *Operations Research*. ISSN 0030-364X, 1992, vol. 40, no. 2, p. 342-354.

DESROSIERS, J. – SOUMIS, F. – DESROCHERS, M. 1984. Routing with time windows by column generation. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1984, vol. 14, no. 4, p. 545-565.

DIESTEL, R. 2005. *Graph Theory*. Electronic Edition 2005. Heidelberg : Springer-Verlag, 2005, 431 p., ISBN 3-540-26182-6.

DOMÍNGUEZ-MARÍN, P. – HANSEN, P. – MLADENOVIC, N. – NICKEL, S., 2003. Heuristic procedures for solving the discrete ordered median problem. In: *Technical Report, Institut Techno- und Wirtschaftsmathematik*. ISSN 1434-9973, 2003, no. 46, p. 31.

DOMSCHKE, W. 1990. *Logistic Rundreisen und Touren*, 3. Auflage, München, Wien, Oldenbourg, Verlag, 1990.

DOMSCHKE, W. – DREXL, A. 1996. *Logistik: Standorte*. Oldenbourg Lehr- und Handbucher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, fourth ed. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien. 1996.

- DONATI, A. V. – MONTEMANNI, R. – GAMBARDELLA, L. M. – RIZZOLI, A. E. 2003. Integration of a robust shortest path algorithm with a time dependent vehicle routing model and applications. In: *Proceedings of CIMSA 2003 – International Symposium on Computational Intelligence for Measurement Systems and Applications*. Lugano : Institute of Electrical and Electronics Engineers, ISBN 0-7803-7783-4, 2003, p. 26-31.
- DONDO, R. – CERDÁ, J. 2006. An MILP framework for dynamic vehicle routing problems with time windows. In: *Latin American Applied Research*. ISSN 0327-0793, 2006, vol. 36, no. 4, p. 255-261.
- DREZNER, Z. at al. 2004. *Facility location. Applications and theory*. Berlin : Springer-Verlag, 2004. ISBN 3-540-21345-7, p. 457.
- DUPAL', A. – BREZINA, I. – MAREČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2010. Spaľovne odpadu v kontexte riešení zelenej a reverznej logistiky. (1). In: *Doprava a logistika*. ISSN 1337-0138, 2010, roč. 5, č. 1, s. 28-29.
- DUPAL', A. – BREZINA, I. – MAREČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2010. Spaľovne odpadu v kontexte riešení zelenej a reverznej logistiky. (2). In: *Doprava a logistika*. ISSN 1337-0138, 2010, roč. 5, č. 2, s. 28-29.
- FÁBRY, J. 2006. *Dynamické okružní a rozvozní úlohy* : Disertační práce. Praha : VŠE-FIS, 2006. 142 s.
- FERNANDEZ, E. – PUERTO, J., 2003. Multiobjective solution of the uncapacitated plant location problem. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 2003, vol. 145, no. 3, p. 509–529.
- FIALA, P. 2005. *Modelování dodavatelských řetězců*. Praha : Professional Publishing, 2005, 168 s, ISBN 80-86419-62-2.
- FIALA, P. 2008. *Řízení projektu*. Praha : Oeconomica, 2008. 186 s. ISBN 978-80245-1413-0.
- FLEISCHMANN, B., 1993. Designing distribution systems with transport economies of scale. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1993, vol. 70, no.1, p. 31–42.

- GALVAO, R. D. – ESPEJO, L. G. A. – BOFFEY, T. B. 2002. A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 2002, vol. 138, no. 3, p. 495–517.
- GALVÃO, R. D. – REVELLE, C. 1996. A Lagrangean heuristic for the maximal cover location problem. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1996, vol. 88, no. 1, p. 114–123.
- GELDERS, L. F. – PINTELON, L. M. – VAN WASSENHOVE, L. N. 1987. A location-allocation problem in a large Belgian brewery. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1987, vol. 28, no. 2, p. 196–206.
- GENDREAU, M. – GUERTIN, F. – POTVIN, J. – TAILLARD, E. 1999. Parallel tabu search for real-time vehicle routing and dispatching. In: *Transportation Science*. ISSN 1526-5447, 1999, vol. 33, no. 4, p. 381–390.
- GEOFFRION, A. M. – GRAVES, G. W. 1974. Multicommodity distribution system design by Benders decomposition. In: *Management Science*. ISSN 1526-5501, 1974, vol. 20, no. 5, p. 822–844.
- GEOFFRION, A. M. – POWERS, R. F. 1995. Twenty years of strategic distribution system design: An evolutionary perspective. In: *Interfaces*. ISSN 0092-2102, 1995, vol. 25, no. 5, 105–127.
- GEOFFRION, A. M. – GRAVES, G. W. – LEE, S. J. 1982. A management support system for distribution planning. In: *INFOR*. ISSN: 0315–5986, 1982, vol. 20, no. 4, p. 287–314.
- GUO, W. – CHEN, G. – FENG, X. – YU, L. 2007. Solving Multi-criteria Minimum Spanning Tree Problem with Discrete Particle Swarm Optimization. In: *Proceedings of the Third International Conference on Natural Computation*. ISBN 0-7695-2875-9, 2007, vol.4, p. 471-478.
- HANDLER, G. Y. 1979. Complexity and efficiency in minimax network location. In: Christofides, N., Mingozzi, A., Toth, P., Sandi, C. (Eds.), *Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, pp. 281–314 (Chapter 10).
- HANJOUL, P. – PEETERS, D. 1985. A comparison of two dual-based procedures for solving the p-median problem. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1985, vol.20, no. 3, p. 387–396.

