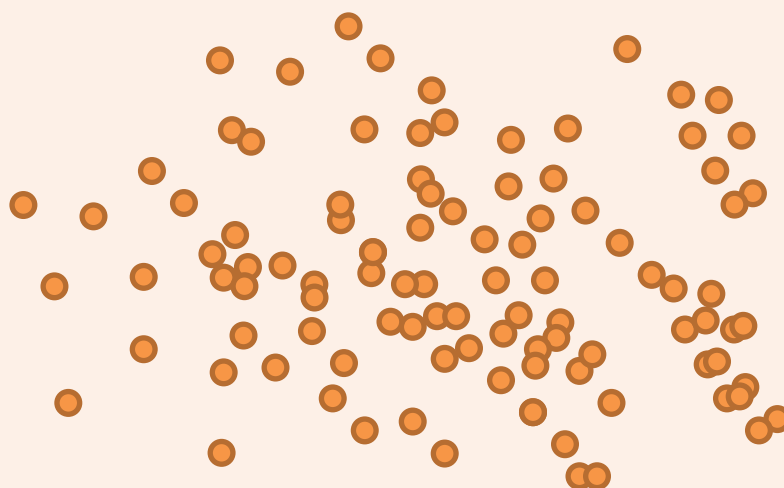
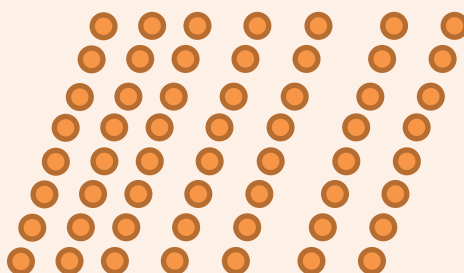


Slovenská štatistická a demografická spoločnosť
Slovak Statistical and Demographic Society



FORUM STATISTICUM SLOVACUM

recenzovaný vedecký časopis
scientific peer-reviewed journal



Ročník
Volume XIV

Číslo
Issue 2/2018

FORUM STATISTICUM SLOVACUM

recenzovaný vedecký časopis Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti
scientific peer-reviewed journal of Slovak Statistical and Demographic Society

Ročník/Volume: 14

Číslo/Issue: 2/018

Výkonná rada/Executive board

Predseda/Head

Iveta Stankovičová

Výkonný redaktor/Executive Redactor

Tomáš Želinský

Technická redaktorka/Technical Redactor

Janka Medová

Členovia/Members

Martin Boďa

Boris Burcin

Viera Labudová

Ivan Lichner

Ľubica Sipková

Redakčná rada/Editorial board

Jitka Bartošová

Branislav Bleha

Ľudmila Ivančíková

Stanislav Katina

Jozef Komorník

Jana Kubanová

Dagmar Kusendová

Jitka Langhamrová

Bohdan Linda

Tomáš Löster

Dagmar Markechová

Silvia Megyesiová

Oľga Nánásiová

Viliam Páleník

Marek Radvanský

Hana Řezanková

Anna Tirpáková

Vladimír Úradníček

Mária Vojtková



Vydavateľ: Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, Miletičova 3, 824 67 Bratislava. **Publisher:** Slovak Statistical and Demographic Society, Miletičova 3, 824 67 Bratislava, Slovakia. **Adresa redakcie/Editorial office:** Miletičova 3, 824 67 Bratislava, Slovakia. **IČO/Company ID:** 00178764. **DIČ/Tax ID:** 2021504276.

adm.ssds@ssds.sk

<http://www.ssds.sk/sk/>



Registráciu vykonalo Ministerstvo kultúry Slovenskej republiky. **Dátum registrácie:** 27. júl 2005. **Evidenčné číslo:** EV 3287/09. **Tematická skupina:** B1. **Periodicita:** minimálne dvakrát ročne. **ISSN** 1336-7420.

Registered by: The Ministry of Culture of the Slovak Republic. **Date of registration:** 27 July 2005. **No:** EV 3287/09. **Topic group:** B1. **Periodicity:** minimum twice a year. **ISSN** 1336-7420.

Pokroky v modelování ekonomických dat pomocí spojitých pravděpodobnostních rozdělení

Advances in Modeling Economic Data Using Continuous Probability Distributions

Diana Bílková

Vysoká škola ekonomická v Praze; Fakulta informatiky a statistiky; nám. W. Churchilla 1938/4; 130 67 Praha 3; Česká Republika

University of Economics, Prague; Faculty of Informatics and Statistics; Sq. W. Churchill 1938/4; 130 67 Prague 3; Czech Republic

E-mail: diana.bilkova@vse.cz

Abstrakt: Tento článek se zabývá pokročilými nástroji pro modelování ekonomických dat s využitím robustních metod bodového odhadu parametrů. Představeny jsou výhody využití metody L-momentů oproti běžné metodě využívající klasických centrálních momentů. Článek se dále zabývá rovněž výhodami použití metody TL-momentů a metody LQ-momentů oproti použití původní metody L-momentů. TL-momenty a LQ-momenty představují alternativní robustní verze L-momentů. Vydutnost TL-statistik a LQ-statistik však často předčí vydutnost klasických L-statistik.

Abstract: This paper deals with advanced tools for modeling economic data using robust methods of point estimation of parameters. The advantages of using the L-moment method versus the conventional method using classical central moments are presented. The paper also deals with the advantages of using the TL-moment method and LQ-moment method versus the use of the original L-moment method. TL-moments and LQ-moments represent an alternative robust version of L-moments. However, the efficiency of TL-statistics and LQ-statistics often exceeds the efficiency of standard L-statistics.

Klíčové slová: Vydutnost statistik, L-momenty pravděpodobnostních rozdělení, TL-momenty pravděpodobnostních rozdělení, LQ-momenty pravděpodobnostních rozdělení.

Key words: Efficiency of statistics, L-moments of probability distribution, TL-moments of probability distribution, LQ-moments of probability distribution.

1 Úvod

Pro charakterizování pravděpodobnostního rozdělení nebo pozorovaného datového souboru se ve statistice tradičně používá momentů nebo kumulantů tohoto rozdělení. Při konstrukci vhodného parametrického rozdělení pro jistý datový soubor je rovněž běžné využití momentové metody odhadu parametrů. Momentová metoda odhadu parametrů nepřináší vždy uspokojivé výsledky. Někdy je obtížné přesně stanovit, jaká informace o tvaru rozdělení je vyjádřena jeho momenty třetího a vyššího řádu. Číselné hodnoty výběrových momentů, zejména, jedná-li se o malý výběr, se mohou velmi lišit od hodnot teoretických momentů pravděpodobnostního rozdělení, ze kterého náhodný výběr pochází. Odhady parametrů pravděpodobnostního rozdělení pořízené momentovou metodou jsou často výrazně méně přesné než odhady získané s využitím jiných

postupů, jako je např. metoda maximální věrohodnosti, a to zejména v případě malých výběrů.

Alternativní přístup při konstrukci vhodného parametrického rozdělení pro uvažovaný datový soubor spočívá ve využití tzv. pořádkových statistik. Nechť X je náhodná veličina mající rozdělení spojitého typu s distribuční funkcí $F(x)$ a kvantilovou funkcí $x(F)$ a nechť $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výběr rozsahu n z tohoto rozdělení. Potom $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ jsou pořádkové statistiky náhodného výběru rozsahu n , který pochází z rozdělení náhodné veličiny X .

2 L-momenty

L-momenty tvoří základ obecné teorie, která zahrnuje sumarizaci a popis teoretických pravděpodobnostních rozdělení, sumarizaci a popis získaných výběrových datových souborů, odhad parametrů teoretických pravděpodobnostních rozdělení a testování hypotéz o hodnotách parametrů teoretických pravděpodobnostních rozdělení. Na základě lineárních kombinací pořádkových statistik, tj. L-statistik, lze odhadnout tzv. L-momenty, které jsou analogií konvenčních momentů. L-momenty jsou alternativním systémem popisujícím tvar rozdělení pravděpodobností. Teorie L-momentů zahrnuje takové zavedené postupy, jako je využití pořádkových statistik a Giniho střední difference a vede k některým slibným inovacím v oblasti měření šikmosti a špičatosti rozdělení a přináší relativně nové metody parametrického odhadu pro individuální rozdělení. L-momenty mohou být definovány pro jakoukoliv náhodnou veličinu, jejíž střední hodnota existuje. Hlavní výhoda L-momentů oproti konvenčním momentům spočívá v tom, že L-momenty lze odhadnout na základě lineárních funkcí dat a jsou více odolné vůči vlivu výběrové variability. L-momenty jsou více robustní oproti konvenčním momentům k existenci odlehlých pozorování v datech a umožňují lepší závěry získané na základě malých výběrů o základním pravděpodobnostním rozdělení. L-momenty někdy přinášejí dokonce vydatnější odhady parametrů parametrických rozdělení než odhady pořízené metodou maximální věrohodnosti, zejména v případě malých výběrů.

L-momenty mají určité teoretické výhody oproti konvenčním momentům spočívající ve schopnosti charakterizovat širší rozpětí rozdělení a při odhadování z výběru mají větší odolnost k přítomnosti odlehlých pozorování v datech. Zkušenosti ve srovnání s konvenčními momenty rovněž ukazují, že L-momenty jsou méně náchylné ke zkreslení odhadu a aproximace asymptotickým normálním rozdělením je v konečných výběrech přesnější.

2.1 L-momenty pravděpodobnostních rozdělení

L-moment r -tého řádu náhodné veličiny X je definován

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot E(X_{r-j:r}), \quad r=1, 2, \dots \quad (1)$$

Střední hodnota r -té pořádkové statistiky náhodného výběru rozsahu n má tvar

$$E(X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)]^{r-1} \cdot [1-F(x)]^{n-r} dF(x). \quad (2)$$

Jestliže dosadíme vztah (2) do vztahu (1), získáváme po úpravách

$$\lambda_r = \int_0^1 x(F) \cdot P_{r-1}^*[F(x)] dF(x), \quad r=1, 2, \dots, \quad (3)$$

kde

$$P_r^*[F(x)] = \sum_{j=0}^r p_{r,j}^* \cdot [F(x)]^j \quad \text{a} \quad p_{r,j}^* = (-1)^{r-j} \cdot \binom{r}{j} \cdot \binom{r+j}{j}, \quad (4)$$

přičemž $P_r^*[F(x)]$ představuje r -tý posunutý Legendův polynom. Dosazením (2) do vztahu (1) získáváme rovněž

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot \frac{r!}{(r-j-1)! \cdot j!} \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)]^{r-j-1} \cdot [1-F(x)]^j dF(x), \quad r=1, 2, \dots \quad (5)$$

Písmeno „L“ v názvu „L-momenty“ zdůrazňuje, že r -tý L-moment λ_r je funkcí střední hodnoty jisté lineární kombinace pořádkových statistik. Vlastní odhad r -tého L-momentu λ_r založený na získaném výběru dat je potom lineární kombinací uspořádaných datových hodnot, tj. L-statistik. První čtyři L-momenty pravděpodobnostního rozdělení jsou nyní definovány

$$\lambda_1 = E(X_{1:1}) = \int_0^1 x(F) dF(x), \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E(X_{2:2} - X_{1:2}) = \int_0^1 x(F) \cdot [2F(x) - 1] dF(x), \quad (7)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}) = \int_0^1 x(F) \cdot \{6[F(x)]^2 - 6F(x) + 1\} dF(x), \quad (8)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}) = \int_0^1 x(F) \cdot \{20[F(x)]^3 - 30[F(x)]^2 + 12[F(x)] - 1\} dF(x). \quad (9)$$

Pravděpodobnostní rozdělení může být specifikováno svými L-momenty dokonce i tehdy, jestliže některé z jeho konvenčních momentů neexistují, opak ale neplatí. Lze dokázat, že první L-moment λ_1 je charakteristikou polohy daného pravděpodobnostního rozdělení, druhý L-moment λ_2 je charakteristikou variability náhodné veličiny X . Často je vhodné standardizovat vyšší L-momenty λ_r , $r \geq 3$, aby byly nezávislé na měrných jednotkách náhodné veličiny X . Poměr L-momentů r -tého řádu náhodné veličiny X je definován

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, \quad r=3, 4, \dots \quad (10)$$

Možné je rovněž definovat takovou funkci L-momentů, která je analogií klasického variačního koeficientu, tj. tzv. L-variační koeficient

$$\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (11)$$

Poměr L-momentů τ_3 je charakteristikou šikmosti a poměr L-momentů τ_4 je charakteristikou špičatosti příslušného pravděpodobnostního rozdělení. Hlavní vlastnosti pravděpodobnostního rozdělení jsou tedy velmi dobře shrnuty následujícími čtyřmi charakteristikami: L-poloha λ_1 , L-variabilita λ_2 , L-šikmost τ_3 a L-špičatost τ_4 . L-momenty λ_1 a λ_2 , L-variační koeficient τ a poměry L-momentů τ_3 a τ_4 jsou nejužitečnější charakteristiky pro sumarizaci pravděpodobnostního rozdělení. Jejich nejdůležitějšími vlastnostmi jsou jejich existence (jestliže existuje střední hodnota rozdělení, potom existují všechny L-momenty) a jedinečnost (jestliže existuje střední hodnota rozdělení, potom L-momenty definují jediné rozdělení, tj. žádná dvě rozdělení nemají stejné L-momenty).

2.2 Výběrové L-momenty

L-momenty obvykle odhadujeme pomocí náhodného výběru pořízeného z neznámého rozdělení. Protože r -tý L-moment λ_r je funkcí středních hodnot pořádkových statistik náhodného výběru rozsahu r , je přirozené odhadnout jej s využitím tzv. U-statistiky, tj. odpovídající funkce výběrových pořádkových statistik (průměrováno přes všechny dílčí podsoubory rozsahu r , které mohou být vytvořeny ze získaného náhodného výběru rozsahu n). Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ je výběr a $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ je uspořádaný výběr. Potom r -tý výběrový L-moment může být zapsán jako

$$l_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \cdot x_{i_{r-j}:n}, \quad r=1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Odtud první čtyři výběrové L-momenty mají tvar

$$l_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i, \quad (13)$$

$$l_2 = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2}^{-1} \cdot \sum_{i>j} (x_{i:n} - x_{j:n}), \quad (14)$$

$$l_3 = \frac{1}{3} \cdot \binom{n}{3}^{-1} \cdot \sum_{i>j>k} (x_{i:n} - 2x_{j:n} + x_{k:n}), \quad (15)$$

$$l_4 = \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{4}^{-1} \cdot \sum_{i>j>k>l} (x_{i:n} - 3x_{j:n} + 3x_{k:n} - x_{l:n}). \quad (16)$$

U-statistiky jsou široce využívány především v oblasti neparametrické statistiky. Jejich kladnými vlastnostmi jsou nestrannost, asymptotická normalita a určitá mírná odolnost vzhledem k vlivu odlehlých pozorování.

Při výpočtu r -tého výběrového L-momentu není nezbytné iterovat přes všechny dílčí podsoubory rozsahu r , ale tuto statistiku lze vyjádřit přímo, jako lineární kombinaci pořádkových statistik náhodného výběru rozsahu n . Budeme-li uvažovat odhad $E(X_{r:r})$ pořízený s využitím U-statistik, může být tento odhad zapsán jako $r \cdot b_{r-1}$, kde

$$b_r = \frac{1}{n} \cdot \binom{n-1}{r}^{-1} \cdot \sum_{j=r+1}^n \binom{j-1}{r} \cdot x_{j:n}, \quad (17)$$

konkrétně

$$b_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n x_{j:n}, \quad (18)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} \cdot x_{j:n}, \quad (19)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=3}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2)}{(n-1) \cdot (n-2)} \cdot x_{j:n}, \quad (20)$$

tedy obecně

$$b_r = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=r+1}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2) \cdot \dots \cdot (j-r)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r)} \cdot x_{j:n}. \quad (21)$$

První čtyři výběrové L-momenty mohou být tedy zapsány jako

$$l_1 = b_0, \quad (22)$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0, \quad (23)$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0, \quad (24)$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0. \quad (25)$$

Obecně tedy můžeme psát

$$l_{r+1} = \sum_{k=0}^r p_{r,k}^* \cdot b_k, \quad r=0,1,\dots,n-1, \quad (26)$$

kde

$$p_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \cdot \binom{r}{k} \cdot \binom{r+k}{k} = \frac{(-1)^{r-k} \cdot (r+k)!}{(k!)^2 \cdot (r-k)!}. \quad (27)$$

Využití výběrových L-momentů je podobné, jako využití výběrových konvenčních momentů. Výběrové L-momenty sumarizují základní vlastnosti výběrového rozdělení, kterými jsou poloha (úroveň), variabilita, šikmost a

špičatost. Výběrové L-momenty takto odhadují odpovídající vlastnosti pravděpodobnostního rozdělení, ze kterého výběr pochází, a mohou být použity při odhadování parametrů příslušného teoretického pravděpodobnostního rozdělení. V rámci takovýchto aplikací L-momenty často preferujeme před konvenčními momenty, neboť jakožto lineární funkce dat, jsou výběrové L-momenty méně citlivé na výběrovou variabilitu než konvenční momenty, případně na velikost chyb v případě existence odlehlých pozorování. L-momenty proto vedou k přesnějším a robustnějším odhadům charakteristik či parametrů základního pravděpodobnostního rozdělení.

Výběrové L-momenty byly ve statistice použity již dříve, i když ne jako součást jednotné teorie. První výběrový L-moment l_1 je výběrová L-poloha (výběrový průměr), druhý výběrový L-moment l_2 je výběrová L-variabilita. Přirozeným odhadem poměru L-momentů (10) je výběrový poměr L-momentů

$$t_r = \frac{l_r}{l_2}, \quad r = 3, 4, \dots \quad (28)$$

Odtud t_3 je výběrová L-šikmost a t_4 je výběrová L-špičatost. Výběrové poměry L-momentů t_3 a t_4 můžeme použít jako charakteristiky šikmosti a špičatosti výběrového datového souboru.

S výběrovými L-momenty souvisí Giniho střední diference, která má tvar

$$G = \binom{n}{2}^{-1} \cdot \sum_{i>j} (x_{i:n} - x_{j:n}), \quad (29)$$

a Giniho koeficient, který např. v případě dvouparametrického lognormálního rozdělení závisí pouze na jediném parametru σ , ale v případě tříparametrického lognormálního rozdělení závisí na hodnotách všech tří parametrů. Problematikou L-momentů se podrobně zabývají (Hosking, 1990), (Hosking & Wallis, 1997) nebo (Kyselý & Pícek, 2007).

3 TL-momenty

Nyní bude představena alternativní robustní verze L-momentů, kterou nazýváme „upravené L-momenty“ a značíme TL-momenty (trimmed L-moments), u nichž jsou střední hodnoty pořádkových statistik náhodného výběru v definici L-momentů pravděpodobnostních rozdělení nahrazeny středními hodnotami pořádkových statistik většího náhodného výběru, přičemž rozsah výběru roste tak, aby odpovídal celkové velikosti úpravy.

TL-momenty mají jisté výhody oproti běžným L-momentům a centrálním momentům. TL-moment pravděpodobnostního rozdělení může existovat, přestože odpovídající L-moment nebo centrální moment tohoto pravděpodobnostního rozdělení neexistuje, jako je tomu v případě Cauchyho rozdělení. Výběrové TL-momenty jsou odolnější vzhledem k odlehlým

pozorováním v datech. Metoda TL-momentů není určena pro nahrazení stávajících robustních metod, nýbrž spíše jako jejich doplněk, a to zejména v situacích, kdy máme odlehle hodnoty v datech.

3.1 TL-momenty pravděpodobnostních rozdělení

V této alternativní robustní modifikaci L-momentů je střední hodnota $E(X_{r-j:r})$ nahrazena střední hodnotou $E(X_{r+t_1-j:r+t_1+t_2})$. Tudíž pro každé r zvyšujeme rozsah náhodného výběru z r na $r+t_1+t_2$ a pracujeme pouze se středními hodnotami r pořadkových statistik $X_{t_{1+1}:r+t_1+t_2}, X_{t_{1+2}:r+t_1+t_2}, \dots, X_{t_{1+r}:r+t_1+t_2}$ úpravou t_1 a t_2 (pořadí nejmenší a největší hodnoty z koncepčního výběru). Tuto modifikaci nazýváme r -tý upravený L-moment (TL-moment) a značíme jej $\lambda_r^{(t_1, t_2)}$. Tudíž TL-moment r -tého řádu náhodné veličiny X je definován

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot E(X_{r+t_1-j:r+t_1+t_2}), \quad r=1, 2, \dots \quad (30)$$

Ze vztahů (30) a (1) je zřejmé, že TL-momenty se zjednoduší na L-momenty, jestliže $t_1 = t_2 = 0$. Přestože můžeme uvažovat rovněž aplikace, kdy se hodnoty úpravy nerovnají, tj. $t_1 \neq t_2$, zaměříme se zde pouze na symetrický případ $t_1 = t_2 = t$, potom (30) můžeme přepsat

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot E(X_{r+t-j:r+2t}), \quad r=1, 2, \dots \quad (31)$$

Tudíž například $\lambda_1^{(t)} = E(X_{1+t:1+2t})$ je střední hodnota mediánu z koncepčního náhodného výběru rozsahu $1+2t$. Je zde třeba ještě poznamenat, že $\lambda_1^{(t)}$ bude rovné nule pro rozdělení, která jsou symetrická okolo nuly.

Pro $t=1$ mají první čtyři TL-momenty tvar

$$\lambda_1^{(1)} = E(X_{2:3}), \quad (32)$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{2} E(X_{3:4} - X_{2:4}), \quad (33)$$

$$\lambda_3^{(1)} = \frac{1}{3} E(X_{4:5} - 2X_{3:5} + X_{2:5}), \quad (34)$$

$$\lambda_4^{(1)} = \frac{1}{4} E(X_{5:6} - 3X_{4:6} + 3X_{3:6} - X_{2:6}). \quad (35)$$

Poznamenejme, že na $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}$ a $\lambda_4^{(1)}$ jsou založeny míry polohy, variability, šikmosti a špičatosti pravděpodobnostního rozdělení analogické běžným L-momentům (6)–(9).

S využitím (2) můžeme opětovně vyjádřit pravou stranu výrazu (31)

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot \frac{(r+2t)!}{(r+t-j-1)! \cdot (t+j)!} \cdot \int_0^1 x(F(x)) \cdot [F(x)]^{r+t-j-1} \cdot [1-F(x)]^{t+j} dF(x), \quad r=1, 2, \dots \quad (36)$$

Je zde třeba upozornit, že $\lambda_r^{(0)} = \lambda_r$ představuje normální r -tý L-moment, kterému nepřísluší žádná úprava.

Výrazy (32)–(35) pro první čtyři TL-momenty, kde $t = 1$, lze zapsat alternativním způsobem

$$\lambda_1^{(1)} = 6 \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)] \cdot [1 - F(x)] dF(x), \quad (37)$$

$$\lambda_2^{(1)} = 6 \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)] \cdot [1 - F(x)] \cdot [2F(x) - 1] dF(x), \quad (38)$$

$$\lambda_3^{(1)} = \frac{20}{3} \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)] \cdot [1 - F(x)] \cdot \{5[F(x)]^2 - 5F(x) + 1\} dF(x), \quad (39)$$

$$\lambda_4^{(1)} = \frac{15}{2} \cdot \int_0^1 x(F) \cdot [F(x)] \cdot [1 - F(x)] \cdot \{14[F(x)]^3 - 21[F(x)]^2 + 9[F(x)] - 1\} dF(x). \quad (40)$$

Rozdělení může být určeno svými TL-momenty, i když některé jeho L-momenty a konvenční momenty neexistují; například $\lambda_1^{(1)}$ (střední hodnota mediánu koncepčního náhodného výběru rozsahu tři) pro Cauchyho rozdělení existuje, přestože první L-moment λ_1 neexistuje.

