

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 103003/I/2013/2470228586

**APLIKÁCIA UZAVRETÝCH MODELOV
HROMADNEJ OBSLUHY V TERCIÁLNEJ
SFÉRE**

Diplomová práca

2013

Kornel Oroský, Bc.

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

**APLIKÁCIA UZAVRETÝCH MODELOV
HROMADNEJ OBSLUHY V TERCIÁLNEJ
SFÉRE**

Diplomová práca

Študijný program: Operačný výskum a ekonometria

Študijný odbor: 6258 Operačný výskum a ekonometria

Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Vedúci záverečnej práce: Prom. mat. Katarína Čemická, CSc.

Bratislava 2013

Kornel Oroský, Bc.

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: 16.04.2013

.....

POĎAKOVANIE

Týmto by som sa chcel poďakovať vedúcej diplomovej práce, Prom. mat. Kataríne Čemickej, CSc. za cenné rady a pripomienky, ktorými ma usmerňovala pri písaní záverečnej práce. Tiež by som chcel vysloviť poďakovanie vedeniu Fakultnej nemocnici s poliklinikou v Nových Zámkoch, pánovi riaditeľovi MUDr. Matuška Imrichovi, ktorý súhlasil s poskytnutím údajov potrebných pre napísanie tejto práce, a v neposlednom rade vedúcej sestre geriatrického oddelenia, Mgr. Marte Klobučníkovej za pomoc pri zaznamenávaní údajov.

ABSTRAKT

OROSKÝ, Kornel: *Aplikácia uzavretých modelov hromadnej obsluhy v terciálnej sfére.* – Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: Prom. mat., Katarína Čemická, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2013, 55 s.

Cieľom záverečnej práce je poskytnúť základné poznatky z teórie hromadnej obsluhy (teórie front), pričom sa najviac zameriava na jej špecifickú oblasť – uzavreté systémy. Práca je rozdelená do 3 kapitol. Obsahuje 3 obrázky, 17 tabuliek a 8 grafov. V prvej kapitole uvádzame základné teoretické poznatky týkajúce sa systémov, resp. modelov hromadnej obsluhy. Vysvetlíme, z akých častí sa skladajú a ako jednotlivé systémy fungujú. V druhej kapitole opisujeme naše ciele a metódy, pomocou ktorých ich dosiahneme. Analyzujeme vlastnosti vybraného subjektu, vytvoríme zodpovedajúci uzavretý model hromadnej obsluhy, ktorý potom aplikujeme na zvolený objekt. Tretia kapitola obsahuje výsledky analýzy, systém je opísaný číselnými charakteristikami, pomocou ktorých sa zhodnotí využitie kanálov obsluhy a v prípade potreby sa navrhuje vylepšenie systému.

Kľúčové slová:

Hromadná obsluha, vstupný prúd požiadaviek, výstupný prúd požiadaviek, dĺžka frontu, čas čakania, využitie kanálov obsluhy, nákladová analýza, optimalizácia

ABSTRACT

OROSKÝ, Kornel: *Application of the closed queuing models in the tertiary sector.* – University of Economics in Bratislava, Faculty of Economic Informatics, Department of Operational Research and Econometrics. – Thesis Supervisor: Prom. mat., Katarína Čemická, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2013, 55 pages

The aim of this thesis is to provide some basic information about the queuing theory, highlighting on its specific field – a system with a finite population.

The work has 3 chapters containing 3 pictures, 17 tables and 8 graphs. The first chapter focuses on basic theory of queuing systems. We explain from what parts they consist of and how the systems work.

The second chapter deals with our goals and with methods which we use in order to reach them. We analyze the properties of the selected entity then create a corresponding queuing model which we apply onto the selected entity.

The third chapter is broken down into characterization of the selected system which is described by numerical parameters. These are used in order to calculate the utilization of the serving lines and a better version is suggested if necessary.

Keywords:

Queuing, inflow, outflow, queue length, waiting time, server utilization, costs analysis, optimization

Obsah

Úvod.....	7
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	9
1.1 História teórie hromadnej obsluhy	9
1.2 Obsluha požiadaviek	10
1.3 Systémy hromadnej obsluhy	11
1.3.1 Všeobecná charakteristika	11
1.3.2 Základné pojmy	13
1.3.3 Poissonov proces.....	16
1.3.4 Označovanie systémov	19
1.3.5 Klasifikácia systémov hromadnej obsluhy	21
1.4 Otvorené systémy	22
1.4.1 Charakteristika.....	22
1.4.2 Príklady otvorených systémov	22
1.5 Uzavreté systémy	24
1.5.1 Príklady uzavretých systémov	24
1.5.2 Základný model uzavretého systému s čakaním	25
1.5.3 Ukazovatele základného systému	27
1.5.4 Modifikácie základného modelu.....	29
2 Cieľ a metodika práce, metódy skúmania	32
2.1 Objekt aplikácie teórie.....	32
2.2 Použité údaje a nástroje.....	33
2.3 Model a ciele	35
3 Výsledky práce a diskusia	38
3.1 Číselné charakteristiky	38
3.2 Zhrnutie výsledkov	47
Záver	52
Zoznam použitej literatúry	54

Zoznam použitých symbolov

λ – intenzita vstupného prúdu

μ – intenzita výstupného prúdu

t_0 – stredná hodnota času obsluhy

ψ – miera zaťaženia systému

n – počet kanálov obsluhy

p_{st} – pravdepodobnosť odmietnutia požiadavky

p_N – pravdepodobnosť obsadenia všetkých kanálov obsluhy

p_k – pravdepodobnosť prítomnosti k požiadaviek v systéme

p_0 – pravdepodobnosť prítomnosti 0 požiadaviek v systéme

K_r – relatívna kapacita systému

K_a – absolútna kapacita systému

π_f – pravdepodobnosť, že požiadavka bude čakať v rade

$\bar{d}_s$ – priemerný počet požiadaviek v systéme

$\bar{d}_f$ – priemerná dĺžka radu

$\bar{w}_s$ – priemerný čas pobytu požiadavky v systéme

$\bar{w}_f$ – priemerný čas čakania

$\bar{n}_z$ – priemerný počet obsadených kanálov

$\bar{n}_0$ – priemerný počet voľných kanálov

k_z – koeficient využitia kanálov

k_0 – koeficient prestoja kanálov

Úvod

Nápady, ako riešiť nejaký problém, často vznikajú vtedy, keď samotný problém je už príliš vážny na to, aby sme mu nevenovali pozornosť, lebo ignorancia by už mala negatívne následky, či už pre jednotlivca, alebo pre inštitúciu, pričom nemusí ísť priamo o finančné škody. Typickým príkladom takého problému je čakanie v radoch (*frontoch*). Podľa odbornej terminológie sa výraz „front“ používa všeobecne, napriek tomu v tejto práci použijeme novší výraz „rad“. Čakanie je dnes pre človeka dobre známe – pre väčšinu ľudí je státie v radoch nevyhnutnou a samozrejmovou súčasťou každodenného života, aj keď dosť nepríjemnou. Dennodenne musia ľudia na niečo čakať, a to pri celkom bežných situáciách, ako je napr. čakanie pri pokladni v obchode, čakanie na pošte či v banke; na kontrolu cestovných pasov na hraničnom priechode; na telefónneho operátora, resp. voľnú telefónnu linku. Podobne, ako u jednotlivcov, sa rady tvoria aj vo „väčšej miere“ – lietadlá musia počkať na voľnú pristávaciu dráhu, vlaky na voľnú trať. „Čas strávený takýmto čakaním v rade – ako uvádza Zítek – býva väčšinou naozaj stratený; denne tak premárnime veľkú časť svojho života“¹, pričom si ani nemusíme byť toho vedomí.

Čakanie v rade sa ale netýka iba ľudí ako takých: na obsluhu môže čakať napr. aj stroj. Ako príklad môžeme uviesť pokazené stroje výrobného podniku, ktoré čakajú na opravu, gastrozariadenia podniku, pomocou ktorých sa varí a pod.

Veľkosť radov sa samozrejme neustále mení, ale v istých časoch sa dá predpokladať, že ich veľkosť bude nadpriemerná, ako napr. po výplatných termínoch, počas veľkonočných alebo vianočných sviatkov, ale aj rôznych častiach dňa – skoro ráno, poobede po skončení pracovného času. Rôzne inštitúcie (telefónna ústredňa, banka a pod.) zvýšený nápor nemusia zvládnuť predovšetkým v prípade, keď ich možnosti nie sú primerané požiadavkám (dopytu po službách). Aj keď počet čakajúcich ľudí sa vo väčšine prípadov dá iba odhadovať, systémy sa dajú upraviť tak, aby boli vždy, alebo takmer vždy pripravené na obsluhu klientov. Obdobia, v ktorých sa dá predpokladať nárast radov, sa z času na čas opakujú (denne, týždenne, mesačne atď.), dajú sa očakávať, a tak poskytujú možnosť sa na ne pripraviť napr. tým, že sa zvýši počet pracovných jednotiek, čím sa však zvýšia aj náklady, pričom treba mať na pamäti aj príjem/zisk, ktorý zavedenie novej jednotky prináša. „Organizácie sa často snažia nájsť rovnováhu medzi týmito dvoma

¹ [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, 1969, s. 11

extrémami.“² Pri analýze však treba brať do úvahy aj ďalšie skutočnosti, ako je priemerný čas medzi príchodom dvoch požiadaviek, alebo priemerný čas čakania v rade.

Proces, v ktorom sa obsluhujú požiadavky, ktoré využívajú túto službu opätovne a hromadne, sa nazýva hromadná obsluha. Systém, v ktorom sa realizuje obsluha, sa nazýva systémom hromadnej obsluhy, ktorý sa skladá z dvoch častí: z kanála obsluhy (obslužná linka, obslužné zariadenie) a čakacieho priestoru pre požiadavky (rad, front). Teória hromadnej obsluhy (teória frontov) sa zaoberá modelovaním týchto procesov, teda ich matematickým opisom, a ich optimalizáciou. Jej cieľom je „namodelovať systémy, ktoré umožnia organizáciám optimálne fungovanie vzhľadom na rôzne kritériá.“³ Je založená na teórii náhodných – stochastických – procesov. „Stochastičnosť (náhodnosť) zohráva v praktickom živote, vo všetkých jeho činnostiach, dejoch a procesoch významnejšiu úlohu, ako je na prvý pohľad zrejmé. Náhodnosti sú v činnosti ľudí, spôsobujú ich prírodné podmienky, vznikajú z technických príčin atď. Stochastické metódy (...) uvažujú vo svojich výpočtoch s náhodnými faktormi. Preto majú uplatnenie pri riešení krízových situácií v doprave, vo vojenstve ale aj v diverznej, sabotážnej a teroristickej činnosti.“⁴

Cieľom tejto práce je poukázať na možnosti využitia uzavretých modelov hromadnej obsluhy v terciálnej sfére. Poskytuje nástroj pre analýzu systémov, v ktorých vznikajú požiadavky na obsluhu, ktoré majú náhodný charakter a vedú k vytváraniu radov a umožňuje nájsť efektívny spôsob obsluhy pre zdravotnícke zariadenie (nemocnicu), pri ktorom sú časové straty vzniknuté čakaním na obsluhu a tiež straty vzniknuté prestojmi kanálov obsluhy minimálne. Pomocou zozbieraných údajov a vhodne zvolených modelov budeme môcť podrobne opísať zvolený systém a vytvoriť prognózu pre ďalšie obdobia.

² [9] RENDER, STAIR, HANNA: *Waiting Lines and Queuing Theory Models*, 2005, [online], s.6

³ [8] *Queuing models* [online] s. 2

⁴ [7] Novák, L. a kol.: *Krízové plánovanie*, 2005 [online], s. 181

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

1.1 História teórie hromadnej obsluhy

„História hromadnej obsluhy siaha až 100 rokov do minulosti. Článok F. Johannsena zverejnený v roku 1910 bolo prvým dielom, ktorý sa zaoberal touto témou, avšak metóda, ktorú použil, nebol matematicky úplne presný. Väčší význam má činnosť dánskeho matematika Agnera Krarupa Erlanga (1878–1929)⁵. V roku 1908, keď nastúpil do firmy Copenhagen Telephone, sa začal venovať riešeniu problému zameraného na skrátenie čakacej doby pri vybavovaní telefónnych hovorov. Dospel k svojmu poznaniu, že rozloženie telefónnych hovorov v čase zodpovedá poissonovmu rozdeleniu. Výsledkom jeho výskumu bol tzv. Erlangov vzorec, ktorý určuje pomer volajúcich, ktorí sa snažia dovolať v dobe, počas ktorej je telefónna sieť obsadená. V roku 1909 publikoval svoje získané poznatky v práci o aplikácii počtu pravdepodobnosti na problémy telefónnej prevádzky. V nej sú obsiahnuté základné prvky modernej teórie hromadnej obsluhy. „Ním napísané články počas nasledujúcich 20-ich rokov obsahujú niekoľko z najdôležitejších konceptov a techník: pojem štatistickej rovnováhy (ide o stav náhodného procesu, ktorý sa vyznačuje tým, že jeho správanie je nezávislé od času a začiatočného stavu) a metóda zapisovania bilancie stavových rovníc (tieto sa dnes nazývajú Chapmanove-Kolmogorove rovnice). Zvlášť dôležitý je jeho článok *Racionálne určenie počtu obvodov*, v ktorom po prvý krát v histórii bol zachytený optimalizačný problém hromadnej obsluhy“⁶ Ďalšie práce z tejto oblasti boli publikované od roku 1927. Tridsiate roky minulého storočia poznačil rozvoj tejto teórie. Oň sa zaslúžili sovietski matematici Kolmogorov a Chinčin, v USA Molina a Fry, v Nemecku Polaczek, vo Francúzsku Crommelin a vo Švédsku Palm. „Polaczek, keď zistil neadekvátnosť teórie rovnováhy vo viacerých situáciách hromadnej obsluhy, začal v roku 1934 skúmať správanie sa systémov počas konečného časového intervalu. Počas svojej kariéry vykonal značnú prácu v oblasti analytického študovania správania sa systémov hromadnej obsluhy. Trendy analytických štúdií zamerané na základné náhodné procesy systému pretrvávali, a teória hromadnej obsluhy sa ukázala ako produktívna oblasť pre výskumníkov, ktorí chceli vykonať základné výskumy náhodných procesov zahŕňajúce matematické modely.“⁷ Rozvoj matematickej teórie hromadnej obsluhy na celom svete bol zahájený po druhej svetovej vojne. Jej

⁵ [13] BHAT, Y. *An Introduction to queuing theory*, s. 5

⁶ [13] BHAT, Y. *An Introduction to queuing theory*, s. 5

⁷ [13] BHAT, Y. *An Introduction to queuing theory*, s. 5

najdôležitejšie problémy boli podrobnejšie prepracované. „Teória hromadnej obsluhy sa stala identifikovateľnou časťou literatúry cez základný výskum v 50-ich a 60-ich rokoch.“⁸ Vo väčšej miere sa tento vývoj týkal iba matematickej teórie. Požívaním jemnejších a náročnejších matematických prostriedkov bola spojená väčšina dosiahnutých výsledkov.

V praxi treba často riešiť otázky navrhovania a prevádzky systémov, ktoré majú charakter stochastických systémov hromadnej obsluhy bez poznania základov teórie hromadnej obsluhy. V súčasnosti vo svete je vydaná literatúra o teórii hromadnej obsluhy v tisíckach publikácií, ale napriek tomu prichádzajú stále nové práce ďalších nových autorov. Tieto prehlbujú nielen naše poznatky systémov už známych, ale aj prinášajú popis ďalších nových typov systémov hromadnej obsluhy.