- HANSEN, P. 1980. *Bicriterion path problems*. In: *Multiple Criteria Decision Making: Theory and Applications*, LNEMS 177 (G. Fandel and T. Gal, Eds.), 1980. Springer-Verlag, Berlin, pp. 109-127
- HASHIMOTO, H. – IBARAKI T. – IMAHORI S. – YAGIURA, M. 2006. The vehicle routing problem with flexible time windows and traveling times. In: *Discrete Applied Mathematics*. ISSN 0166-218X, 2006, vol. 154, no. 16, p. 2271 – 2290.
- HOMBERGER, J. – GEHRING, H. 2005. A two-phase hybrid metaheuristic for the vehicle routing problem with time windows. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 2005, vol. 162, no. 1, 220-238.
- IBARAKI, T. – IMAHORI, S. – NONOBE, K. – SOBUE, K. – UNO, T. – YAGIURA, M. 2008. An Iterated Local Search Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Convex Time Penalty Functions. In: *Discrete Applied Mathematics*. ISSN: 0166-218X, 2008, vol. 156, no. 11, p. 2050-2069.
- IVANIČOVÁ, Z. – CHOCHOLATÁ, M. – STLOZE, A. 2007. *Operations Research für Manager*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2007. 206 s. ISBN 978-80-225-2347-9.
- JAFFE J. M. 1984. Algorithms for Finding Paths with Multiple. Constraints. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, vol. 14, p.95-116.
- JANÁČEK, J. 2006. Safety on Roads from View of Emergency System Design. In: *Journal of Information, Control and Management Systems*. ISSN 1336-1716, 2006, vol. 4, no. 2/1, p. 91-101.
- JANÁČEK, J. 2008. Approximate Covering Models of Location Problems. In: *Lecture Notes in Management Science. Proceedings of the 1st International Conference on Applied Operational Research-ICAOR '08*. ISSN 2008-0050, 2008, vol. 1, p.53-61.
- JANÁČEK, J. 2003. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina : EDIS, 2003. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.
- JANÁČEK, J. – BUZNA, Ľ. 2007. *Facility location in distribution systems*. Žilina : EDIS, 2007. 142 p. ISBN 978-808070-649-4.
- JÁNOŠÍKOVÁ, L. 2007. Emergency Medical Service Planning. In: *Communications : Scientific Letters of the University of Žilina*. ISSN 1335-4205, 2007, vol. 9, no. 2, p. 64-68.

- JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. 2007. Optimálne umiestnenie staníc záchranej zdravotnej služby z hľadiska dopravnej dostupnosti. In: *Sborník příspěvků z mezinárodní konference INFOTRANS 2007*. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2007. ISBN 978-80-7194-989-3, p. 143-148.
- JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. 2008. Viackriteriálne lokačné úlohy v zdravotníctve. In: *Sborník příspěvků semináře Úlohy diskrétní optimalizace v dopravní praxi*. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2008. ISBN 978-80-7395-076-7, p. 26-38.
- JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. 2009. Reduction of a hospital network as a multiple criteria optimization problem. In: *Ekonomie a management*. ISSN 1212-3609, 2009, vol. 12, no. 3, p. 50–57.
- JOKSCH, H.C. 1966. The shortest route problem with constraints. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. ISSN 0022-247X, 1966, vol. 14, p. 191-197.
- KORBUT, A. A. – FINKELŠTEJN, J. J. 1972. *Diskrétné programovanie*. Bratislava : ALFA, 1972. 351 s.
- KRUSKAL, J.B. 1956. On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem. In: *Proceedings of the American Mathematical Society*. ISSN 0002-9939, 1956, vol. 7, no. 1, p. 48–50.
- LANGEVIN, A. – DESROCHERS, M. – DESROSIERS, J. – GELINAS, S. – SOUMIS, F. 1993. A two-commodity flow formulation for the traveling salesman and the makespan problems with time windows. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1993, vol. 23, no. 7, p. 631-640.
- LAPORTE, G. – NOBERT, Y. 1987. Exact algorithms for the vehicle routing problem. In: *Annals of Discrete Mathematics*. ISSN 0167-5060, 1987, vol. 31, p. 147-184.
- LAU, H.C. – SIM, M. – TEO, K.M. 2003. Vehicle routing problem with time windows and a limited number of vehicles. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 2003, vol. 148, no. 3, p. 559-569.
- LAWLER, E. 2001. "4. Network Flows". *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Dover. ISBN 0486414531, p. 109–177.

- LIN, S. – KERNIGHAN, B. 1973. An efficient heuristic for the traveling salesman problem. In: *Operations Research*. ISSN: 0030-364X, 1973, vol. 21, no. 2, p. 498-516.
- LITTLE, J. D. C. – MURTY, K. – SWEENEY, D. W. – KAREL, C. 1963. An Algorithm for the Traveling Salesman Problem. In: *Operations Research*. ISSN: 0030-364X, 1963, vol. 11, no. 6, p. 972-989.
- LOVE, R.F. – MORRIS, J.G. – WESOLOWSKY, G.O. 1988. Facilities Location: Models & Methods. Publications in Operations Research Series, vol. 7. North-Holland, Amsterdam.
- MAGNANTI, T. 1981. Combinatorial optimization and vehicle fleet planning: Perspectives and prospects. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1981, vol. 11, p. 179-214.
- MARIN, A. – NICKEL, S. – PUERTO, J. – VELTEN, S. 2006. A flexible model and efficient solution strategies for discrete location problems. In: *Operations Research Proceedings 2005*. p. 349–354. H.-D. Haasis et al. (eds.). Springer Verlag, 2006.
- MAZZOLA, J.B. – NEEBE, A.W. 1999. Lagrangian-relaxation-based solution procedures for a multiproduct capacitated facility location problem with choice of facility type. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1999, vol. 115, no. 2, p. 285–299.
- MIEHLE, W. 1958. Link-length minimization in networks. In: *Operations Research*. ISSN 0030-364X, 1958, vol. 6, no. 2, p. 232–243.
- MLYNAROVÍČ, V. 1998. *Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 1998. 233 s. ISBN 80-225-0985-X.
- MÜLLER-MERBACH, H. 1970. *Optimale Reihenfolgen*. Berlin : Springer-Verlag, 1970.
- NICKEL, S. – PUERTO, J. 2005. *Location Theory – A Unified Approach*. Berlin : Springer-Verlag, 2005. 437 p. ISBN 978-3-540-24321-2.
- OR, I. 1976. *Traveling Salesman-Type Combinatorial Problems and Their Relation to the Logistics of Regional Blood Banking*. Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1976.
- OWEN, S.H. – DASKIN, M.S. 1998. Strategic facility location: A review. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, vol. 111, no. 3, p. 423–447.

PALÚCH, S. – PEŠKO, Š. 2006. *Kvantitatívne metódy v logistike*. Žilina : EDIS vydavateľstvo ŽU, 2006. 185 s. ISBN 80-8070-636-0.

PEKÁR, J. 2010. *Softvérová podpora rozhodovania v prostredí Microsoft Excel*. Bratislava: Ekonóm, 2010. 82 s. ISBN 978-80-225-2889-4.

PEKÁR, J. – BREZINA, I. 2008. Problém umiestnenia zberných miest. In: *Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze a Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave [elektronický zdroj]*. Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze - Nakladatelství Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1405-5.

PEKÁR, J. – ČIČKOVÁ, Z. 2007. Optimalizácia rozvozných trás. In: *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach [elektronický zdroj] : 11. medzinárodná vedecká konferencia : 17.-18. máj 2007 : [zborník príspevkov]*. Bratislava : Fakulta hospodárskej informatiky EU, 2007. ISBN 978-80-225-2334-9.

PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. 2008. Umiestnenie skladu pomocou metód viackriteriálneho vyhodnocovania variantov. In: *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach [elektronický zdroj] : 12. medzinárodná vedecká konferencia : Bratislava, 19.-21. novembra 2008 : 40. výročie vzniku FHI EU v Bratislave*. Bratislava : Iura Edition, 2008. ISBN 978-80-8078-233-7.

PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. 2009. Model rozmiestnenia p-triediacich centier v SR. In: *Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi IX Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave [elektronický zdroj] : zborník : Zázrivá, 3.-5. jún 2009*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009. ISBN 978-80-225-2759-0. s. 1-7.

PELIKÁN, J. 2001. *Diskrétní modely v operačném výzkumu*. Praha : Professional Publishing, 2001. ISBN 80-86419-17-7.

PEŠKO, Š. 2002. *Optimalizácia rozvozov s časovými oknami*. Konferencia KYBERNETIKA - história, perspektívy, teória a prax, zborník referátov, Žilina, s. 76-81, ISBN 80-967609, 2002

PLASTRIA, F. – VANHAVERBEKE, L. 2006. *Maximal Covering Location problem with Price Decision for Revenue Maximization in a Competitive Enviroment*. In:

www.vub.ac.be/MOSI/papers/PlastriaVanhaverbeke2006_MaxcoverRevenue.pdf

- POTVIN, J. – Y., ROUSSEAU, J.M. 1993. A parallel route building algorithm for the vehicle routing and scheduling problem with time windows. In: *European Journal of Operational Research*. ISSN 0377-2217, 1993, vol. 66, p. 331-340.
- PRIM, R. C. 1957. Shortest connection networks and some generalisations. In: *Bell Systems Technical Journal*. 1957, vol. 36, p.1389-1410.
- PSARAFTIS, H. – SOLOMON, M. – MAGNATI, T. – KIM, T. 1990. Routing and scheduling on a shoreline with release times. In: *Management Science*. ISSN 1526-5501, 1990, vol. 36, p. 212-223.
- QURESHI, A.G. – TANIGUCHI, E. – YAMADA, T. 2007. Elementary shortest path problem with resource constraints and time dependent late arrival penalties. In: *Japan Society of Civil Engineers*. ISSN 1884-7781, 2007, vol. 63, no. 4, p.579-590.
- REVELLE, C.S. – LAPORTE, G., 1996. The plant location problem: New models and research prospects. In: *Operations Research*. ISSN 0030-364X, 1996, Vol. 44, no. 6, p. 864–874.
- ROBINSON JR., E.P. – GAO, L.L. – MUGGENBORG, S.D. 1993. Designing an integrated distribution system at DowBrands, Inc. In: *Interfaces*. ISSN 0092-2102, vol. 23, no. 3, p. 107–117.
- SAVELSBERGH, M.W.P. 1985. Local search in routing problems with time Windows. In: *Annals of Operations Research*. ISSN 0254-5330, 1985, Vol. 4, no. 6, p. 285 – 305.
- SEKAJ, I. 2005. *Evolučné algoritmy a ich použitie v praxi*. Bratislava : IRIS, 2005. 157 s. ISBN 80-89018-87-4.
- SCHILLING, D.A. – JAYARAMAN, V. – BARKHI, R. 1993. A review of covering problems in facility location. In: *Location Science*. ISSN 0966-8349, 1993, vol. 1, no. 1, p. 25–55.
- SHARAIHA, Y.M. – GENDREAU, M. – LAPORTE, G. – OSMAN, I.H. 1997. A Tabu Search Algorithm for the Capacitated Shortest Spanning Tree. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1997, vol. 3, p. 161–171.
- SKÝVA, L. a kol. 1987. *Energeticky optimální řízení dopravních systémů*. Praha : Nadas, 1987.