TL-šikmost $\tau_3^{(t)}$ a TL-špičatost $\tau_4^{(t)}$ definujeme analogicky jako L-šikmost τ_3 a L-špičatost τ_4

$$\tau_3^{(t)} = \frac{\lambda_3^{(t)}}{\lambda_2^{(t)}}, \quad (41)$$

$$\tau_4^{(t)} = \frac{\lambda_4^{(t)}}{\lambda_2^{(t)}}. \quad (42)$$

3.2 Výběrové TL-momenty

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ je výběr a $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ je uspořádaný výběr. Výraz

$$\hat{E}(X_{j+1:j+l+1}) = \frac{1}{\binom{n}{j+l+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{j} \cdot \binom{n-i}{l} \cdot x_{i:n} \quad (43)$$

je považován za nezkreslený odhad střední hodnoty $(j+1)$ -té pořádkové statistiky $X_{j+1:j+l+1}$ v koncepčním náhodném výběru rozsahu $(j+l+1)$. Nyní budeme předpokládat, že v definici r -tého TL-momentu $\lambda_r^{(t)}$ v (31) nahradíme výraz $E(X_{r+t-j:r+2t})$ jeho nezkresleným odhadem

$$\hat{E}(X_{r+t-j:r+2t}) = \frac{1}{\binom{n}{r+2t}} \cdot \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{r+t-j-1} \cdot \binom{n-i}{t+j} \cdot x_{i:n}, \quad (44)$$

který získáme přiřazením $j \rightarrow r+t-j-1$ a $l \rightarrow t+j$ v (43). Nyní získáváme r -tý výběrový TL-moment

$$l_r^{(t)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot \hat{E}(X_{r+t-j:r+2t}), \quad r = 1, 2, \dots, n-2t, \quad (45)$$

t.j.

$$l_r^{(t)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot \frac{1}{\binom{n}{r+2t}} \cdot \sum_{i=1}^n \binom{i-1}{r+t-j-1} \cdot \binom{n-i}{t+j} \cdot x_{i:n}, \quad r = 1, 2, \dots, n-2t, \quad (46)$$

což je nezkreslený odhad r -tého TL-momentu $\lambda_r^{(t)}$. Poznamenejme, že pro každé $j = 0, 1, \dots, r-1$ jsou hodnoty $x_{i:n}$ v (46) vzhledem ke kombinačním číslům nenulové pouze pro $r+t-j \leq i \leq n-t-j$. Jednoduchá úprava vztahu (46) poskytuje alternativní lineární formu

$$l_r^{(t)} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=r+t}^{n-t} \left[\frac{\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \cdot \binom{r-1}{j} \cdot \binom{i-1}{r+t-j-1} \cdot \binom{n-i}{t+j}}{\binom{n}{r+2t}} \right] \cdot x_{i:n}. \quad (47)$$

Například pro $r = 1$ získáváme pro první výběrový TL-moment

$$l_1^{(t)} = \sum_{i=t+1}^{n-t} w_{i:n}^{(t)} \cdot x_{i:n}, \quad (48)$$

kde váhy jsou dány vztahem

$$w_{i:n}^{(t)} = \frac{\binom{i-1}{t} \cdot \binom{n-i}{t}}{\binom{n}{2t+1}}. \quad (49)$$

Výše uvedené výsledky lze použít pro odhad TL-šikmosti $\tau_3^{(t)}$ a TL-špičatosti $\tau_4^{(t)}$ jednoduchými podíly

$$t_3^{(t)} = \frac{l_3^{(t)}}{l_2^{(t)}}, \quad (50)$$

$$t_4^{(t)} = \frac{l_4^{(t)}}{l_2^{(t)}}. \quad (51)$$

Můžeme vybrat $t = n\alpha$ představující velikost úpravy od každého konce výběru, kde α je určitý podíl, kde $0 \leq \alpha < 0,5$. Problematikou TL-momentů se podrobně zabývají například (Elamir & Seheult, 2003) nebo (Shahzad & Asghar, 2013).

4 LQ-momenty

L-momenty, určité lineární funkce středních hodnot pořádkových statistik představil (Sillitto, 1951) a komplexně revidoval (Hosking, 1990). L-momenty našly široké uplatnění v takových oblastech aplikovaného výzkumu, jako je stavebnictví, meteorologie a hydrologie. Zde je prezentována třída jejich analogií označovaných LQ-momenty získaných nahrazením středních hodnot funkcí, které indukují rychlé (quick) odhady, jako je medián, trimean

a Gastwirth. LQ-momenty momenty existují vždy a jsou jednodušší k vyhodnocení a odhadu. Míry šikmosti a špičatosti založené na LQ-momentech mohou být použity jako vhodnější a efektivnější alternativy k tradičním beta koeficientům. V rámci LQ-momentů jsou prezentována jednoduchá explicitní schémata pro jejich odhad s využitím snadno dostupných výběrových kvantilů. Jednoduchost jejich analýz je demonstrována z hlediska asymptotických rozdělení odhadů LQ-momentů, LQ-šikmosti a LQ-špičatosti. Diskutována je aplikace na problematiku extrémních hodnot v analýze povodňových dat v hydrologii a je načrtnuto několik potenciálních aplikací. Problematikou LQ-momentů se zabývají například (Mudholkar & Hutson, 1998). (Shabri & Jemain, 2006) aplikují LQ-momenty na lognormální rozdělení, (Shabri & Jemain, 2007) se dále zabývají statistickou analýzou extrémních událostí nebo (Shabri & Jemain, 2010) řeší problematiku LQ-momentů v souvislosti s odhadováním parametrů kappa rozdělení.

4.1 LQ-momenty pravděpodobnostních rozdělení

L-moment r -tého řádu náhodné veličiny X je definován vztahem (1). Analogicky definujeme r -tý LQ-moment ξ_r

$$\xi_r = r^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \tau_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \quad r = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

kde $0 \leq \alpha \leq 1/2$, $0 \leq p \leq 1/2$ a

$$\tau_{p,\alpha}(X_{r-k:r}) = pQ_{X_{r-k:r}}(\alpha) + (1-2p)Q_{X_{r-k:r}}(1/2) + pQ_{X_{r-k:r}}(1-\alpha). \quad (53)$$

Z rovnic (1) a (52) je zřejmé, že střední hodnota $E(\cdot)$ na místě $\tau_{p,\alpha}(\cdot)$ v rovnici (52) definuje L-momenty. Další možné zevšeobecnění L-momentů zahrnující nahrazení střední hodnoty v rovnici (1) je možné jeho TL-momentem.

Lineární kombinace $\tau_{p,\alpha}$ definovaná rovnicí (53) je rychlá (quick) míra polohy výběrového rozdělení pořádkové statistiky $X_{r-k:r}$. Adepty pro $\tau_{p,\alpha}$ zahrnují funkcionály generující běžné rychlé estimátory, tj.

$$\text{Medián:} \quad Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{2}\right), \quad (54)$$

$$\text{Trimean:} \quad Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{4}\right)/4 + Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{2}\right)/2 + Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{3}{4}\right)/4, \quad (55)$$

$$\text{Gastwirth:} \quad 0,3Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{3}\right) + 0,4Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{2}\right) + 0,3Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{2}{3}\right). \quad (56)$$

Při výběru z normálního rozdělení, estimátor LQ-momentů založený na Gastwirth je nejvydatnější mezi možnostmi danými rovnicemi (54)–(56). Ve většině praktických aplikací zahrnujících LQ-momenty, např. klasifikace hustot a parametrický odhad, se obvykle používají pouze první čtyři LQ-momenty náhodné veličiny X

$$\xi_1 = \tau_{p,\alpha}(X), \quad (57)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}[\tau_{p,\alpha}(X_{2:2}) - \tau_{p,\alpha}(X_{1:2})], \quad (58)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{3}[\tau_{p,\alpha}(X_{3:3}) - 2\tau_{p,\alpha}(X_{2:3}) + \tau_{p,\alpha}(X_{1:3})], \quad (59)$$

$$\xi_4 = \frac{1}{4}[\tau_{p,\alpha}(X_{4:4}) - 3\tau_{p,\alpha}(X_{3:4}) + 3\tau_{p,\alpha}(X_{2:4}) - \tau_{p,\alpha}(X_{1:4})]. \quad (60)$$

Je zřejmé, že míry polohy $\tau_{p,\alpha}(\cdot)$ existují pro jakoukoliv náhodnou veličinu X . Tudíž, r -tý LQ-moment $\{\xi_r: r = 1, 2, \dots\}$ vždy existuje a je unikátní, jestliže distribuční funkce $F_X(\cdot)$ je spojitá. Kromě toho, vyhodnocení LQ-momentů jakéhokoliv spojitého rozdělení se zjednodušuje s využitím následujícího tvrzení.

Jestliže $Q_X(\cdot) = F_X^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkce náhodné veličiny X , potom rychlá míra polohy definovaná rovnicí (53) je ekvivalentní rovnici

$$\tau_{p,\alpha}(X_{r-k:r}) = pQ_X[B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)] + (1-2p)Q_X[B_{r-k:r}^{-1}(1/2)] + pQ_X[B_{r-k:r}^{-1}(1-\alpha)], \quad (61)$$

kde $B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)$ znamená odpovídající α -tý kvantil beta rozdělení náhodné veličiny s parametry $r-k$ a $k+1$.

Koeficienty šikmosti a špičatosti hrály důležitou roli v klasifikaci statistických rozdělení, při konstrukci vhodných modelů rozdělení a při odhadování parametrů. Vzhledem k jejich užitečnosti a kvůli některým nedostatkům těchto koeficientů, například jejich občasné neexistenci, byly definovány alternativní míry šikmosti a špičatosti. Zahrnují různé klasické míry i relativně nové míry jako

$$\gamma_U(F) = [F^{-1}(1-u) + F^{-1}(u) - 2m_F]/[F^{-1}(1-u) + F^{-1}(u)]. \quad (62)$$

Míry špičatosti založené na kvantilech pro symetrická rozdělení zahrnují

$$[Q(0,75+u) + Q(0,75-u) - 2Q(0,75)]/[Q(0,75+u) - Q(0,75-u)], \quad 0 \leq u < 1/4 \quad (63)$$

a

$$[Q(0,5+u) - Q(0,5-u)]/[Q(0,75) - Q(0,25)], \quad 0 \leq u < 1/2. \quad (64)$$

(Hosking, 1990) definuje poměry τ_3 a τ_4 zvané L-šikmost a L-špičatost jako

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad \text{a} \quad \tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}, \quad (65)$$

nabízí je jako novou alternativu ke koeficientům šikmosti a špičatosti a popisuje jejich využití v klasifikaci rozdělení. (Hosking, 1990) ukázal, že τ_3 splňuje konvexní uspořádání a τ_4 zachovává van Zwetovo symetrické uspořádání. Rovněž ukázal, že pro nezdegenerovaná rozdělení s konečnými průměry, platí $-1 < \tau_3 < 1$ a $(5\tau_3^2 - 1)/4 \geq \tau_4 < 1$.

Míry šikmosti a špičatosti η_3 a η_4 založené na poměrech LQ-momentů se nazývají LQ-šikmost a LQ-špičatost a jsou definovány

$$\eta_3 = \frac{\xi_3}{\xi_2} \quad \text{a} \quad \eta_4 = \frac{\xi_4}{\xi_2}. \quad (66)$$

Je třeba zmínit, že LQ-šikmost a LQ-špičatost jsou invariantní z hlediska polohy a měřítka a existují pro všechna rozdělení. Nicméně, analogie dalších vlastností τ_3 a τ_4 zmiňovaných výše zůstávají neprozkoumané pro η_3 a η_4 . Chování LQ-šikmosti η_3 a LQ-špičatosti η_4 je nyní diskutováno jejich srovnáním s jejich etablovanými protějšky.

Jiná poměrová míra užitečná pro srovnání rozdělení s obvyklým původem a měřítkem je LQ-analogie variačního koeficientu

$$\eta_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad (67)$$

kde ξ_1 a ξ_2 představují rovnice (57) a (58).

4.2 Výběrové LQ-momenty

LQ-momenty lze odhadovat přímo odhadováním kvantilů pořádkových statistik v kombinaci s rovnicí (61) figurující v jejich definici. Nejjednodušší kvantilový estimátor vhodný k tomuto účelu je kvantilový estimátor založený na lineární interpolaci v obvyklých statistických softwarových balíčcích. Nicméně, můžeme použít jakýkoliv alternativní estimátor kvantilů.

Nechť $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ představuje výběrové pořádkové statistiky, potom kvantilový estimátor $Q(u)$ je dán vztahem

$$\hat{Q}_X(u) = (1 - \varepsilon) X_{[n'u]:n} + \varepsilon X_{[n'u] + 1:n}, \quad (68)$$

kde $\varepsilon = n'u - [n'u]$ a $n' = n + 1$.

Pro náhodné výběry rozsahu n je r -tý výběrový LQ-moment dán vztahem

$$\hat{\xi}_r = r^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \cdot \binom{r-1}{k} \cdot \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \quad (69)$$

kde $\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r})$ je rychlý (quick) estimátor polohy pro rozdělení pořádkové statistiky $X_{r-k:r}$ v náhodném výběru rozsahu r .

Konkrétně, první čtyři výběrové LQ momenty z rovnice (69) jsou dány

$$\hat{\xi}_1 = \hat{\tau}_{p,\alpha}(X), \quad (70)$$

$$\hat{\xi}_2 = \frac{1}{2} [\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{2:2}) - \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{1:2})], \quad (71)$$

$$\hat{\xi}_3 = \frac{1}{3} [\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{3:3}) - 2\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{2:3}) + \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{1:3})], \quad (72)$$

$$\hat{\xi}_4 = \frac{1}{4} [\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{4:4}) - 3\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{3:4}) + 3\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{2:4}) - \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{1:4})], \quad (73)$$

kde rychlý estimátor $\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r})$ polohy pořádkové statistiky $X_{r-k:r}$ je dán vztahem

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}) &= p\hat{Q}_{X_{r-k:r}}(\alpha) + (1-2p)\hat{Q}_{X_{r-k:r}}(1/2) + p\hat{Q}_{X_{r-k:r}}(1-\alpha), \\ &= p\hat{Q}_X[B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)] + (1-2p)\hat{Q}_X[B_{r-k:r}^{-1}(1/2)] + p\hat{Q}_X[B_{r-k:r}^{-1}(1-\alpha)],\end{aligned}\quad (74)$$

kde $0 \leq \alpha \leq 1/2$, $0 \leq p \leq 1/2$, $B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)$ je α -tý kvantil náhodné veličiny s beta rozdělením s parametry $r-k$ a $k+1$ a $\hat{Q}_X(\cdot)$ znamená estimátor s využitím lineární interpolace daný rovnicí (68). Výpočet výběrového LQ-momentu $\hat{\xi}_r$ se zjednoduší využitím kvantilu $B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)$, který snadno získáme z tabulek nebo statistických programů.

Nyní budeme prezentovat explicitní schémata pro výpočet LQ-momentů, kdy pro $\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r})$ dané rovnicí (74) jsou použity tři nejznámější rychlé estimátory, konkrétně medián ($p = 0$, $\alpha = \cdot$), trimean ($p = 1/4$, $\alpha = 1/4$) a Gastwirth ($p = 0,3$, $\alpha = 1/3$). Odhad prvních čtyř výběrových LQ-momentů z rovnice (69) se zjednoduší využitím pyramidových schémat.

Výběrová LQ-šikmost a výběrová LQ-špičatost jsou dány

$$\hat{\eta}_3 = \frac{\hat{\xi}_3}{\hat{\xi}_2} \quad \text{a} \quad \hat{\eta}_4 = \frac{\hat{\xi}_4}{\hat{\xi}_2}, \quad (75)$$

které lze použít k identifikaci η_3 a η_4 a pro odhad parametrů.

4.3 Teorie velkých výběrů

Výběrové LQ-momenty závisejí na výběru použitého rychlého estimátoru a kvantilovém estimátoru použitého pro odhadování. Nicméně, jejich asymptotická normalita vyplývá z teorie velkého výběru lineárních funkcí pořádkových statistik. Za účelem vyvinout výrazy pro velký výběr pro průměr a rozptyl výběrových LQ-momentů omezíme pozornost na třídu Q kvantilových funkcí Q splňujících následující podmínky:

- 1 Inverzní funkce $Q_X(u) = F_X^{-1}(u)$ je výhradně definována pro $0 < u < 1$.
- 2 $Q(\cdot)$ je dvakrát diferencovatelné na intervalu $(0, 1)$ se spojitou druhou derivací $Q''(\cdot)$ na intervalu $(0, 1)$.
- 3 $Q'(u) > 1$ pro $0 < u < 1$.

Nechť $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k < 1$ a předpokládáme, že jsou splněny podmínky (1)–(3) uvedené výše. Potom $[\hat{Q}(u_1), \hat{Q}(u_2), \dots, \hat{Q}(u_k)]$ je asymptoticky normální s vektorem středních hodnot $[Q(u_1), Q(u_2), \dots, Q(u_k)]$ a kovariancemi

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}[\hat{Q}(U_i), \hat{Q}(U_j)] = u_i(1-u_j)Q'(u_i)Q'(u_j)/n, \quad i \leq j, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (76)$$

Za účelem vytvořit asymptotické výrazy pro kovariance LQ-momentů budeme nejprve derivovat

$$\text{Cov}[\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{s-l:s})], \quad (77)$$

což je funkce závislá na šesti specifických percentilech $u_1, u_2, \dots, u_6$ použitých při výpočtu rovnice (76), přepsaných na soubor šesti percentilů

$$B_{r-k:r}^{-1}(\alpha), B_{s-l:s}^{-1}(\alpha), B_{r-k:r}^{-1}(1/2), B_{s-l:s}^{-1}(1/2), B_{r-k:r}^{-1}(1-\alpha), B_{s-l:s}^{-1}(1-\alpha), \quad (78)$$

že $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_6 < 1$, kde $B_{r-k:r}^{-1}(\alpha)$ znamená α -tý kvantil náhodné veličiny s beta rozdělením s parametry $r-k$ a $k+1$. Potom můžeme získat $Cov[\hat{Q}(U_i), \hat{Q}(U_j)]$.

Kovariance mezi odhadnutými rychlými estimátory pořádkových statistik je

$$\begin{aligned} & Cov[\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{s-l:s})] = \\ & = p\{pCov[\hat{Q}(u_1), \hat{Q}(u_2)] + (1-2p)Cov[\hat{Q}(u_2), \hat{Q}(u_3)] + pCov[\hat{Q}(u_2), \hat{Q}(u_5)] + \\ & + pCov[\hat{Q}(u_1), \hat{Q}(u_6)] + (1-2p)Cov[\hat{Q}(u_3), \hat{Q}(u_6)] + pCov[\hat{Q}(u_5), \hat{Q}(u_6)]\} + \\ & + (1-2p)\{pCov[\hat{Q}(u_1), \hat{Q}(u_4)] + (1-2p)Cov[\hat{Q}(u_3), \hat{Q}(u_4)] + \\ & + pCov[\hat{Q}(u_4), \hat{Q}(u_5)]\}. \end{aligned} \quad (79)$$

Výběrový r -tý LQ-moment $\hat{\xi}_r$, $r=1, 2, \dots$, má asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou ξ_r a pro $r \leq s$ jsou kovariance LQ-momentů dány rovnicí

$$Cov(\hat{\xi}_r, \hat{\xi}_s) = \frac{1}{rs} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^{k+l} \binom{r-1}{k} \binom{s-1}{l} \cdot Cov[\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{s-l:s})], \quad (80)$$

kde $Cov[\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{r-k:r}), \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{s-l:s})]$ je dáno vztahem (79) a $u_1, u_2, \dots, u_6$ jsou specifikovány výše. Pro $r=s$ získáváme rozptyl r -tého výběrového LQ-momentu $\hat{\xi}_r$.

Jak $n \rightarrow \infty$, mají výběrové míry LQ-šikmosti $\hat{\eta}_3$ a LQ-špičatosti $\hat{\eta}_4$ dvourozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot (η_3, η_4) a

$$Var(\hat{\eta}_3) = Var(\hat{\xi}_3) / \hat{\xi}_2^2, \quad (81)$$

$$Cov(\hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4) = [Cov(\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_4) - \hat{\xi}_3 Cov(\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_4) - \hat{\xi}_4 Cov(\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3) + \hat{\xi}_3 \hat{\xi}_4 Var(\hat{\xi}_2)] / \hat{\xi}_2^2, \quad (82)$$

$$Var(\hat{\eta}_4) = Var(\hat{\xi}_4) / \hat{\xi}_2^2, \quad (83)$$

kde

$$Var(\hat{\xi}_r) = Cov(\hat{\xi}_r, \hat{\xi}_r) \quad (84)$$

a rozptyl a kovariance označují pravou stranu rovnice (80).

4.4 Aplikace na normální rozdělení

Uvažujeme náhodný výběr z normálního rozdělení a srovnáváme použití estimátorů medián, trimean a Gastwirth pro odhad LQ-šikmosti a LQ-špičatosti. Potom estimátory $\hat{\eta}_3$ a $\hat{\eta}_4$ dané rovnicí (75) mají společné normální rozdělení s příslušnými vektory středních hodnot

$$(0; 0,116), (0; 0,118) \text{ a } (0; 0,117) \quad (85)$$

a s kovariančními maticemi

$$\Sigma_{\text{MED}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1,535 & 0 \\ 0 & 2,070 \end{pmatrix}, \Sigma_{\text{TRI}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0,824 & 0 \\ 0 & 0,381 \end{pmatrix} \text{ a } \Sigma_{\text{GAS}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0,549 & 0 \\ 0 & 0,235 \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Z rovnic (86) vidíme, že $\hat{\eta}_3$ a $\hat{\eta}_4$ jsou asymptoticky nekorelované pro každý z výše uvedených rychlých estimátorů. Z kovariančních matic můžeme navíc pozorovat, že z hlediska estimátorů šikmosti a špičatosti v případě velkých výběrů z téměř normálního rozdělení preferujeme estimátor Gastwirth před mediánem a trimeanem.

4.5 Aplikace na lognormální rozdělení

LQ-estimátory pro tříparametrické lognormální rozdělení se chovají podobně jako estimátory L-momentů. Z rovnic (57)–(59) a (66) získáváme následující výrazy pro LQ-momenty tříparametrického lognormálního rozdělení

$$\xi_1 = \theta + \exp(\mu) \tau_{p,\alpha}(X_{1:1}), \quad (87)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \exp(\mu) [\tau_{p,\alpha}(X_{2:2}) - \tau_{p,\alpha}(X_{1:2})], \quad (88)$$

a LQ-koeficient šikmosti lze vypočítat pomocí

$$\eta_3 = \frac{\frac{1}{3} [\tau_{p,\alpha}(X_{3:3}) - 2\tau_{p,\alpha}(X_{2:3}) + \tau_{p,\alpha}(X_{1:3})]}{\frac{1}{2} [\tau_{p,\alpha}(X_{2:2}) - \tau_{p,\alpha}(X_{1:2})]}. \quad (89)$$

LQ-estimátory $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ a $\hat{\theta}$ parametrů představují řešení rovnic (57)–(59) v kombinacemi s rovnicemi (87)–(89) pro μ , σ a θ , kde za ξ_r dosadíme $\hat{\xi}_r$.