1.2 Obsluha požiadaviek

Obsluhovanie požiadaviek je zložitý proces, ktorý je ovplyvňovaný rôznymi náhodnými činiteľmi. Zákazníci dennodenne prichádzajú do rôznych podnikov s cieľom uspokojiť si svoje potreby. V dôsledku náhodnosti sa často vytvára situácia, keď prichádza viacero zákazníkov súčasne, resp. príde ďalší zákazník, keď predchádzajúci ešte nebol obslužený. Ak nemá podnik dostatočné kapacitné rezervy pre obsluženie novej požiadavky, prichádzajúci zákazníci musia na obsluženie čakať. V tomto prípade sa môže vytvoriť rad. Dĺžku čakania ovplyvňuje počet prichádzajúcich požiadaviek a čas potrebný pre ich obsluhu. Premennivá dĺžka čakania (ide o náhodnú veličinu), a vôbec čakanie môže mať negatívne následky – môže vyvolať „zlú náladu“ (stres), spôsobiť finančné straty pre zákazníkov (napr. pokuty z omeškania platby) alebo aj pre podnik vo forme ušlého zisku. Tieto negatívne následky svedčia o tom, že daný podnik funguje neefektívne, zle využíva svoje možnosti – čo ale neznamená, že bezhlavé rozširovanie kapacity vyrieši tento problém, totiž náklady na udržiavanie kanálov obsluhy môžu byť vyššie, ako ich prínos. Nájdenie takej formy a štruktúry fungovania, ktorá zabezpečuje čo najnižšie náklady na obsluhu, je základom úspechu podniku.

⁸ [13] BHAT, Y. *An Introduction to queuing theory*, s. 7

Z histórie začiatkov operačného výskumu z čias druhej svetovej vojny je známy anekdotický príklad⁹, ktorý dokazuje, že chytré a jednoduché nápady môžu viesť k podstatnému zlepšeniu situácie:

Po obede pri poľnej kuchyne si vojaci istej jednotky umývali misky pri dvoch vodovodných kohútikoch s teplou vodou, a potom ich oplachovali pri ďalších dvoch kohútikoch so studenou vodou, pričom sa tvoril veľmi dlhý rad. Dôstojník, ktorý práve došiel k jednotke, si všimol, že umytie misky trvá vojakom asi trikrát dlhšie ako oplachovanie. Preto dal rozkaz, aby teplá voda tiekla z troch kohútikov, a studená iba z jedného – a rady skoro úplne zmizli.

Situácia ale nie je vždy tak prehľadná, aby dobré nápady a praktické skúsenosti postačovali na vyriešenie problémov; potrebujeme sústavné teoretické štúdium procesov tohto druhu. Teória hromadnej obsluhy, ktorá sa zaoberá modelovaním obslužných procesov, poskytuje vhodné podklady pre zefektívnenie ich fungovania.

Pomocou teórie hromadnej obsluhy sa dajú riešiť niektoré problémy v nasledujúcich oblastiach¹⁰:

- služby obyvateľstvu, pri ktorých je zákazník obslužený obchodnými či inými organizáciami (oprava tovarov, čerpace stanice, kaderníctvo, pokladne v nákupných strediskách atď.);
- sociálne služby – sieť v oblastiach súdnictvo, zdravotníctvo (ošetrenie u lekára, obsluženie pacientov na lôžkach atď.);
- dopravné služby, pri ktorých sú zákazníkom dopravné prostriedky (čakanie osobných automobilov na parkovanie, čakanie lietadiel na odlet resp. pristátie atď.).

1.3 Systémy hromadnej obsluhy

1.3.1 Všeobecná charakteristika

„Systém hromadnej obsluhy je taký systém, ktorý slúži na uspokojovanie opakovaných a väčšinou náhodne sa vyskytujúcich potrieb.“¹¹ Tieto systémy Zítek všeobecne opisuje nasledovne: „k určitému zariadeniu poskytujúcemu obsluhu istého druhu prichádzajú zákazníci (jedná sa o väčší počet zákazníkov), ktorí požadujú túto

⁹ [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, s. 12.

¹⁰ [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.185. ISBN 978-80-8078-176-7

¹¹ [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.185. ISBN 978-80-8078-176-7

obsluhu. Ak nie sú obslúžení ihneď, môžu, ale nemusia čakať na obsluhu. Po skončení obsluhy opúšťajú obslúžení zákazníci systém. Potom je možné ihneď alebo s prestávkou poskytnúť obsluhu ďalším zákazníkom čakajúcim na ňu, resp. tým, ktorí prídu.¹² Rôzne môžu byť konkrétne systémy hromadnej obsluhy¹³ – napr.:

ZÁKAZNÍK	KANÁL OBSLUHY	OBSLUHA
Lietadlo	Pristávacia dráha	Pristátie
Chorý	Lekár	Vyšetrenie
Kupujúci	Pokladňa	Zaplatenie nákupu
Telefónny účastník	Centrála	Spojenie
Stroj	Zoraďovač	Zariadenie
Cestujúci	Taxík	Jazda
Chodec	Semafor	Voľný prechod
Vagón	Železná stanica	Zoraďovanie vlakov

Tabuľka č. 1 Konkrétne systémy hromadnej obsluhy

Pre poznanie každého systému hromadnej obsluhy musíme poznať predovšetkým údaje o troch hlavných častiach jeho štruktúry¹⁴:

- o príchodoch zákazníkov do systému,
- o ich osudoch pre prípad, že nemôžu byť ihneď obslúžení,
- o počte liniek a o priebehu vlastnej obsluhy.

Jednou z veľmi dôležitých charakteristík systému je proces príchodu zákazníkov do systému obsluhy. Rozoznávame rôzne kategórie systému podľa toho:

- či zákazníci prichádzajú pravidelne, náhodne, či podľa dopredu stanoveného plánu s odchýlkami,
- či prichádzajú jednotlivo alebo po skupinách, pričom veľkosť skupín môže byť stála alebo sa bude meniť pravidelne alebo náhodne,
- či celkový počet všetkých možných zákazníkov je obmedzený alebo neobmedzený.

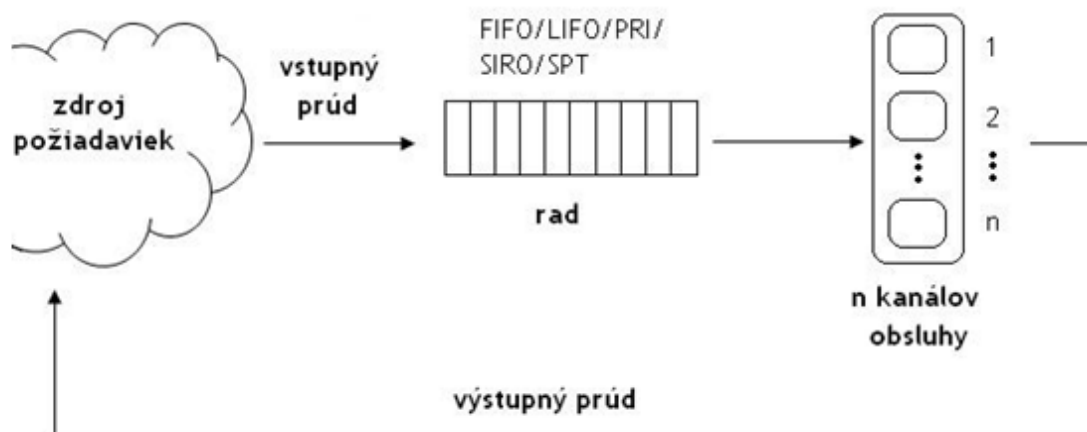
V prípade náhodných príchodov nás potom zaujímajú pravdepodobnostné charakteristiky procesu príchodu: priemerný počet zákazníkov prichádzajúcich za jednotku času,

¹² [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, s. 13

¹³ [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, s. 13

¹⁴ [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, s. 13

priemerný počet zákazníkov v skupine (pri skupinových príchodoch), atď. Základná štruktúra systémov obsluhy je znázornená na obrázku č.1.



Obrázok č. 1 Základná štruktúra (otvorených) systémov obsluhy

Veľmi rozdielny môže byť osud zákazníkov, ktorých obsluhuje nemôže byť začaté okamžite po ich príchode na obsluhu, nakoľko kanál obsluhy je ešte obsadený predchádzajúcim zákazníkom. V najznámejšom prípade klasického radu čakajú zákazníci na obsluhu v poradí, v akom prišli (napríklad pri pokladni v kine, divadle). Môžu sa stále vzdať svojej požiadavky na obsluhu a z radu odísť hneď po svojom príchode alebo až po určitom čakaní. Toto ich rozhodnutie môže byť náhodné alebo môže byť určované rôznymi príčinami – napríklad okamžitá dĺžka radu alebo inou informáciou o stave systému. Existujú aj systémy, ktorých rozhodnutie o zotrvaní v rade nezávisí vôbec od vôle zákazníka alebo systémy, kde sa vôbec nečaká, ale zákazníci, ktorí nemôžu byť obslužení ihneď, nie sú vôbec obslužení a odídu zo systému. Pri voľnosti kanála obsluhy môže byť vybratý ďalší zákazník z radu aj podľa iných kritérií než je kritérium poradia pri príchode alebo celkom náhodne. Niektorí zákazníci môžu mať zvláštne prednosti pri ich výbere.

Vlastná obsluha môže byť poskytovaná jednou alebo niekoľkými paralelnými linkami, môže trvať určitú pevne stanovenú dobu rovnakú pre všetkých zákazníkov alebo je táto doba náhodná alebo závislá na type zákazníka alebo na použitej linke. Tu nás zaujímajú charakteristiky dĺžky doby obsluhy.

1.3.2 Základné pojmy

Základné pojmy použité v teórii obsluhy sú nasledovné¹⁵:

¹⁵ [4] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 1999. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 1999. 251 s. ISBN 80-225-1180-3

Systém hromadnej obsluhy – taký systém, ktorý slúži na uspokojovanie opakovaných a väčšinou náhodne sa vyskytujúcich potrieb. Ako píše Unčovský, „...sa skladá z jedného alebo viacerých *obslužných kanálov* (staníc obsluhy), ktoré obsluhujú prúd požiadaviek, vstupujúci do systému.“¹⁶.

Model hromadnej obsluhy je matematicky opísaný systém.

Kanál obsluhy je zariadenie, ktoré obsluhuje požiadavky vstupujúce do systému obsluhy.

Zdroj požiadaviek je množinou potenciálnych požiadaviek, ktoré vstupujú do systému (môže byť neohraničená – otvorený systém, aj ohraničená – uzavretý systém).

Vstupný prúd požiadaviek tvorí náhodná postupnosť vstupu požiadaviek do systému hromadnej obsluhy, ktorá predstavuje *Poissonov proces* (viď. 1.3.3), s cieľom realizovať nárok na obsluhu. Ak sa požiadavka neobslúži, bude čakať v rade, alebo odchádza. V prípade zaradenia požiadavky do radu má význam hovoriť o nasledujúcich troch veličinách.

Intenzita vstupného prúdu v otvorených systémoch charakterizuje počet požiadaviek, ktoré prichádzajú do systému za časovú jednotku, v uzavretých systémoch návratnosť jednej požiadavky do systému („priemerná intenzita príchodu v modeli (...) s konečnou množinou potenciálnych požiadaviek je definovaná početnosťou príchodu každej požiadavky zvlášť“¹⁷).

Čas čakania je priemerný čas strávený požiadavkou v rade.

Čas obsluhy je priemerný čas obsluhy jednej požiadavky jedným kanálom obsluhy.

Čas pobytu požiadavky v systéme je súčtom času čakania v rade a času obsluhy.

Výstupný prúd požiadaviek tvoria požiadavky odchádzajúce zo systému po ich obslužení (absolútna kapacita systému).

Intenzita výstupného prúdu udáva, koľko požiadaviek je systém schopný obslúžiť za časovú jednotku.

„Najjednoduchším typom modelov hromadnej obsluhy sú *deterministické modely*“¹⁸. Pri nich sa ráta s celkovou využiteľnosťou kapacity sústavy. V praxi sa s takýmto prípadom málokedy stretávame.

¹⁶ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s. 81

¹⁷ [11] Anderson, D. a kol. *An introduction to management science*, 2012, s. 527

¹⁸ [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.190. ISBN 978-80-8078-176-7

Stochastické modely majú väčší význam. Stochastické úlohy hromadnej obsluhy sú riešené analyticky na základe odvodenia diferenčno-diferenciálnych¹⁹ (Kolmogorovových) rovníc, ktorých riešením sú pravdepodobnosti p_k . Na základe lineárnych procesov vzniku a zániku požiadavky sú vytvorené modely hromadnej obsluhy, pričom intenzita vstupného prúdu λ nezávisí od predchádzajúceho stavu a intenzita výstupného prúdu μ závisí od predchádzajúceho stavu. V ekonomických aplikáciách sa vyskytujú hlavne také funkcie, ktoré majú jeden parameter, ktorým je čas. Takéto náhodné funkcie sa nazývajú *náhodné (stochastické) procesy*. „Náhodný (stochastický) proces je množina náhodných premenných závislých od času ako parametra, ktorý je definovaný na reálnej časovej množine.“²⁰

„Prístup k modelovaniu systémov hromadnej obsluhy môže byť *analytický* – je použiteľný pre jednoduché systémy so štandardnými rozdeleniami náhodných veličín; a *simulačný* – spočíva vo vytvorení programu pre simuláciu skúmaného systému. Na základe výsledkov simulačných experimentov sa potom vypočítajú odhady charakteristík systému.“²¹ *Analýza modelov hromadnej obsluhy* pozostáva z nasledovných krokov²²:

- zostavenie sústavy diferenčných rovníc opisujúcich spôsob prechodu sústavy z jedného stavu do druhého stavu v čase t a $t + \Delta t$
- prechod na sústavu diferenciálnych rovníc za predpokladu $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$,
- riešenie diferenciálnych rovníc za podmienky existencie stacionárneho riešenia, pravdepodobnosti p_k nezávisia od t , t.j. riešenie sústavy diferenciálnych rovníc môžeme nahradiť riešením sústavy algebrických rovníc.

Mechanizmus obsluhy je najkontrolovanejšou časťou systému obsluhy. Dôležitá je analýza efektívneho využitia systému obsluhujúcich kanálov (napríklad lekár, jednoduchý telefón, pracovník v banke atď.) z hľadiska potreby rozšírenia alebo zníženia ich počtu. Ak neexistuje priestor na čakanie a kanál obsluhy je obsadený, požiadavka odchádza. Takýto systém obsluhy sa nazýva *jednokanálový systém obsluhy bez čakania*. Keď je možnosť vytvorenia radu, takýto systém sa nazýva *jednokanálový systém obsluhy s čakaním*.

¹⁹ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980. s. 125

²⁰ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980. s. 25.

²¹ [12] DVOŘÁK, J. *Systémy hromadné obsluhy*, s.10

²² [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.191. ISBN 978-80-8078-176-7

Ak obsluhu vykonáva viacero kanálov súčasne, hovoríme o *viackanálových systémoch obsluhy*. Viacnásobné kanály obsluhy môžu byť usporiadané paralelne alebo sériovo. Pri paralelnom usporiadaní požiadavky môžu tvoriť jeden rad alebo niekoľko radov podľa počtu kanálov. Pri sériovom usporiadaní požiadavka musí prejsť každým kanálom alebo len niektorými kanálmi.

Ďalšou charakteristickou črtou systému obsluhy je *disciplína v rade*. Disciplína čakania je spojená so spôsobom, ktorým sa z radu čakajúcich požiadaviek vyberá požiadavka pre obsluhu. Existuje niekoľko spôsobov prechodu²³:

- FIFO (first in – first out) – požiadavka, ktorá príde prvá, je obslúžená ako prvá,
- LIFO (last in – first out) – požiadavka, ktorá príde posledná, je obslúžená ako prvá,
- PRI (priority in) prioritný systém – požiadavka, ktorá potrebuje okamžitú obsluhu, je obslúžená ako prvá,
- SIRO (serve in random order) – požiadavky sú obslúžené v náhodnom poradí,
- SPT (shortest processing time first) – požiadavke, ktorej (predpokladaný) čas obsluhy je najkratší, bude obslúžená ako prvá

Disciplína obsluhy – obsluha požiadaviek je realizovaná jednotlivo, resp. ide o skupinovú obsluhu. Pri druhej možnosti môžu požiadavky čakať pre kanál obsluhy, resp. pre nedostatok požiadaviek.

Výstupný prúd požiadaviek po skončení obsluhy úzko súvisí s obsluhou, má však význam len pri viacstupňových systémoch, kde výstupný prúd kanálov jedného stupňa predstavuje vstupný prúd ďalšieho stupňa. Všeobecne sa vlastnosti výstupného prúdu nerovnajú vlastnostiam vstupného prúdu (napríklad ak je vstupný prúd Poissonov, výstupný prúd môže byť nepoissonovský).