- STEUER, R. E. 1986. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York : JOHN WILEY and SONS, 1986. ISBN 047188846X.
- TAN, K.C. – LEE, L.H. – ZHU, Q.L. – OU, K. 2001. Heuristic methods for vehicle routing problem with time Windows. In: *Artificial Intelligence in Engineering*. ISSN 0954-1810, 2001, vol. 15, no. 3, p. 281-295.
- TSITSIKLIS, J. N. 1992. Special Cases of Traveling Salesman and Repairman Problems with Time Windows. In: *Networks*. ISSN 0146-4833, 1992, Vol. 22, No. 3, p. 263-282.
- TURNER, D. 2005. *Implementing the Flow-Covering Location-Allocation Model with Geographic Informations Systems*. Master's Project. In: http://templeton.utdallas.edu/mgis/prj_mstrs/2005/Fall/Turner/DT_master_FINAL.ppt
- UNČOVSKÝ, L. a kol. 1991. *Modely teórie grafov*. Bratislava : ALFA, 1991. 240 s. ISBN 80-05-00812-0.
- VASKO, F.J. – NEWHART, D.D. – STOTT, K.L. – WOLF, F.E. 2003. A large-scale application of the partial coverage uncapacitated facility location problem. In: *Journal of the Operational Research Society*. ISSN: 0160-5682, 2003, Vol. 54, p. 11–20.
- VIDOVIĆ, M. – DIMITRIJEVIĆ, B. – RATKOVIĆ, B. 2008. Locating Collection Centers for ELV. In: *XXXV Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova*. Soko Banja : University of Beograd, 2008. ISBN 978-86-7395-248-2.
- WEBER, A., 1909. *Über den Standort der Industrien*. 1. Teil: Reine Theorie des Standorts. Verlag J.C. B. Mohr, Tübingen.
- WESOLOWSKY, G.O. 1993. The Weber Problem: History and Perspectives. In: *Location Science*. ISSN 0966-8349, 1993, vol. 1, no. 1, p. 5–23.
- ZHANG, Y., TANG, L. 2007. Solving Prize-Collecting Traveling Salesman Problem with Time Windows by Chaotic Neural Network. In: *Lecture Notes In Computer Science*. ISSN 0302-9743, 2007, vol. 4492, p. 63 – 71.
- ZELINKA, I. 2002. *Umělá intelligence v problémech globální optimalizace*. Praha : BEN-technická literatura, 2002. 192 s. ISBN 80-7300-069-5.

Zoznam príloh

Príloha 1: Problém umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti pre $K = 50$

Príloha 2: Problém nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier pre $p = 10$

Príloha 3: Problém celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier pre $p = 10$

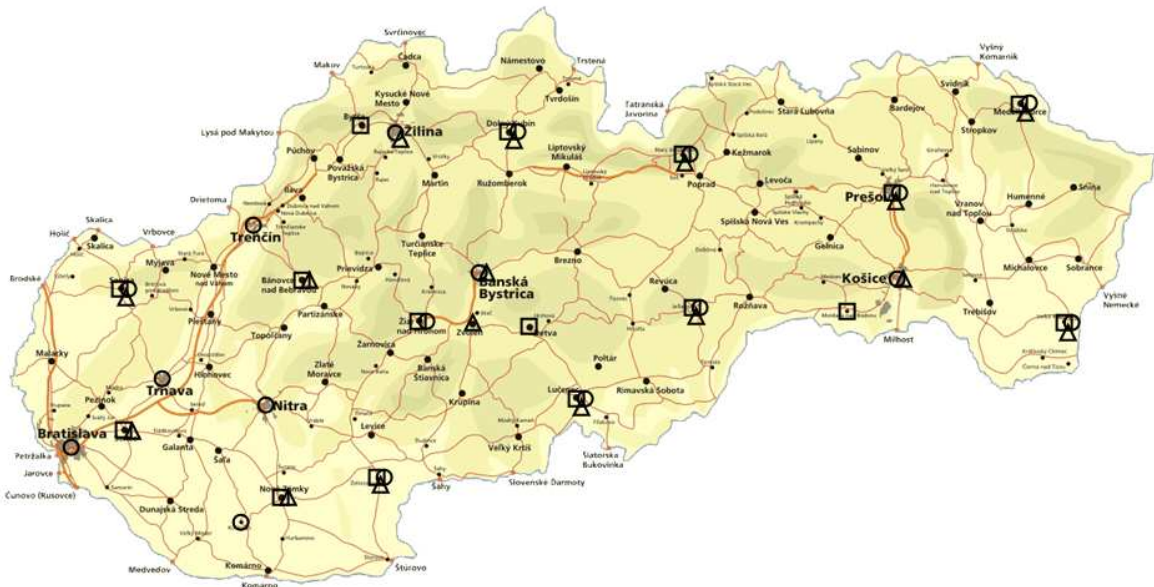
Príloha 4: Problém maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti pre $p = 20$ a $K = 30$

Príloha 5: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť použitím váženej L_1 a L_∞ metriky pre $p = 10$ a váhy 0,5 pre každé kritérium

Príloha 6: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť použitím váženej L_1 a L_∞ metriky pre $p = 10$, váha 0,3 kritérium minimálna vzdialenosť a váha 0,7 kritérium celková minimálna vzdialenosť