S využitím regresní analýzy získáváme následující aproximativní vztah, který můžeme použít pro odhad $\hat{\sigma}$ pro $|\eta_3| \leq 1,0$ a $|k| \leq 2,64$

$$\hat{\sigma} = 2,1684\hat{\eta}_3 + 0,3967\hat{\eta}_3^3 + 0,1744\hat{\eta}_3^5 - 0,1015\hat{\eta}_3^7. \quad (90)$$

Jakmile získáme hodnotu $\hat{\sigma}$, můžeme získat rovněž odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\theta}$ s využitím rovnic (88) a (87)

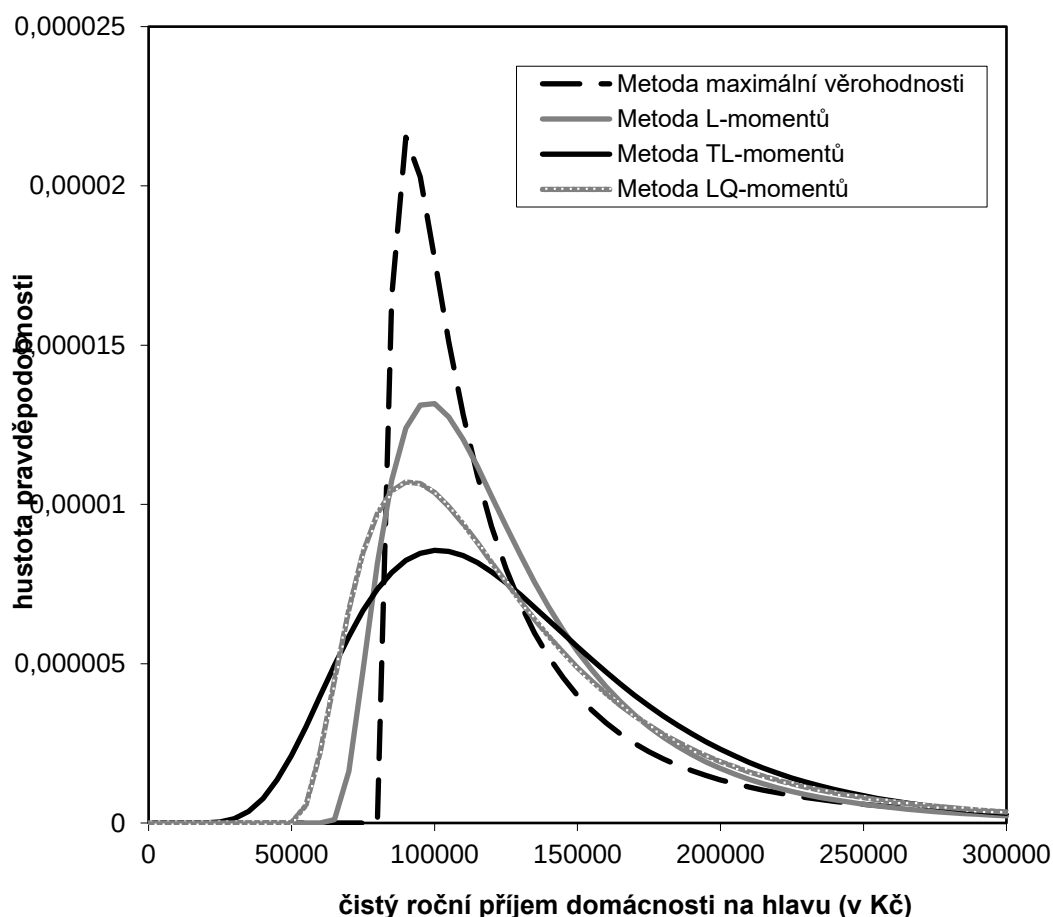
$$\hat{\mu} = \frac{2\hat{\xi}_2}{\hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{2:2}) - \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{1:2})}, \quad (91)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\xi}_1 - \exp(\mu) \hat{\tau}_{p,\alpha}(X_{1:1}). \quad (92)$$

5 Aplikace na ekonomická data

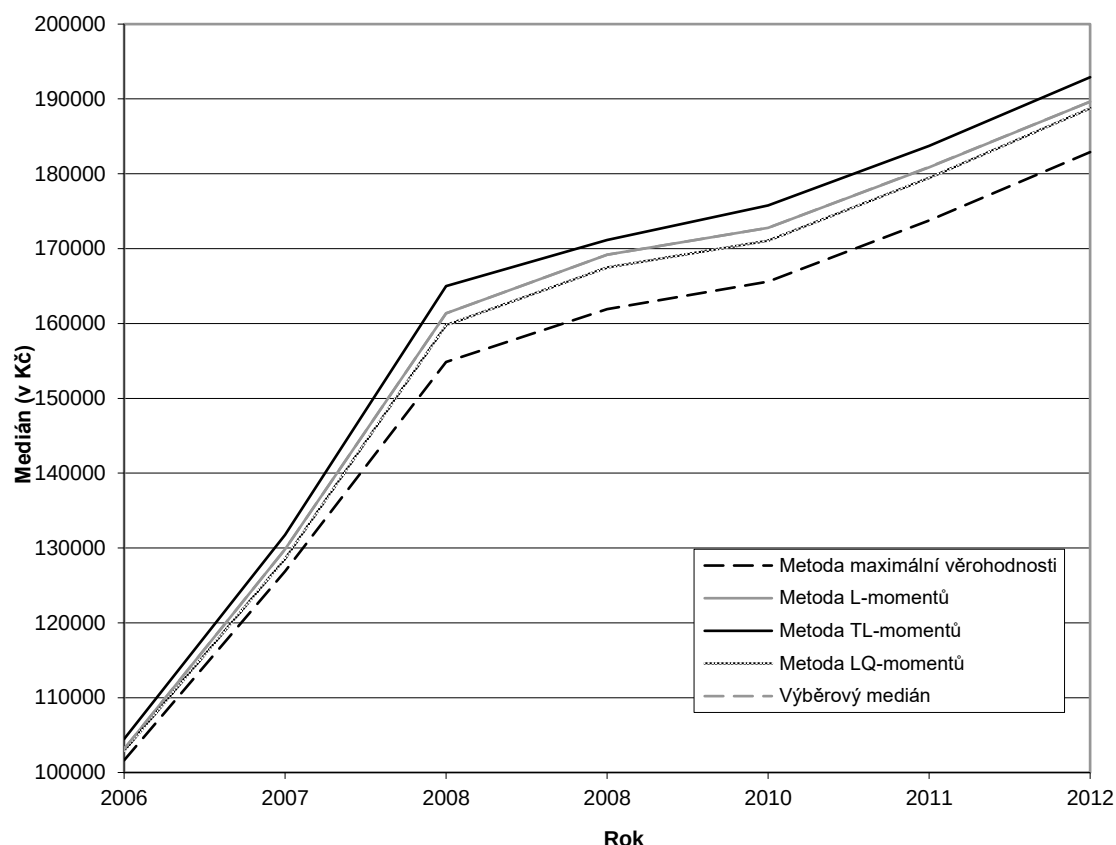
Aplikace na ekonomická data byla provedena na data Českého statistického úřadu a tato data představují čistý roční příjem domácnosti na hlavu (v Kč) v České republice v letech 2006–2012 (novější data nebyla k dispozici). Použitá data pocházejí ze statistického šetření EU-SILC (výběrové šetření příjmů a životních podmínek domácností).

Základ modelů příjmových rozdělení představují tříparametrické lognormální křivky, jejichž parametry byly paralelně odhadnuty s využitím metody LQ-momentů, TL-momentů, L-momentů a metody maximální věrohodnosti. Prvotní srovnání výsledků použitých metod nabízí obrázek 1 za rok 2012. Z tohoto obrázku je patrné, že metody LQ-momentů, TL-momentů a L-momentů poskytují vzájemně podobnější výsledky vzhledem k výsledkům pořízeným s využitím metody maximální věrohodnosti.



Obr. 1 Odhadnuté hustoty pravděpodobnosti tříparametrických lognormálních křivek rozdělení čistého ročního příjmu na hlavu podle použitých metod v roce 2012. (Zdroj: vlastní výzkum)

Určité srovnání z hlediska přesnosti použitých metod bodového odhadu parametrů nabízí obrázek 2, který zobrazuje vývoj výběrového mediánu a teoretických mediánů tříparametrických lognormálních křivek s parametry odhadnutými s využitím různých metod bodového odhadu parametrů v období let 2006–2012. Z tohoto obrázku je patrné, že vývoj teoretického mediánu tříparametrických lognormálních křivek s parametry odhadnutými s využitím metody LQ-momentů v podstatě splývá s vývojem empirického mediánu. Nejvíce se od průběhu výběrového mediánu opět liší výsledky získané metodou maximální věrohodnosti.



Obr. 2 Vývoj výběrového a teoretických mediánů tříparametrických lognormálních křivek s parametry odhadnutými s využitím metody LQ-momentů, TL-momentů, L-momentů a metody maximální věrohodnosti v období let 2006–2012 (Zdroj: vlastní výzkum)

Tab. 1 Součet všech absolutních odchylek pozorovaných a teoretických četností za všechny intervaly čistého ročního příjmu domácnosti na hlavu v České republice v období let 2006–2012 (Zdroj: vlastní výzkum)

Rok	Použitá metoda bodového odhadu parametrů			
	Metoda LQ-momentů	Metoda TL-momentů	Metoda L-momentů	Metoda maximální věrohodnosti
2006	112 356,6	135 234,8	154 253,3	301 993,1
2007	119 258,7	142 250,1	166 699,3	309 085,7
2008	128 014,6	154 934,6	179 943,6	318 611,9
2009	138 362,0	171 604,9	193 857,9	329 834,6
2010	145 289,0	191 692,1	203 256,7	339 927,6
2011	152 986,3	199 964,3	214 549,7	351 584,3
2012	177 255,6	215 955,6	223 301,7	365 497,6

Přesnost použitých metod byla dále měřena s využitím součtu všech absolutních odchylek pozorovaných a teoretických četností za všechny intervaly čistého ročního příjmu domácnosti na hlavu v České republice v období let 2006–2012, viz tabulka 1. Z této tabulky je rovněž zřejmé, že nejpřesnější výsledky

přinesla metoda LQ-momentů, dále metoda TL-momentů, metoda L-momentů a metoda maximální věrohodnosti, která přináší nejméně přesné výsledky. Z hlediska metody maximální věrohodnosti jsou hodnoty součtu všech absolutních odchylek pozorovaných a teoretických četností v tabulce 1 výrazně vyšší, než u zbývajících tří analyzovaných metod bodového odhadu parametru.

6 Závěr

Byla zde představena relativně nová třída momentových charakteristik pravděpodobnostních rozdělení. Jedná se o charakteristiky polohy, variability, šikmosti a špičatosti pravděpodobnostních rozdělení konstruované s využitím L-momentů, TL-momentů a LQ-momentů, které jsou robustním rozšířením L-momentů. Samotné L-momenty byly zavedeny jako robustní alternativa ke klasickým momentům pravděpodobnostních rozdělení. Nicméně, L-momenty a jejich odhady postrádají jisté robustní vlastnosti, které náleží právě TL-momentům a LQ-momentům.

7 Literatura

- Elamir, E. A. H., Seheult A. H. (2003). Trimmed L-moments. *Computational Statistics & Data Analysis*, 43(3), 299–314.
- Hosking, J. R. M. (1990). L-moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics. *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)*, 52(1), 105 – 124.
- Hosking, J. R. M, Wallis, J. R. (1997). *Regional Frequency Analysis: An Approach Based on L-Moments*. *Regional frequency analysis: An Approach Based on L-moments*. New York: Cambridge University Press, 209 p.
- Kyselý, J., Pícek, J. (2007). Regional Growth Curves and Improved Design value Estimates of Extreme Precipitation Events in the Czech Republic. *Climate research*, 33(3), 243–255.
- Mudholkar, G. S., Hutson, A. D. (1998). LQ-Moments: Analogs of L-moments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 71(1–2), 191–208.
- Shabri, A., Jemain, A. A. (2006). LQ-Moments: Application to the Log-Normal Distribution. *Journal of Mathematics and Statistics*, 2(3), 414–421.
- Shabri, A., Jemain, A. A. (2007). LQ-Moments for Statistical Analysis of Extreme Events. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 6(1), 228–238.
- Shabri, A., Jemain, A. A. (2010). LQ-Moments: Parameter Estimation for Kappa Distribution. *Sains Malaysiana*, 39(5), 845–850.
- Shahzad, M. N., Asghar, Z. (2013). Comparing TL-Moments, L-Moments and Conventional Moments of Dagum Distribution by Simulated Data. *Revista Colombiana de Estadística*, 36(1), 79–93.
- Sillitto, G. P. (1951). Interrelations Between Certain Linear Systematic Statistics for Samples from Any Continuous Population. *Biometrika*, 38(3–4), 377–382.

8 Poděkování

Článek byl zpracován za finanční subvence prostředků institucionální podpory na dlouhodobý koncepční rozvoj vědy a výzkumu číslo IP400040 na Fakultě informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze.

Důchodový věk na Slovensku a v Česku stanovený na základě relativního prospektivního věku

Retirement Age in Slovakia and Czechia Based on Relative Prospective Age Concept

Tomáš Fiala, Jitka Langhamrová

Katedra demografie, fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze, Česká republika

Department of Demography, Faculty of Informatics and Statistics, University of Economics, Prague, Czech Republic

fiala@vse.cz, langhamj@vse.cz

Abstrakt: V Evropě probíhá již několik desítek let stárnutí populace. To má mimo jiné za následek prodlužování průměrné doby pobírání starobních důchodů, což může vést k ohrožení finanční udržitelnosti důchodových systémů. V řadě zemí Evropy proto proběhly nebo probíhají reformy penzijního systému, jejichž součástí je často zvyšování důchodového věku, někdy i nad obvyklou hranici 65 let.

Objevuje se pochopitelně požadavek, aby hranice důchodového věku byla nějakým způsobem svázána s očekávanou délkou života. Jedním z možných přístupů je určení hranice důchodového věku na základě myšlenky tzv. relativního prospektivního věku, tj. na základě průměrného očekávaného podílu zbývajících délek života. Článek obsahuje definici a metodologii výpočtu prospektivního věku a relativního prospektivního věku a dále pak výpočty a odhady vývoje hodnot relativního prospektivního věku na Slovensku a v Česku v období 1960–2080. Je zde rovněž návrh zvyšování důchodového věku v uvedených zemích po roce 2030 vycházející z uvedeného principu.

Abstract: In many European countries there is going on population ageing and there are intentions to rise the retirement age. The reason for this is the rise in life span and increase the period of old-age pension receipt, which can cause financial unsustainability of pension systems. A possible adjustment of the retirement age to the level of mortality can be based on the concept of so called relative prospective age: the ratio of the remaining life expectancy to the total expected life span. This paper brings methodological background of definition of relative prospective age and computations of its value for Slovakia and Czechia since 1960 until 2080. Recommended increase of the retirement age in countries mentioned after the year 2030 based on this principle is shown.

Klíčová slova: prospektivní věk, relativní prospektivní věk, důchodový věk, Slovensko, Česko

Key words: prospective age, relative prospective age, retirement age, Slovakia, Czechia

1 Úvod

Stárnutí populace je velmi často diskutovaným tématem nejen v odborné, ale i laické veřejnosti. Velmi často diskutovaným fenoménem současné doby je stárnutí populace. Jeho hlavními příčinami je jednak trvalé snižování úmrtnosti, které má za následek růst délky života a dále pak pokles plodnosti žen, jejíž úroveň je ve většině ekonomicky vyspělých zemí tak nízká, že není schopna zajistit prostou reprodukci obyvatelstva. V některých zemích či regionech

dochází ke zvýšení stárnutí obyvatelstva rovněž v důsledku emigrace mladých lidí v produktivním, resp. reprodukčním věku.

Stárnutí populace je velmi často považováno za závažné ohrožení stability sociálního státu, především co se týče systémů důchodového zabezpečení a zdravotní a sociální péče. Většina varovných či dokonce katastrofických prognóz však vychází z předpokladu neměnné hranice stáří. Tou se obvykle rozumí věk 65 let, což je hodnota rovná nebo blízká obvyklému důchodovému věku v řadě zemí Evropy i jiných ekonomicky vyspělých zemí.

Již před více než 40 let proto navrhl Ryder (1975, str. 16) jinou definici hranice stáří. Vyslovil názor, že obvyklé měření věku jako doby uplynulé od narození je významnou a smysluplnou charakteristikou především pro mladé osoby před dosažením dospělosti. Pro starší osoby se zdá být naopak důležitějším indikátorem zvyšování ekonomické závislosti a zhoršování jejich zdravotního stavu a nikoli doba uplynulá od narození, ale očekávaná délka zbývajících života. Ryder proto doporučuje, aby byl za hranici stáří považován věk, v němž střední délka zbývajících života nabývá určité dané hodnoty, například 10 let. S rostoucí délkou života by se tedy zvyšovala i hranice stáří.

Uvedenou myšlenku stanovení věku na základě prospektivního, nikoli retrospektivního pohledu, zpracovali velmi podrobně v řadě článků Sanderson a Scherbov. Zavedli pojem tzv. prospektivního věku definovaného jako věk, v němž střední délka zbývajících života dosahuje stejné hodnoty jako střední délka života osoby daného věku při daném modelu úmrtnosti (Sanderson and Scherbov, 2007). Indikátory stárnutí populace založené na prospektivní hranici stáří pochopitelně nevykazují tak dramatický nárůst jako standardní indikátory (Sanderson and Scherbov, 2010, 2013). Hodnoty některých těchto indikátorů pro Českou republiku uvádějí např. Klapková, Šídlo a Šprocha (2015).

Růst délky života pochopitelně vede při neměnném důchodovém věku k nárůstu průměrné doby pobírání starobních důchodů. Mnoho evropských zemí proto zavádí nebo uvažuje o zvyšování důchodového věku, často nad obvyklou hranici 65 let. V některých zemích je (nebo má v budoucnu být) úroveň důchodového věku přizpůsobena vývoji úmrtnosti, přesněji řečeno nárůstu střední délky života (European Commission, 2018, str. 126, Tab. 10).

Způsobem stanovení důchodového věku v České republice se v minulých letech zabýval druhý pracovní tým odborné komise pro důchodovou reformu. ČR. Diskutoval se zde návrh, aby byl důchodový věk v Česku stanoven tak, že by se průměrná doba pobírání starobního důchodu pohybovala kolem 20 let. Důchodový věk by byl tedy definován nikoli na základě dosažení nějaké konstantní hranice věku definovaného obvyklým způsobem (tj. retrospektivně), ale na základě konstantní hranice prospektivního věku. To by však znamenalo, že za předpokladu pokračujícího růstu délky života by stejným způsobem rostl

důchodový věk a tedy také délka období ekonomické aktivity, zatímco délka období pobírání starobního důchodu by zůstávala stejná a relativně by doba pobírání důchodu (vzhledem k délce celého života) klesala. Odborná komise proto nakonec přijala doporučení, aby byl důchodový věk určen tak, že lidé, kteří se jej dožijí, stráví v důchodu v průměru poslední čtvrtinu života (Odborná komise pro důchodovou reformu, 2014). Příslušné výpočty by bylo nutno provádět na základě generačních (nikoli průřezových) úmrtnostních tabulek (Fiala, Langhamrová, 2015).

Důchodový věk by tedy nebyl určován na základě výše uvedeného (absolutního) prospektivního věku, ale na základě relativního prospektivního věku, který je určen podílem očekávané průměrné délky zbývajících života vzhledem k očekávané průměrné délce celého života.

V tomto článku je přesněji definován pojem relativního prospektivního věku a popsán způsob výpočtu důchodového věku založeného na tomto principu. Při rostoucí délce života se zvyšuje i důchodový věk, ale takovým způsobem, že roste nejen doba ekonomické aktivity, ale i doba pobírání důchodu a poměr doby strávené v důchodu vzhledem k délce celého života zůstává stabilní.

Článek dále obsahuje výpočet relativního prospektivního věku v období od roku 1960 do roku 2080 pro Slovensko a Česko a jeho porovnání s důchodovým věkem podle současné právní úpravy. Budoucí hodnoty délky života vycházejí ze základní varianty scénáře úmrtnosti populační projekce Eurostatu z roku 2015 (Eurostat, 2017b). Jako referenční model úmrtnosti byly použity úmrtnostní tabulky pro Slovensko z roku 2016 a věk 62 let odpovídající důchodovému věku v uvedeném roce.

2 Prospektivní věk a relativní prospektivní věk

Pojem prospektivního věku vychází z hypotézy, že u starších lidí žijících v různých obdobích nebo v různých zemích může být mnohem důležitější charakteristikou očekávaná délka jejich zbývajících života (střední délka života v jejich aktuálním věku) než jejich (obvykle užívaný) chronologický věk. Jinými slovy: není ani tak důležitá doba uplynulá od narození jako spíše (očekávaná) doba zbývajících do smrti. Sanderson a Scherbov (2007) navrhuje používat pojem zbývajících délka života, aby se zdůraznilo, že se nejedná o obvykle používanou střední délku života novorozence.

Označme $e_x^{(t)}$ střední délku zbývajících života v přesném věku x v roce t . Pokud zvolíme nějakou úmrtnost považovanou za standardní (a její charakteristiky označíme hvězdičkou), potom prospektivním věkem osoby v obvyklém (retrospektivním) věku x v roce t je takový věk $y(x, t)$, v němž je střední délka zbývajících života v roce t stejná jako střední délka života v přesném věku x při standardní úmrtnosti, tj. platí

$$e_{y(x,t)}^{(t)} = e_x^* \quad (1)$$

Výpočet jeho hodnoty provedeme metodou lineární interpolace

$$y(x, t) = y_0(x, t) + \frac{e_{y_0(x,t)}^{(t)} - e_x^*}{e_{y_0(x,t)}^{(t)} - e_{y_0(x,t)+1}^{(t)}}, \quad (2)$$

kde $y_0(x, t)$ je (jednoznačně určené) celé číslo, pro něž je $e_{y_0(x,t)}^{(t)} \geq e_x^*$, ale $e_{y_0(x,t)+1}^{(t)} < e_x^*$. (Fiala, Langhamrová, 2018).

Pokud neuvažujeme absolutní, ale relativní délku zbývajícího života

$$re_x^{(t)} = \frac{e_x^{(t)}}{x + e_x^{(t)}}, \quad (3)$$

můžeme analogickým způsobem definovat relativní prospektivní věk

$$ry(x, t) = ry_0(x, t) + \frac{re_{y_0(x,t)}^{(t)} - re_x^*}{re_{y_0(x,t)}^{(t)} - re_{y_0(x,t)+1}^{(t)}}, \quad (4)$$

kde $y_0(x, t)$ je celočíselná hodnota, pro niž je $re_{y_0(x,t)}^{(t)} \geq re_x^*$, zatímco $re_{y_0(x,t)+1}^{(t)} < re_x^*$.

3 Dosavadní vývoj důchodového věku na Slovensku a v Česku a návrh jeho stanovení na základě relativního prospektivního věku

Od roku 1948 byl důchodový věk mužů v Československu stanoven na 60 let a téměř po pět desetiletí nedošlo k jeho změně. Důchodový věk žen byl od roku 1957 snížen ze 60 na 55 let a později diferencován podle počtu dětí od 53 let (5 a více dětí) do 57 let (bezdětné). Důchodový věk žen se 2 dětmi byl 55 let. Tyto hodnoty zůstaly zachovány na Slovensku i v Česku několik let i po rozdělení Československa.

Na Slovensku byla hodnota důchodového věku pro muže zachována na úrovni 60 let až do roku 2003, kdy odcházeli do důchodu muži narození v roce 1943. Pak však následovalo poměrně rychlé zvyšování. Následující ročník narození (1944) měl důchodový věk o 9 měsíců vyšší, další ročník (1945) o dalších 9 měsíců vyšší a muži narození v roce 1946 měli stanovený důchodový věk 62 let. Ten se pak

zachoval až do konce roku 2016. Od roku 2017 se každý rok dále zvyšuje o několik desítek dní podle růstu délky života (Sociálna poisťovňa, 2017).

Důchodový věk žen na Slovensku nadále závisel na počtu dětí, pro jednoduchost budeme uvažovat pouze ženy se 2 dětmi. I jejich důchodový věk zůstal do roku 2003 nezměněný (55 let). Od následujícího roku se pro každý ročník narození zvyšuje o 9 měsíců do doby, než dosáhne důchodového věku mužů.

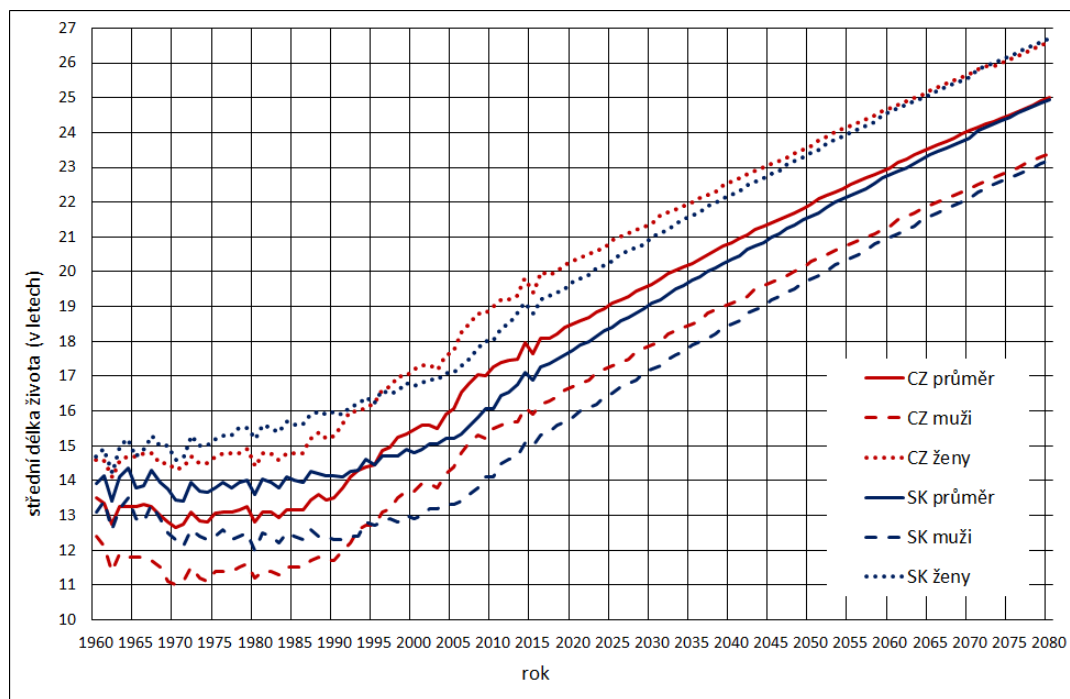
Důchodový věk v Česku začal růst již od roku 1996, ale mnohem pomaleji a plynule. U mužů roste pro každý následující ročník narození o 2 měsíce, u žen o 4 měsíce (od roku 2019 se bude zvyšovat o 6 měsíců) pro každý další ročník narození. Zvyšování by mělo pokračovat až do roku 2030, kdy by měl důchodový věk mužů a žen s nejvýše jedním dítětem činit 65 let, důchodový věk žen s více dětmi by měl této hranice postupně dosáhnout v následujících letech (Zákon 155/1995 Sb.). Po roce 2030 se navrhuje další zvyšování důchodového věku nad 65 let tak, aby lidé, kteří dosáhnou důchodového věku, v něm strávili zhruba čtvrtinu života.

Evropská rada doporučuje, aby byl důchodový věk svázán s vývojem úmrtnosti. Jednou z možností je stanovit důchodový věk na základě relativního prospektivního věku. To by znamenalo, že by lidé strávili v důchodu zhruba stejný podíl svého života, bez ohledu na ročník narození a úmrtnost v zemi, kde žijí. Protože se však předpokládá stejný důchodový věk pro muže i pro ženy, provádějí se výpočty prospektivního věku na základě středních délek života bez rozlišení pohlaví. Je pak zřejmé, že ženy by strávily v důchodu o něco větší podíl svého života než muži.