1.3.3 Poissonov proces

Najjednoduchším prúdom požiadaviek nazývame prúd, ktorý má súčasne tri vlastnosti²⁴: *stacionárnosti* (pravdepodobnosť vstupu požiadavky v intervale $t + \Delta t$ závisí len od dĺžky intervalu Δt), *ordinárnosti* (počas ľubovoľného intervalu môže vstúpiť len jedna požiadavka) a neexistencie následných účinkov – *nezávislosti* (intenzita vstupu

²³ [10] BANKS a kol. 2002. *Discrete-event System Simulation* [online] s. 9, [3] Brezina, I., Pekár, J., Ivaničová, Z.: *Operačná analýza*, 2007, s. 191

²⁴ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980. s. 71; [8] *Queueing models* [online] s. 6

požiadaviek nezávisí od počtu požiadaviek, ktoré už predtým vstúpili do systému obsluhy a vystúpili z neho). Najčastejšie používaným rozdelením pre vstupný prúd požiadaviek je *Poissonovo rozdelenie*, ktorého podmienky použiteľnosti určujú práve tieto tri vlastnosti. Väčšina modelov hromadnej obsluhy sa zakladá na predpoklade, že vstupný prúd požiadaviek je Poissonov proces.

Poissonov proces je taký proces, ktorého stavy tvoria najjednoduchší prúd, pričom „prechod je možný len do najbližšieho vyššieho stavu“²⁵. „Jedna z užitočných vlastností Poissonovho rozdelenia je, že kombinácia dvoch poissonovských procesov je tiež poissonovským procesom.“²⁶ Avšak jednou z nevýhod tohto rozdelenia je, že množstvo požiadaviek, ktoré vstupujú do systému medzi časom t a $t + \Delta t$, nezávisí od t . Proces $X(t)$ nech je počet výskytu určitého javu v čase $(0, t)$. Ak jednotlivé výskyty javu sa líšia len polohou v čase, tak hovoríme o *bodovom procese (prúde javov)*. Bodový proces je napr. prúd kupujúcich v obchode, prúd porúch zariadenia. Poissonov proces je taký bodový proces, pre ktorý platí²⁷:

- 1) proces má nezávislé prírastky, t.j. javy, ktoré sa vyskytnú v disjunktných časových intervaloch, sú navzájom nezávislé náhodné premenné.
- 2) proces má homogénne prírastky, t.j. počet javov vyskytujúcich sa v časovom intervale rovnakej dĺžky je konštantný bez ohľadu na miesto umiestnenia intervalu na osi
- 3) javy sa vyskytujú na dostatočne malom intervale po jednom.

Všimnime si, že tieto tri vlastnosti sú totožné s vyššie spomenutými (v poradí *nezávislosť*, *stacionárnosť*, *ordinárnosť*).

Z hľadiska aplikácie v teórii hromadnej obsluhy je dôležitá skutočnosť, že intervaly medzi vstupmi sú exponenciálne rozdelené. Sústavy s exponenciálnym intervalom vstupov sa nazývajú systavy s Poissonovým vstupným prúdom. Pre použitie modelu s Poissonovým vstupom je dôležitá platnosť troch vlastností aj z hľadiska praktickej aplikácie modelov, ktoré určujú podmienky jeho použitia. Často nastávajú situácie, keď niektorá z týchto podmienok nie je splnená²⁸, preto modely takýchto systémov je nutné prispôbiť daným podmienkam.

²⁵ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980. s. 72

²⁶ [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.188. ISBN 978-80-8078-176-7

²⁷ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s. 71

²⁸ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s. 85

Podmienka *nezávislosti* je porušená v prípadoch, keď prestáva platiť predpoklad Poissonovho vstupného prúdu. V literatúre sa veľmi často skúma prípad, kedy vstupný prúd nadobúda charakter procesu obnovy, to znamená, keď intervaly medzi vstupmi sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné premenné. Podľa Chinčina sa takýto prúd nazýva Palmerov prúd alebo prúd s obmedzeným ovplyvňovaním. Poissonov proces je špeciálnym prípadom Plamerovho prúdu. Jeho intervaly sú exponenciálne rozdelené, ale ovplyvňovanie pri tomto prúde je úplne vylúčené.

Podmienka *stacionárnosti* je porušovaná v prípadoch, ak sa charakteristiky vstupných prúdov menia v jednotlivých časových intervaloch. Na riešenie praktických prípadov tohto druhu je vhodné rozdeliť celkový skúmaný interval s nerovnakou intenzitou vstupu na viac intervalov s približne rovnakou intenzitou, pričom treba určiť hodnoty modelu obsluhy pre každý interval.

Podmienka *ordinárnosti* je porušovaná v prípadoch, ak požiadavky vstupujú do systému po skupinách (dávkach). Osobitné modely sa používajú na riešenie takýchto prípadov.

Proces obsluhy – napr. u opravára, pri pokladni, u advokátskeho poradcu, atď. – mnohokrát nebýva poissonovským, keďže samotný údaj o intenzite vstupného prúdu (λ) nevyplýva o skutočnom rozdelení času, ide iba o priemernú hodnotu, ktorá sa vzťahuje na isté časové obdobie. V rôznych systémoch sa intenzita príchodu požiadaviek počas dňa mení – striedajú sa obdobia špičiek a sediel. Počas špičiek, čiže väčšinou ráno, niekedy na aj obed, ale najmä poobede po skončení pracovného času zamestnancov je intenzita príchodu požiadaviek–zákazníkov vysoká, kým v sedlách kanály obsluhy nie sú úplne využité, čo môžu využiť na doplnenie zásob, vybavenie pošty, atď. Meniaci sa počet požiadaviek v rôznych obdobiach dňa prináša rôznu veľkosť intenzity vstupného prúdu, preto sa vstupný prúd za celý deň považuje za nepoissonovský. Vstupný prúd sa však dá rozložiť na niekoľko úsekov, v ktorých je už systém poissonovský; potom sa väčšinou rieši úloha optimalizácie počtu kanálov obsluhy – v špičkách sa ich má použiť čo najviac, pričom treba zohľadniť aj náklady na prípadný kanál navyše.

1.3.4 Označovanie systémov

Označovanie systémov²⁹ - symbolika hromadnej obsluhy súvisí s klasifikáciou systémov hromadnej obsluhy. Túto navrhol a zaviedol v roku 1953 D. G. Kendall. Má nasledovný tvar:

$$(A|B|X)$$

kde:

A – je rozdelenie intervalu medzi vstupmi, udáva typ rozdelenia vstupného prúdu požiadaviek,

B – je rozdelenie času obsluhy, udáva typ rozdelenia času obsluhy podobne ako v prípade A, len ľubovoľné rozdelenie sa označuje písmenom G,

X – je počet paralelných kanálov, určuje počet kanálov obsluhy.

Pre A majú symboly nasledovný význam:

M – je exponenciálne rozdelenie (písmeno M značí rozdelenie majúce markovskú vlastnosť - Markove reťazce, t.j. poissonovské),

E_k – je Erlangovo rozdelenie k-teho typu,

D – sú deterministické intervaly vstupu požiadaviek,

GI – sú intervaly s ľubovoľným nezávislým rozdelením.

Pre B majú symboly nasledovný význam:

M – je exponenciálne rozdelenie,

E_k – je Erlangovo rozdelenie k-teho typu,

D – je deterministický čas obsluhy,

G – je ľubovoľné rozdelenie.

Pre X - hodnota určuje počet kanálov obsluhy.

Pri niektorých prípadoch pri obmedzenej kapacite systému a ak sa používa iné poradie obsluhy ako obsluha podľa poradia vstupu využíva sa rozšírený vzorec

$$(A|B|X|Y|Z|U)$$

kde:

²⁹ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s. 90 – 91.

Y – je obmedzenie kapacity dané maximálnym počtom požiadaviek, určuje maximálny počet požiadaviek v systéme hromadnej obsluhy. Ak ohraničenie neexistuje, používa sa symbol ∞ .

Z – je maximálny počet požiadaviek v zdroji, znamená počet potenciálnych požiadaviek v zdroji. Ak zdroj nie je ohraničený, používa sa symbol ∞ .

U – je typ mechanizmu obsluhy, disciplína čakania, pri ktorej sa používajú skratky anglických označení, napr. FIFO – prvý vstup, prvá obsluha, LIFO – posledný vstup, prvá obsluha a pod. Posledný, šiesty znak sa často neuvádza, v tých prípadoch sa disciplína v rade berie ak FIFO.

1.3.5 Klasifikácia systémov hromadnej obsluhy

Systémy hromadnej obsluhy na základe vlastností vstupného prúdu, výstupného prúdu, mechanizmu obsluhy, disciplíny v radoch a disciplíny obsluhy môžeme deliť podľa³⁰:

a) *dĺžky čakania*:

- modely bez čakania (so stratami),
- modely s neohraničeným čakaním,
- modely s ohraničeným čakaním (môže byť ohraničená dĺžka radu resp. čas čakania).

b) *typu zdroja požiadaviek*:

- otvorené – počet požiadaviek je neohraničený,
- uzavreté – počet požiadaviek je ohraničený.

c) *charakteru vstupného prúdu a výstupného prúdu*:

- poissonovské s exponenciálnym vstupným intervalom a výstupným intervalom,
- nepoissonovské, v ktorých majú intervaly rozdelené odlišné od exponenciálneho rozdelenia.

d) *tendencie vývoja*:

- stacionárne (stacionárne procesy sú v čase t homogénne, pohybujú sa okolo strednej hodnoty,
- nestacionárne.

e) *počtu kanálov*:

- jednokanálové,
- viackanálové (sériové alebo paralelné usporiadanie); „ak skupina pracovníkov predstavujúci uzol obsluhy pracuje ako tím vždy na jednej požiadavke, ide o jednokanálový systém.“³¹

³⁰ [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007, s.191. ISBN 978-80-8078-176-7

³¹ [12] DVOŘÁK, J. *Systémy hromadnej obsluhy* s. 6

1.4 Otvorené systémy

1.4.1 Charakteristika

Otvorený systém hromadnej obsluhy predstavuje štruktúru, ktorá sa vyznačuje prakticky neohraničenou množinou potenciálnych požiadaviek. „O otvorenom systéme hovoríme, ak intenzita príchodu požiadaviek je nezávislá od počtu požiadaviek v systéme.“³² Aj keď existujú isté obmedzenia na ich počet (napr. pohlavie, vekové kategórie, finančné možnosti, a v konečnom dôsledku ľudia na Zemi), vo všeobecnosti – pri analýze týchto systémov – sa tieto neberú do úvahy a pracuje sa s prakticky nekonečným počtom možných požiadaviek. S otvorenými systémami sa stretávame každý deň. Môže ísť o obchod, zdravotnícke zariadenie (ide o ambulantné ošetrovanie pacientov), kaderníctvo, kolotoče atď.

Základná štruktúra otvorených systémov hromadnej obsluhy sa nachádza na obrázku na strane 14 v oddiele 1.3.1.

1.4.2 Príklady otvorených systémov

Určité ukazovatele opisujú systémy obsluhy, ktoré charakterizujú vstup a výstup požiadaviek do a zo systému, kvalitu obsluhy a využívanie kanálov obsluhy a sú definované formou pravdepodobností a stredných hodnôt. Z obsahovej stránky možno ich deliť na³³:

- ukazovatele charakterizujúce kvalitu obsluhy,
- ukazovatele charakterizujúce využitie kanálov.

Teraz krátko opíšeme jednotlivé otvorené systémy s čakaním, bez čakania a s ohraničeným čakaním. Vzťahy pre výpočet ukazovateľov sa v jednotlivých prípadoch odlišujú, ich vysvetlenie by bolo rozsiahle, preto sa s nimi detailnejšie zaoberať nebudeme. Príslušné vzorce sa nachádzajú v [1], [3] a [4].

Jednokanálový systém hromadnej obsluhy bez čakania

Ide o veľmi jednoduchý model s jedným kanálom obsluhy bez možnosti vytvorenia radu, čiže v systéme je v hociktorom časovom okamihu najviac jedna

³² [10] BANKS a kol. 2002. *Discrete-event System Simulation* [online] s. 5

³³ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s. 88.

požiadavka. Typickým príkladom tohto modelu je obyčajná telefónna linka – ak práve prebieha hovor, ďalší volajúci bude musieť zavolať neskôr, pričom nebude vedieť, kedy bude linka voľná. Z toho vyplýva, že môžu existovať iba dva stavy – buď je linka obsadená, alebo voľná. Pri analýze obsadenosti systému sa vypočíta pravdepodobnosť p_0 toho, že v systéme práve nie je požiadavka, a pravdepodobnosť toho, že v systéme je požiadavka prítomná, sa určí jednoducho ako $p_1 = 1 - p_0$. Ukazovatele stredná hodnota počtu požiadaviek v rade a stredná hodnota čakania sa rovnajú nule, resp. sa s nimi v tomto prípade neuvažuje.

Viackanálový systém hromadnej obsluhy bez čakania

Viackanálový model sa líši od jednokanálového v tom, že dokáže obslúžiť viac požiadaviek súčasne, a môže sa nachádzať v toľkých stavoch, koľko je kanálov. Ako príklad môžeme uviesť telefónnu ústredňu s viacerými telefónnymi linkami, alebo pobočku banky/pošty, pričom predpokladáme, že zákazníci nie sú ochotní čakať, ak nie sú obslužení ihneď a preto odchádzajú.

Jednokanálový systém hromadnej obsluhy s čakaním

Modely s čakaním predstavujú opis takých systémov, kde požiadavky (zákazníci) vytvoria rad, ak nie sú obslužené okamžite. Ako príklad môžeme uviesť napr. knižnicu alebo úrad („okienko“) s jednou pracovníčkou, kde sa predpokladá, resp. očakáva, že zákazníci počkajú, kým sa dostanú na rad. V modeloch opisujúcich tieto systémy (tj. s čakaním) sa môže vyskytnúť toľko stavov, koľko požiadaviek v systéme práve je.

Viackanálový systém hromadnej obsluhy s čakaním

Tento systém predstavuje najvšeobecnejší typ jednoduchých modelov hromadnej obsluhy. Od jednokanálového systému sa líši v počte kanálov obsluhy. Typickým príkladom je čerpacia stanica so viacerými pumpami fungujúcimi súčasne, alebo stanica technickej kontroly.

Otvorené systémy s ohraničeným čakaním

V týchto systémoch požiadavka čaká, kým počet čakajúcich v rade (alebo dĺžka čakania) neprekročí určitú hodnotu, po ktorom požiadavka odchádza zo systému

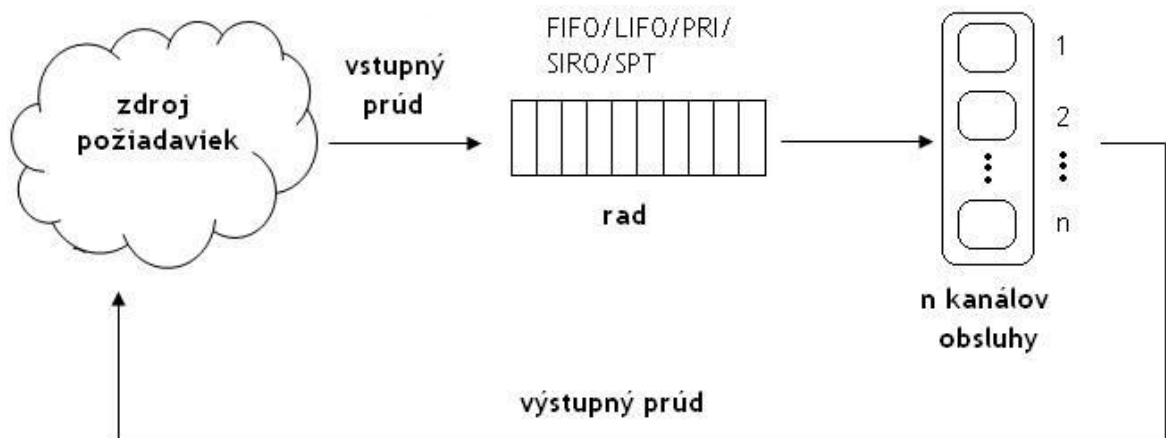
neobslužená. Takéto systémy sa správajú ako systémy so stratami, a nazývajú sa aj ako zmiešané systémy.