Príloha 7: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií maximálne pokrytie a minimálny počet centier použitím váženej L_1 a L_∞ metriky pre $K = 30$, váha 0,7 kritérium maximálne pokrytie a váha 0,3 kritérium minimálny počet centier

Príloha 1: Problém umiestnenia minimálneho počtu obslužných centier pri danej maximálnej vzdialenosti pre $K = 50$



Pozn. $\square$ – obslužné centrum – základný model (model 1)

$\bigcirc$ – obslužné centrum – model doplnený o nutnosť zriadiť obslužné centrum v krajských mestách (model 2)

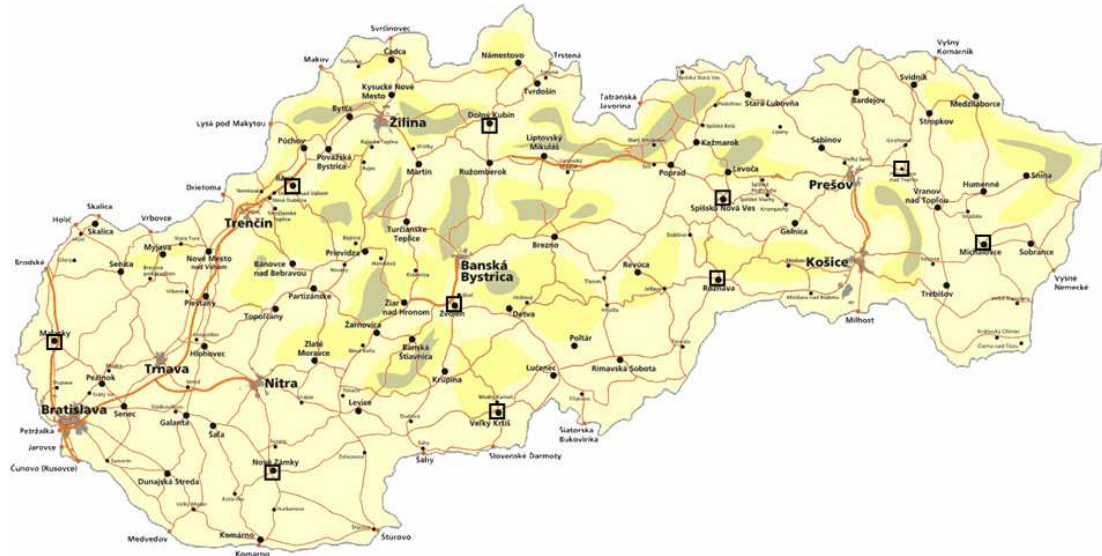
$\triangle$ – obslužné centrum – model s modifikovanými koeficientmi účelovej funkcie (podiel počtu obyvateľov ku všetkým obyvateľom) (model 3)

Model 1: Bánovce nad Bebravou, Bytča, Detva, Dolný Kubín, Jelšava, Lučenec, Medzilaborce, Moldava nad Bodvou, Nové Zámky, Prešov, Senec, Senica, Veľké Kapušany, Vysoké Tatry, Želiezovce, Žiar nad Hronom.

Model 2: Banská Bystrica, Bratislava, Dolný Kubín, Jelšava, Kolárovo, Košice, Lučenec, Medzilaborce, Nitra, Prešov, Senica, Trenčín, Trnava, Veľké Kapušany, Vysoké Tatry, Želiezovce, Žiar nad Hronom, Žilina.

Model 3: Bánovce nad Bebravou, Banská Bystrica, Dolný Kubín, Jelšava, Košice, Lučenec, Medzilaborce, Nové Zámky, Prešov, Senec, Senica, Veľké Kapušany, Vysoké Tatry, Zvolen, Želiezovce, Žilina.

Príloha 2: Problém nájdania minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier pre $p = 10$