Na Slovensku byl v posledních několika letech důchodový věk mužů 62 let, teprve od roku 2017 se opět zvyšuje. Jako standard pro výpočet relativního prospektivního věku byl proto zvolen věk 62 let a úmrtnost v roce 2016 (bez rozlišení pohlaví). Relativní zbývající délka života při této úmrtnosti dosahuje 23,9 %. To je však průřezová hodnota; skutečný podíl zbývající délky života osob, které v roce 2016 dosáhly 65 let, bude vzhledem k předpokladu dalšího snižování úmrtnosti o něco vyšší, pravděpodobně přesahující 25 %.

Na základě tohoto zvoleného standardu byl proveden výpočet relativního prospektivního věku na Slovensku a v Česku pro období 1960–2080. K výpočtu byly použity úmrtnostní tabulky Eurostatu pro obě země 1960–2016 (Eurostat, 2017a) a úmrtnostní tabulky scénáře projekce z roku 2015 v základní variantě (Eurostat, 2017b) pro další roky.

Relativní délka zbývajícího života v důchodovém věku závisí na úmrtnosti seniorů, která může být poměrně dobře charakterizována střední délkou života v přesném věku 65 let.

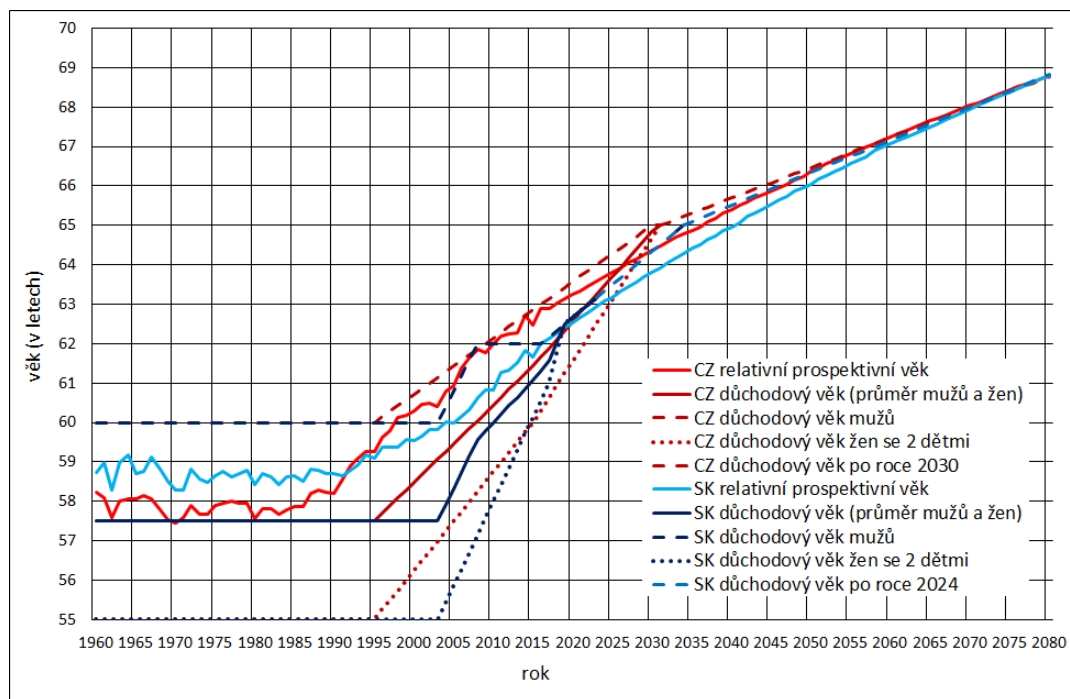


Graf 1 Střední délka života v přesném věku 65 let (Zdroj dat: Eurostat, vlastní zpracování)

V období socialistického Československa byla střední délka života 65letých na Slovensku o něco vyšší než v Česku, rozdíl se pohyboval kolem 1 roku. Přitom v 60., 70. i první polovině 80. let tyto hodnoty prakticky stagnovaly. V devadesátých letech se hodnoty délek života vyrovnaly, v současné době je naopak střední délka života v Česku zhruba o rok vyšší. Scénář projekce Eurostatu předpokládá konvergenci, kolem roku 2080 by měly být délky života v obou zemích zhruba stejné. (Viz Graf 1.)

Hodnoty relativního prospektivního věku odpovídající průměrnému podílu zbývajících života 62letých v roce 2016 na Slovensku zachycuje Graf 2. Uvedené hodnoty udávají pro každý rok věk, kdy by relativní délka zbývajících života při úmrtnosti jako v daném roce byla stejná jako relativní střední délka zbývajících života 62letých při úmrtnosti v roce 2016 na Slovensku (rovná 23,9 %).

Současnému důchodovému věku na Slovensku 62 let by tedy „odpovídal“ v 60.–80. letech důchodový věk kolem 59 let, v Česku kolem 58 let. Průměrný důchodový věk mužů a žen (57,5 roku) byl o něco nižší. Zvyšování důchodového věku tedy v obou zemích vedlo k určitému zkrácení průměrné relativní doby života strávené v důchodu. Došlo však ke zmenšení rozdílu mezi dobou života strávenou v důchodu muži a ženami. Pro muže je v současné době důchodový věk již zhruba roven relativnímu prospektivnímu věku, zatímco dříve byl na Slovensku zhruba o 1 rok, v Česku o téměř 2 roky vyšší. Lze tedy předpokládat, že navzdory zvyšování důchodového věku se u mužů (zejména v Česku) o něco zvýšila průměrná relativní doba pobírání důchodu, u žen naopak došlo k jejímu snížení.



Graf 2 Důchodový věk a relativní prospektivní věk odpovídající věku 62 let a úmrtnosti v roce 2016 na Slovensku (Zdroj dat: Eurostat, vlastní výpočet a zpracování)

Jaký by měl být budoucí vývoj důchodového věku, aby průměrná relativní doba pobírání důchodu zůstala zhruba na stejné úrovni jako pro osoby, které dosáhnou důchodového věku na Slovensku v roce 2016? Pokud se bude úmrtnost vyvíjet podle základní varianty scénáře Eurostatu, měl by v obou zemích růst důchodového věku pokračovat, ale o něco pomaleji, než předpokládá současná legislativa. Podle poslední právní úpravy by měl být v roce 2023 důchodový věk na Slovensku 63 let 2 měsíce, přitom relativní prospektivní věk pro tento rok je jen o málo vyšší než 62 let 11 měsíců. Při pokračujícím každoročním zvyšování o 2 měsíce by důchodový věk na Slovensku dosáhl v roce 2034 hodnoty 65 let, přitom prospektivní věk dosáhne této úrovně až v roce 2040. Současné tempo zvyšování důchodového věku na Slovensku tedy bude mít zřejmě za následek mírné snižování průměrné relativní doby pobírání důchodu.

V Česku byl vzhledem k vyšší délce života relativní prospektivní věk v roce 2016 (62,89 roku) téměř o 1 rok vyšší než na Slovensku, český důchodový věk mužů (63 let) byl jen o málo vyšší. I zde však má růst důchodového věku rychleji než věk prospektivní. V roce 2030 by měl důchodový věk mužů (i žen s nejvýše jedním dítětem) dosáhnout 65 let zatímco relativní prospektivní věk by měl této hodnoty dosáhnout až o 6 let později.

Pokud bude vývoj úmrtnosti probíhat podle uvedeného scénáře Eurostatu, bude v obou zemích pokračovat růst relativního prospektivního věku i nad hranici 65 let. V roce 2050 by jeho hodnota na Slovensku měla být na Slovensku o málo vyšší než 66 let, v Česku vyšší než 66 let 4 měsíce. Na konci období

projekce, v roce 2080, bude hodnota relativního prospektivního věku v obou zemích dosahovat téměř 68 let 10 měsíců. Pokud by tedy v budoucnu neměla být relativní doba pobírání důchod vyšší než na Slovensku v roce 2016, musel by se důchodový věk v obou zemích pohybovat kolem výše uvedených hodnot. K jejich dosažení by ovšem stačilo po dosažení důchodového věku 65 let zpomalit tempo jeho dalšího růstu na polovinu: každý další rok na Slovensku, resp. pro každý další ročník narození v Česku by se důchodový věk zvýšil pouze o 1 měsíc (Graf 2).

4 Závěr

Koncept prospektivního věku, kdy se věk měří nikoli jako obvykle retrospektivně, ale prospektivně, tj. jako očekávaná délka zbývajících života ukazuje, že vývoj řady indikátorů stárnutí není zdaleka tak kritický, jako při užití obvyklého retrospektivního věku. Pro stanovení důchodového věku se zdá být vhodnější užít nikoli absolutního, ale relativního prospektivního věku, kdy je sledována nikoli absolutní délka zbývajících života, ale podíl délky zbývajících života vzhledem k očekávané délce celého života. Důchodový věk založený na tomto konceptu by se v případě růstu délky života zvyšoval takovým způsobem, že relativní doba strávená v důchodu vzhledem k délce celého života by zůstávala přibližně konstantní.

Výpočty prospektivního věku vycházející z předpokládané úmrtnosti na Slovensku v roce 2016 a odpovídajícího důchodového věku 62 let v tomto roce ukazují, že zvyšování důchodového věku v průměru zhruba odpovídá růstu délky života po roce 1990. Vzhledem ke sbližování důchodového věku mužů a žen došlo u mužů i při růstu důchodového věku ke zvýšení relativní doby pobírání důchodu, u žen naopak k jejímu snížení. Vyšší délky života žen však je zárukou, že i při stejném důchodovém věku budou ženy stále pobírat důchod o něco delší dobu, než muži.

Vzhledem k vyšší délce života v Česku v porovnání se Slovenskem je v současné době relativní doba pobírání důchodu u mužů v Česku i při o rok vyšším důchodovém věku zhruba stejná jako na Slovensku.

Předpokládaný další růst důchodového věku podle aktuální právní úpravy je o něco rychlejší než růst prospektivního věku, bude mít proto za následek mírný pokles průměrné relativní doby pobírání důchodu. Dalšímu poklesu by zabránilo po dosažení hranice 65 let snížení tempa růstu důchodového věku na polovinu, tj. na 1 měsíc pro každý další rok, resp. ročník namísto současných 2 měsíců. Pro zachování relativní doby pobírání důchodu však bude potřebné provádět pravidelné aktualizace výpočtů na základě aktualizovaných prognóz vývoje úmrtnosti.

5 Literatura

- European Commission. (2018). *The 2018 Pension Adequacy Report: current and future income adequacy in old age in the EU*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. ISBN 978-92-79-85657-0. DOI: 10.2767/406275.
- Eurostat. (2017a). *Statistics Database*. Database by themes. Population and social conditions. Mortality. Life expectancy by age and sex (demo_mlexpec). Dostupné na: http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=demo_mlexpec&lang=en.
- Eurostat. (2017b.) *Statistics Database*. Database by themes. Population and social conditions. Population projections. Population projections at national level (2015–2080). Assumptions for mortality rates by age, sex and type of projection (proj_15naasmr) Dostupné na: http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=proj_15naasmr&lang=en.
- Fiala, T., Langhamrová, J. (2015). Hranice důchodového věku zajišťující průměrnou dobu pobírání důchodu čtvrtiny života a modelové výpočty jeho hodnot. Fórum sociální politiky. Roč. 9, č. 5, s. 2–8. ISSN 1802-5854.
- Fiala, T., Langhamrová, J. (2018). Retirement Age in Czechia and Other European Countries Based on the Concept of Relative Prospective Age. In: *International Days of Statistics and Economics* (MSed). Praha, 6.09.2018 – 8.09.2018. Dostupné na: https://msed.vse.cz/msed_2018/article/284-Fiala-Tomas-paper.pdf
- Klapková, M., Šídlo, L., Šprocha, B. (2016). Koncept prospektivního věku a jeho aplikace na vybrané ukazatele demografického stárnutí. *Demografie*, roč. 58, str. 126-141.
- Odborná komise pro důchodovou reformu. (2014). *Návrh revizního systému nastavení hranice důchodového věku*. Dostupné na: <http://www.duchodova-komise.cz/wp-content/uploads/2014/12/N%C3%A1vrh-revizn%C3%ADho-syst%C3%A9mu-nastaven%C3%AD-hranice-d%C5%AFchodov%C3%A9ho-v%C4%Bku-11.-prosince-2014.pdf>
- Ryder, N. B. (1975). Notes on Stationary Populations. *Population Index*, Vol. 41, No. 1, pp. 3-28. Published by: Office of Population Research. Available at: <http://www.jstor.org/stable/2734140>.
- Sanderson, W. C., Scherbov, S. S. (2007). A New Perspective on Population Aging. *Demographic Research*, Vol. 16, pp. 27–58. DOI: 10.4054/DemRes.2007.16.2.
- Sanderson, W. C., Scherbov, S. S. (2010). Remeasuring Aging. *Science*, Vol. 329. No. 5997, pp. 1287–1288. DOI: 10.1126/science.1193647.
- Sanderson, W. C., Scherbov, S. S. (2013). The Characteristics Approach to the Measurement of Population Aging. *Population and Development Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 673–685. DOI: 10.1111/j.1728-4457.2013.00633.x.
- Sociálna poisťovňa. (2017). Dôchodkový vek v roku 2017 a 2018. Dostupné na: <https://www.socpoist.sk/dochodkovy-vek-v-roku-2017/62961s>.
- Zákon 155/1995 Sb. O důchodovém pojištění, aktuální znění, Příloha.

6 Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory GA ČR 15-13283S Projekce populace České republiky podle úrovně vzdělání a rodinného stavu.

Analýza dopadov vonkajších rizík na slovenskú ekonomiku s využitím makroekonomického modelu

Analysis of External Risk Impacts on the Slovak Economy Using the Macroeconomic Model

Tomáš Miklošovič

Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied, Šancova 56, Bratislava

Institute of Economic Research, Slovak Academy of Science, Šancova 56, 811 05 Bratislava, Slovakia

tomas.miklosovic@savba.sk

Abstrakt: Slovenská ekonomika patrí medzi malú, otvorenú, rýchlo rastúcu ekonomiku, v ktorej k hlavným ťahúňom rastu patrí zahraničný dopyt a vývoj situácie (nielen ekonomickej) u našich obchodných partnerov. Iné faktory rastu, ako sú napr. dopyt domácností alebo dopyt vlády, nedokážu pôsobiť na rast slovenskej ekonomiky dlhodobo a tak výrazne ako zahraničný dopyt. Preto je nevyhnutné zmapovať potenciálne riziká a vonkajšie hrozby, ktoré môžu slovenskú ekonomiku do značnej miery ovplyvniť.

V tejto analýze sa budú simulovať dopady vybraných rizík na slovenskú ekonomiku s využitím modelu všeobecne vypočítateľnej rovnováhy (CGE model). Analýza sa zameria predovšetkým na riziko poklesu svetovej ceny ocele, pravdepodobný rast ceny ropy vo svete, zníženie zahraničného dopytu a zvýšenie ceny základných potravín.

Abstract: The Slovak economy belongs to a small, open, fast-growing economy in which the main growth rate belongs to the foreign demand and the not only the economic situation of our business partners. Other factors of growth, such as, households demand or government demand, cannot influence the growth of the Slovak economy in the long run and as much as foreign demand. It is therefore necessary to map the potential risks and external threats that can significantly affect the Slovak economy.

In this analysis, the impacts of selected risks on the Slovak economy will be simulated using a computable general equilibrium model (CGE model). The analysis will focus in particular on the risk of the lower world steel price, the rise oil prices in the world, the reduction in foreign demand and the rise of basic food prices.

Kľúčové slová: CGE model, makroekonomická simulácia, vonkajšie riziká

Key words: CGE model, macroeconomic simulation, external risks

1 Úvod

V dnešnej turbulentnej dobe čelíme veľkému počtu rizík, ktoré nielen priamo vplývajú na našu ekonomiku. Hospodárske a spoločenské riziká, ktoré prichádzajú z vnútra krajiny, môžu byť zničujúce. Avšak vonkajšie riziká sú tie, ktoré nedokážeme takmer vôbec ovplyvniť. Niektoré aktuálne vonkajšie hospodárske riziká, ktoré potenciálne ohrozujú slovenskú ekonomiku, sú jasne definované (Obadi a kol., 2017; Obadi, 2017), iné, prevažne skryté, sa veľmi ťažko identifikujú, resp. by nemali signifikantne zasiahnuť Slovensko. V tejto štúdii sa budú analyzovať dopady vybraných rizík na slovenskú ekonomiku s využitím

modelu všeobecne vypočítateľnej rovnováhy. Analýza sa zameria predovšetkým na riziko poklesu svetovej ceny ocele, ktorý môže nastať kvôli plánovanému zvýšeniu ciel na dovoz ocele do USA až do výšky 30%. Tým pádom sa zvýši konkurencia vo zvyšku sveta a pravdepodobne príde k poklesu svetových cien ocele. S pomocou CGE modelu budú vytvorené viaceré alternatívne scenáre, ktoré budú simulovať potenciálny vývoj a dopady tohto opatrenia na slovenskú ekonomiku. Ďalším veľkým rizikom pre slovenskú ekonomiku je pravdepodobný rast ceny ropy vo svete. Po dlhodobej stagnácii cien ropy očakávajú viacerí analytici rast tejto komodity v krátkodobom, poprípadе v strednodobom horizonte. Aj v tomto prípade budú vytvorené alternatívne scenáre, v ktorých príde k odlišným rastom svetových cien ropy. Ropa, ako jedna z hlavných vstupných komodít v hospodárstve, má nezastupiteľné miesto vo výrobnom procese. Každý pohyb ceny má zásadný vplyv na jednotlivé sektory ekonomiky, ako aj na ekonomiku ako celok. Predposlednou analyzovanou simuláciou potenciálneho vonkajšieho rizika bude zníženie zahraničného dopytu po slovenských tovaroch a službách. Slovenská ekonomika, ako veľmi malá, otvorená ekonomika, je veľmi citlivá na volatilitu exportu. Posledným vonkajším rizikom, ktorým sa bude práca zaoberať, bude zvýšenie ceny základných potravín predovšetkým kvôli narastajúcemu protekcionizmu, zvýšeniu nákladov v tomto sektore (predovšetkým kvôli zmene klímy) a narastajúcim potravinovým kauzám naprieč celou Európou. Aj tu vzniknú viaceré scenáre, ktoré budú simulovať zmeny svetových cien primárnych potravín v rozličných výškach.

Členenie tejto štúdie je nasledovné. V prvej časti bude predstavená metodika použitého makroekonomického modelu všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy. V tejto časti je popísaný základný charakter použitého modelu. V druhej časti sa nachádza analýza senzitivnosti, v ktorej bol model testovaný na zmeny svetových cien a zmien dopytov po slovenských tovaroch a službách. V predposlednej kapitole sa nachádza nosná časť tejto práce, v ktorej sú opísané a nasimulované jednotlivé scenáre vonkajších rizík pre slovenskú ekonomiku. Výsledky simulácií sú analyzované v tejto časti kapitoly. Poslednou časťou je záver, v ktorom sú zhrnuté jednotlivé vonkajšie riziká a ich potenciálne dopady na slovenskú ekonomiku.

2 Metodika

Vo všetkých modeloch všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy sú vzťahy medzi jednotlivými premennými kalibrované na údajovej základni tzv. benchmarkovej rovnováhy z roka, v ktorom boli dáta zozbierané. Kalibračný proces vypočíta pomerové a čiastkové parametre v závislosti od exogénne definovaných elasticít správania sa tak, aby model reprodukoval vstupné dáta. Väčšina CGE modelov je komparatívno-statická. Preto CGE modely využívajú predpoklad *ceteris paribus*

pri modelovaní zavádzania exogénnych šokov a náhlych zmien hospodárskych politík. Ako základ modelov všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy je mikroekonomická teória rovnováhy, ktorá bola predstavená v roku 1874 francúzskym ekonómom Léonom Walrasom. Jeho teóriu neskôr významne rozpracovali Arrow & Debreu (1954), ktorí ju matematicky formulovali a numericky popísali. Model všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy je numerickým výsledkom tejto teórie.

Štruktúra použitého CGE modelu pochádza z práce Dervis, De Melo & Robinson (1982). Štruktúra programového kódu pochádza z modelu USDA (Robinson, Kilkenny, & Hanson, 1990). Základy statickej časti modelu pochádzajú z globálneho CGE modelu (McDonald, Robinson, & Thierfelder, 2005), ktorý bol zostrojený na základe dokumentácie (McDonald, 2007). Vstupnou databázou do modelu je matica spoločenského účtovníctva (SAM) za rok 2013, ktorá bola vytvorená autorom. Postup tvorby matice spoločenského účtovníctva je možné nájsť v iných štúdiách (Miklošovič, 2014). Model obsahuje celkovo 768 lineárnych a nelineárnych rovníc, prostredníctvom ktorých je model schopný nájsť equilibrium pre 768 endogénnych premenných. V časti analýzy senzitivnosti bol využitý predovšetkým statický model, pričom pri modelovaní jednotlivých scenárov v ďalšej časti bol využitý rekurzívne dynamický CGE model.

Pri predpoklade racionálneho správania sa všetkých subjektov bola zostavená rovnováha na trhu, kde sa celková ponuka na trhu rovnala celkovému dopytu. Pomocou ďalších predpokladov boli použité rovnice, ktoré modelujú rozpočtové ohraničenia domácností, aby maximalizovali svoju užitočnosť pri podmienke využitia svojho príjmu. Predpokladá sa nulový zisk firiem, pretože pri kladnom zisku by existoval potenciál na vytvorenie novej firmy a trh by nebol dokonale konkurenčný. CGE model je reálny model, preto postačuje nepoužívať reálne ohodnotenia statkov, ale iba relatívne ceny statkov. Ako numeraire bol zvolený index priemyselných cien, pričom ostatné ceny statkov sa relatívne porovnávali k tomuto zvolenému statku.

Zahraničie bolo pre potreby modelovania rizík rozdelené na dve časti, pričom jeden typ zahraničia predstavovala Európska únia a druhý typ zahraničia predstavoval zvyšok sveta. Všetky vzťahy medzi domácimi inštitúciami a zahraničím boli následne transformované za účelom zachovania rozdelenia zahraničia na dva typy. Medzi silné predpoklady modelu patrí neumožnenie pohybu pracovnej sily do a zo zahraničia. V rámci modelu vystupuje len jedna reprezentatívna domácnosť a jeden reprezentatívny podnik. Vo všetkých simuláciách sme brali ako jeden z hlavných predpokladov voľnú ponuku práce, čo znamená, že neexistoval tlak na rast miest (mzdy zostali konštantné) a veľkosť

voľnej pracovnej sily bola neobmedzená¹. Vládny deficit bol pri všetkých simuláciách nastavený ako konštantná premenná, čo malo za následok predovšetkým zmeny transferov od domácností k vláde.²

Pri modelovaní produkcie bol použitý princíp vnorených funkcií za účelom lepšieho znázornenia reálneho sveta. Tento princíp lepšie popisuje špecifické črty ekonomiky. Celková produkcia v sektore bola rozdelená na dve časti, kde jedna časť modeluje dopyt po práci a kapitáli, zatiaľ čo druhá časť modeluje dopyt po medzispotrebe. Výhoda pri použitých vnorených produkčných funkciách je v tom, že každá vnorená funkcia môže mať inú elasticitu substitúcie dopytu vo funkcii opisujúcej pridanú hodnotu (L, K) a inú pre funkciu modelujúcu dopyt po medzispotrebe. Úplný popis modelu, statickej aj dynamickej verzie a postup pri zostrojení matice spoločenského účtovania možno nájsť v inej štúdií (Miklošovič, 2014). Sú v nej popísané aj hlavné makroekonomické rovnice a rozpočtové ohraničenia.

Tab. 1 Agregácia sektorov ekonomiky do jednotlivých zhlukov (Zdroj: Vlastné spracovanie)

Poradové číslo sektora	Názov zhluku	Označenie sektora podľa NACE Rev. 2
01	Poľnohospodárstvo, lesníctvo a rybolov	01-03
02	Ťažba a dobývanie	05-09
03	Spracovanie prírodného priemyslu	10-18
04	Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	19
05	Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	20-23
06	Výroba a spracovanie kovov	24
07	Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	25-33
08	Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	35
09	Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd, odpady a služby odstraňovania odpadov	36-40
10	Stavebníctvo	41-43
11	Trhové služby	45-82
12	Netrhové služby	84-96

Kvôli lepšej názornosti vzťahov a popisu fungovania hospodárstva bola ekonomika agregovaná z pôvodných 88 sektorov podľa klasifikácie NACE Rev. 2 na 12 sektorových zhlukov. Pri tejto agregácii bol braný na zreteľ zámer tvorby simulácií pre určité špecifické sektory (zhluky), ako aj špecifickosť ostatných častí

¹ Tento predpoklad zjednodušuje výsledky modelu. V reálnom svete by simulovaný rast zamestnanosti bol rozdelený na rast zamestnanosti a rast miezd.