Podrobnejšie sa s jednotlivými typmi otvorených systémov zaoberá Ladislav Unčovský v [1].

1.5 Uzavreté systémy

1.5.1 Príklady uzavretých systémov

Systémy, ktoré sa vyznačujú tým, že zdroj požiadaviek majú ohraničený – konečný, sa nazývajú uzavreté. „V týchto systémoch intenzita vstupného prúdu závisí od počtu požiadaviek v systéme.“³⁴ Keďže zdroj požiadaviek je ohraničený, môže ich do systému vstúpiť iba určitý počet s určitou pravdepodobnosťou; po vstupe niekoľkých požiadaviek sa počet potenciálnych požiadaviek zníži a zmení sa aj pravdepodobnosť ich vstupu do systému. Teória uzavretých systémov tvorí zvláštnu kapitolu teórie hromadnej obsluhy.



Obrázok č. 2 Základná štruktúra uzavretých systémov obsluhy

Systémy hromadnej obsluhy bez čakania

V prípade uzavretých systémov o systémoch bez čakania prakticky nemá zmysel hovoriť, čo vyplýva z ich povahy; rad sa v nich vytvorí vždy. Nech už majme akýkoľvek systém, požiadavka nevstupuje do uzavretého systému spôsobom, ako pri otvorených systémoch – požiadavka sa jednoducho nedá odmietnuť a vytvorí sa rad. Systém by mohol byť bez čakania v prípade, že po príchode požiadavky do systému obsluha okamžite začne, ale to je prakticky nemožné (napr. tkáčka obsluhujúca jeden stroj, ktorý ak sa pokazí, môže

³⁴ [10] BANKS a kol. 2002. *Discrete-event System Simulation* [online] s.5

ho ihneď začať opravovať, ale je veľmi málo pravdepodobné, že by to zakaždým dokázala).

Systémy hromadnej obsluhy s čakaním

Väčšina uzavretých systémov hromadnej obsluhy je systémom s možnosťou vytvorenia radu, ako napr. výrobný podnik, lôžky na oddelení nemocnice alebo kuchyňa reštaurácie. Ak sa pokazí viac výrobných zariadení, ako je opravárov, niektoré stroje musia na opravu počkať (za predpokladu, že jeden stroj opravuje jeden opravár); podobne pacienti ležiaci na lôžku, ak potrebujú vymeniť obväz či pomôcť s nejakou činnosťou, budú obslužení sestričkami/lekármi v poradí, akom obsluhu požadovali a v prípade potreby musia na obsluhu počkať; takisto šéfkuchár po prijatí objednávky začne variť na sporáku, piecť v rúre, pričom tieto požiadavky (sporák, rúra) musia na obsluhu – varenie – počkať.

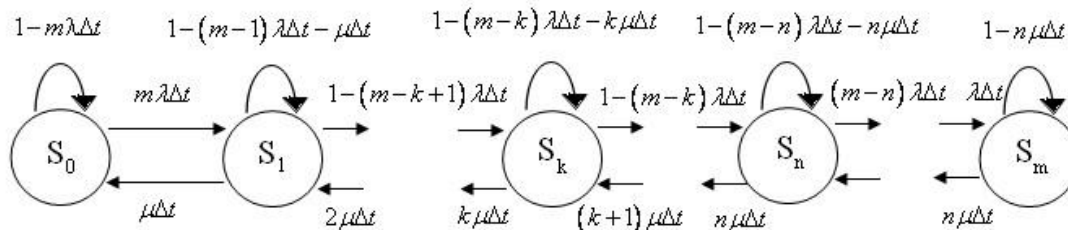
Jedno- a viackanálové systémy sa mierne líšia – jednokanálový systém je špeciálnou verziou viackanálového systému.

Vo zvyšku práce sa budeme zaoberať práve uzavretými systémami hromadnej obsluhy s čakaním, pričom ide o systémy jedno- a dvojkanálové s paralelným usporiadaním kanálov obsluhy. Najskôr sa oboznámime s viackanálovými systémami, potom popíšeme ich jednotlivé varianty.

1.5.2 Základný model uzavretého systému s čakaním

Majme systém s najviac m požiadavkami (za predpoklad, že sa realizuje všetkých m požiadaviek). Keď v systéme obsluhy je k požiadaviek (pri $k < m$), maximálne sa môže vyskytnúť ešte $m - k$ požiadaviek. Systém opúšťajú požiadavky po skončení obsluhy a znovu sa stávajú prvkami množiny potenciálnych požiadaviek v zdroji. Ak počet požiadaviek v zdroji zavedieme v Kendallovej symbolike ako piaty symbol, systém môžeme označiť ako $(M / M / n / m / m)$. Ako sme vyššie uviedli, chýbajúci šiesty symbol znamená, že disciplína požiadaviek v rade je FIFO (tá požiadavka, ktorá príde ako prvá, bude obslužená ako prvá). Uzavretý systém s čakaním, resp. prechody medzi jeho jednotlivými stavmi je zobrazený na obrázku³⁵ č. 3.

³⁵ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, s.127.



Obrázok č. 3 Graf pravdepodobností prechodov medzi stavmi uzavretého systému

Reálne systémy, ktoré v rámci aplikácie teórie hromadnej obsluhy majú dôležitý význam, odzrkadľujú uzavretý model hromadnej obsluhy s čakaním. Jedná sa o úlohu obsluhy viacerých strojov, kde robotník (operátor alebo skupina n robotníkov, operátorov) má na starosti m strojov. Stroje sú prevádzkované, pokiaľ nenastane porucha. Pri poruche je úlohou robotníka, robotníkov, aby poruchu odstránili, pričom môže nastať prelínanie porúch v čase a v prípade, keď $k < n$, poškodené stroje musia čakať na začiatok obsluhy. Poškodené stroje sú požiadavkami v tomto systéme a kanály obsluhy predstavujú obsluhujúci. Množina potenciálnych požiadaviek je m strojov. Modelovanie má za úlohu priradiť obsluhujúcemu optimálny počet strojov na obsluhu.

Majme prúd výskytu požiadaviek, o ktorom predpokladáme, že je Poissonov a čas obsluhy jednej požiadavky, o ktorom predpokladáme, že je exponenciálne rozdelený. Každý stroj (objekt) môže byť v dvoch stavoch:

- pracuje, je v prevádzke, je to potenciálna požiadavka na obsluhu, je mimo systému
- nepracuje, je porúchaný a je to požiadavka na obsluhu, t. j. je v systéme obsluhy.

Ďalej predpokladáme, že čas pobytu mimo systém je exponenciálne rozdelený so strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda}$.

Keď $m \leq n$, jedná sa o stav, kedy vôbec nenastane čakanie na obsluhu, nenastane tvorenie radu. Obsluha každého stroja predstavuje osobitný nezávislý jednokanálový systém obsluhy. O tomto prípade uvidíme viac informácií v časti 1.5.3.

Keď $m > n$, jedná sa o bežný prípad hromadnej obsluhy, kde systém funguje ako celok. Procesom zrodov a zánikov je aj v tomto prípade proces obsluhy. Spôsob určovania pravdepodobnosti intenzity vstupov (zrodov) je podstatne rozdielny.

1.5.3 Ukazovatele základného systému

Konkrétne sa budeme zaoberať stavom, keď $m > n$, teda počet zákazníkov je väčší ako počet kanálov obsluhy. Vzhľadom na ohraničenosť počtu potenciálnych požiadaviek pravdepodobnosť vstupu požiadavky do systému sa rovná

$$\lambda_k = (m - k)\lambda \quad \text{pre } 0 \leq k < m \quad (01)$$

kde k je počet požiadaviek, m počet potenciálnych požiadaviek v systéme; výsledok vzťahu predstavuje celkový vstupný prúd.

► Pravdepodobnosť výstupu zo systému sa rovná

$$\begin{aligned} k \cdot \mu & \quad \text{pre } 0 \leq k < n \\ n \cdot \mu & \quad \text{pre } k \geq n \end{aligned} \quad (02)$$

► Pravdepodobnosť, že sú všetky kanály voľné:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \psi^k + \sum_{k=n}^m \frac{m!}{n^{k-n}n!(m-k)!} \cdot \psi^k \right]^{-1} \quad (03)$$

► Pravdepodobnosť toho, že je v systéme obsadených k kanálov obsluhy:

$$p_k = \frac{m!}{(m-k)!k!} \psi^k p_0 \quad \text{pre } 1 \leq k < n \quad (04)$$

$$p_k = \frac{m!}{n^{k-n} \cdot n!(m-k)!} \cdot \psi^k p_0 \quad \text{pre } n \leq k < m \quad (05)$$

ψ je miera zaťaženia systému, vypočítava sa ako $\frac{\lambda}{\mu}$ (λ - intenzita návratnosti požiadavky do systému, μ - intenzita výstupného prúdu), a za p_0 sa dosadí výsledok z (03).

► Priemerný počet požiadaviek v systéme $\bar{d}_s$ má pri uzavretom modeli osobitný význam, nakoľko charakterizuje, aký čas v priemere sú objekty mimo prevádzky (nastáva prestoj):

$$\bar{d}_s = \sum_{k=0}^m k \cdot p_k \quad (06)$$

kde p_k je hodnota vzťahu (03) pre $k = 0$, (04) pre $k = 1, \dots, n$ a (05) pre $k = n, \dots, m$ (s je skratka pre systém).

► Koefficient prestoja požiadavky K_s

$$K_s = \frac{\bar{d}_s}{m} \quad (07)$$

► Priemerná dĺžka radu v systéme $\bar{d}_f$

$$\bar{d}_f = \sum_{k=n}^m (k-n) p_k \quad (08)$$

kde p_k je hodnota vzťahu (05) pre $k = n, \dots, m$ (f je skratka pre rad – front).

► Priemerný počet potenciálnych požiadaviek v systéme $\bar{d}_p$ – má pri uzavretom modeli význam určiť, je to v podstate priemerný počet objektov (strojov).

$$\bar{d}_p = m - \bar{d}_s \quad (09)$$

Aby sme mohli vypočítať časové charakteristiky, musíme nájsť modifikovanú intenzitu vstupov λ_1 . Pri k požiadavkách v systéme je $m-k$ požiadaviek mimo neho. Potom priemerná intenzita vstupov je:

$$\lambda_1 = \lambda (m - \bar{d}_s) \quad (10)$$

► Priemerná dĺžka pobytu požiadaviek v systéme $\bar{w}_s$

$$\bar{w}_s = \frac{\bar{d}_s}{\lambda (m - \bar{d}_s)} \quad (11)$$

► Priemerná dĺžka čakania požiadaviek v rade $\bar{w}_f$

$$\bar{w}_f = \frac{\bar{d}_f}{\lambda (m - \bar{d}_s)} \quad (12)$$

► Priemerný počet obsadených kanálov $\bar{n}_z$

$$\bar{n}_z = \bar{d}_s - \bar{d}_f \quad (13)$$

► Absolútna kapacita K_a

$$K_a = \lambda_1 = \lambda (m - \bar{d}_s) \quad (14)$$

► Koeficient využitia kanálu K_z

$$K_z = \frac{\bar{n}_z}{n} \quad (15)$$

► Priemerný počet voľných kanálov n_0

$$n_0 = n - \bar{n}_z \quad (16)$$

► Koeficient prestoja kanálu K_0

$$K_0 = \frac{n_0}{n} \quad (17)$$

1.5.4 Modifikácie základného modelu

Existujú modifikácie rozličného druhu základného modelu uzavretého systému, ktoré môžu byť nasledovné³⁶:

1. typ predstavujúci prípady, ktoré môžeme pokladať za špeciálne prípady základného modelu. Tieto úzko súvisia predovšetkým s modelmi *jednokanálového systému*. Takýto systém bol jedným z prvých, ktoré sa kedy skúmali.

Ak platí, že $n \geq m$, potom sa systém rozkladá na n jednokanálových systémov. Nakoľko v prípade $n > m$ je $n - m$ kanálov nevyužitých, teoreticky význam má zaoberať sa iba s prípadom $m = n$. V tomto prípade sa jedná o najjednoduchší variant jednokanálového systému s jednou požiadavkou v systéme – platí: $m = n = 1$. Takýto model má však malý praktický význam, preto našu pozornosť obraciame na systém s $n = 1$ a $m > 1$.

► Pravdepodobnosť, že sú všetky kanály obsluhy voľné:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \psi^k} \quad (18)$$

► Keďže ide o systém s jediným kanálom, pravdepodobnosť, že kanál bude voľný, je

$$\bar{n}_0 = p_0 \quad (19)$$

► Pravdepodobnosť obsadenia k kanálov

$$p_k = \frac{m!}{(m-k)!} \psi^k p_0 \quad (20)$$

► Pravdepodobnosť obsadenia kanála

$$p_z = 1 - p_0 \quad (21)$$

► Priemerný počet požiadaviek v systéme

$$\bar{d}_s = m - \frac{1 - p_0}{\psi} \quad (22)$$

► Absolútna kapacita sa určí na základe toho, že v čase, keď je kanál obsadený, obsluži μ požiadaviek za časovú jednotku:

$$K_a = (1 - p_0) \cdot \mu \quad (23)$$

► Priemerná dĺžka radu

³⁶ [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980, kap. 10.2

$$\bar{d}_f = m - (1 - p_0) \frac{1 + \psi}{\psi} \quad (24)$$

Na výpočet priemernej dĺžky pobytu v systéme a priemernej dĺžky čakania v rade použijeme vzťahy (11) a (12).

2. typ predstavujúci prípady, keď sa model modifikuje v dôsledku predpokladu iného rozdelenia intervalov vstupu a času obsluhy než je exponenciálne rozdelenie. Nahrádza sa predpoklad o Poissonovom vstupnom prúde a o exponenciálnom rozdelení času obsluhy predpokladom iného rozdelenia.

Problematika sa týmto pripútava k teórii nepoissonovských systémov obsluhy. Pomerne jednoduchým spôsobom môžeme riešiť jednakanálový uzavretý systém. Riešenie tohto systému sa len málo odchyľuje od modelu $(M / M / 1)$. Modifikácie tohto typu sa predovšetkým týkajú predpokladu o rozdelení času obsluhy.

Touto problematikou, modelmi tohto typu sa zaoberal CHINČIN, A. J. vo svojej práci³⁷. Skúmal model s ľubovoľným rozdelením času obsluhy $(M / G / 1)$. Neskôršie sa týmto problémom zaoberal ASHCROFT, H³⁸. Skúmal model $(M / D / 1)$. Pri tomto modeli je predpoklad determinovanej dĺžky času obsluhy reálny v prípadoch, ak sa odstránenie poruchy zakladá na vykonaní tých istých rovnakých operácií. Odvodil pomocnú veličinu na určenie časových charakteristík. Charakteristiky modelu sa dajú odvodiť pomocou tejto veličiny.

Vo vydanej literatúre je známy aj model s časom obsluhy s Erlangovým rozdelením $(M / E / 1)$ a niektoré kombinácie predtým uvedených modelov.

3. Typ, pri ktorom sa predpokladá zavedenie nových prvkov do modelu. Tento typ modifikácie základného modelu predstavujú kombinácie, ktoré prinášajú do modelu nové prvky. Patria sem aj modifikácie, ktoré sú bežné aj pri iných typoch modelov hromadnej obsluhy, napr. predpoklad priorít pri obsluhovaných strojoch, kde niektoré stroje sa pri poruche obsluhujú prednostne. Metodologicky sa nelíši riešenie modelov tohto typu od riešenia iných typov systémov hromadnej obsluhy. Ďalší typ predstavujú modely, kde sa vyskytujú prvky neobvyklé pri modeloch iných systémov hromadnej obsluhy. Patrí sem

³⁷ O srednem vremeni prostoja stankov

³⁸ The Productivity of several Machines under the Care of one Operator. In: Journal of Royal Statistical Society, B, 12, 1950/1

model, kde sa predpokladá, že systém je zložený z m strojov, ktoré sú stále v prevádzke a z R rezervných strojov, ktorú sú nasadzované len vtedy, ak niektorý bežne používaný stroj je poškodený. Tieto úlohy tohto typu súvisia s problémom spoľahlivosti systémov hromadnej obsluhy vyskytujúce sa len v uzavretých systémoch.