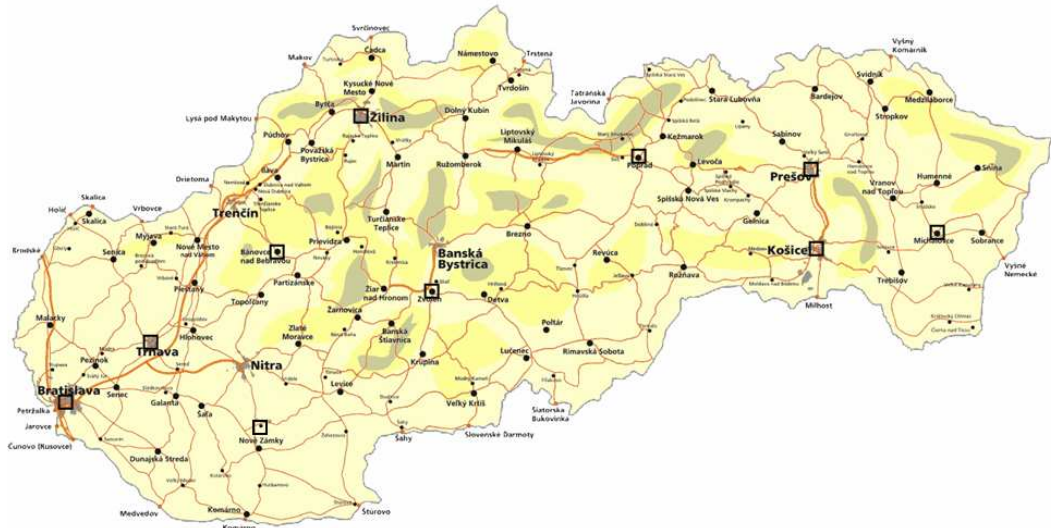


Pozn.  – obslužné centrum

Maximálna vzdialenosť je 65,5 km medzi obslužným centrom Dolný Kubín a uzlom Čadca.

Obslužné centrum: Dolný Kubín, Hanušovce nad Topľou, Ilava, Malacky, Michalovce, Nové Zámky, Rožňava, Spišská Nová Ves, Veľký Krtíš, Zvolen.

Príloha 3: Problém celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte obslužných centier pre $p = 10$



Pozn. $\square$ – obslužné centrum

Celkovo prejdená vzdialenosť je 71 899 602,8 km.

Obslužné centrum: Bánovce nad Bebravou (Stará Turá, 56 km), Bratislava (Dunajská Streda, 48,5 km), Košice (Tornaľa, 98,5 km), Michalovce (Medzilaborce, 70 km), Poprad (Hnúšťa, 72,5 km), Prešov (Svidník, 57,5 km), Šurany (Štúrovo, 61,5), Trnava (Gbely, 68,5 km), Zvolen (Rimavská Sobota, 87 km), Žilina (Trstená, 99,2 km). V zátvorkách za každým obslužným centrom je uvedené najvzdialenejší uzol s jeho vzdialenosťou v km.

Príloha 4: Problém maximálneho pokrytia pri stanovenom počte obslužných centier a maximálnej vzdialenosti pre $p = 20$ a $K = 30$



Pozn. $\blacksquare$ – obslužné centrum

Pokrytých je 91% obyvateľov, t. j. 2 736 724.

Obslužné centrum: Čadca, Dubnica nad Váhom, Galanta, Gálgátovce, Humenné, Kolárovo, Košice, Michalovce, Nováky, Piešťany, Rimavská Sobota, Ružomberok, Senec, Senica, Spišská Belá, Spišské Vlachy, Tisovec, Zlaté Moravce, Zvolen, Žilina

Príloha 5: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť použitím vázenej L_1 a L_∞ metriky pre $p = 10$ a váhy 0,5 pre každé kritérium



Pozn. $\square$ – obslužné centrum pre L_1 a L_∞ metriku

Cieľ 1. kritérium – 65,5 km

Cieľ 2. kritérium – 71899602,8 km

Obslužné centrum: Bratislava, Michalovce, Poprad, Prešov, Rimavská Sobota, Ružomberok, Šurany, Vrbové, Zvolen, Žilina

L_1 metrika výsledky:

Percentuálna odchýlka od cieľa minimálna vzdialenosť je 6,9 %.