² V prípade, že exogénna zmena „tlačila“ na zvyšovanie deficitu, automaticky nastal pokles transferov od vlády k domácnostiam. Ak exogénna zmena mala znižovať vládny deficit, tieto transfery narástli. Preto príjmy domácností nereflektujú len na zmenu zamestnanosti, ale aj na situáciu vládneho deficitu.

ekonomiky. Zatriedenie jednotlivých sektorov do zhlukov môžete vidieť v predchádzajúcej tabuľke (Tab. 1).

Pre lepšiu názornosť veľkosti a vplyvu jednotlivých vytvorených sektorových zhlukov ekonomiky sa v nasledujúcej tabuľke (Tab. 2) nachádzajú vybrané makro-ekonomické ukazovatele pre dané zhluky za rok 2013, keďže dáta z tohto obdobia boli aj vstupom do modelu (SAM matica). Uvedené sú ako ukazovatele trhu práce, tak aj pridanej hodnoty, HDP a zahraničného obchodu.

Zhluk poľnohospodárstva zamestnáva viac ako 77 tisíc pracujúcich, čo predstavuje 3,3% celkovej zamestnanosti. Podiel pridanej hodnoty tohto zhluku na celkovej pridanej hodnote je na úrovni 4,4%. Podiel importu zhluku na celkovom importe dosahuje úroveň 1,6%, pričom podiel exportu na celkovom exporte dosahuje úroveň 1,8%. Zhluk ťažba a dobývanie zamestnáva viac ako 11 tisíc osôb a podiel pridanej hodnoty tohto zhluku na celkovej pridanej hodnote je na úrovni 0,5 %. Tento zhluk je veľmi silno závislý na dovoze, keďže podiel importu tohto zhluku na celkovom importe dosahuje hodnotu až 10,5 %. Vývoz tohto zhluku je minimálny. Spracovanie prírodného priemyslu zamestnáva 5,6% všetkých pracujúcich, čo je 130 tisíc osôb. V prípade tohto zhluku je podiel pridanej hodnoty na celkovej pridanej hodnote na úrovni 3,9 %. Podiel importu, resp. exportu na celkovom importe (exporte) dosahuje úroveň 11,5 % (9,0 %). Tento zhluk je veľmi závislý na zahraničnom obchode. V prípade zhluku výroby koksu a rafinovaných ropných produktov ide o výrazne exportne orientovaný zhluk, pričom podiel exportu na celkovom exporte dosahuje takmer dvojnásobnú hodnotu ako podiel importu na celkovom importe. Tento zhluk je významný sektor v rámci zahraničného obchodu, pričom je v ňom zamestnaných len viac ako 2 tisíc osôb, čo je 0,1 % celkovej zamestnanosti. Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu je sektorový zhluk, v ktorom je zamestnaných 63 tisíc osôb (2,7 %) a podiel pridanej hodnoty na celkovej pridanej hodnote dosahuje úroveň 3 %. Tento zhluk dosahuje druhý najvyšší podiel importu na celkovom importe (12,4 %) a taktiež druhý najvyšší podiel exportu na celkovom exporte (9,4 %). Výroba a spracovanie kovov je zhluk menší, čo sa týka zamestnanosti (takmer 30 tisíc osôb, resp. 1,3 % celkovej zamestnanosti) a tvorby pridanej hodnoty (podiel na celkovej úrovni je 1,2 %), avšak silný pri zahraničnom obchode. Podiel importu na celkovom importe dosahuje úroveň 5,1 % a podiel exportu na celkovom exporte dosahuje úroveň 6 %.

Tab. 2 Vybraté makroekonomické ukazovatele pre jednotlivé sektorové zhľuky za rok 2013
(Zdroj: Spracované autorom podľa ŠÚ SR, VZPS³)

	Zamestnanosť (v tis. osôb)	Podiel zamestnanosti na celkovej zamestnanosti (%)	Podiel pridanej hodnoty na celkovej pridanej hodnote (%)	Podiel pridanej hodnoty na HDP (%)	Podiel importu na celkovom importe (%)	Podiel importu na HDP (%)	Podiel exportu na celkovom exporte (%)	Podiel exportu na HDP (%)
Poľnohospodárstvo	77,4	3,3	4,4	4,0	1,6	1,5	1,8	1,7
Ťažba a dobývanie	11,5	0,5	0,5	0,4	10,5	9,4	0,9	0,8
Spracovanie prírodného priemyslu	130,7	5,6	3,9	3,6	11,5	10,3	9,0	8,5
Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	2,3	0,1	0,3	0,3	2,4	2,2	4,5	4,2
Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	63,5	2,7	3,0	2,8	12,4	11,1	9,4	8,8
Výroba a spracovanie kovov	29,7	1,3	1,2	1,1	5,1	4,5	6,0	5,7
Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	313,4	13,5	11,7	10,6	49,0	43,9	58,6	55
Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	23,5	1,0	3,3	3,0	0,1	0,1	0,1	0,1
Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd	27,0	1,2	1,2	1,1	0,6	0,5	0,7	0,6
Stavebníctvo	232,9	10,0	7,8	7,1	0,2	0,2	0,3	0,3
Trhové služby	817,6	35,1	45,3	41,2	6,4	5,8	8,0	7,5
Netrhové služby	600,0	25,8	17,5	15,9	0,2	0,2	0,8	0,7
Spolu	2329,2	100	100	91,0	100	89,6	100	94

Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov je pre Slovensko najvýznamnejší zhľuk priemyslu, ktorý zamestnáva viac ako 313 tisíc osôb, čo je 13,5 % celkovej zamestnanosti. Tento zhľuk predstavuje aj najvýznamnejšiu časť importu (49% celkového importu) aj exportu (55% celkového exportu). Čo sa týka ďalších dvoch zhľukov, dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu a aj dodávky vody, čistenie a odvod odpadových vôd,

³ Výberové zisťovanie pracovných síl

sú menšie ako v počte pracujúcich, tak aj v rámci zahraničného obchodu. Tieto zhluky boli agregované nie kvôli veľkosti, ale hlavne kvôli ich špecifickosti výrobného procesu. Zhluk stavebníctva predstavuje významný sektor, čo sa týka zamestnanosti, keďže v tomto zhluke pracuje takmer 233 tisíc osôb (10 % celkovej zamestnanosti). Avšak v prípade zahraničného obchodu dosahuje tento zhluk minimálne podiely importu aj exportu na celkovom súčte importu, resp. exportu (0,2% celkového importu a 0,3% celkového exportu).

Zhluk trhových služieb je najvýznamnejšie zoskupenie sektorov, čo sa týka zamestnanosti (818 tisíc osôb, resp. 35,1% celkovej zamestnanosti), aj pridanej hodnoty (podiel pridanej hodnoty na celkovej pridanej hodnote dosahuje úroveň 45,3%). Avšak v prípade zahraničného obchodu tento zhluk nedosahuje také hodnoty, ako je veľký, čo je však pri tomto zhluke prirodzené. Posledným zhlukom sú netrhové služby, v ktorom pracuje 600 tisíc osôb, čo je 25,8% celkovej zamestnanosti. Podiel pridanej hodnoty na celkovej pridanej hodnote tohto zhluke dosahuje úroveň 17,5%. Podiel importu na celkovom importe je zanedbateľný (0,2%), čo je taktiež prirodzené. Podiel exportu na celkovom exporte je vyšší, ale taktiež príliš malý voči veľkosti zhluke (0,8%).

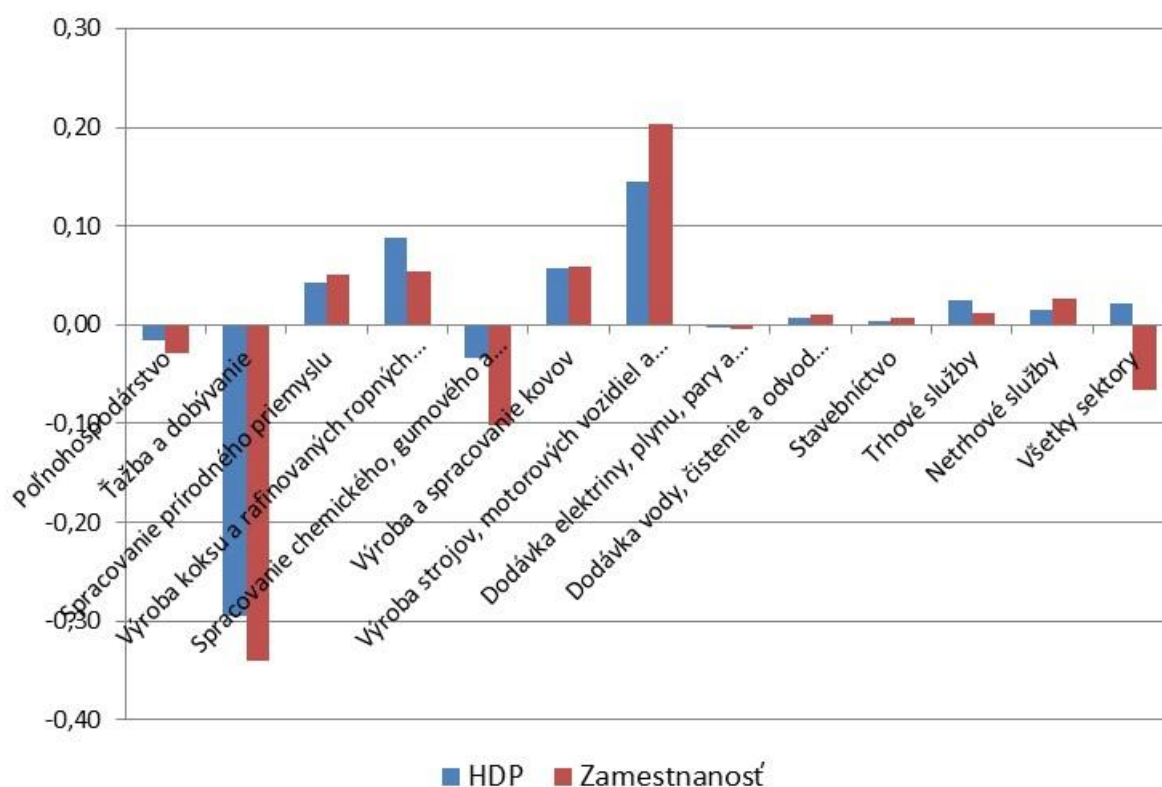
3 Analýza senzitivnosti

V tejto časti bola vytvorená analýza senzitivnosti hlavne za účelom oboznámenia sa so správaním modelu pri zadaní rovnakého exogénneho šoku na jednotlivé zhluky. Postup pri kreovaní výsledkov bol nasledovný. Ako prvý krok bol vytvorený základný scenár, ktorý až na malé numerické nepresnosti opisuje základný údajový vstup do modelu (matica spoločenského účtovania za rok 2013). Pri tomto scenári ekonomika nedosahuje žiadny rast a zamestnanosť je na rovnakej úrovni ako bol reálny stav v roku 2013. Následne pri analýze senzitivnosti boli vytvorené alternatívne scenáre, v ktorých nastal 1% rast svetových cien (nárast ceny pre EÚ aj zvyšok sveta) pre jednotlivé zhluky (12 scenárov) a posledný scenár, v ktorom nastal 1% rast svetových cien pre celú ekonomiku (nárast pre všetky zhluky). Výsledky týchto scenárov v rámci analýzy senzitivnosti na vybrané makroekonomické ukazovatele môžete vidieť v tabuľkách číslo 3 a 4 a v grafoch číslo 1 a 2.

Tab. 3 Výsledky analýzy senzitivity a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste svetových cien pre jednotlivé zhľuky sektorov (v percentách) (Zdroj: Vlastné spracovanie)

	HDP	Zamestnanosť	Export EÚ	Export ZS ⁴	Import EÚ	Import ZS	Export	Import	Príjem domácností	Príjem vlády	Príjem podnikov	Domáca produkcia	Celkové investície
Poľnohospodárstvo	-0,02	-0,03	0,03	0,03	-0,03	-0,01	0,03	-0,02	-0,07	-0,07	0,19	-0,01	-0,07
Ťažba a dobývanie	-0,29	-0,34	-0,71	-0,22	-0,55	-0,70	-0,55	-0,60	-0,18	-0,33	-0,72	-0,45	-0,43
Spracovanie prírodného priemyslu	0,04	0,05	0,39	0,08	-0,27	-0,12	0,29	-0,22	-0,55	0,04	2,33	0,13	-0,12
Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	0,09	0,05	0,55	-0,04	0,23	0,32	0,36	0,26	-0,06	0,20	0,67	0,21	0,00
Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	-0,03	-0,10	0,27	-0,34	-0,26	-0,27	0,07	-0,26	-0,37	-0,05	1,27	0,01	-0,22
Výroba a spracovanie kovov	0,06	0,06	0,78	0,58	0,21	0,58	0,71	0,33	-0,59	-0,01	2,46	0,24	0,29
Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	0,14	0,20	4,26	6,22	1,61	2,82	4,90	2,00	-4,53	-0,40	17,49	1,70	1,38
Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,01	-0,01	-0,01	0,02	0,00	0,01
Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd	0,01	0,01	0,01	-0,01	-0,04	-0,02	0,00	-0,03	-0,04	0,01	0,18	0,00	0,01
Stavebníctvo	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	-0,02	0,00	0,08	0,00	0,00
Trhové služby	0,03	0,01	-0,02	-0,12	-0,33	-0,23	-0,05	-0,30	-0,31	-0,10	1,30	-0,07	0,00
Netrhové služby	0,01	0,03	-0,01	0,03	-0,01	-0,01	0,00	-0,01	0,00	0,01	0,08	0,00	0,00
Všetky sektory	0,02	-0,07	5,40	6,05	0,48	2,22	5,61	1,04	-6,60	-0,73	24,83	1,69	0,84

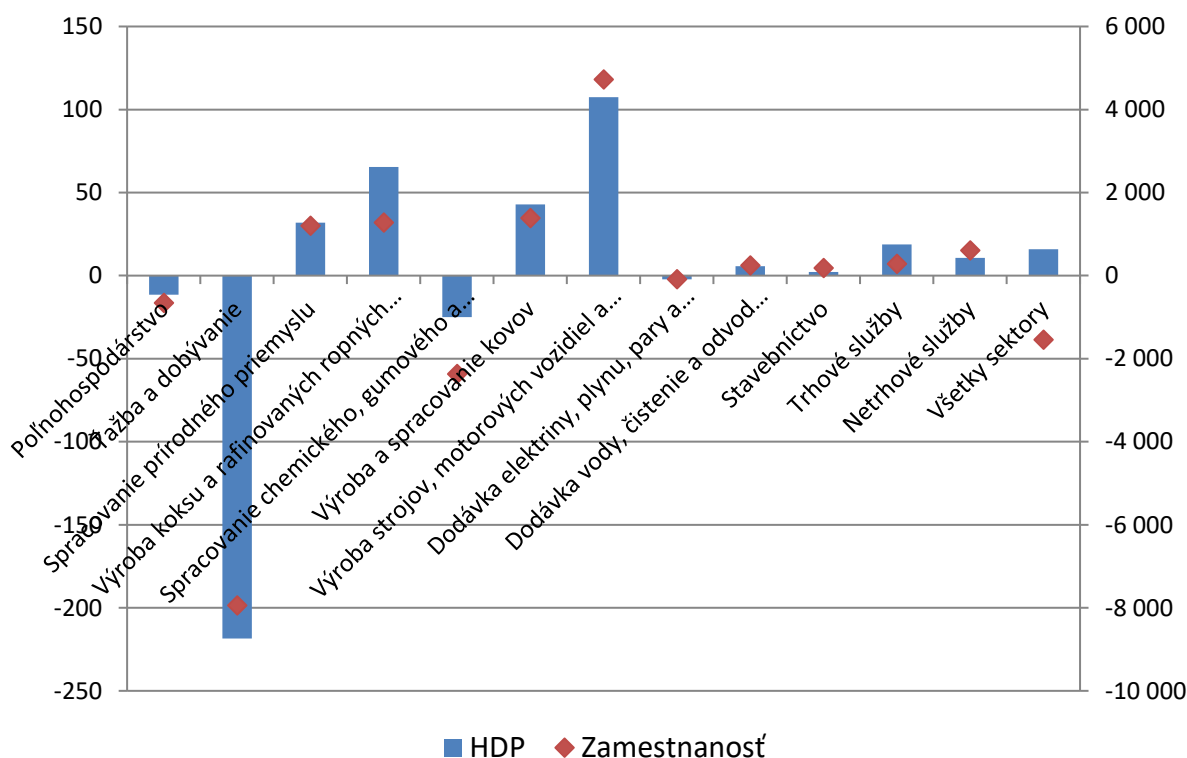
⁴ Zvyšok sveta



Graf 1 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste svetových cien pre jednotlivé zhluky sektorov (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

V prípade 1% rastu svetových cien v jednotlivých zhlukoch a ich vplyv na ekonomiku môžeme rozdeliť reakcie ekonomiky do troch kategórií. Prvá kategória predstavuje minimálne dopady na slovenskú ekonomiku. Do tejto kategórie môžeme zaradiť zhluk poľnohospodárstva, dodávky elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu, dodávky vody, čistenie a odvod odpadových vôd, stavebníctva, trhových služieb a netrhových služieb. Pri týchto zhlukoch je možné si všimnúť, že ich obchodná bilancia je takmer vyrovnaná, alebo podiel importu a exportu voči pridanej hodnote je minimálny. Zvýšenie svetových cien pre zhluky nemá významný efekt, pokiaľ je v danom zhluku minimálny zahraničný obchod alebo je v ňom zahraničný obchod vybilancovaný. Druhú kategóriu predstavujú zhluky, v ktorých pri zvýšení svetovej ceny o 1%, nastanú významné negatívne dopady na ekonomiku Slovenska. Do tejto kategórie môžeme zaradiť spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu a predovšetkým ťažbu a dobývanie. U oboch zhlukov si môžeme všimnúť, že ich obchodná bilancia je negatívna a podiel zahraničného obchodu voči veľkosti pridanej hodnoty daného zhluku je niekoľkonásobne vyšší. Zvýšenie svetovej ceny pre tieto zhluky má teda negatívny dopad na celú ekonomiku Slovenska. V prípade ťažby a dobývania je tento efekt najvýznamnejší a zasahuje ekonomiku významnou mierou. Hoci export v tomto zhluku narástol o viac ako

3,1% (narástla aj zamestnanosť o takmer 3% v tomto sektore), export a domáca produkcia v ostatných zhlukoch klesla. Poslednou kategóriou tvoria zhluky, pri ktorých zvýšenie svetovej ceny má pozitívne dopady na ekonomiku Slovenska. Do tejto kategórie patria: spracovanie prírodného priemyslu, výroba koksu a rafinovaných ropných produktov, výroba a spracovanie kovov a výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov. U väčšiny z týchto zhlukov sa dá všimnúť, že ich obchodná bilancia je pozitívna. Znamená to, že v prípade zvýšenia svetových cien producenti získajú viac a v konečnom dôsledku z toho profituje celá ekonomika. Najvýznamnejší rast HDP a zamestnanosti bol zaznamenaný v prípade zhliku výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov. V prípade zvýšenia všetkých svetových cien v ekonomike, dosiahol HDP Slovenska len nepatrný rast, zatiaľ čo celková zamestnanosť zaznamenala nepatrný pokles. Zaznamenali sme však aj významný rast príjmu podnikov, ktoré bolo tvorené nielen zvýšením domácej produkcie, ale aj zväčšeným reexportom do zahraničia.



Graf 2 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste svetových cien pre jednotlivé zhluky sektorov (HDP v mil. EUR, ľavá os; počet osôb v prípade zamestnanosti, pravá os) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Tab. 4 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste svetových cien pre jednotlivé zhľuky sektorov (v mil. EUR a počet osôb v prípade zamestnanosti) (Zdroj: vlastné spracovanie)

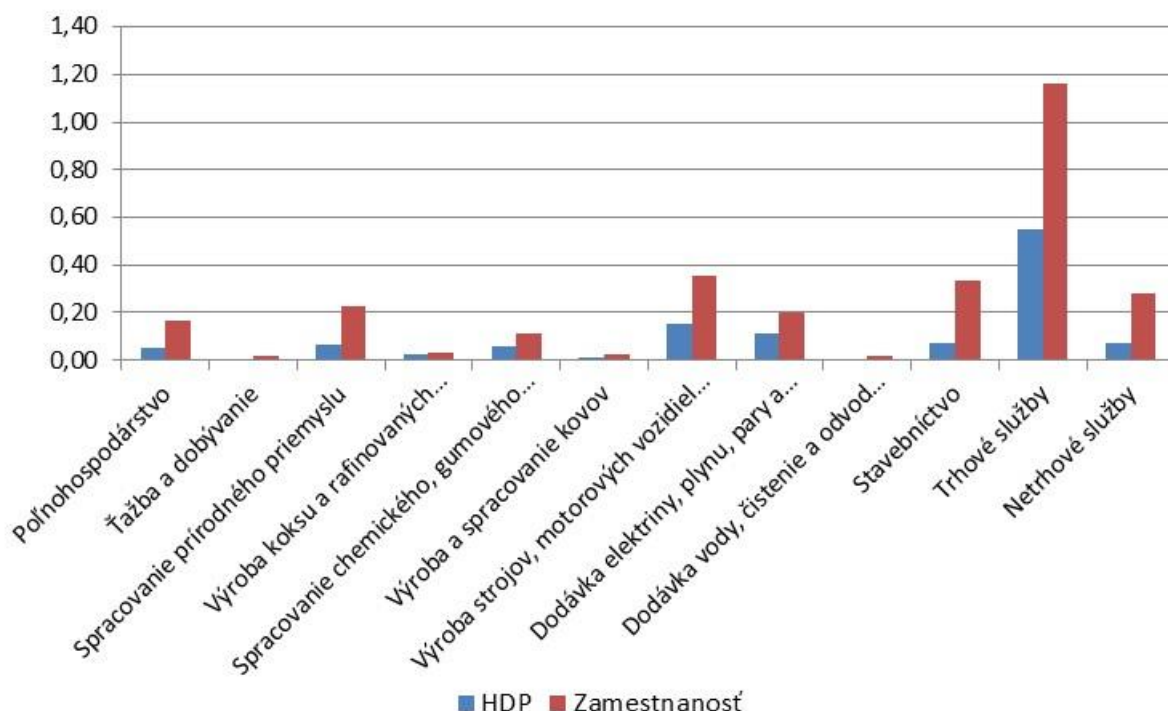
	HDP	Zamestnanosť	Export EÚ	Export ZS	Import EÚ	Import ZS	Export	Import	Príjem domácností	Príjem vlády	Príjem podnikov	Domáca produkcia	Celkové investície
Poľnohospodár.	-11	-662	13,0	6,7	-14,2	-1,4	19,7	-15,6	-29,7	-6,3	29,6	-25,0	-11,4
Ťažba a dobývanie	-219	-7 944	-331,4	-48,7	-247,3	-151,0	-380,1	-398,3	-80,1	-29,9	-111,2	-833,1	-66,2
Spracovanie prírodného priemyslu	32	1 197	184,2	18,4	-121,1	-26,3	202,6	-147,4	-245,3	3,6	359,1	235,8	-18,2
Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	65	1 277	259,2	-10,0	104,0	69,6	249,2	173,6	-25,3	17,9	102,6	396,2	0,6
Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	-25	-2 373	126,6	-77,8	-116,5	-56,8	48,9	-173,3	-163,7	-4,5	196,2	19,3	-34,7
Výroba a spracovanie kovov	43	1 383	367,0	130,5	94,4	123,3	497,5	217,7	-263,7	-0,6	378,4	439,0	45,4
Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	108	4 722	2 004,4	1 405,7	724,7	603,5	3 410,1	1 328,2	-2 015,5	-36,4	2 692,8	3 172,9	215,3
Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	-2	-89	-0,8	-0,3	-3,1	-1,2	-1,1	-4,3	-4,4	-0,7	3,3	0,6	0,8
Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd	6	243	4,0	-2,4	-17,2	-4,7	1,6	-21,9	-17,3	0,5	28,4	-5,4	0,9
Stavebníctvo	2	180	6,3	2,4	-1,7	0,7	8,7	-1,0	-7,2	-0,1	11,8	9,0	0,0
Trhové služby	19	280	-7,8	-28,0	-150,6	-49,4	-35,8	-200,0	-137,6	-8,8	199,8	-134,5	0,0
Netrhové služby	11	608	-3,4	6,0	-4,0	-1,1	2,6	-5,1	-1,1	0,5	12,7	6,0	0,1
Všetky sektory	16	-1 546	2 536,6	1 365,7	218,4	476,5	3 902,3	694,9	-2 937,8	-65,7	3 822,0	3 142,7	130,0

V rámci analýzy senzitivnosti boli v tejto časti vytvorené ďalšie alternatívne scenáre, predovšetkým kvôli verifikácii správania sa modelu nielen pri zmenách svetových cien, ale aj pri zmenách zahraničného dopytu po slovenských tovaroch a službách. Bolo vytvorených 12 scenárov, v ktorých nastalo zvýšenie exportu (svetového dopytu – EÚ aj zvyšok sveta) o 1% v danom zhľuku voči základnému scenáru. Posledný scenár v rámci analýzy senzitivnosti predstavovalo zvýšenie

zahraničného dopytu o 1% pre všetky zhľuky zároveň. Výsledky daných scenárov môžete vidieť v tabuľkách číslo 5 a 6 a na grafoch číslo 3 a 4.