2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

2.1 Objekt aplikácie teórie

Naším cieľom je ukázať, ako funguje teória v praxi, presnejšie: čo si máme konkrétne predstaviť pod uzavretým systémom hromadnej obsluhy a jeho modelom. Pre aplikáciu teórie je vhodné si vybrať takú inštitúciu, ktorá predstavuje typický uzavretý systém hromadnej obsluhy. Dobrým príkladom sú výrobné podniky so strojovou výrobou. Stroje sa z času na čas pokazia, je potrebné ich opraviť. Uzavretosť tohto systému spočíva v tom, že požiadavky – pokazené stroje – prichádzajú z uzavretej skupiny (zdroja požiadaviek), keďže strojov je v podnikoch konečné množstvo. Stroje sa do systému dostávajú tým, že sa pokazia, pričom opravári/údržbári predstavujú kanály obsluhy. Obsluha v tomto prípade znamená opravu stroja, po ktorom stroje opúšťajú systém.

Výrobný podnik by bol vhodným miestom na aplikáciu teórie, ale tento objekt nepredstavuje terciálnu sféru – obchod, služby atď., preto si musíme zvoliť iný. Našou voľbou je zdravotnícke zariadenie – nemocnica. Nemocnica sčasti predstavuje tiež uzavretý systém hromadnej obsluhy, konkrétne lôžka istého oddelenia. Samotné lôžka s pacientmi ležiacimi na nich predstavujú konečnú množinu potenciálnych požiadaviek (samozrejme odhládnuv od plánovanej zmeny počtu lôžok). Niektorí sa môžu omylom domnievať, že ľudia chorých, resp. odkázaných na nemocničnú starostlivosť – pričom títo ľudia zostávajú v nemocnici cez noc na lôžku – môže prísť prakticky nekonečné množstvo (v zmysle „ak sa jeden chorý vylieči, príde druhý“), a oddelenie s lôžkami preto nepredstavuje uzavretý, ale otvorený systém. Tiež mylný môže byť uvedený príklad otvoreného systému v časti 1.4. (zdravotnícke zariadenie – tu je dôležité si uvedomiť, že v zdravotníckom zariadení ako otvorenom systéme prebieha ambulantné, teda také ošetrenie pacientov, pri ktorom noc nestrávia v danom zariadení, ale doma. V tomto prípade platí neohraničenosť množiny požiadaviek.). Pointa je však v tom, že dané oddelenie neprijme viac ľudí, ako je počet lôžok, tým pádom počet potenciálnych požiadaviek je limitovaný, preto takéto oddelenie je systémom uzavretým. Uzavretosť znamená, že aj keď sa pacienti vymieňajú, lôžka zostávajú, neopúšťajú oddelenie, spolu s pacientom tvoria potenciálne požiadavky. Pre lepšie pochopenie nemocnicu prirovnáme k výrobnému podniku. Konečný počet zariadení v podniku je ekvivalentný konečnému počtu obsadených lôžok na oddelení. Pokazené stroje si vyžadujú opravu, podobne pacienti ležiaci na lôžkach zdravotnú starostlivosť. Kanálmi obsluhy sú potom údržbári, resp. lekári a sestričky. Po

oprave stroj opúšťa systém a zaradí sa medzi ďalšie potenciálne požiadavky, tak isto pacient po ošetrení môže kedykoľvek požadovať ďalšiu starostlivosť, keď sa sestrička bude musieť vrátiť k lôžku.

Na základe predchádzajúceho odseku je nemocnica vhodným miestom na aplikáciu teórie opísanej v prvej kapitole. Zber údajov a analýzu systému preto vykonáme v nemocnici. Ako objekt pre prácu sme vybrali Fakultnú nemocnicu s poliklinikou v Nových Zámkoch, ktorá vyjadrila súhlas s poskytnutím údajov. Nemocnica má príliš veľa oddelení s lôžkami nato, aby sme ich všetky mohli čo najpresnejšie opísať a optimalizovať, preto sme sa rozhodli pre optimalizáciu iba jedného oddelenia v kritických mesiacoch, keď obloženost'³⁹ je najvyššia, resp. najnižšia. Snažili sme sa vybrať také oddelenie, pre ktoré sme predpokladali vyššiu využitost' počas celého roka. Našou voľbou bolo geriatrické oddelenie, ktoré „slúži na diagnostiku, liečbu a rehabilitáciu pacientov starších ako 65 rokov s prevažne vnútornými ochoreniami“⁴⁰ Starších ľudí častejšie postihnú zdravotné ťažkosti, preto sme očakávali relatívne veľkú obsadenost' lôžok.

Možnosti zaznamenávania potrebných údajov boli limitované, preto boli skutočné čísla nahradené vedeckým odhadom, a preto sú zaťažené chybou, aj keď malou. Zostavenie presného modelu by bol veľmi náročný proces, ktorý presahuje naše možnosti.

2.2 Použité údaje a nástroje

Pre výpočet jednotlivých charakteristík systému sme zaznamenali, resp. nám boli poskytnuté údaje.

- počet lekárov: 1 primár + 1 lekár
- počet sestier na oddelení: 1 sestra v celodennej službe 11,5 h
1 sestra v dennej službe 15 dní v mesiaci 7,5 h
1 sestra v nočnej službe
1 staničná sestra v dennej službe
- počet lôžok: 20 ks
- čas ošetrovania pacientov za deň (tj. za 11,5 h pracovného času): 8 h
- návratnosť jednej požiadavky do systému (za hodinu, približne): 0,07

³⁹ Vid'. 2.2

⁴⁰ [6]

- tabuľka – mesačná obsadenosť lôžok
 - hodnoty sme získali nasledovne: obložnosť je daná prepočítaním skutočne obsadených lôžok a dní za nejaké obdobie (mesiac), počet ošetrovacích dní hovorí o tom, koľko dní vlastne bolo v rámci toho časového úseku lôžka skutočne obsadené (napr. obložnosť v januári je 83,55 %, na oddelení je 20 lôžok, teda priemerne 16,71 lôžok bolo obsadených v ten mesiac. Január má 31 dní, potom počet ošetrovacích dní v tomto mesiaci je $16,71 \cdot 31 = 518,01$ dní)

Mesiac	Počet ošetrovacích dní	Obložnosť oddelenia v %
Január	518	83,55
Február	431	75,17
Marec	531	85,65
Apríl	419	69,83
Máj	502	80,97
Jún	470	78,33
Júl	422	68,06
August	366	59,03
September	414	69,00
Spolu/ priemer za I. – IX. 2012	4078	74,42

Tabuľka č. 2 Obsadenosť lôžok v roku 2012

Nástroje, ktoré použijeme pri analýze uzavretého modelu, sú popísané v prvej kapitole v časti 1.5.2 a 1.5.3, konkrétne ide o vzťahy základného modelu (01 – 17) pre viackanálový uzavretý systém a vzťahy pre modifikovaný model 1. typu. (18 – 24) doplnené o vzorce (11) a (12) pre jednokanálový uzavretý model. Pomocou nich vypočítame viaceré charakteristiky systému v istých mesiacoch. Vybrali sme 4 mesiace s kritickými hodnotami obložnosti – január (83,55 % - 17 obsadených lôžok), marec (85,65 % - 18 lôžok), august (59,03 % - 12 lôžok) a september (69 % - 14 lôžok).

2.3 Model a ciele

Lekári a sestričky tvoria rôzne, nehomogénne kanály obsluhy, ktoré fungujú súčasne, ale nedajú sa vzájomne zameniť napr. z dôvodu rôznorodosti ich práce, ich odmeňovania. Sestra v nočnej službe a staničná sestra musia byť prítomné za všetkých okolností, bez ohľadu na ich vyťaženosť, preto nemá význam ich počet optimalizovať (ich počet nemôže byť menej ako 1). Podobne nebudeme skúmať vhodnosť počtu lekárov (primár + lekár oddelenia). Sestra v dennej službe sa zdržiava na oddelení asi 15-krát za mesiac, jej práca je občasná, kým sestra v celodennej službe vykonáva prácu nepretržite. Dôležité je, že aj keď ide o (fyzicky) dve rôzne sestričky, z hľadiska teórie sa neodlišujú, tvoria rovnaké, resp. rovnocenné kanály obsluhy. Sestrička v celodennej službe, ak je sama, tvorí jeden kanál obsluhy, ak je prítomná aj sestra v dennej službe, vytvorí sa dvojkanálový systém obsluhy, pričom tieto kanály budú mať rovnaké charakteristiky. Tento prípad nastáva, keď sestra v celodennej službe sama už nestíha obsluhu pacientov (požiadaviek).

Zostavíme teda dva typy uzavretých modelov pre kritické mesiace. Najskôr vytvoríme model s jedným kanálom obsluhy, ktorý reprezentuje sestrička v celodennej službe. Tento model ukáže priemernú vyťaženosť sestričky a priemerné charakteristiky systému za jeden deň v sledovanom období. Ďalšie modely ukážu, ako by sa tieto hodnoty zmenili v prípade zmeny vstupných údajov, čím predstavujú prognózy na ďalšie roky. Následne sa vytvorí dvojkanálový model s rovnakými vstupnými údajmi, ako v prípade jednokanálového modelu (z dôvodu porovnateľnosti výsledkov), kde druhý kanál predstavuje sestričku v dennej službe. Porovnaním týchto výstupov posúdime, či je možné zlepšiť stav vzhľadom na využitosť.

Ručný výpočet hodnôt by bol neefektívny, preto využijeme softvér POM-QM for Windows, ktorý je „softvér pre produkčný/operačný manažment, kvantitatívne metódy a operačný výskum“⁴¹. Softvér pri spustení ponúkne na výber 30 modulov, z ktorých si zvolíme *Waiting lines*. Pre vytvorenie jednokanálového systému zvolíme *File – New – M/M/1 with a finite population* (prvé M – Poissonove rozdelenie vstupného prúdu, druhé M – exponenciálne rozdelenie času obsluhy, 1 – počet kanálov obsluhy). Otvorí sa nové okno, kde môžeme zadať názov súboru a vybrať si, či chceme realizovať výpočet vzhľadom na náklady (*Cost analysis*) na stojné. Takéto náklady v uzavretých systémoch

⁴¹ [5] POM-QM for Windows [online]

prakticky neexistujú, keďže pacientom sa neplatí, kým čakajú na obslúženie (náklady majú zmysel jedine z hľadiska spokojnosti pacienta, resp. pri vypočítaní ušlého zisku kvôli nefungujúcim strojom vo výrobnom podniku). Zvolíme variantu bez nákladov (*No costs*). Dostaneme tabuľku s nasledovnými bunkami, ktoré predstavujú **vstupné údaje**:

Arrl rt PER CUSTOMER – návratnosť jednej požiadavky do systému; koľkokrát sa daná požiadavka vráti do systému za dané časové obdobie. Napríklad, ak každá z piatich požiadaviek požaduje obsluhu raz za osem hodín, zadá sa 0,125 (1/8). Ak máme k dispozícii údaje, ktoré charakterizujú čas medzi príchodmi jednotlivých požiadaviek, musíme ich upraviť. Napríklad sa môže stať, že každá z 5 požiadaviek vstúpi do systému v priemere každých 30 minút. To znamená, že intenzita bude $60/30=2$ za hodinu pre jednu požiadavku (teda aj keď máme 5 požiadaviek, intenzita nebude $2*5=10$).

Service rate – intenzita výstupného prúdu

Number of servers – počet kanálov obsluhy

Population – veľkosť zdroja požiadaviek

Zaznamenané údaje musíme pred ich použitím upraviť. Dôležité je, aby všetky ukazovatele sa vzťahovali na jednu požiadavku a na istý časový interval, v našom prípade jednu hodinu. Podľa obložnosti v jednotlivých mesiacoch počet obsadených lôžok nevychádza na celé číslo, preto sme ich zaokrúhlili smerom nahor, keďže necelé číslo znamená, že je obsadené o lôžko viac. Priemerný čas obsluhy a intenzitu výstupného prúdu (čiže počet požiadaviek, ktorý je schopná jedna sestrička obslúžiť za jednotku času) vypočítame z intenzity návratnosti a koeficienta zaťaženia, výsledné čísla použijeme v analýze ako vstupné údaje.

Čas obsluhy je nezávislý od priemerného počtu obsadených lôžok, preto ho môžeme považovať v každom mesiaci za rovnaký, premenným údajom preto bude obložnosť (veľkosť zdroja požiadaviek) a návratnosť jednej požiadavky. Dôležitým faktom je, že vstupné údaje odzrkadľujú súčasný stav na geriatrickom oddelení, t.j. je v nich zahrnutá aj práca sestričky v dennej službe. Počas analýzy zistíme, v akej miere by stihala sestra v celodennej službe plniť svoje povinnosti, keby bola na oddelení sama, a na základe jej vyťaženia posúdime, či je možnosť zlepšenia stavu vzhľadom na vyťaženosť.

Tabuľka s vypočítanými údajmi má nasledovné časti, v zátvorke číslo vzťahu, pomocou ktorého sa daná hodnota vypočítala pre jeden- a v prípade potreby zvlášť pre viackanálový systém:

Average server utilization – koeficient zaťaženia kanála obsluhy ($\frac{\lambda \cdot (m-k)}{\mu}$)

Average number in the queue – priemerný počet požiadaviek v rade (22)

Average number in the system - priemerný počet požiadaviek v systéme obsluhy (24)

Average time in the queue – priemerný čas strávený požiadavkou v rade, ďalšie dva stĺpce obsahujú ten istý údaj prepočítaný na minúty a sekundy (11)

Average time in the system – priemerný čas strávený požiadavkou v systéme, ďalšie dva stĺpce obsahujú ten istý údaj prepočítaný na minúty a sekundy (12)

Probability (% of time) system is empty PO – pravdepodobnosť, že systém obsluhy bude prázdny (18) (03)

Effective arrival rate – skutočná intenzita vstupného prúdu (celkový vstupný prúd), ktorou požiadavky prichádzajú do systému (vypočítava sa ako $\lambda \cdot (m - k)$, teda ako intenzita návratnosti krát priemerný počet požiadaviek, ktoré sú mimo systém).

3 Výsledky práce a diskusia

3.1 Číselné charakteristiky

V tejto kapitole uvedieme vlastnosti geriatrického oddelenia ako uzavretého systému hromadnej obsluhy opísané číselnými charakteristikami, ktoré sa nachádzajú vo výstupe programu pre jednotlivé mesiace. Vyťaženosť sestričky v celodennej službe vyhodnotíme v každom zo zvolených mesiacov zvlášť. Analýzu v jednotlivých mesiacoch uskutočníme v časovom poradí.

Všetky údaje v nasledovných tabuľkách pochádzajú z programu POM-QM for Windows. Naším pôvodným zámerom bolo vložiť do práce výpisy výsledkov, ako by ich vytlačila tlačiareň (screenshot) z výstupov programu, ale obrázky mali príliš veľké rozmery, a po ich zmenšení sa údaje stali dosť nečitateľnými. Z tohto dôvodu boli obrázky nahradené tabuľkami z MS Office Excel, pričom výsledky zostali nezmenené a sú totožné s výstupmi z programu. Pôvodné tabuľky sú uvedené v prílohe (č. 18-32, zodpovedajú prílohám č. 1-15).

1) Január:

V januári v roku 2012 bola obloženosť 83,55%, čo predstavuje priemerne 17 obsadených lôžok na oddelení.

Tabuľka č. 3 Priemerné charakteristiky jednokanálového systému (január 2012)

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7328		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,07	Average number in the queue(Lq)	1,2971		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,0299		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,2378	74,2658	4455,95
Population size	17	average time in the system(W)	1,9371	116,2239	6973,432
		Probability (% of time) system is empty (p0)	0,2672		
		Effective arrival rate	1,0479		

Podľa výstupu je vyťaženosť sestričky v celodennej službe 73,28%, pričom v rade v hociktorom okamihu čaká 1,29 pacienta (resp. viac ako 1 pacient) a v systéme sa súčasne zdržiavajú dvaja pacienti, čiže ďalší je ošetrovaný. Dĺžka čakania v rade je 1,23 hodiny (74,27 minút), čas strávený v systéme je 1,93 hodiny v priemere (116,22 minút), ktoré

predstavujú príliš vysoké hodnoty. Pravdepodobnosť voľnosti systému je 26,72%, čo korešponduje s mierou vyťaženia. Celkový vstupný prúd požiadaviek je 1,0479 za hodinu, teda za hodinu vstúpi do systému o niečo viac ako jedna požiadavka.