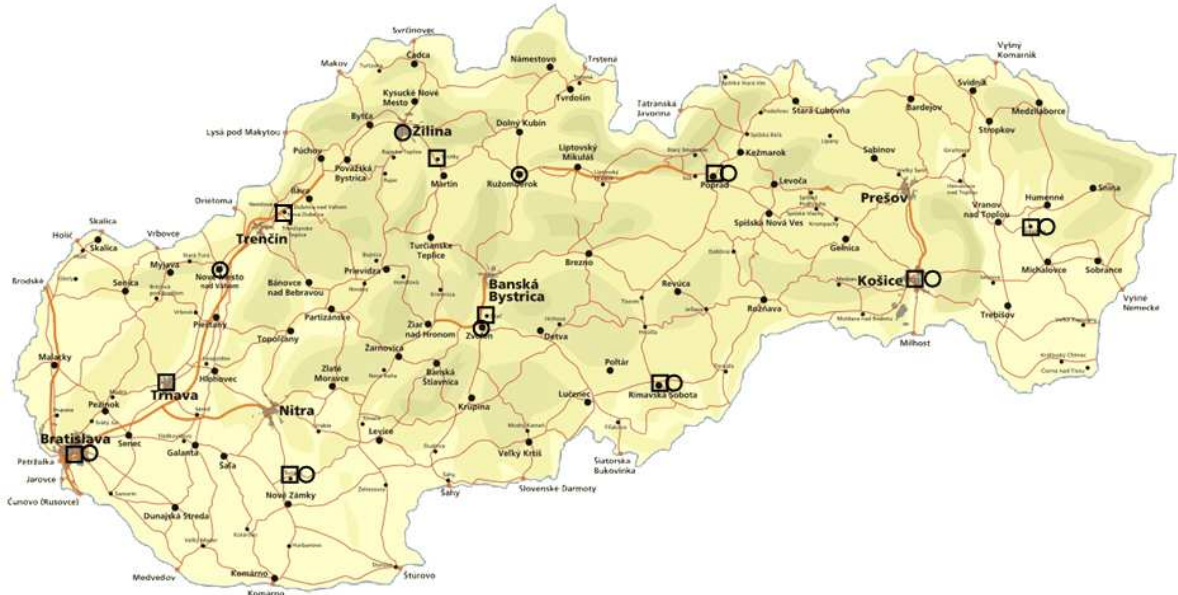
Percentuálna odchýlka od cieľa celková minimálna vzdialenosť je 10,3 %.

Hodnota účelovej funkcie (vážená percentuálna odchýlka) je 8,6 %.

L_∞ metriku výsledky:

Hodnota účelovej funkcie (maximálna odchýlka) je 5,2 %.

Príloha 6: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť použitím váženej L_1 a L_∞ metriky pre $p = 10$, váha 0,3 kritérium minimálna vzdialenosť a váha 0,7 kritérium celková minimálna vzdialenosť



Pozn. $\square$ – obslužné centrum pre L_1 metriku

$\bigcirc$ – obslužné centrum pre L_∞ metriku

Cieľ 1. kritérium – 65,5 km

Cieľ 2. kritérium – 71899602,8 km

L_1 metrika výsledky:

Obslužné centrum: Bratislava, Košice, Nová Dubnica, Poprad, Rimavská Sobota, Sliač, Strážske, Šurany, Trnava, Vrútky

Percentuálna odchýlka od cieľa minimálna vzdialenosť je 18,5 %.

Percentuálna odchýlka od cieľa celková minimálna vzdialenosť je 1,4 %.

Hodnota účelovej funkcie (vážená percentuálna odchýlka) je 6,5 %.

L_∞ metriku výsledky:

Obslužné centrum: Bratislava, Košice, Nové Mesto nad Váhom, Poprad, Rimavská Sobota, Ružomberok, Strážske, Šurany, Zvolen, Žilina

Hodnota účelovej funkcie (vážená maximálna percentuálna odchýlka) je 4,4 %.

Príloha 7: Umiestnenie obslužných centier pomocou kritérií maximálne pokrytie a minimálny počet centier použitím váženej L_1 a L_∞ metriky pre $K = 30$, váha 0,7 kritérium maximálne pokrytie a váha 0,3 kritérium minimálny počet centier



Pozn. $\square$ – obslužné centrum pre L_1 metriku

$\bigcirc$ – obslužné centrum pre L_∞ metriku

Cieľ 1. kritérium – 95 % pokrytie

Cieľ 2. kritérium – 17 obslužných centier

L_1 metrika

Dubnica nad Váhom, Galanta, Hanušovce nad Topľou, Kolárovo, Košice, Michalovce, Nováky, Piešťany, Rimavská Sobota, Ružomberok, Senec, Senica, Spišská Belá, Spišské Vlachy, Zlaté Moravce, Zvolen, Žilina

Percentuálna odchýlka od cieľa maximálne pokrytie je 7,8 %.

Percentuálna odchýlka od cieľa minimálny počet centier je 0 %.

Hodnota účelovej funkcie (vážená percentuálna odchýlka) je 5,5 %.

L_∞ metrika

Dubnica nad Váhom, Galanta, Hanušovce nad Topľou, Kolárovo, Košice, Krásno nad Kysucou, Michalovce, Nováky, Piešťany, Rimavská Sobota, Ružomberok, Senec, Senica, Spišská Belá, Spišské Vlachy, Tisovec, Zlaté Moravce, Zvolen, Žilina

Hodnota účelovej funkcie (vážená maximálna percentuálna odchýlka) je 3,6 %.