Tab. 5 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste exportu pre jednotlivé zhľuky sektorov (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

	HDP	Zamestnanosť	Export EÚ	Export ZS	Import EÚ	Import ZS	Export	Import	Príjem domácností	Príjem vlády	Príjem podnikov	Domáca produkcia	Celkové investície
Poľnohospodárstvo	0,05	0,17	0,02	-0,04	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,05	0,04	0,07	0,03	0,04
Ťažba a dobývanie	0,01	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,05	0,01	0,01
Spracovanie prírodného priemyslu	0,07	0,23	0,07	-0,01	-0,02	-0,01	0,05	-0,02	0,01	0,03	0,31	0,05	0,00
Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	0,03	0,03	0,07	0,00	0,04	0,04	0,05	0,04	0,01	0,02	0,10	0,04	0,05
Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	0,06	0,11	0,14	0,07	0,02	0,04	0,11	0,03	-0,05	0,04	0,46	0,07	0,04
Výroba a spracovanie kovov	0,02	0,02	0,07	0,06	0,03	0,05	0,06	0,03	-0,02	0,01	0,15	0,03	0,00
Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	0,15	0,35	0,48	0,77	0,27	0,36	0,58	0,30	-0,17	0,09	1,42	0,26	-0,02
Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	0,11	0,20	-0,05	-0,10	0,05	-0,02	-0,07	0,03	0,37	0,10	-0,76	0,03	-0,20
Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd	0,01	0,02	0,00	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
Stavebníctvo	0,07	0,33	-0,09	-0,10	0,04	-0,01	-0,09	0,03	0,26	0,09	-0,61	0,02	0,00
Trhové služby	0,55	1,16	0,43	0,39	0,55	0,48	0,42	0,53	0,90	0,59	-0,56	0,53	0,03
Netrhové služby	0,07	0,28	-0,12	-0,12	0,03	-0,03	-0,12	0,01	0,29	0,09	-0,70	0,01	-0,03
Všetky sektory	1,04	2,57	1,00	1,00	0,93	0,88	1,00	0,92	1,33	0,99	0,33	1,01	0,01



Graf 3 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste exportu pre jednotlivé zhľuky sektorov (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

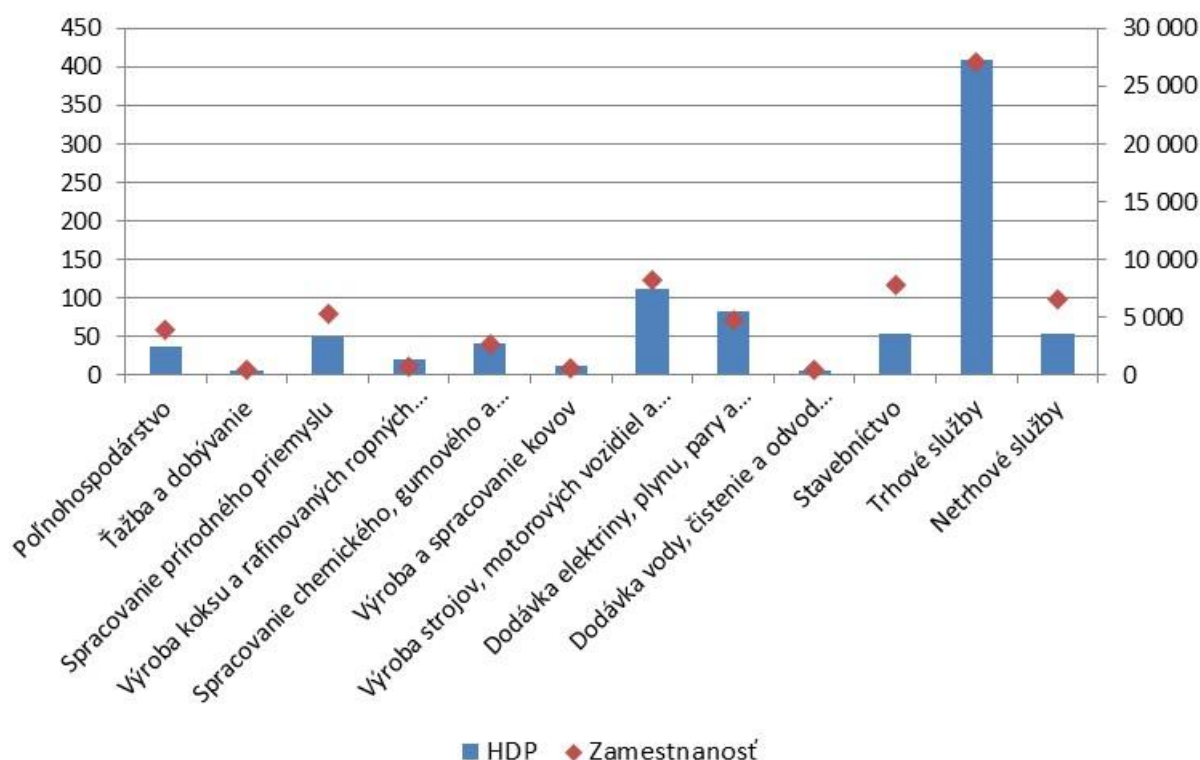
U všetkých scenárov bol zaznamenaný podľa predpokladu rast ako v prípade hrubého domáceho produktu, tak aj v prípade zamestnanosti. Percentuálny rast zamestnanosti bol vždy väčší ako percentuálny rast HDP⁵. V prípade výsledkov jednotlivých simulácií môžeme rozdeliť výsledky do dvoch kategórií. Prvá kategória predstavuje minimálnu reakciu ekonomiky na 1% zvýšení exportu v danom zhľuku. Patria sem zhľuky: ťažba a dobývanie, výroba koksú a rafinovaných ropných produktov, výroba a spracovanie kovov a dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd. Pri druhej kategórii bol zaznamenaný signifikantný rast slovenskej ekonomiky ako v prípade HDP, tak aj v zamestnanosti. Do tejto kategórie môžeme zahrnúť zhľuky: poľnohospodárstvo, spracovanie prírodného priemyslu, spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu, výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov, dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu, stavebníctvo, trhové služby a netrhové služby.

⁵ Tento úkaz bol spôsobený predovšetkým zmrazením miezd, ako to bolo popísané v metodike modelu.

Tab. 6 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste exportu pre jednotlivé zhluky sektorov (v mil. EUR a počet ľudí v prípade zamestnanosti) (Zdroj: vlastné spracovanie)

	HDP	Zamestnanosť	Export EÚ	Export ZS	Import EÚ	Import ZS	Export	Import	Príjem domácností	Príjem vlády	Príjem podnikov	Domáca produkcia	Celkové investície
Poľnohospodárstvo	37,0	3 916	9,6	-8,3	-1,4	-1,2	1,3	-2,6	21,1	3,2	10,1	59,5	6,9
Ťažba a dobývanie	5,6	441	6,4	-0,4	-0,3	-0,3	6,0	-0,5	-1,7	0,4	8,0	12,3	0,8
Spracovanie prírodného priemyslu	49,7	5 315	34,2	-2,5	-11,3	-2,6	31,8	-13,9	4,0	3,0	47,7	100,4	-0,5
Výroba koksu a rafinovaných ropných produktov	20,6	789	32,9	-1,0	16,0	8,4	31,9	24,4	3,5	2,2	15,5	68,8	7,3
Spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu	41,7	2 672	63,8	14,8	10,9	7,6	78,5	18,6	-21,8	3,4	71,5	130,0	5,8
Výroba a spracovanie kovov	11,1	557	30,9	13,8	12,0	10,4	44,6	22,4	-9,1	1,0	23,8	49,3	-0,4
Výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov	111,7	8 225	228,0	174,5	123,5	76,3	402,4	199,8	-75,2	8,1	217,9	488,2	-3,1
Dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu	82,6	4 686	-25,6	-23,2	24,8	-4,5	-48,8	20,3	163,3	8,9	-117,7	59,5	-30,5
Dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd	5,9	468	-0,7	-1,6	-2,0	-0,9	-2,3	-2,9	4,5	0,7	0,4	4,7	0,0
Stavebníctvo	53,4	7 732	-41,7	-23,3	18,0	-1,3	-65,0	16,7	115,9	8,1	-94,7	44,8	0,3
Trhové služby	409,7	27 066	200,8	88,5	246,2	103,9	289,3	350,1	398,8	53,3	-86,5	995,6	4,8
Netrhové služby	54,1	6 595	-56,0	-27,8	11,9	-6,8	-83,8	5,1	127,9	7,9	-108,4	18,8	-4,6
Všetky sektory	774,5	59 873	469,1	225,6	421,6	189,3	694,7	611,0	591,0	89,3	51,2	1 881,2	1,9

V prípade posledného scenára v rámci analýzy senzitivnosti bol export zvýšený pre všetky zhluky zároveň. Toto zvýšenie bolo vo výške 1% v porovnaní so základným scenárom. Výsledky indikujú, že zvýšenie exportu o 1% navýši HDP o 1,04% a celková zamestnanosť vzrastie o 2,57%. Na zvýšenie exportu je teda viac citlivejšia zamestnanosť než HDP.



Graf 4 Výsledky analýzy senzitivnosti a porovnanie so základným scenárom pri 1% raste exportu pre jednotlivé zhluky sektorov (HDP v mil. EUR, ľavá os; počet osôb v prípade zamestnanosti, pravá os) (Zdroj: vlastné spracovanie)

4 Analýza vybraných rizík na slovenskú ekonomiku

V rámci analýzy vybraných vonkajších rizík na slovenskú ekonomiku bol ako prvý krok vytvorený benchmarkový scenár, s ktorým boli výsledky jednotlivých simulácií porovnávané. Čistý efekt výsledku simulácie predstavoval rozdiel hodnôt medzi simuláciou a benchmarkovým scenárom. Hlavný rozdiel medzi všetkými scenármi a analýzou senzitivnosti, opísanou vyššie, spočíva predovšetkým v tom, že v tejto časti bol využitý rekurzívne dynamický CGE model.

Keďže vstup do modelu predstavuje SAM matica za rok 2013, benchmarkový scenár bol vytvorený na základe priemerného nominálneho rastu HDP a zamestnanosti medzi rokmi 2013 až 2017. Pre Slovensko to predstavuje priemerný ročný nominálny rast HDP vo výške 2,96% a priemerný rast zamestnanosti vo výške 2,28%. Benchmarkový scenár simuluje vývoj slovenskej ekonomiky na päť rokov, pričom hnacím exogénnym elementom zmien sú zmeny v produktivite výrobných faktorov a rast miezd. Efektom rastu produktivity sú následne rasty zahraničného dopytu.

Po identifikácii vybraných vonkajších rizík pre slovenskú ekonomiku bolo vytvorených 8 scenárov, ktoré sa snažili opisovať potenciálny vývoj vo vytypovaných sektorových zhlukoch a simulovať vývoj a potenciálne dopady na

ekonomiku po aplikácii dodatočných exogénnych šokov. Jednotlivé scenáre sa dotýkajú buď priamo vybraného zhluku, alebo všetkých zhlukov naraz. Na každý alternatívny scenár bol v prvom kroku aplikovaný rovnaký exogénny šok ako v benchmarkovom scenári (totožná zmena v produktivite výrobných faktorov a rastu miezd), čím bol nastavený rovnaký vývoj ekonomiky ako v benchmarkovom scenári (priemerný ročný nominálny rast HDP vo výške 2,96% a priemerný rast zamestnanosti vo výške 2,28%). Navyše bol v každom scenári použitý špecifický šok, ktorý jednotlivé simulácie odlišuje od seba a simuluje potenciálne vonkajšie riziká.

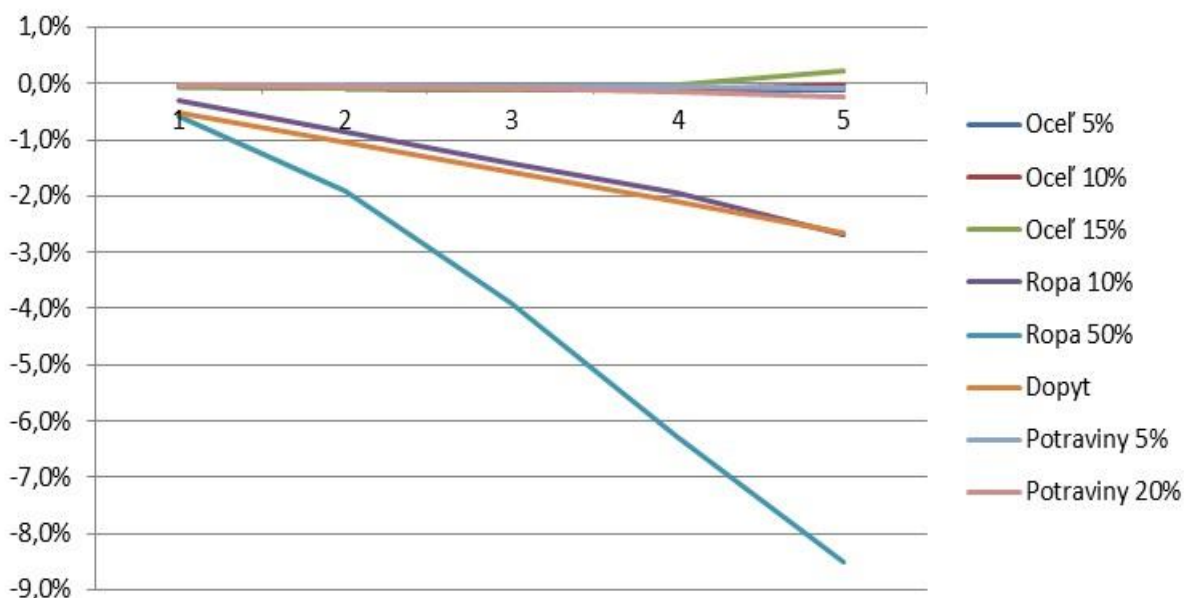
V nasledujúcej časti si popíšeme všetkých 8 alternatívnych scenárov, ktoré sme pomocou CGE modelu simulovali. Scenár *oceľ 5%* predstavuje pokles svetových cien ocele o 5% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku výroba a spracovanie kovov. Scenár *oceľ 10%* simuluje pokles svetových cien ocele o 10% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku výroba a spracovanie kovov. Scenár *oceľ 15%* predstavuje pokles svetových cien ocele o 15% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku výroba a spracovanie kovov. Scenár *ropa 10%* simuluje rast svetovej ceny ropy o 10% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku ťažba a dobývanie⁶. Scenár *ropa 50%* predstavuje rast svetovej ceny ropy o 50% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku ťažba a dobývanie. Scenár *dopyt* simuluje zníženie exportovaného množstva tovarov o 0,5% v každom roku počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena v objeme exportu nastáva v každom zhluku rovnomerne. Scenár *potraviny 5%* predstavuje rast svetových cien základných potravín o 5% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku poľnohospodárstvo. Scenár *potraviny 20%* simuluje rast svetových cien základných potravín o 20% počas najbližších 5 rokov v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Zmena svetovej ceny nastáva len v zhluku poľnohospodárstvo. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené zmeny svetových cien vo vybratých zhlukoch ekonomiky a zmeny v exporte (scenár dopyt), ktoré boli v jednotlivých simuláciách zavedené ako exogénne šoky. Nižšie uvedené zmeny boli do simulácií aplikované v jednotlivých časových obdobiach v porovnaní s benchmarkovým scenárom.

⁶ Import ropy a zemného plynu (v číselníku NACE REV. 2 označený ako 06) predstavuje 85% importovaného množstva v zhluku Ťažba a dobývanie.

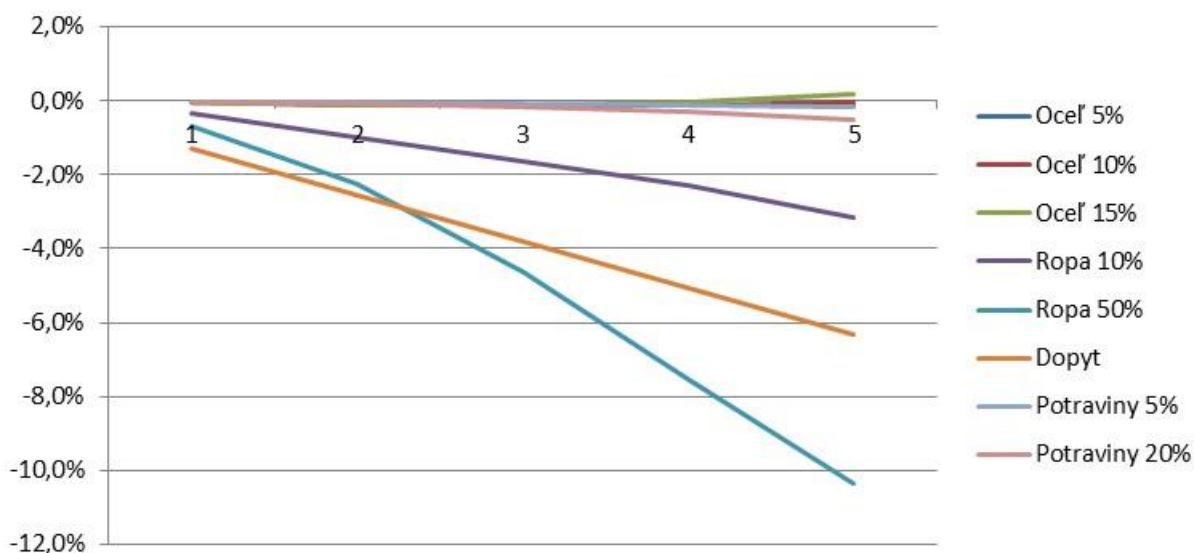
Tab. 7 Percentuálne zmeny svetových cien a veľkosti dopytu (scenár dopyt) počas jednotlivých období v porovnaní s benchmarkovým scenárom (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Scenár / časové obdobie	1	2	3	4	5	Spolu
Oceľ 5%	-1	-1	-1	-1	-1	-5
Oceľ 10%	-1	-2	-2	-2	-3	-10
Oceľ 15%	-1	-2	-3	-4	-5	-15
Ropa 10%	+1	+2	+2	+2	+3	+10
Ropa 50%	+2	+5	+9	+14	+20	+50
Dopyt	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-2,5
Potraviny 5%	+1	+1	+1	+1	+1	+5
Potraviny 20%	+1	+2	+3	+5	+9	+20

Výsledky simulácie naznačujú, že vyššie popísané vybrané riziká môžeme rozdeliť na tie, ktoré majú mierne negatívne až pozitívne efekty na slovenskú ekonomiku, a tie so silnejším negatívnym dopadom. Na grafoch číslo 5 a 6 sú znázornené výsledky scenárov v porovnaní s benchmarkovým scenárom v percentách. Graf číslo 5 opisuje percentuálne zmeny v HDP počas jednotlivých období, zatiaľ čo na grafe číslo 6 sú znázornené percentuálne zmeny celkovej zamestnanosti pre jednotlivé scenáre počas simulovaného obdobia.



Graf 5 Vývoj HDP v porovnaní s benchmarkovým scenárom pre jednotlivé scenáre (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)



Graf 6 Vývoj celkovej zamestnanosti v porovnaní s benchmarkovým scenárom pre jednotlivé scenáre (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

V prípade scenárov, v ktorých sa menila svetová cena ocele o 5%, 10% a 15%, model simuluje mierne negatívne až mierne pozitívne vplyvy na slovenskú ekonomiku. Zníženie svetovej ceny ocele o 5% má negatívny vplyv na zhluk výroby a spracovanie kovov, keďže slovenským výrobcom ocele sa znižuje profit a klesá export do zahraničia. Na druhej strane rastie import z tohto zhluku na slovenský trh. Domáca produkcia ocele klesá a zníženie ceny tovarov nie je až také výrazné, aby z toho vo väčšom meradle profitoval zvyšok ekonomiky. Celkové dopady na ekonomiku sú mierne negatívne, HDP klesol v porovnaní s benchmarkovým scenárom v poslednom sledovanom období o 109 mil. EUR a celková zamestnanosť klesla v tomto období o viac ako 3,5 tisíc osôb. V prípade scenára oceľ 10% dochádza k zaujímavému zvratu vo vývoji, keď po prvotnom miernom poklese ekonomiky sa v druhej časti sledovaného obdobia zaznamenal mierny rast. V tomto prípade je síce zhluk výroby a spracovanie kovov poznačený pádom drastickjšie, ale na druhej strane zvyšok ekonomiky začína výraznejšie profitovať z nižších svetových cien ocele. V poslednom sledovanom období sa strata na HDP zmiernila na 19 mil. EUR a celková zamestnanosť poklesla o viac ako 1,4 tisíc osôb v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Ak sa pozrieme na scenár oceľ 15%, tak je tento jav ešte výraznejší. Po prvotnom poklese v samotnom zhluku a zvyšku ekonomiky sa začína z výraznejšieho poklesu svetových cien ocele zvyšovať profit zvyšku ekonomiky pred samotným pádom predmetného zhluku. Produkcia v danom zhluku klesne na konci sledovaného zhluku o takmer tretinu v porovnaní s benchmarkovým scenárom, avšak rast zvyšku ekonomiky zapríčiní rast HDP o 205 mil. EUR a rast celkovej zamestnanosti o 5,2 tisíc osôb v porovnaní s benchmarkovým scenárom.

Výsledkom týchto troch scenárov je záver, že v prípade malého poklesu svetových cien najviac utrpí daný sektor, pričom zvyšok ekonomiky má malý profit z poklesu svetových cien. V prípade výrazného poklesu svetových cien môže byť tento pokles deštruktívny pre dané odvetvie, avšak zvyšok ekonomiky výrazne profituje z daného poklesu svetovej ceny.

Tab. 8 Percentuálne zmeny hrubého domáceho produktu jednotlivých scenárov počas jednotlivých období v porovnaní s benchmarkovým scenárom (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Scenár / časové obdobie	1	2	3	4	5
Oceľ 5%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
Oceľ 10%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,0%
Oceľ 15%	0,0%	-0,1%	-0,1%	0,0%	0,2%
Ropa 10%	-0,3%	-0,9%	-1,4%	-1,9%	-2,7%
Ropa 50%	-0,6%	-1,9%	-3,9%	-6,3%	-8,5%
Dopyt	-0,5%	-1,0%	-1,6%	-2,1%	-2,6%
Potraviny 5%	0,0%	0,0%	0,0%	-0,1%	-0,1%
Potraviny 20%	0,0%	0,0%	-0,1%	-0,2%	-0,2%

Tab. 9 Percentuálne zmeny celkovej zamestnanosti jednotlivých scenárov počas jednotlivých období v porovnaní s benchmarkovým scenárom (v percentách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Scenár / časové obdobie	1	2	3	4	5
Oceľ 5%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
Oceľ 10%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
Oceľ 15%	0,0%	-0,1%	-0,1%	0,0%	0,2%
Ropa 10%	-0,3%	-1,0%	-1,6%	-2,3%	-3,1%
Ropa 50%	-0,7%	-2,2%	-4,6%	-7,5%	-10,4%
Dopyt	-1,3%	-2,6%	-3,8%	-5,1%	-6,3%
Potraviny 5%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
Potraviny 20%	0,0%	-0,1%	-0,2%	-0,3%	-0,5%

V scenároch ropa 10% a ropa 50% boli simulované nárasty svetovej ceny ropy o 10%, resp. 50% v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Výsledky scenára ropa 10% indikujú, že ropa je jedným z najdôležitejších vstupov do výrobného procesu slovenskej ekonomiky. Kvôli zvýšeniu svetovej ceny ropy o 10% dosiahla slovenská ekonomika v poslednom sledovanom období pokles HDP o viac ako 2,3 mld. EUR a pokles celkovej zamestnanosti dosiahol takmer 82 tisíc osôb. Poklesom výroby a zamestnanosti boli zasiahnuté takmer všetky zhľuky, predovšetkým však výroba koksu a rafinovaných ropných produktov, výroba a spracovanie kovov, stavebníctvo a trhové služby. Mierny rast zaznamenalo

odvetvie ťažby a dobývania, predovšetkým kvôli vyšším svetovým cenám v tomto zhľuku. Pri scenári ropa 50%, v ktorom bol simulovaný nárast svetovej ceny ropy o 50%, je pokles ekonomiky a zamestnanosti ešte výraznejší. HDP v poslednom sledovanom období poklesol o 7,3 mld. EUR⁷ a celková zamestnanosť poklesla o takmer 270 tisíc osôb (8,5%) v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Výsledkom týchto dvoch scenárov je záver, že ropa je dôležitá komodita pre slovenskú ekonomiku, a každé zvýšenie svetových cien sa negatívne dotkne ako slovenskej produkcie, tak aj zamestnanosti.