V tabuľke sme vypočítali priemerné údaje na celý deň, čo znamená, že sa počet požiadaviek časom mení. Zvýšime intenzitu návratnosti na $\lambda = 0,21$ za hodinu.

Tabuľka č. 4 Prognóza jednokanálového systému na ďalšie roky pre január

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9995		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,21	Average number in the queue(Lq)	9,194		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	10,1936		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	6,4323	385,9366	23 156,2000
Population size	17	Average time in the system(W)	7,1316	427,8947	25 673,6800
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0005		
		Effective arrival rate	1,4294		

Vidíme, že aj pri relatívne nízkej intenzite návratnosti vyťaženosť sestričky vyskočila na 99,95%, čo predstavuje prakticky nemožnú, resp. nezvládnuteľnú situáciu. Spolu so zvýšením vyťaženia sa automaticky zhoršili ostatné ukazovatele – v takomto systéme by približne 9 pacientov čakalo na ošetrovanie, pričom iba 1 by bol súčasne ošetrovaný; v priemere 6,43 hodín čakania v rade a 7,13 hodín strávených v systéme tiež hovoria o zlej situácii. Tento stav by bol neudržateľný pre skoro stopercentnú mieru vyťaženia, čo by znamenalo nepretržitú prácu sestričky bez prestávky celý deň (tento stav by nebol vyhovujúci ani pre pacientov, keďže pravdepodobnosť toho, že systém bude prázdny, teda že pacient nemusí určite čakať, je veľmi nízka – 0,05%). Celkový vstupný prúd sa zvýšil o polovicu. Pre zlepšenie situácie a odľahčenie sestričky sa preto zavedie ďalší kanál obsluhy – sestra v dennej službe:

Tabuľka č. 5 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre január

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9106		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,21	Average number in the queue(Lq)	2,7776		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	4,5988		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	1,0666	63,9943	3 839,6570
Population size	17	Average time in the system(W)	1,7659	105,9523	6 357,1390
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0398		
		Effective arrival rate	2,6043		

Po doplnení ďalšieho kanálu obsluhy sa vytťaženosť znížila na 91,06%. Táto hodnota je už prijateľnejšia, znamená, že každá zo sestričiek má za jednu hodinu približne 6 minút „prestávky“, čo ale stále predstavuje silné zaťaženie, ale takýto stav sa dá udržať určite s väčšou pravdepodobnosťou, ako jednonálový systém, ktorý by sa nedal zvládnuť vôbec. Súčasná práca dvoch sestričiek umožňuje nárast skutočnej intenzity celkového vstupného prúdu až na 2,6 požiadaviek za hodinu.

2) Marec:

Marec je mesiac s najvyššou priemernou mierou obloženosti 85,65% za rok 2012, tým predstavuje najkritickejšie obdobie roka s priemerným počtom obsadených lôžok 18. Vychádzajúc z predchádzajúcej analýzy pre mesiac január predpokladáme vyššiu vytťaženosť kanálov obsluhy.

Tabuľka č. 6 Priemerné charakteristiky jednonálového systému (marec 2012)

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7269		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,065	Average number in the queue(Lq)	1,282		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,0089		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,2334	74,0017	4 440,1000
Population size	18	Average time in the system(W)	1,9327	115,9597	6 957,5830
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2731		
		Effective arrival rate	1,0394		

Z tabuľky je jasné, že zvýšením počtu obsadených lôžok na 18 sa využitie sestričky vyšplhalo na 72,69%. V porovnaní s výsledkami pre január sú všetky ukazovatele pochopiteľne horšie. Priemerný počet požiadaviek v rade (1,28) a v systéme (2), priemerný čas čakania v rade (1,23 hodiny) a v systéme (1,93 hodiny) sú hodnoty, ktoré podľa nášho posúdenia by boli už neprijateľné z hľadiska pacientov. Pravdepodobnosť toho, že systém bude voľný, je 27,31%. Celkový vstupný prúd je 1,039 požiadaviek za hodinu. Keďže ide o hodnoty, ktoré sa vzťahujú priemerne na celý deň, preskúame ďalšie stavy – zvýšime intenzitu návratnosti požiadavky.

Tabuľka č. 7 Prognóza jednokanálového systému na ďalšie roky pre marec I

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9915		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,14	Average number in the queue(Lq)	6,8806		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	7,8721		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	4,8526	291,1574	17 469,4500
Population size	18	Average time in the system(W)	5,5519	333,1154	19 986,9300
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0085		
		Effective arrival rate	1,4179		

Po zvýšení hodnoty λ iba na 0,14, teda na 1 požiadavku za asi 7 hodín, sa využitie kanála obsluhy opäť priblížila ku 100%. Tento výsledok znamená, že keby na oddelení pracovala iba jedna sestrička, tak by ošetrovanie určite nezvládla, nakoľko 100%-ná vyťaženosť je absolútne nereálna podobne, ako čísla charakterizujúce rad a celý systém – priemerný počet pacientov v rade 6,88, v systéme 7,88, priemerný čas strávený v systéme 5,55 hodín, pričom na ošetrenie by sa malo čakať približne 5 hodín. Celkový vstupný prúd sa zvýšil iba o 0,29. Ďalšie – teoretické – zvyšovanie intenzity návratnosti jednej požiadavky už nemá zmysel, nakoľko už pri zriedkavom návrate (raz za sedem hodín) dosahujeme hranicu schopností sestričky (pri vyšších hodnotách λ sa využitie zvýši na 100%, a pri ďalšom zvyšovaní sa ostatné charakteristiky ďalej zhoršujú, teda rad bude stále dlhší podobne, ako aj čas strávený požiadavkou v systéme). Namiesto toho preskúmame stav, keď sa pridá ďalší kanál obsluhy (sestrička v dennej službe) do systému.

Tabuľka č. 8 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre marec I

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7523		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,14	Average number in the queue(Lq)	1,1263		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,631		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	0,5235	31,4071	1 884,4240
Population size	18	Average time in the system(W)	1,2228	73,3651	4 401,9060
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1317		
		Effective arrival rate	2,1517		

Ďalší kanál obsluhy odľahčil systém v značnej miere. Vyťaženosť klesla späť približne na hodnotu, ktorú sme dostali v prvej tabuľke, aj ostatné charakteristiky sa zlepšili o značnú mieru, dokonca sa zlepšili v porovnaní so systémom s jedným kanálom

obsluhy a intenzitou návratnosti 0,07 (tabuľka č.6). Nižšia pravdepodobnosť neobsadenosti kanálov obsluhy (13,17%) – pri približne rovnakom celkovom zaťažení (75%) ako pri jednokanálovom systéme s $\lambda = 0,07$ – znamená, že kanály sú dobre využité. Priemerný počet požiadaviek v rade sa znížil, pričom počet požiadaviek v systéme sa zvýšil, čiže sa zvýšila efektívnosť, čo automaticky prináša v priemere kratšie čakanie v rade (0,52 hodiny, teda 31 minút) a kratší priemerný čas strávený v systéme (1,22 hodiny). Hodnota obidvoch ukazovateľov sa znížila v priemere o jednu hodinu, a celkovo fungovanie celého systému je podľa nášho názoru optimálna.

Situácia sa však zmení pri zvýšení intenzity návratnosti na $\lambda = 0,21$:

Tabuľka č. 9 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre marec II

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9347		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,21	Average number in the queue(Lq)	3,4009		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	5,2703		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	1,2722	76,3334	4 580,0020
Population size	18	Average time in the system(W)	1,9715	118,2914	7 097,4850
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0281		
		Effective arrival rate	2,6732		

Podľa výsledkov v tabuľke č. 9 je jednoznačné, že pri častejšom výskyte požiadaviek (0,21 za hodinu) dva kanály obsluhy dokážu obsluhovať požiadavky v podobnej miere, ako v prípade, ktorý je opísaný v tabuľke č. 6, pričom obidva kanály pracujú na hranici svojich možností (vyťaženosť 93,47%). Počet požiadaviek v rade sa zvýšil na 3,4 v priemere, počet požiadaviek v systéme na priemerných 5,3. Priemerný čas strávený čakaním v rade (1,27 hodiny) a v systéme (1,97 hodiny) sú relatívne nízke hodnoty. Celkovo môžeme usúdiť, že situácia je podobná situácii opísanej v tabuľke č. 6 s tým rozdielom, že v tomto prípade je zaťaženosť približne o 16% vyššia. Celkový vstupný prúd sa oproti situácii opísanej v tabuľke č. 7 – s jedným kanálom obsluhy vyťaženým na 99,15% – približne zdvojnásobil.

3) August:

Spomedzi analyzovaných mesiacov bola obložnosť najnižšia v auguste – 59,03%, teda 12 lôžok bolo obsadených v priemere.

Tabuľka č. 10 Priemerné charakteristiky jednokanálového systému (august 2012)

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7147		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,1	Average number in the queue(Lq)	1,0653		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	1,78		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,0423	62,5404	3 752,4220
Population size	12	Average time in the system(W)	1,7416	104,4984	6 269,9040
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2853		
		Effective arrival rate	1,022		

Pri intenzite návratnosti 0,1 za hodinu je využitie jedného kanála 71,47%. Na obsluženie čaká v priemere 1,07 požiadaviek 1,04 hodín (62,5 minút). Čas čakania je relatívne dlhá z dôvodu dĺžky obsluhy požiadaviek. V systéme strávi požiadavka priemerne 1,74 hodiny (104,5 minút), čo je ešte prijateľná hodnota, ak zoberieme do úvahy, že čas obsluhy tvorí približne polovicu tohto času. Tieto hodnoty ale predstavujú celodenný priemer pre jeden kanál obsluhy. Intenzita návratnosti sa cez deň môže meniť, preto musíme preskúmať aj ďalšie prípady, keď sa požiadavka vracia častejšie do systému. Pri zvýšení návratnosti na 0,14 sa využitost' kanála zvýši približne na 87%, pričom v rade čaká jedna požiadavka skoro dve hodiny (106,87 minút). K blízkosti 100%-nej využiteľnosti sa dostaneme už pri intenzite návratnosti 0,21:

Tabuľka č. 11 Prognóza jednokanálového systému na ďalšie roky pre august

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9766		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,21	Average number in the queue(Lq)	4,3734		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	5,3499		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	3,1316	187,8971	11 273,8300
Population size	12	Average time in the system(W)	3,8309	229,8552	13 791,3100
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0234		
		Effective arrival rate	1,3965		

Vyťaženosť 97,66% znamená opäť (teoretickú) hranicu možností, ktorá je z praktického hľadiska nepredstaviteľná. Hodnoty ostatných vlastností systému sú lepšie, ako pri iných analyzovaných systémoch s jedným kanálom obsluhy s využitím približne na 100%, lebo zdroj potenciálnych požiadaviek je dostatočne malý, ale čakanie v priemere 3,13 hodiny (187,9 minút) v rade na obsluhu je neakceptovateľné, ako aj skoro

štvorhodinový pobyt v systéme (3,83 hodiny – 230 minút). Priemerný počet požiadaviek v rade 4,37 sa dá posúdiť ako prijateľná hodnota, ale iba ak abstrahujeme od priemerných časových charakteristík, pričom celkový vstupný prúd požiadaviek je iba 1,3965 za hodinu.

Pridaním druhého kanála obsluhy sa stav zmení nasledovne:

Tabuľka č. 12 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre august I

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7181		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,21	Average number in the queue(Lq)	0,7836		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,2198		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	0,3815	22,8909	1 373,4510
Population size	12	Average time in the system(W)	1,0808	64,8489	3 890,9340
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1498		
		Effective arrival rate	2,0538		

Výsledky ukazujú všeobecné zlepšenie systému. Využitie kanálov obsluhy sa znížilo na 71,81%. V takomto systéme by na obsluhu čakalo priemerne 0,78 požiadaviek v priemere 0,38 hodín (23 minút), a v celom systéme by strávili vyše jednu hodinu (64,85 minút). Celková situácia je v takomto systéme veľmi priaznivá a vhodná ako pre kanály obsluhy (sestričky), tak pre požiadavky (pacientov), ktorých celkový vstupný prúd je 2,054 za hodinu.

4) September:

V septembri bola priemerná obložnosť 69%, teda na 14 lôžkach ležali pacienti.

Tabuľka č. 13 Priemerné charakteristiky jednocanálového systému (september 2012)

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7505		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,09	Average number in the queue(Lq)	1,3245		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,075		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,2341	74,0454	4 442,7210
Population size	14	Average time in the system(W)	1,9334	116,0034	6 960,2040
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2495		
		Effective arrival rate	1,0732		

Pri 14 obsadených lôžkach je priemerné využitie kanála obsluhy 75,05%. Priemerný počet požiadaviek v rade (1,32) a priemerný čas čakania (1,23 hodiny) sú prijateľné hodnoty. Pri skúmaní celého systému zistíme, že priemerný čas strávený v systéme je pol druhá násobok času stráveného čakaním v rade. Vytťaženosť sa môže zdať malá, ale pri vyššej intenzite návratnosti sa rapídne zvýši:

Tabuľka č. 14 Prognóza jednokanálového systému na ďalšie roky pre september I

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,8856		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,12	Average number in the queue(Lq)	2,5616		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	3,4471		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	2,0228	121,3683	7 282,0960
Population size	14	Average time in the system(W)	2,7221	163,3263	9 799,5790
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1144		
		Effective arrival rate	1,2663		

Z tabuľky č. 4 vidieť, že vytťaženosť kanála obsluhy sa zmenila na 88,56%. Priemerný počet požiadaviek v rade (2,58) sa strojnásobila, podobne sa zhoršil priemerný čas čakania v rade (približne dve hodiny) a priemerný čas pobytu požiadavky v systéme (2,72 hodiny). Po ďalšom zvýšení intenzity návratnosti je jednoznačné, že jeden kanál obsluhy nie je dostatočný:

Tabuľka č. 15 Prognóza jednokanálového systému na ďalšie roky pre september II

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9547		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,15	Average number in the queue(Lq)	3,944		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	4,8987		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	2,889	173,3381	10 400,2900
Population size	14	Average time in the system(W)	3,5883	215,2961	12 917,7700
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0453		
		Effective arrival rate	1,3652		

Situácia sa dá zmierniť zmenou jednokanálového systému na viackanálový:

Tabuľka č. 16 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre september I

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,6388		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,15	Average number in the queue(Lq)	0,5422		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	1,8199		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	0,2968	17,8074	1 068,4420
Population size	14	Average time in the system(W)	0,9961	59,7654	3 585,9240
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2083		
		Effective arrival rate	1,827		

Dva kanály obsluhy umožnia oveľa účinnejšiu prácu celého systému. Pri zaťažení iba 63,88% je priemerný počet požiadaviek v rade iba 0,54, kde v priemere musia čakať iba 17 minút, súčasne prebieha obsluha v priemere 1,82 požiadavky (obidva ukazovatele času sú pod jednou hodinou), celkový vstupný prúd požiadaviek sa priblížil k 2 (1,827 za hodinu). Dva kanály obsluhy oveľa lepšie zvládajú prípadné ďalšie zvýšenie intenzity návratnosti, ich vyťaženosť dosiahne hodnotu 89,89% až pri $\lambda=0,26$:

Tabuľka č. 17 Prognóza dvojkanálového systému na ďalšie roky pre september II

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,8989		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,26	Average number in the queue(Lq)	2,3144		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	4,1122		
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	0,9003	54,0157	3 240,9440
Population size	14	Average time in the system(W)	1,5996	95,9738	5 758,4260
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0445		
		Effective arrival rate	2,5708		

Priemerný počet požiadaviek v rade a v systéme sa zvýšil (na 2,31 a 4,11), pričom priemerný čas čakania v rade a priemerný čas strávený požiadavkou v systéme sa predĺžil o zhruba 40 minút (0,9 a 1,6 hodiny), ale celkove môžeme povedať, že sa jednotlivé vlastnosti systému nezhoršili v značnej miere, pričom celkový vstupný prúd sa zlepšil na 2,57 požiadaviek za hodinu.