Tab. 10 Zmeny hrubého domáceho produktu jednotlivých scenárov počas jednotlivých období v porovnaní s benchmarkovým scenárom (v mil. EUR) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Scenár / časové obdobie	1	2	3	4	5
Oceľ 5%	-33	-61	-82	-98	-109
Oceľ 10%	-33	-76	-92	-83	-19
Oceľ 15%	-33	-76	-85	-9	205
Ropa 10%	-227	-683	-1 148	-1 623	-2 310
Ropa 50%	-446	-1 501	-3 160	-5 237	-7 311
Dopyt	-399	-825	-1 278	-1 760	-2 272
Potraviny 5%	-12	-25	-40	-55	-73
Potraviny 20%	-12	-37	-74	-131	-210

Tab. 11 Zmeny celkovej zamestnanosti jednotlivých scenárov počas jednotlivých období v porovnaní s benchmarkovým scenárom (v osobách) (Zdroj: vlastné spracovanie)

Scenár / časové obdobie	1	2	3	4	5
Oceľ 5%	-1 116	-2 040	-2 773	-3 319	-3 678
Oceľ 10%	-1 116	-2 643	-3 317	-3 191	-1 411
Oceľ 15%	-1 116	-2 643	-3 238	-1 215	5 201
Ropa 10%	-8 167	-24 537	-41 044	-57 737	-81 874
Ropa 50%	-16 113	-54 372	-115 131	-191 935	-269 674
Dopyt	-30 686	-62 386	-95 142	-128 996	-163 991
Potraviny 5%	-685	-1 412	-2 183	-3 002	-3 872
Potraviny 20%	-685	-2 087	-4 197	-7 553	-12 848

V prípade scenára dopyt bol simulovaný pokles svetového dopytu (zníženie exportu) po slovenských tovaroch a službách o 0,5% ročne pre všetky zhľuky. Výsledkom simulácie CGE modelom je pokles HDP aj celkovej zamestnanosti v poslednom sledovanom období o 2,3 mld. EUR (2,6%) a 164 tisíc osôb (6,3%).

⁷ Aj v prípade tohto scenára, v ktorom model nasimuloval najvyšší pokles HDP v porovnaní s benchmarkovým scenárom, slovenská ekonomika zaznamenáva medziročný rast HDP vo výške od 0,45% až do 0,89%. Celková zamestnanosť klesla o 32 tisíc osôb.

Pokles zamestnanosti bol najvýznamnejší v zhluku poľnohospodárstva a dodávky vody, čistenia a odvod odpadových vôd. Najmenej výrazný pokles zamestnanosti bol zaznamenaný v zhluku netrhových služieb a výroby a spracovanie kovov. Zhluk, ktorý zaznamenal najmenší prepád domácej produkcie v porovnaní s ostatnými zhlukmi, je stavebníctvo. Napriek tomu, že pri poklese dopytu po slovenských tovaroch a službách model nasimuloval podobný pokles HDP ako v prípade scenára ropa 10%, celková zamestnanosť v tomto scenári bola nižšia o 82 tisíc osôb (3,2%). Výsledkom tohto scenára je fakt, že slovenská ekonomika je veľmi citlivá na zmenu zahraničného dopytu, a každé zníženie exportu sa signifikantne prejaví v celkovej zamestnanosti.

Tab. 12 Rozdiely vybraných indikátorov medzi jednotlivými scenármi a benchmarkovým scenárom v percentách (kumulatívne) (Zdroj: vlastné spracovanie)

	Oceľ 5%	Oceľ 10%	Oceľ 15%	Ropa 10%	Ropa 50%	Dopyt	Potraviny 5%	Potraviny 20%
HDP	0%	0%	0%	-7%	-21%	-8%	0%	-1%
Zamestnanosť	-1%	0%	0%	-8%	-25%	-19%	0%	-1%
Export EÚ	-7%	-9%	-8%	-14%	-22%	-8%	0%	1%
Export ZS	-4%	-4%	-3%	-4%	-8%	-8%	0%	1%
Import EÚ	-1%	-1%	0%	-13%	-37%	-7%	0%	-1%
Import ZS	-5%	-6%	-5%	-15%	-38%	-7%	0%	0%
Export	-6%	-7%	-7%	-11%	-17%	-8%	0%	1%
Import	-3%	-3%	-2%	-13%	-37%	-7%	0%	-1%
Domáca produkcia	-2%	-2%	-1%	-10%	-24%	-8%	0%	0%
Celkové investície	-4%	-8%	-11%	-10%	-30%	0%	-1%	-3%

V posledných dvoch simuláciách bol modelovaný rast cien potravín prostredníctvom rastu svetových cien v zhluku poľnohospodárstva o 5%, resp. o 20%. Keďže daný zhluok je malý v porovnaní so zvyškom ekonomiky a výrazne nevstupuje do iných častí výrobného procesu, celkový efekt na slovenskú ekonomiku je minimálny. V poslednom sledovanom období bol zaznamenaný pokles HDP o 73 mil. EUR, resp. o 210 mil. EUR a prepád celkovej zamestnanosti o takmer 4 tisíc osôb, resp. 13 tisíc osôb v porovnaní s benchmarkovým scenárom. Poklesy ako HDP, tak aj zamestnanosti sú kontinuálne a nedochádza tu k podobnému efektu ako v prípade scenárov s oceľou. Najvýraznejší pokles zamestnanosti bol zaznamenaný v zhluku spracovanie prírodného priemyslu, v ktorom sa nachádza aj sektor spracovania a výroby potravín. Na druhej strane, výrazný rast bol zaznamenaný v zhluku poľnohospodárstva. Zmenou svetových cien v zhluku poľnohospodárstva bol dosiahnutý nepatrný pokles výkonu

ekonomiky a zamestnanosti predovšetkým kvôli malému významu tohto sektora a malého prepojenia zhluku so zvyškom ekonomiky.

5 Záver

Táto štúdia sa venovala analýze dopadov vonkajších rizík na slovenskú ekonomiku s využitím CGE modelu. Jedným z jej hlavných prínosov je vytvorená analýza senzitivnosti, ktorá skúma dopady zmien svetovej ceny v jednotlivých zhlukoch ekonomiky, ktoré boli vytvorené zo slovenských sektorov v rámci tejto práce. Okrem skúmania dopadov na ekonomiku pri zmenách cien obsahuje táto analýza senzitivnosti aj potenciálne dopady pri zvýšení zahraničného dopytu po jednotlivých tovaroch a službách. Výsledkom analýzy je fakt, že pri každom zvýšení zahraničného dopytu model indikuje vždy pozitívne, aj keď v niektorých prípadoch takmer nulové, dopady na hlavné makroekonomické ukazovatele. Tento záver nie je totožný pri zvyšovaní svetových cien pre jednotlivé zhluky sektorov. Existujú sektorové zhluky, pri ktorých zvýšenie svetovej ceny má pozitívny efekt (spracovanie prírodného priemyslu, výroba koksu a rafinovaných ropných produktov, výroba a spracovanie kovov a výroba strojov, motorových vozidiel a iných dopravných prostriedkov). Pri iných zhlukoch boli zaznamenané negatívne dopady na slovenskú ekonomiku (spracovanie chemického, gumového a farmaceutického priemyslu a ťažba a dobývanie). Existujú však aj sektorové zhluky s minimálnym dopadom na slovenskú ekonomiku v prípade zvýšenia svetových cien (poľnohospodárstvo, dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu, dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd, stavebníctvo, trhové služby a netrhové služby). V prípade zvýšenia svetových cien vo všetkých sektorových zhlukoch zároveň, dosiahol simulovaný HDP Slovenska len nepatrný rast, zatiaľ čo celková zamestnanosť zaznamenala nepatrný pokles.

Druhá nosná časť tejto práce sa venovala simuláciám potenciálnych rizík a ich dopadov na slovenskú ekonomiku s využitím CGE modelu. V rámci tejto časti boli vytvorené alternatívne scenáre, ktoré simulovali zníženie svetovej ceny ocele, zvýšenie svetovej ceny ropy, zníženie zahraničného dopytu po slovenských tovaroch a službách a zvýšenie svetových cien základných potravín. Najvýraznejšie riziká predstavuje zvýšenie svetovej ceny ropy, keďže je jednou z hlavných komodít a vstupuje do výrobného procesu v rámci celej ekonomiky. Ďalším hlavným rizikom je zníženie dopytu po slovenských tovaroch a službách, keďže Slovensko je malá, otvorená ekonomika. Každé zníženie zahraničného dopytu má negatívny dopad na základné makroekonomické ukazovatele. Sila dopadov závisí predovšetkým od celkového zníženia zahraničného dopytu. Výsledky scenárov, v ktorých boli simulované zmeny svetových cien základných potravín, indikujú malé dopady na slovenskú ekonomiku. Poľnohospodárstvo

a výroba základných potravín predstavuje malú časť slovenskej ekonomiky, ktorá zásadne nevstupuje do výrobného procesu zvyšku ekonomiky. Poslednou simuláciou, ktorej sa venovala táto práca, je zníženie svetových cien ocele spôsobené predovšetkým protekcionizmom USA. Výsledky indikujú, že zatiaľ čo pri malom znížení svetovej ceny utrpí hlavne zhuk výroby a spracovanie kovov, pri výraznejšom znížení svetovej ceny je prínos pre zvyšok ekonomiky väčší ako radikálny útlm tomto zhuku.

6 Literatúra

- Arrow, K., & Debreu, G. (1954). *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*. *Econometrica*, 22, s.265-29.
- Dervis, K., De Melo, J., & Robinson, S. (1982). *General Equilibrium Models for Development Policy*. New York: Cambridge University Press.
- McDonald, S. (2007). *A static applied general equilibrium model: Technical documentation*. STAGE Version, 1.
- McDonald, S., Robinson, S., & Thierfelder, K. (2005). *A SAM Based Global CGE Model using GTAP Data*. Sheffield Economics Research Paper 2005:001.: The University of Sheffield.
- Miklošovič, T. (2014). *CGE model a možnosti jeho aplikácie na vybrané zmeny v slovenskej ekonomike*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave.
- Obadi, S. M. & kol. (2017). *Vývoj a perspektívy svetovej ekonomiky: Krehký posun z oblasti rizika do rastovej trajektórie*. Bratislava, ISBN 978-80-7144-279-0.
- Obadi, S. M., Kosír, I. & Korček, M. (2017). *The Impact of low oil prices on the trade balance of Balkan countries and their energy security*. In *Energy economics letters*, vol. 4, no. 3, p. 20-27.
- Robinson, S., Kilkenney, M., & Hanson, K. (1990). *USDA/ERS Computable General Equilibrium Model of the United States*. Economic Research Service, USDA, Staff Report AGES 9049.

7 Poďakovanie

Článok bol vypracovaný za podpory grantových agentúr APVV-16-0630, VEGA 2/0135/17 a VEGA 2/0182/17.

Zhlukovanie časových radov dlhodobých úrokových mier Clustering Time Series of Long-term Interest Rates

Beáta Stehlíková

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia
stehlikova@fmph.uniba.sk

Abstrakt: V článku sa zaoberáme zhlukovaním časových radov dlhodobých úrokových mier v štátoch Európskej únie. Aplikujeme algoritmus hierarchického zhlukovania s vhodne zvolenými parametrami, pomocou ktorého identifikujeme skupiny štátov s podobným vývojom úrokových mier. Výsledky porovnáme so zhlukovaním využívajúcim vzdialenosti počítané z korelačnej matice.

Abstract: In the paper we deal with clustering time series of long-term interest rates in the countries of the European Union. We apply a hierarchical clustering algorithm with suitable chosen parameters, by which we identify groups of countries with a similar evolution of the interest rates. We compare the results with clustering using distances computed from the correlation matrix.

Kľúčové slová: časové rady, zhlukovanie, dlhodobé úrokové miery

Key words: time series, clustering, long-term interest rates

1 Úvod

Zhlukovanie je metóda analýzy dát, ktorej cieľom je zaradiť pozorované objekty do tried tak, aby v spoločnej triede boli objekty s podobnými vlastnosťami a aby objekty zaradené do rôznych skupín boli odlišné. Nemáme pritom informáciu o tom, na základe čoho by tieto triedy mali byť definované, pozri (Rai, Singh, 2010).

Zhlukovanie v prípade, že študovanými objektami sú časové rady, predstavuje dôležitý špeciálny prípad. Existuje veľké množstvo štúdií s aplikáciami zhlukovania časových radov, zaoberajú sa napríklad – podľa prehľadového článku (Aghabozorgi, 2015), ktorý uvádza aj referencie na konkrétne štúdie – hľadaním typických priebehov spotreby energie, vzťahov medzi klimatickými indexami, prípravou astronomických dáta pred hľadaním odľahlých pozorovaní, analyzovaním dát týkajúcich sa vývoja cien akcií, génovej expresie alebo zemetrasení.

Jednou z charakteristík zhlukovania časových radov je veľký rozmer problému, nakoľko vektory hodnôt, ktoré sa zhlukujú, majú rozmer rovný dĺžke uvažovaných časových radov. V niektorých prípadoch môže ísť navyše o viacrozmerné dáta, kedy je jedným objektom niekoľko časových radov. Existujú viaceré metódy na

zníženie rozmeru úlohy, založené sú najmä spôsobe reprezentácie časového radu. Jednotlivé metódy zhlukovania časových radov sa ďalej líšia reprezentáciou časového radu, použitou mierou podobnosti, resp. vzdialenosti, metódou hľadania prototypov charakterizujúcich jednotlivé zhluky, ako aj princípom, na ktorom je založené zhlukovanie. V článku (Aghabozorgi, 2015) sa uvádzajú príklady rôznych prístupov k uvedeným otázkam, ktoré môžeme nájsť v najnovších publikáciách z tejto oblasti. Jedna z klasifikácií vychádza z toho, či sa zhlučujú celé časové rady, ich vybrané časti alebo samostatné pozorovanie. Ďalšie rozdelenie vychádza zo zhlukovania, ktoré môže byť založené na tvare, črtách alebo na určitom modeli.

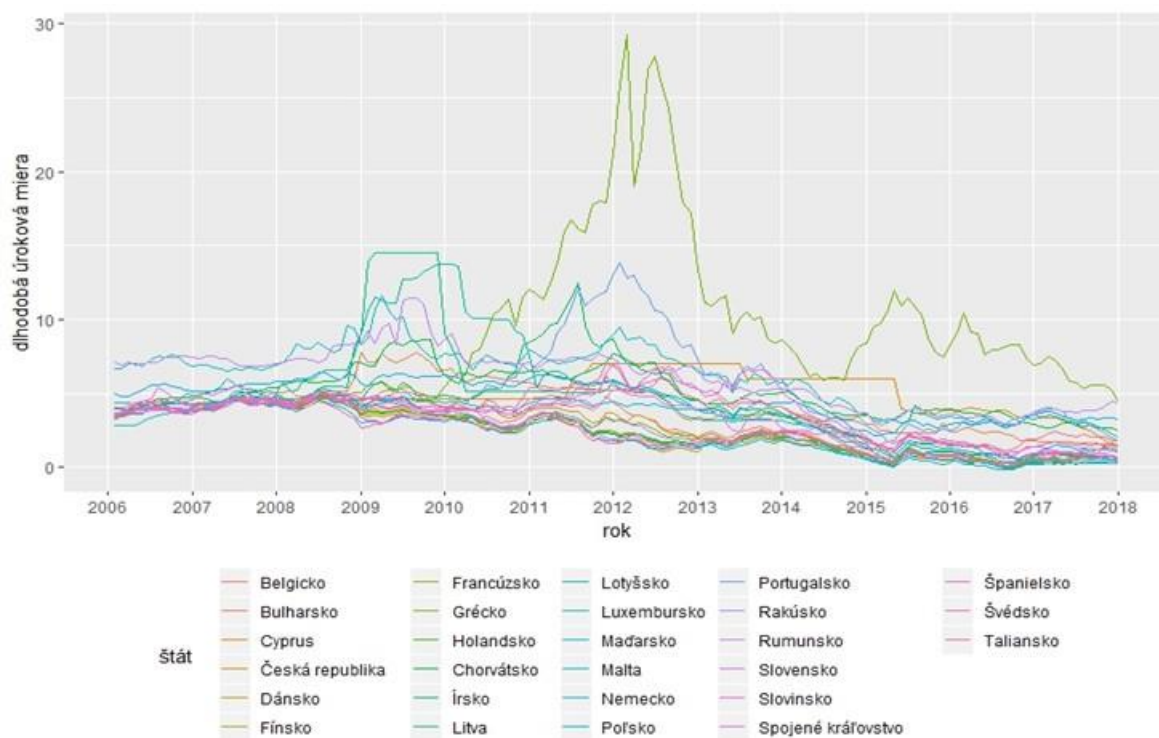
V tomto článku sa zaoberáme zhlukovaním časových radov dlhodobých úrokových mier v štátoch Európskej únie, ktoré sú dostupné na webovej stránke Európskej centrálnej banky (s výnimkou Estónska, pre ktoré neexistuje úroková miera s požadovanými vlastnosťami). Použijeme pritom hierarchické zhlukovanie implementované v knižnici *dtwclust* (Sarda-Espinosa, 2018) softvéru R a výsledky porovnáme so zhlukovaním na základe vzdialeností počítaných z korelačnej matice diferencií (Mantegna, 1999), ktoré spravíme dvoma spôsobmi – priamym použitím vzdialeností a konštrukciou najlacnejšej kostry v grafe a následným hľadaním komunit.

2 Dlhodobé úrokové miery v štátoch Európskej únie

Podľa webovej stránky Európskej centrálnej banky zverejňované dlhodobé úrokové miery predstavujú úrokové miery štátnych dlhopisov s vysokou dobou splatnosti. Ak nie sú dostupné výnosy štátnych dlhopisov, použijú sa aproximatívne hodnoty odvodené z výnosov dlhopisov v súkromnom sektore alebo iných indikátorov. Harmonizované dlhodobé úrokové miery sa používajú ako jedno z konvergenčných kritérií.

V našej analýze pracujeme s mesačnými časovými radmi 28 štátov Európskej únie (okrem Estónska, ako už bolo uvedené v úvode) z obdobia od januára 2006 do decembra 2017, čo predstavuje najdlhšie obdobie celých rokov, pre ktoré sú dostupné údaje pre všetky štáty. Výnimkou je Grécko v júli 2015, kedy bol nefunkčný finančný trh, túto chýbajúcu hodnotu sme nahradili aritmetickým priemerom susedných hodnôt. Na grafe 1 je zobrazený priebeh úrokových mier.

Hoci na grafe 1 nie je kvôli veľkému množstvu dát dobre rozlíšiť všetky štáty, môžeme si všimnúť väčšiu skupinu štátov s podobným priebehom v spodnej časti grafu. Môžeme preto očakávať jeden väčší zhluk, ktorý zodpovedá práve týmto štátom.



Graf 1 Dlhodobé úrokové miery v štátoch Európskej únie
(Zdroj: vlastné spracovanie údajov Európskej centrálnej banky)

3 Použité metódy zhlukovania

Na zhlukovanie časových radov sme použili funkciu *tsclust* z knižnice *dtwclust* (Sarda-Espinosa, 2018). Pri jej použití treba špecifikovať jej parametre, ktoré určujú, akým spôsobom sa majú dáta zhlukovať. V našom prípade môžeme postup zhrnúť nasledovne: Dáta sa najskôr transformujú pomocou Z-transformácie. Na meranie vzdialenosti medzi časovými radmi sa použije metóda založená na krížovej korelácii navrhnutá v článku (Pararrizos, Gravano, 2015). Pre realizácie normalizovaných časových radov $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ sa definuje

$$\mathbf{x}_{(s)} = \begin{cases} (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots, x_{m-s}), & s \geq 0, \\ (x_{1-s}, \dots, x_{m-1}, x_m, 0, \dots, 0), & s < 0, \end{cases}$$

kde s je počet núl pridaných na začiatok, resp. na koniec vektora. Po uvažovaní všetkých možných takýchto posunov časového radu $\mathbf{x}$ sa vypočítajú krížové korelácie $\mathbf{CC}_w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pre $w \in \{1, \dots, 2m - 1\}$ ako $\mathbf{CC}_w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{R}_{w-m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{m-k} x_{l+k} y_l, & k \geq 0, \\ \mathbf{R}_{-k}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), & k < 0. \end{cases}$$

Cieľom je nájsť také w , ktoré maximalizuje krížovú koreláciu CC_w . To určuje optimálny posun $s = w - m$ pri porovnávaní časových radov x, y . *SBD* vzdialenosť (*shaped-based distance*) časových radov je na základe tohto optimálneho posunu definovaná ako

$$SBD(x, y) = 1 - \max_w \left(\frac{CC_w(x, y)}{\sqrt{R_0(x, x) R_0(y, y)}} \right).$$

Následne sa aplikuje hierarchické zhľukovanie.

Pre porovnanie budeme uvažovať zhľukovanie na základe korelačnej matice stacionárnych časových radov. Ak vzdialenosť medzi dvoma časovými radmi definujeme ako $\sqrt{2(1 - r^2)}$, kde r je korelácia medzi týmito časovými radmi, tak podľa (Mantegna, 1999) takto definovaná vzdialenosť spĺňa axiómy vzdialenosti. Takýto spôsobom boli analyzované výnosy akcií (Mantegna, 1999), výmenné kurzy (Kesin et al., 2011), zahraničný obchod (Kantar et al., 2011) atď. Na základe vzdialenosti opäť spravíme hierarchické zhľukovanie.

Druhou metódou, pri ktorej využijeme maticu vzdialeností (poznamenajme, že tento postup sa použil aj v citovaných prácach) bude zostrojenie grafu, ktorého vrcholy sú uvažované štáty a medzi každými dvoma vrcholmi existuje hrana, ktorej váha je daná horeuvedenou vzdialenosťou. Pre tento graf zostrojíme tzv. minimálnu kostru. Kostrou grafu nazývame súvislý podgraf na všetkých vrcholoch grafu neobsahujúci cyklus, minimálnou kostrou je kostra, ktorá má najmenší súčet váh hrán. Použijeme pritom funkciu *mst* z knižnice *igraph* (Csardi, Nepusz, 2006), ktorá používa Primov (Prim, 1957), resp. Jarníkov (Jarník, 1930) algoritmus na hľadanie minimálnej kostry. Podrobnejšie informácie o teórii grafov, vrátane kostier a algoritmy na hľadanie minimálnej kostry sa dajú nájsť napríklad v (Matoušek, Nešetřil, 2012).

Pre takto zostrojenú kostru budeme hľadať tzv. komunity, pričom použijeme tzv. *walktrap community* algoritmus (Pons, Latapy, 2006) implementovaný v knižnici *igraph* jazyka R (Csardi, Nepusz, 2006), ktorý je založený na myšlienke, že pri krátkej náhodnej prechádzke po hranách grafu by sme mali tendenciu zostávať v tej istej komunite. Náhodná prechádzka po grafe je definovaná Markovovým reťazcom, ktorého stavmi sú vrcholy grafu a matica pravdepodobností prechodu P je

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{d(i)},$$

kde A je matica s váhami grafu (t. j. prvok A_{ij} sa rovná váhe hrany spájajúcej vrcholy i, j , ak takáto hrana existuje, inak sa rovná nule) a $d(i) = \sum_j A_{ij}$. Je známe, že prvok v i -tom riadku a j -tom stĺpci t -tej mocniny matice P vyjadruje pravdepodobnosť, že náhodnou prechádzkou dĺžky t sa dostaneme z vrcholu i do vrcholu j . Na základe tejto interpretácie sa vzdialenosť vrcholov i, j definuje ako

$$r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(P_{ik}^t - P_{jk}^t)^2}{d(k)}},$$

kde n je počet vrcholov grafu a t je pevne zvolená dĺžka náhodnej prechádzky, ktorú uvažujeme (autori odporúčajú hodnoty medzi 3 a 8). Analogicky sa definuje vzdialenosť medzi dvoma podmnožinami vrcholov C_1, C_2 ako

$$r_{C_1, C_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{(P_{C_1 k}^t - P_{C_2 k}^t)^2}{d(k)}}, \text{ kde } P_{Ck}^t = \frac{1}{|C|} \sum_{i \in C} P_{ik}^t$$

a vzdialenosť vrcholu i od množiny vrcholov C tak, že sa vrchol nahradí jednoprvkovou množinou vrcholov a použije sa predchádzajúca definícia. Samotné vytváranie komúní v grafe sa začína situáciou, v ktorej každý vrchol tvorí samostatnú komunitu. V každom kroku sa vyberú dve komunity a zlúčia sa. Komunity, ktoré sa zlúčia, sú vybrané tak, aby sa minimalizovala suma štvorcov vzdialeností medzi každým vrcholom a komunitou, do ktorej patrí.