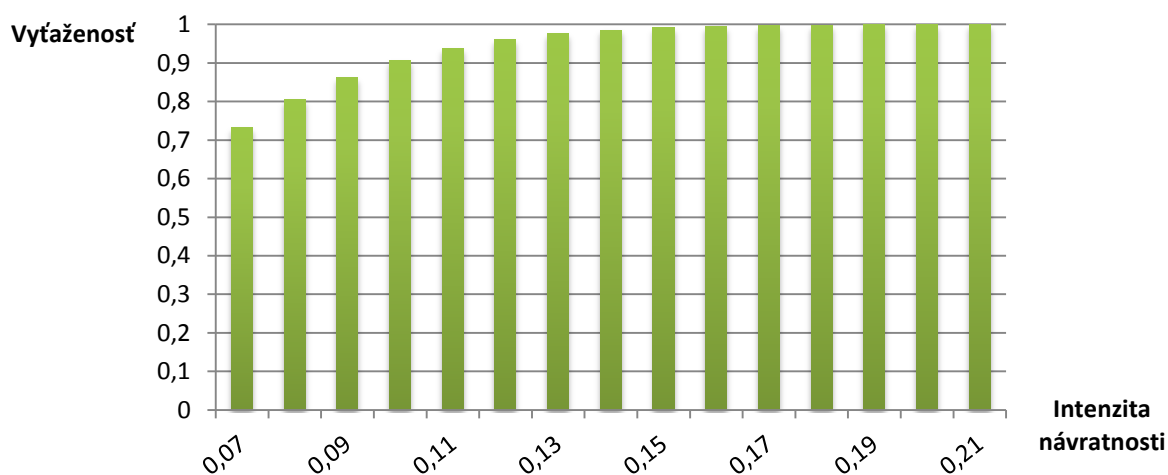
3.2 Zhrnutie výsledkov

V predchádzajúcej časti sme vytvorili väčšie množstvo tabuliek, ktoré predstavujú podklady pre zhodnotenie fungovania systému hromadnej obsluhy. Výsledky pre ľahšie porozumenie si teraz zhrnieme.

Pri vytváraní tabuliek sme vychádzali z priemerných údajov – pôvodné hodnoty sa vzťahovali na časové intervaly rôznej dĺžky, ktoré sme prepočítali na rovnaký základ. Tieto priemerné hodnoty predstavovali vstupné hodnoty pri začiatku analýzy v každom mesiaci, preto tabuľka vytvorená ako prvá v jednotlivých mesiacoch odzrkadľuje stav, ktorý „platí za celý deň“ pri použití jedného kanála obsluhy. Samozrejme stav sa cez deň mení, preto sme preskúmali správanie systému pre rôzne výšky intenzity návratnosti. Analýzu – ako v predchádzajúcej podkapitole – uskutočníme v časovom poradí zvlášť pre jedno- a viackanálový systém.

JANUÁR

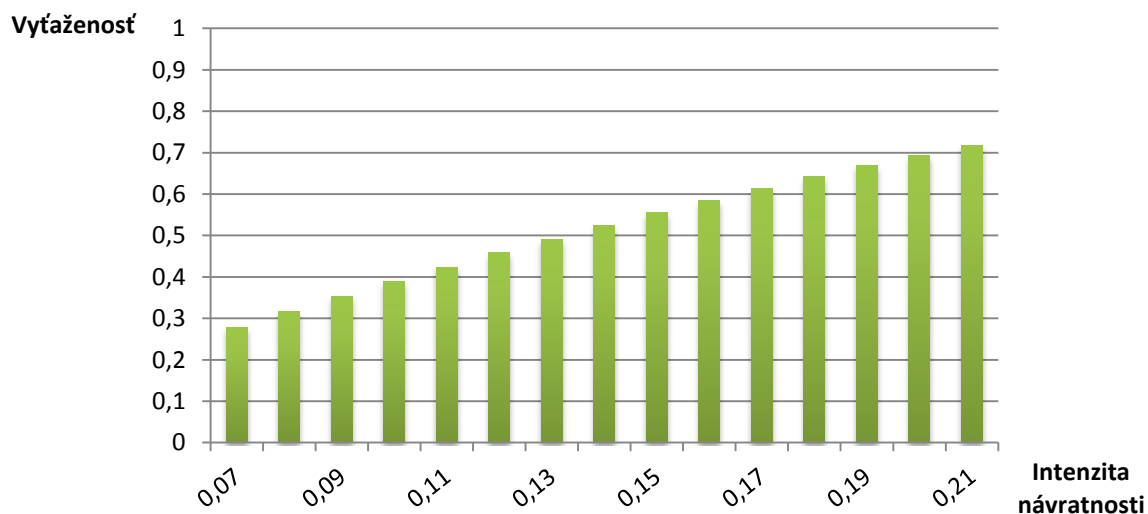
1) jednokanálový systém



Graf č. 1 Vyťaženosť kanála obsluhy I

Z grafu je jednoznačné, že vyťaženosť kanála obsluhy narastá s rastúcou intenzitou návratnosti požiadavky, pričom sa k hranici svojich možností priblíži už okolo intenzity 0,09. Zmiernenie rastu vyťaženia pri vyšších hodnotách znamená, že aj keď kanál plní svoju prácu dobre, jednoducho nestíha príchod požiadaviek a rad bude iba narastať.

2) Viackanálový systém

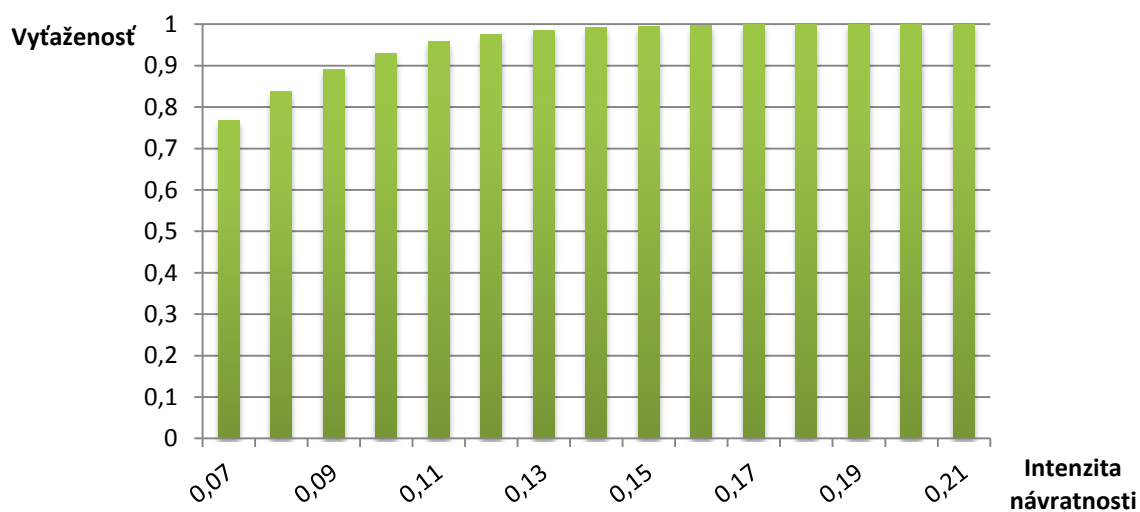


Graf č. 2 Vyťaženosť kanála obsluhy II

Po zavedení druhého kanála obsluhy sa dosiahla priaznivá situácia, dva kanály dokážu obslúžiť podstatne viac požiadaviek s nižšou zaťaženosťou. Dôležité je si uvedomiť, že nízke hodnoty vyťaženia prakticky nemajú význam, nakoľko druhý kanál obsluhy sa využíva, keď intenzita návratnosti je príliš vysoká, a že jeden kanál by obsluhu v tom prípade sám nezvládol, druhý kanál je preto nevyhnutne potrebný.

MAREC

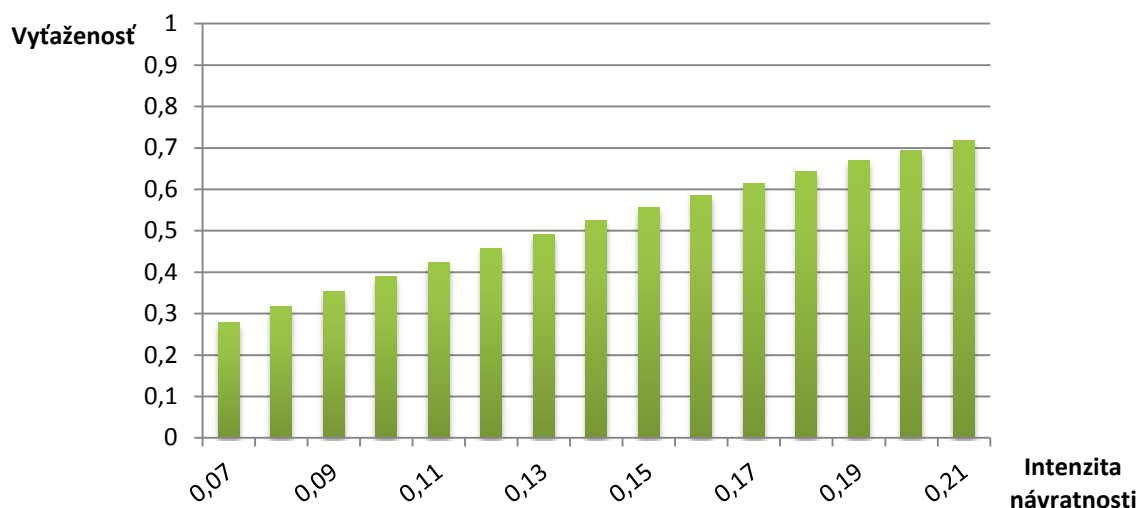
1) jednokanálový systém



Graf č. 3 Vyťaženosť kanála obsluhy III

Ako už bolo podkapitole 3.1 spomenuté, charakteristiky tohto systému sú veľmi podobné systému z januára, čiže väčší príchod požiadaviek do systému jeden kanál obsluhy nedokáže obslúžiť, iba s veľkým časovým oneskorením, pričom pracuje prakticky bez prestávky.

2) Viackanálový systém

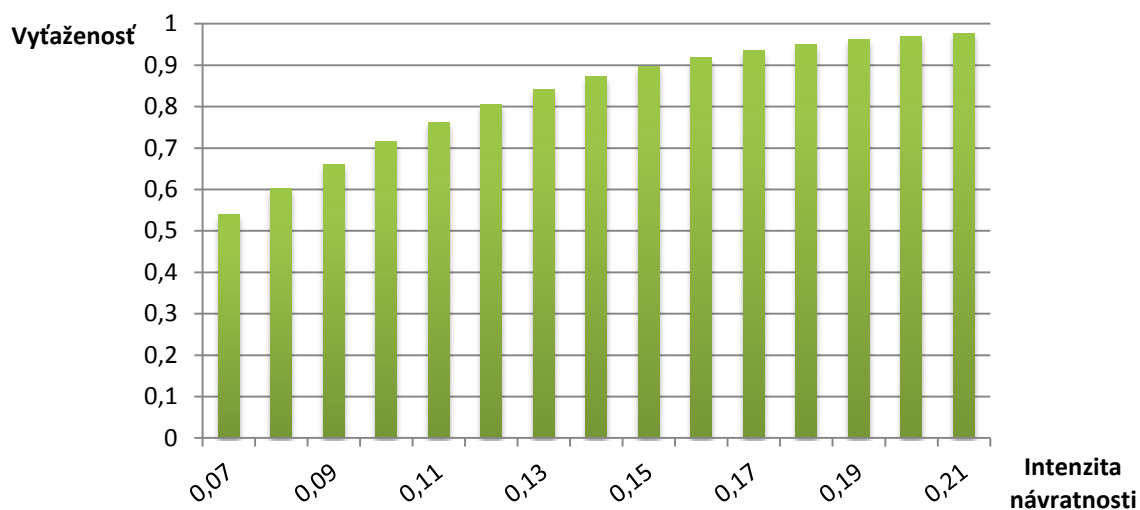


Graf č. 4 Vyťaženosť kanála obsluhy IV

Podobne, ako v predchádzajúcom prípade, po pridaní druhého kanála obsluhy sa situácia zlepšila, zvyšovanie zaťaženia je viditeľne rovnomernejšie, ako v prípade jedného kanála, ale aj v tomto prípade sa zaťaženosť približuje ku hranici možností kanálov pri vyššej intenzite návratnosti.

AUGUST

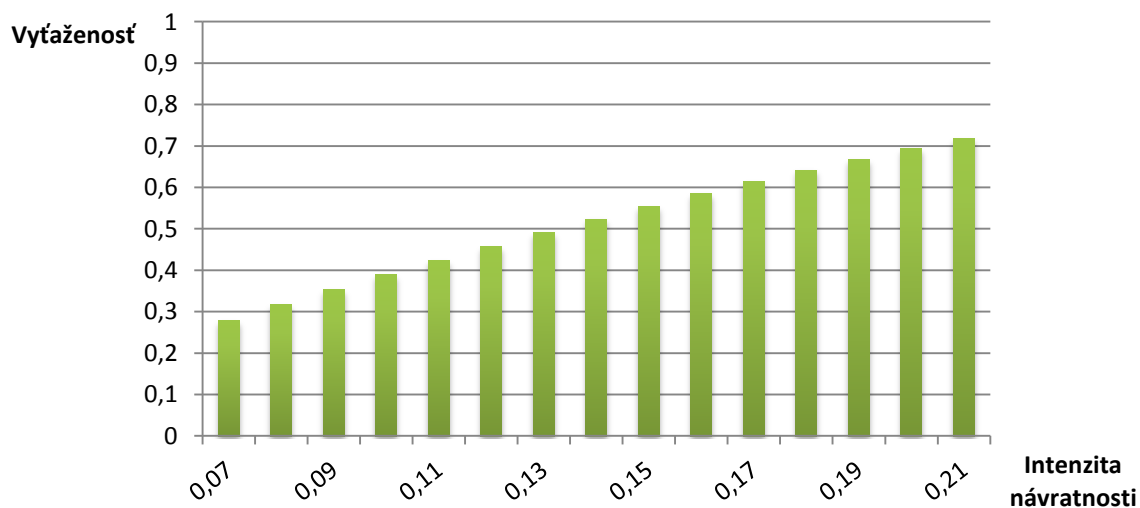
1) jednokanálový systém



Graf č. 5 Vyťaženosť kanála obsluhy V

Situácia v auguste (mesiac s najnižšou priemernou obložnosťou) s jedným kanálom obsluhy pri nižších hodnotách intenzity návratnosti je zvládnuteľná, avšak pri raste návratnosti rastie aj zaťaženosť, a po dosiahnutí istej úrovne (okolo 90%) rastie iba rad požiadaviek.

2) Viackanálový systém



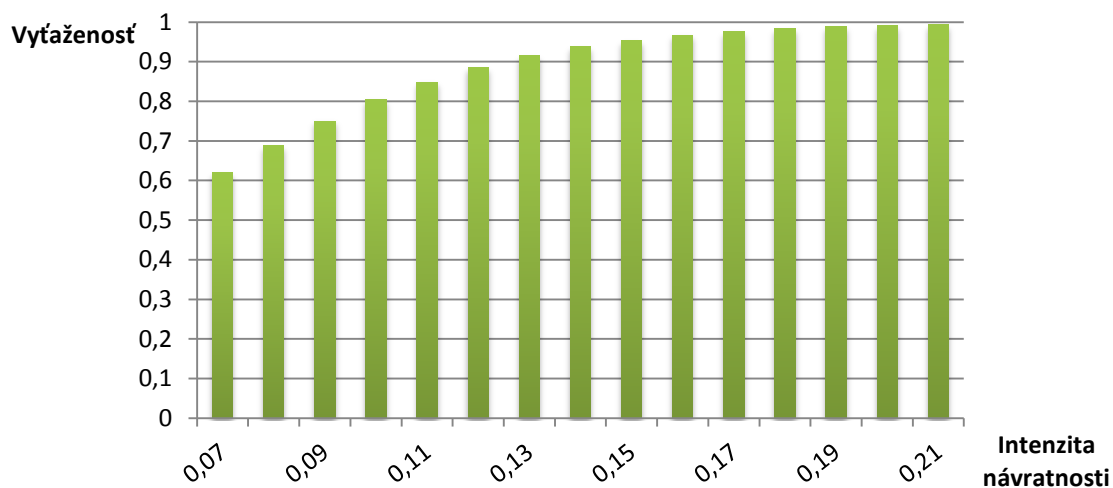
Graf č. 6 Vyťaženosť kanála obsluhy VI

Graf ukazuje relatívne nízku vyťaženosť kanálov obsluhy, čo sa ale dá pochopiť, ak zoberieme do úvahy počet potenciálnych požiadaviek (počet obsadených lôžok – 12).

Druhý kanál obsluhy je žiaduci najmä pri vyššej intenzite návratnosti požiadavky, keď jeden kanál určite nie je postačujúci.

SEPTEMBER

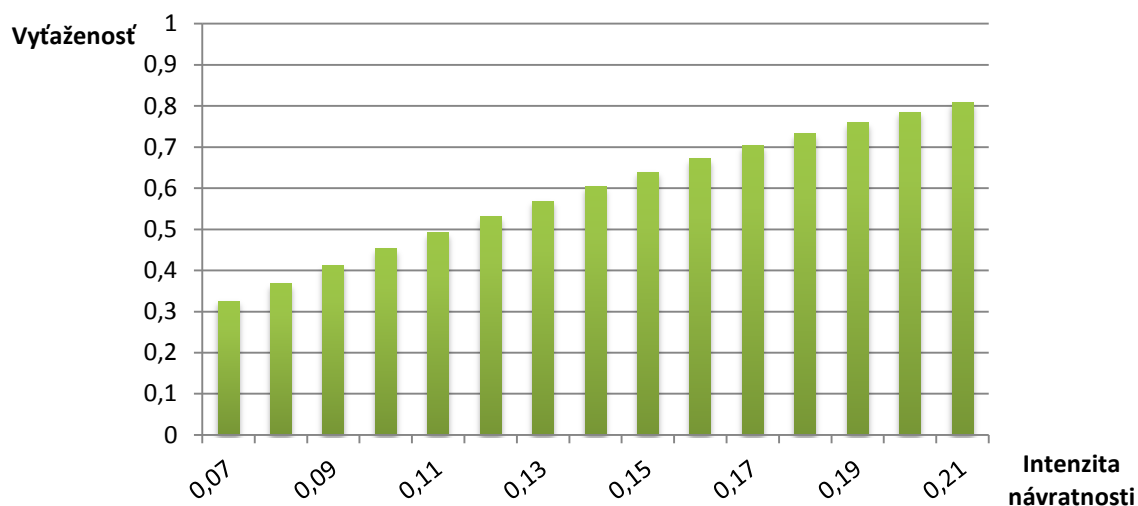
1) jednokanálový systém



Graf č. 7 Vyťaženosť kanála obsluhy VII

Jediný kanál by bol počas dňa dostatočne, až príliš vyťažovaný, prácu sám by určite nestíhal, preto sa zavedie druhý kanál.

2) Viackanálový systém



Graf č. 8 Vyťaženosť kanála obsluhy VIII

Vyťaženosť pri vyššej intenzite návratnosti požiadavky je dosť vysoká, čo potvrdzuje potrebnosť druhého kanála obsluhy.

Záver

Systémy hromadnej obsluhy sa podľa veľkosti zdroja požiadaviek delia na otvorené a uzavreté systémy. Ako miesto aplikácie poznatkov uvedených v prvej kapitole sme zvolili nemocnicu. Geriatrické oddelenie istej nemocnice s lôžkami predstavuje uzavretý systém hromadnej obsluhy, kde sa v rôznych dňoch striedavo využíva rôzny počet kanálov obsluhy (jeden a dva). Monitorovaním ich práce a zostavením príslušných modelov hromadnej obsluhy môžeme podrobne analyzovať ich činnosť. Výsledky nášho pozorovania a analýzy sú uvedené v tretej kapitole.

Skúmanie systémov je podmienený vhodnými teoretickými znalosťami. Uzavreté systémy hromadnej obsluhy tvoria špecifickú oblasť teórie hromadnej obsluhy, ktorá nie je súčasťou, resp. tvorí iba malú časť vyučovacieho plánu, preto poznatky potrebné pre napísanie tejto práce sa museli naštudovať zvlášť z rôznych zdrojov. Po osvojení si teórie sa najskôr vyhľadali modely, ktoré sú vhodné na charakterizovanie uzavretých systémov a zozbierali sa potrebné údaje. Pre správne pochopenie fungovania oddelenia ako uzavretého systému obsluhy sme sa s ním museli najskôr dôkladne oboznámiť, preto údaje, ktoré slúžili ako podklady pre výpočty, sa zaznamenávali počas osobných návštev na geriatrickom oddelení s pomocou vedúcej sestry oddelenia. Modely pre naše potreby spolu so vzorcami sú podrobne opísané v prvej kapitole. Pre urýchlenie výpočtov a uľahčenie analýzy sme vyhľadali vhodný softvér, ktorý tieto výpočty umožňuje. Naším výberom sa stal POM-QM for Windows, ktorý je voľne dostupný na internete. Vzorce používané softvérom sú totožné so vzorcami uvedenými v teoretickej časti práce, čo dokazuje aj fakt, že výsledky vypočítané ručne podľa uvedených vzorcov sa zhodujú s výpočtami softvéru.

Naším cieľom bolo zmapovať vyťaženosť personálu geriatrického oddelenia Fakultnej nemocnice v Nových Zámkoch a v prípade potreby vypracovať návrhy na zlepšenie stavu vzhľadom na využiteľnosť. Vychádzali sme zo súčasných údajov a z mesačných údajov zaznamenaných počas roku 2012.

Lekári prácu stíhajú, ich počet logicky nemôže byť menší (1 lekár a 1 primár), s nimi sme sa nezaoberali. Podobne sme neriešili prípad staničnej sestry a sestry v nočnej zmene, ktoré musia byť prítomné na oddelení vždy, bez ohľadu na ich vyťaženosť. Našu pozornosť sme teda venovali sestre v dennej a sestre v celodennej službe.

Nemocnica poskytuje zdravotnú starostlivosť na geriatrickom oddelení na vysokej úrovni – okrem iných aj – pomocou sestričiek. Sestričky však nedokážu vykonávať svoju

prácu vždy za všetkých okolností, nech sú akokoľvek chytré – po istom bode to už určite nestihnú, resp. by nestihli, aj keby boli vytážené na 100 %.

Podľa výstupných hodnôt môžeme povedať, že v čase, keď je na oddelení menší počet pacientov, sestričky (príp. jedna sestrička v závislosti od počtu pacientov a intenzity návratnosti požiadavky) prácu stíhajú, avšak v kritických mesiacoch, keď je väčšina lôžok obsadených, treba „dobré“ využiť aj druhú sestričku. Jedna sestrička by celodennú prácu určite nezvládla, keďže jej vytáženosť sa rapídne zvýši pri náraste intenzity návratnosti požiadaviek. Dve sestričky spravia väčšinu vecí v čase, keď sú obe na oddelení, keď sa predpokladá výskyt viac požiadaviek. Neskôr sa návratnosť požiadaviek zníži na takú úroveň, ktorá už umožňuje jednej sestričke, aby vedela prácu vykonávať sama.

Z vyššie uvedených vyplýva, že zníženie počtu kanálov obsluhy – sestričiek – je neprípustné, naopak, vhodné by bolo zvýšenie ich počtu, prípadne zamestnanie druhej sestričky na viac hodín denne, najmä v kritických mesiacoch, resp. zamestnať ďalšiu sestričku formou brigády. Geriatrické oddelenie poskytuje kvalitnú zdravotnú starostlivosť, ktorú dokáže udržať na súčasnej úrovni, príp. zlepšiť iba vtedy, ak sestričky nebudú vytážené nad mieru, ktorú ešte zvládnu. Ľahko môže nastať situácia, keď jedna sestrička prácu sama nezvládne, aj keby bola vytážená na 100 %, preto je práca druhej sestričky nevyhnutná.

Prognostická časť práce – charakteristiky systému za rôznych okolností – má veľký význam pre nemocnicu, nakoľko poskytuje náhľad na možné kritické stavy, ktoré môžu v budúcnosti nastať. Tieto údaje umožnia oddeleniu pripraviť sa na tieto situácie – ako je vyššie uvedené – využitím druhej sestričky na viac hodín, alebo zamestnaním ďalšej.

Táto práca má aj hlbší dopad, nevzťahuje sa iba na jedinú špecifickú situáciu, ale dá sa adaptovať pre rôzne okolnosti (rôzne vstupné údaje), preto v prípade potreby sa charakteristiky ďalších systémov dajú kedykoľvek vypočítať.

Náš cieľ sme splnili – vytvorili sme modely, pomocou ktorých sme opísali a zoptimalizovali systém, tiež sme určili predpovede. Nielen, že sme prognózovali možný vývoj vytáženosti sestričiek, ale sme aj navrhli eventuálne zmeny, tj. rozšírenie ich počtu v prípade potreby. Vykonaním menších zmien sa dajú modely využiť na popis ďalších podobných systémov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] UNČOVSKÝ, L. 1980. *Stochastické modely operačnej analýzy*, Bratislava: ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1980. 415 s.
- [2] ZÍTEK, F. 1969. *Ztracený čas*, Praha, Academia Nakladatelství Československé akademie věd, 1969, 180 s.
- [3] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza*, Bratislava: Iura edition. 2007. 253 s. ISBN 978-80-8078-176-7
- [4] BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 1999. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 1999. 287 s. ISBN 80-225-1180-3

Zoznam internetových zdrojov

- [5] POM-QM for Windows, [cit. 04.11.2012], dostupné na internete <<http://qm-for-windows.software.informer.com/>>
- [6] Stránka Fakultnej nemocnice v Nových Zámkoch [online] <<http://www.nspnz.sk/odelenie/ger/ger.htm>>
- [7] NOVÁK, L. a kol. 2005. *Krízové plánovanie* [online], Žilina: FŠI ŽU, 2005, 208 s.. ISBN 80-8070-391-4, [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <http://fsi.uniza.sk/kkm/files/publikacie/kp/kp_kap_7.pdf>
- [8] WILEY, J. and sons 2002. *Queuing models* [online], 87 s., [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <<http://faculty.ksu.edu.sa/Taha/IS561/Ch09%20-%20Queuing.ppt>>
- [9] RENDER, STAIR, HANNA 2009. *Waiting Lines and Queuing Theory Models* [online], 74 s., [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <<http://faculty.ksu.edu.sa/shouket/AdvancedQAM/Documents/Course-presentations/Waiting%20Lines%20and%20Queuing%20Theory%20Models%2014.ppt>>
- [10] BANKS a kol. 2002. *Discrete-event System Simulation* [online], 43 s., [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <<http://ece.ut.ac.ir/Classpages/S86/ECE462/slides/Chapter6.pdf>>
- [11] ANDERSON, D. a kol. 2012. *An introduction to management science*, Kanada, 2012, 907 s., ISBN 978-1-111-53224-6, [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <<http://www.docin.com/p-486244199.html>>
- [12] DVOŘÁK, J. *Systémy hromadné obsluhy* [online], 22 s., [cit. 19.02.2013], dostupné na internete <<http://www.uai.fme.vutbr.cz/~jdvorak/vyuka/tsoa/PredO11.ppt>>
- [13] BHAT, N. *An Introduction to queuing theory*, [online], Dallas, Texas, 2008, 228 s. [cit. 22.03.2013]. ISBN 978-08176-4725-4 dostupné na internete <books.google.com/books?isbn=0817647252>

Prílohy

Príloha č. 1

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7328		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,0700	Average number in the queue(Lq)	1,2971		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	2,0299		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	1,2378	74,2658	4455,9500
Population size	17,0000	Average time in the system(W)	1,9371	116,2239	6973,4320
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2672		
		Effective arrival rate	1,0479		

Príloha č. 2

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/1 with a Finite Population		Average server utilization	0,9995		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,2100	Average number in the queue(Lq)	9,1940		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	10,1936		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	6,4323	385,9366	23 156,2000
Population size	17,0000	Average time in the system(W)	7,1316	427,8947	25 673,6800
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0005		
		Effective arrival rate	1,4294		

Príloha č. 3

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9106		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,2100	Average number in the queue(Lq)	2,7776		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	4,5988		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	1,0666	63,9943	3 839,6570
Population size	17,0000	Average time in the system(W)	1,7659	105,9523	6 357,1390
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0398		
		Effective arrival rate	2,6043		

Príloha č. 4

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7269		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,065	Average number in the queue(Lq)	1,282		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,0089		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,2334	74,0017	4 440,1
Population size	18	Average time in the system(W)	1,9327	115,9597	957,583
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2731		
		Effective arrival rate	1,0394		

Príloha č. 5

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9915		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,1400	Average number in the queue(Lq)	6,8806		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	7,8721		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	4,8526	291,1574	7 469,4500
Population size	18,0000	Average time in the system(W)	5,5519	333,1154	9 986,9300
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0085		
		Effective arrival rate	1,4179		

Príloha č. 6

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7523		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,1400	Average number in the queue(Lq)	1,1263		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	2,6310		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	0,5235	31,4071	1 884,4240
Population size	18,0000	Average time in the system(W)	1,2228	73,3651	4 401,9060
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1317		
		Effective arrival rate	2,1517		

Príloha č. 7

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9347		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,2100	Average number in the queue(Lq)	3,4009		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	5,2703		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	1,2722	76,3334	4 580,0020
Population size	18,0000	Average time in the system(W)	1,9715	118,2914	7 097,4850
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0281		
		Effective arrival rate	2,6732		

Príloha č. 8

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7147		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,1	Average number in the queue(Lq)	1,0653		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	1,78		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,0423	62,5404	3 752,422
Population size	12	Average time in the system(W)	1,7416	104,4984	6 269,904
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2853		
		Effective arrival rate	1,022		

Príloha č. 9

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9766		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,2100	Average number in the queue(Lq)	4,3734		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	5,3499		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	3,1316	187,8971	1 273,8300
Population size	12,0000	Average time in the system(W)	3,8309	229,8552	3 791,3100
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0234		
		Effective arrival rate	1,3965		

Príloha č. 10

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7181		
Arvl rt PER CUSTOMER	0,2100	Average number in the queue(Lq)	0,7836		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	2,2198		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	0,3815	22,8909	1 373,4510
Population size	12,0000	Average time in the system(W)	1,0808	64,8489	3 890,9340
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1498		
		Effective arrival rate	2,0538		

Príloha č. 11

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,7505		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,09	Average number in the queue(Lq)	1,3245		
Service rate(mu)	1,43	Average number in the system(L)	2,075		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	1,2341	74,0454	4 442,721
Population size	14	Average time in the system(W)	1,9334	116,0034	6 960,204
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2495		
		Effective arrival rate	1,0732		

Príloha č. 12

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,8856		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,1200	Average number in the queue(Lq)	2,5616		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	3,4471		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	2,0228	121,3683	7282,0960
Population size	14,0000	Average time in the system(W)	2,7221	163,3263	9799,5790
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,1144		
		Effective arrival rate	1,2663		

Príloha č. 13

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,9547		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,1500	Average number in the queue(Lq)	3,9440		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	4,8987		
Number of servers	1,0000	Average time in the queue(Wq)	2,8890	173,3381	0 400,2900
Population size	14,0000	Average time in the system(W)	3,5883	215,2961	2 917,7700
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0453		
		Effective arrival rate	1,3652		

Príloha č. 14

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,6388		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,1500	Average number in the queue(Lq)	0,5422		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	1,8199		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	0,2968	17,8074	1 068,4420
Population size	14,0000	Average time in the system(W)	0,9961	59,7654	3 585,9240
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,2083		
		Effective arrival rate	1,8270		

Príloha č. 15

M/M/s with a Finite Population		Average server utilization	0,8989		
Arrival rate PER CUSTOMER	0,2600	Average number in the queue(Lq)	2,3144		
Service rate(mu)	1,4300	Average number in the system(L)	4,1122		
Number of servers	2,0000	Average time in the queue(Wq)	0,9003	54,0157	3 240,9440
Population size	14,0000	Average time in the system(W)	1,5996	95,9738	5 758,4260
		Probability (% of time) system is empty (P0)	0,0445		
		Effective arrival rate	2,5708		