4 Výsledky zhľukovania pomocou knižnice dtwclust

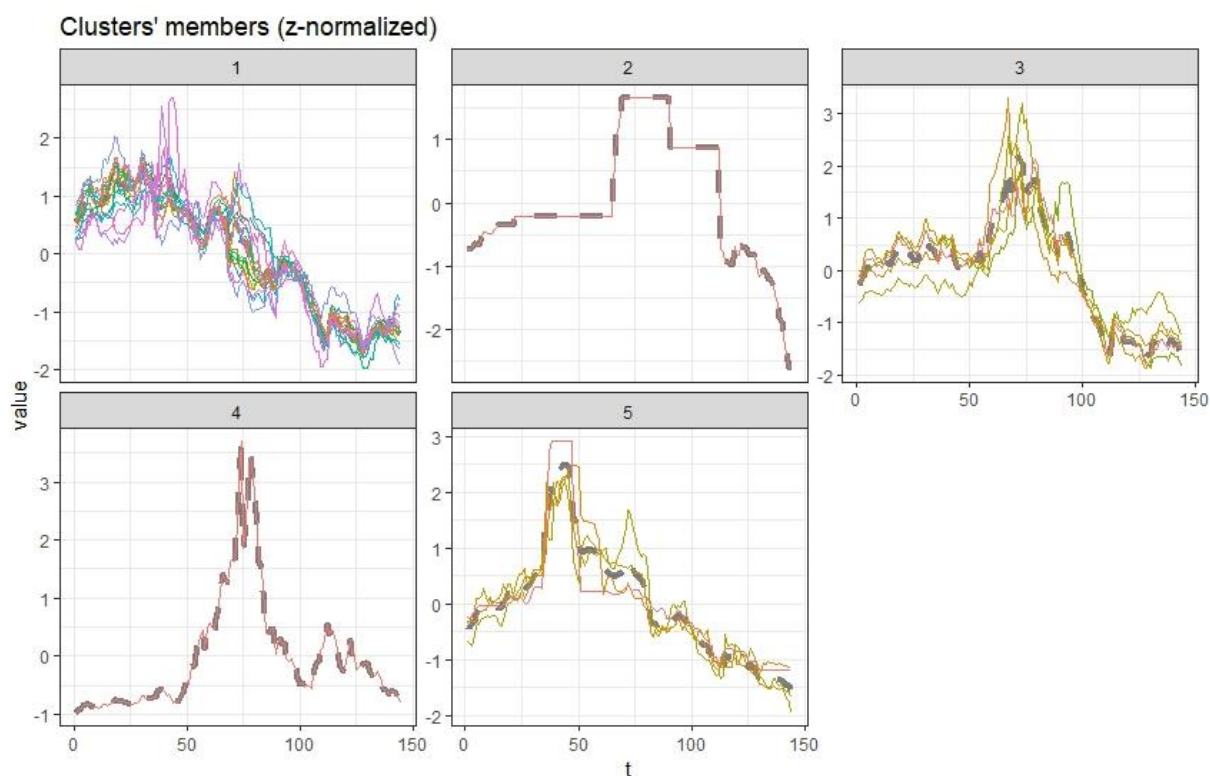
Pri použití knižnice *dtwclust* (Sarda-Espinosa, 2018) so špecifikáciou zodpovedajúcou algoritmu uvedenému v kapitole 3 sme zvolili 5 zhľukov, nakoľko pri tomto počte sú výsledné zhľuky transformovaných dát vizuálne vyhovujúce. Graf 2 zobrazuje priebeh Z – transformovaných dát v jednotlivých zhľukoch. V tabuľke 1 uvádzame štáty, ktoré patria do jednotlivých zhľukov.

5 Porovnanie so zhľukovaním založenom na vzdialenosti počítanej z korelácií

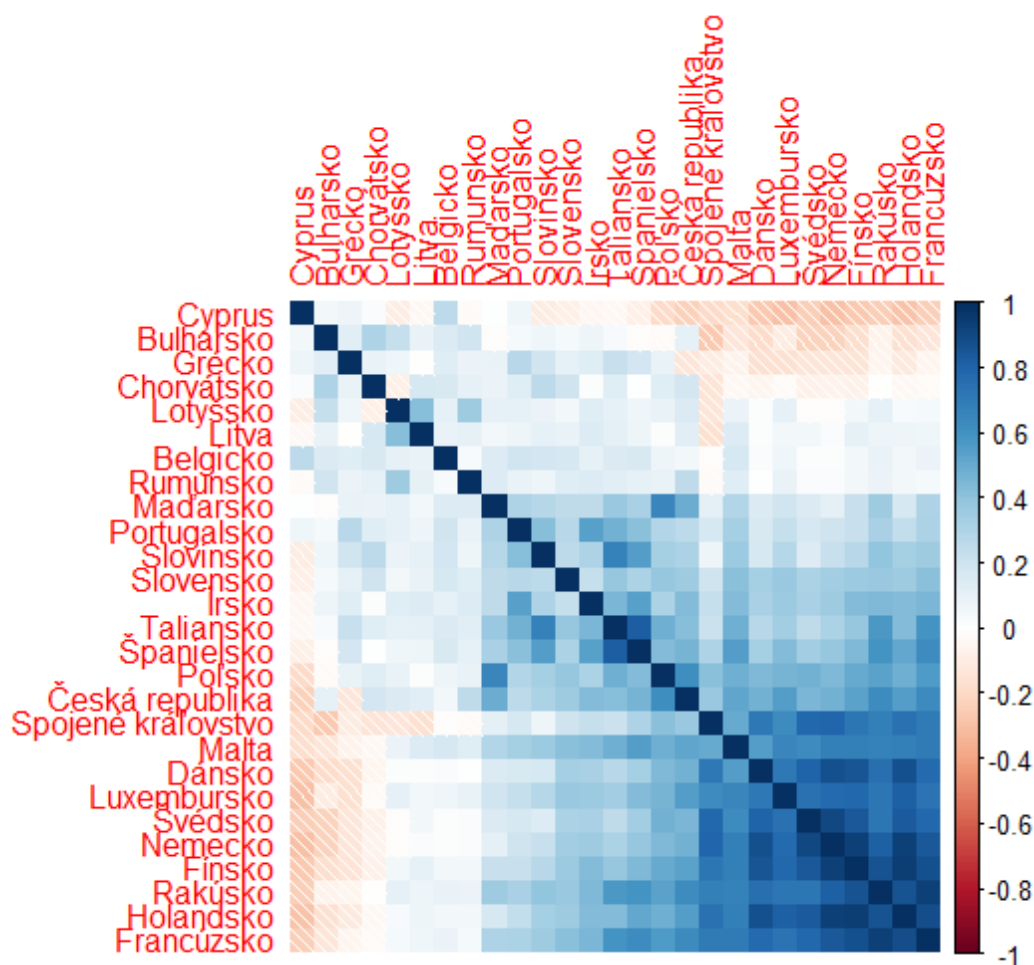
Kvôli splneniu predpokladu stacionarity uvažovaných časových radov sme pracovali s diferenciami úrokových mier. Na grafe 3 zobrazujeme vypočítané korelácie, pričom štáty sú preusporiadané tak, aby bolo možné pozorovať ich zhľukovanie. Z korelácií sme vypočítali vzdialenosti vzťahom z kapitoly 3 a pre lepšie porovnanie výsledkov sme pri následkom hierarchickom zhľukovaní znovu zvolili 5 zhľukov. Zaradenie štátov do zhľukov, uvádzame v tabuľke 2.

Tab. 1 Štáty zaradené do zhlukov (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

Zhluk	Štáty
1	Belgicko, Česká republika, Dánsko, Fínsko, Francúzsko, Holandsko, Luxembursko, Maďarsko, Malta, Nemecko, Poľsko, Rakúsko, Rumunsko, Slovensko, Spojené kráľovstvo, Švédsko
2	Cyprus
3	Írsko, Portugalsko, Slovinsko, Španielsko, Taliansko
4	Grécko
5	Bulharsko, Chorvátsko, Litva, Lotyšsko

**Graf 2** Transformované dáta zaradené do zhlukov únie (*Zdroj: vlastné spracovanie*)**Tab. 2** Štáty zaradené do zhlukov pri využití vzdialenosti diferencií (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

Zhluk	Štáty
1	Česká republika, Dánsko, Fínsko, Francúzsko, Holandsko, Luxembursko, Malta, Nemecko, Spojené kráľovstvo, Švédsko
2	Írsko, Maďarsko, Poľsko, Portugalsko, Slovensko, Slovinsko, Španielsko, Taliansko
3	Litva, Lotyšsko, Rumunsko,
4	Bulharsko, Chorvátsko, Grécko
5	Belgicko, Cyprus

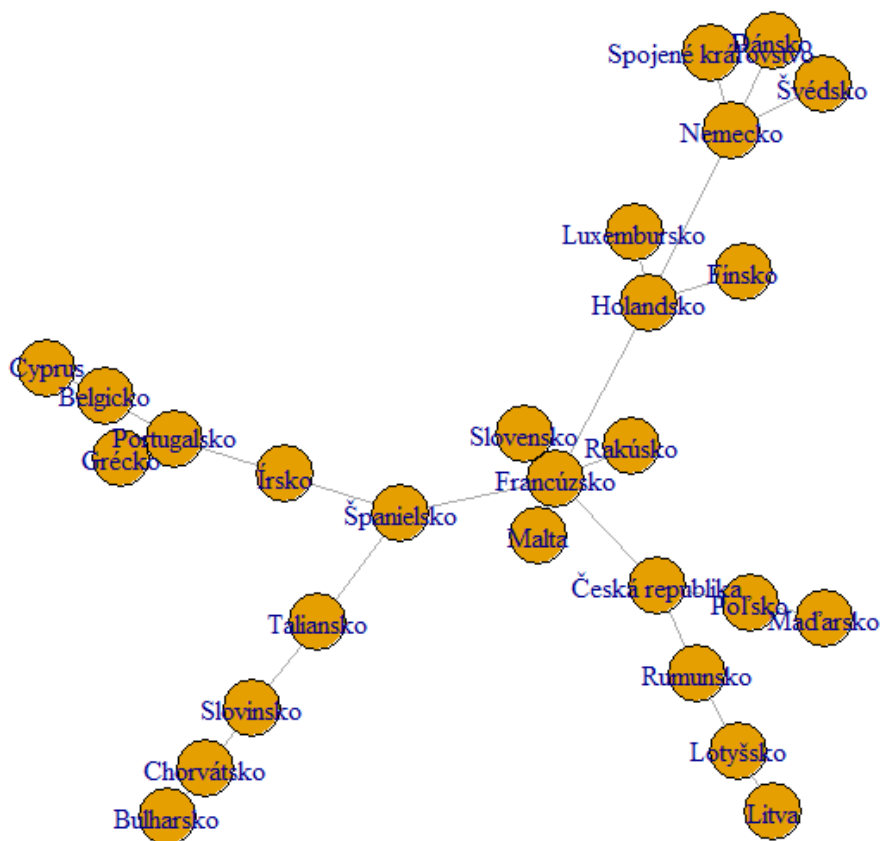


Graf 3 Korelácie diferencií dlhodobých úrokových mier (Zdroj: vlastné spracovanie)

Zo vzdialeností vypočítaných z korelácií diferencií sme ďalej zostrojili graf, pre ktorý sme našli minimálnu kostru, ktorú zobrazujeme na grafe 4. Použitím *walktrap community* algoritmu sme opäť našli 5 komunit. Tieto komunity (zhluky) sú uvedené v tabuľke 3.

Tab. 3 Štáty zaradené do zhlukov pri použití minimálnej kostry (Zdroj: vlastné spracovanie)

Zhluk	Štáty
1	Fínsko, Francúzsko, Holandsko, Írsko, Luxembursko, Malta, Rakúsko, Slovensko, Španielsko
2	Dánsko, Nemecko, Spojené kráľovstvo, Švédsko
3	Česká republika, Litva, Lotyšsko, Maďarsko, Poľsko, Rumunsko
4	Bulharsko, Chorvátsko, Slovinsko, Taliansko
5	Belgicko, Cyprus, Grécko, Portugalsko



Graf 4 Minimálna kostra počítaná z diferencií dlhodobých úrokových mier
(Zdroj: vlastné spracovanie)

6 Záver

Aplikovali sme zvolenú metódu hierarchického zhľukovania časových radov na údaje o dlhodobých úrokových mierach v štátoch Európskej únie a zaradili sme ich do piatich zhľukov. Štáty s výrazne odlišným priebehom – Cyprus a Grécko – sa ocitli v samostatných zhľukoch. Veľká časť štátov mala podobný priebeh úrokových mier a tvoria jeden veľký zhľuk. Ostatné sa rozdelili do dvoch zhľukov, ktoré sú logické aj z hľadiska ekonomického vývoja v týchto štátoch. Prvý zhľuk tvoria Írsko, Portugalsko, Slovinsko, Španielsko, Taliansko. V druhom zhľuku je Bulharsko, Chorvátsko, Litva a Lotyšsko.

Tieto výsledky môžeme porovnať so zhľukovaním na základe vzdialeností počítaných z korelačnej matice, ktorá je často používaná v literatúre pre rôzne oblasti aplikácií. Túto vzdialenosť sme využili dvoma rôznymi spôsobmi – priamo v hierarchickom zhľukovaní a na konštrukciu grafu a následne jeho minimálnej kostry.

Pri porovnaní zaradenia štátov do zhľukov si môžeme všimnúť, že niektoré boli zaradené do spoločného zhľuku pri viacerých metódach, kým iné sa spolu neocitli nikdy (čo vzhľadom na výrazne rôzny priebeh úrokových mier v niektorých

štátoch nie je prekvapujúce). Štáty, ktoré boli v rovnakom zhluku vo všetkých troch prípadoch, sú:

- dvojice: Poľsko – Maďarsko, Litva – Lotyšsko, Bulharsko - Chorvátsko, Írsko – Španielsko, Taliansko – Slovinsko,
- skupina štátov: Spojené kráľovstvo, Švédsko, Dánsko, Nemecko,
- skupina štátov: Fínsko, Francúzsko, Holandsko, Luxembursko, Malta, Rakúsko.

Lepšie výsledky by sme mohli dostať porovnaním výsledkov viacerých zhlukovacích metód. V tom prípade zrejme nie úplne všetky zaradia určitú skupinu štátov do toho istého zhluku, preto sa chceme v ďalšej našej práci zaoberať otázkou skombinovania výsledkov pri použití viacerých algoritmov, resp. viacerých možných nastavení ich parametrov, či počtu zhlukov. Cieľom bude zistiť, či takéto výsledky neumožnia lepšie oddelenie zhlukov ako analýza pôvodných dát vybranou (z určitého hľadiska preferovanou) metódou.

7 Literatúra

- Aghabozorgi, S., Shirkhorshidi, A. S., & Wah, T. Y. (2015). *Time-series clustering—A decade review*. Information Systems, 53, 16-38
- Nepusz, G. C. A. T., & Csárdi, G. (2006). *The igraph software package for complex network research*. Complex Systems, 1695(5), 1-9.
- Jarník, V. (1930). *O jistém problému minimálním*. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, 6, 57-63.
- Kantar, E., Deviren, B., & Keskin, M. (2011). *Hierarchical structure of Turkey's foreign trade*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 390(20), 3454-3476.
- Keskin, M., Deviren, B., & Kocakaplan, Y. (2011). Topology of the correlation networks among major currencies using hierarchical structure methods. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 390 (4), 719-730.
- Long-term interest rate statistics for EU Member States.
https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/long_term_interest_rates/html/index.en.html
- Mantegna, R. N. (1999). *Hierarchical structure in financial markets*. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 11(1), 193-197.
- Matousek, J., & Nešetřil, J. (2012). *Kapitoly z diskretní matematiky*. Karolinum, Praha.
- Paparrizos, J., & Gravano, L. (2015, May). *k-shape: Efficient and accurate clustering of time series*. In Proceedings of the 2015 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (pp. 1855-1870). ACM.
- Pons, P., & Latapy, M. (2006). *Computing communities in large networks using random walks*. Journal of Graph Algorithms and Applications, 10(2), 191-218.

- Prim, R. C. (1957). *Shortest connection networks and some generalizations*. Bell system technical journal, 36(6), 1389-1401.
- Rai, P., & Singh, S. (2010). *A survey of clustering techniques*. International Journal of Computer Applications, 7(12), 1-5.
- Sarda-Espinosa, A. (2018). dtwclust: Time Series Clustering Along with Optimizations for the Dynamic Time Warping Distance. R package version 5.5.1 <https://CRAN.R-project.org/package=dtwclust>

8 Poďakovanie

Článok bol vypracovaný za podpory grantu VEGA 1/0251/16.

Praktická reprezentace času pro modely lidského chování

A Practical Representation of Time for the Human Behaviour Modelling

Tomáš Vintř^a, Kerem Eyisoy^b, Tomáš Krajník^a

^a Artificial Intelligence Center, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Karlovo nám. 13, Praha 2, Czech Republic

^b Marmara University, Faculty of Engineering, Computer Engineering Department, Göztepe Kampus, Kadıkoy 34722 – ISTANBUL, TURKEY

vintrtom@fel.cvut.cz, kerem.eyisoy@gmail.com, krajnt1@fel.cvut.cz

Abstrakt: V tomto článku představujeme zobrazení času do omezeného vícerozměrného vektorového prostoru pro potřeby mobilních robotů operujících v zalidněných oblastech. Cílem je identifikovat a efektivně reprezentovat vzory běžného lidského chování, které vykazují značnou periodicitu. Základní myšlenkou je identifikovat tyto periodicity v roboty nasbíraných datech a promítnout čas do množiny soustředných kružnic ležících v různých rovinách vícerozměrného vektorového prostoru, kde každá kružnice reprezentuje jinou periodicitu. Takovéto zobrazení zajišťuje, že Euklidovská vzdálenost detekovaných událostí vykazujících podobné periodicity je poměrně malá, přestože se může jednat o události časově velmi vzdálené či vzácné. Díky tomu je možné periodické události shlukovat a nalezené shluky statisticky zkoumat. V článku představujeme dvojí využití našeho přístupu, a to detekování anomálního chování na základě strojem naučeného modelu běžného chování a předpověď počtu lidí na daném místě v budoucnosti. Experimenty prokazují vyšší spolehlivost a kvalitu modelů naučených naší metodou ve srovnání s metodami, které se dnes v autonomní robotice používají.

Abstract: This paper proposes a representation of the time domain intended for mobile robots which operate in human-populated environments. The method aims to identify and efficiently represent patterns of human habits, which are driven by periodic processes, such as the daily cycle. The core idea is to identify periodicities in the data observed by the robot and to project the time onto a series of circles, which represent the identified periodicities. This representation ensures that Euclidean distance of periodically-occurring events is low even if these events are temporally distant. This property allows to cluster events that occur at similar times of a day or similar days of a week etc. In the use-cases presented, we demonstrate that the method allows for temporally dependent anomaly detection and it can predict the future presence of people across large areas. The experiments indicate that the method detection reliability and prediction accuracy outperforms state-of-the-art tools used in statistical analysis for autonomous robots.

Klíčové slová: časoprostorové modely, dlouhodobá autonomie, chronorobotika

Keywords: spatio-temporal models, long-term autonomy, chronorobotics

1 Introduction

Due to the recent improvements in computational hardware and rapid advances in artificial intelligence and machine learning, society expects that intelligent robots will be soon available to help people in their daily tasks. The

robots are supposed to work in diverse conditions for long periods and assist humans not only in the repetitive tasks but also in the tasks where humans are inefficient due to their slow reactions, low dexterity, or emotional stress. Robots are also supposed to be helpful in the tasks, where long-term concentration is needed or where the low frequency of actions is in contrast to the necessity of rapid and precise reaction when these events occur. Moreover, due to the massive data flow and progress in the databases, autonomous systems are now understood as knowledge holders that can help inexperienced humans to make qualified decisions in unusual situations.

Nowadays, robots can efficiently and autonomously operate in controlled, structured or known environments. However, apart from industrial plants, which are already designed for robots, most environments are neither accurately structured or exactly known. To deal with that, a significant effort in robotics was aimed at the problem of mapping, where a robot, supervised or operated by a human, creates a model of its operational environment using its sensors. In this way, a robot can turn an unknown environment into a known one, which allows to deploy it in spaces, which are not apriori known. However, most of the world is not static, and the presence of changes causes the created model to become obsolete over time. This makes the long-term autonomous operation of intelligent robots in changing environments difficult.

The problem of long-term operation in environments that change over time was typically addressed in the context of robot mapping and self-localisation, see (Cadena et al., 2016), (Kunze et al., 2018). Some of these methods aimed at removal of changing aspects of the environment (Lowry, Milford, 2016), or updated the models according to the changes observed (Biber, Duckett, 2009), (Churchill, Newman, 2013). Other teams tried to learn from the changes observed, and they attempted to model the persistence (Tipaldi et al., 2013), (Rosen et al., 2016), periodicity (Krajník et al., 2017) or effect (Neubert et al., 2015) of the changes. The STRANDS project (Hawes et al., 2017) applied the Frequency Map Enhancement (FreME) method (Krajník et al., 2017) to the environmental models that their robot used for localisation, planning and scheduling. This allowed the STRANDS robots to explicitly model the periodic components of the environmental dynamics and make long-term predictions about of the human behaviour in the deployment area. During a four-month deployment of the robot at a care home, the project demonstrated that the predictive ability of the aforementioned temporal model results in gradual improvement of the robot efficiency over time. One of the main problems encountered in the project was the robots inefficiency when navigating near or around humans (Hebesberger et al., 2017). The most popular environmental model in robotics is the occupancy grid (Elfes, 1989), which is used both for

localisation and motion planning. Thus, most spatio-temporal models build their spatial representations on the occupancy grid paradigm. In (Kucner et al., 2013), the authors model the typical direction of change in every cell based on the previous and current state of the measured phenomenon in the neighbouring cells. Another model can be found in (Wang et al., 2014), where authors predict the path of the measured phenomenon based on the actual situation in the grid using the input-output Markov model. The long-term model of the changes in the occupancy grid is based on the spectral analysis of changes of occupancy in every cell during the long period (Krajník et al., 2017). The authors then extended this spatio-temporal model to be able to predict also the direction of the movement through the cell in the specific time (Molina et al., 2018).

However, the occupancy grid is memory consuming, and it results in quantisation noise, and therefore, methods that model the space in a continuous domain were developed (O’Callaghan, Ramos, 2012). Although the continuous models are computationally intensive to build and maintain, using specific optimisations can be used to speed up the model building, so that they could, in theory, be applied in robotics (Ramos, Ott, 2016). For example, the authors of (Kucner et al., 2013) showed that using continuous models build by expectation-maximisation methods allows to model movement of crowds and the flow of the wind (Kucner et al., 2017). They also showed that the model of the movement of people could be used to improve the efficiency and safety of navigation (Palmieri et al., 2017).

The STRANDS project (Hawes et al., 2017) indicated that the periodicities of human habits (sleep, going to work) are dominant compared to month-long trends, and modelling the periodicities is beneficial for robots. As in the case of spatial models, authors like (Chinellato et al., 2017) show that using continuous models of time periodicity results in better performance than dividing the timeline in arbitrary intervals, e.g. hour of a day or day of a week.

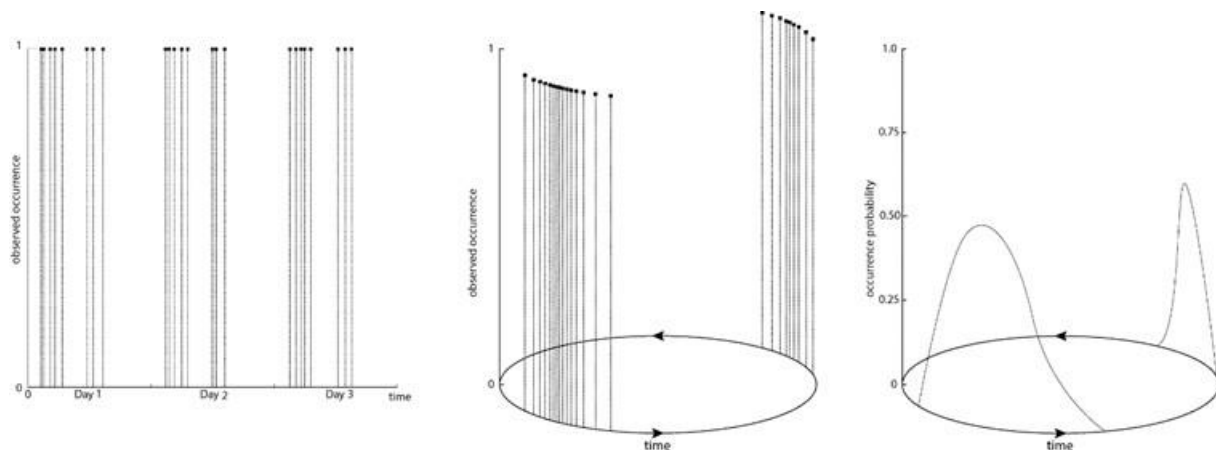
Inspired by the success of periodic models of time to represent environment changes and by the efficiency of continuous models, we propose a specific transformation of the time domain intended to represent the long-term dynamics of human-populated environments. To keep the temporal model continuous, while representing the periodicities, we project the time into a set of circles, where every circle is derived from the periodicity detected in the measured phenomenon. This projection causes the time-dependent events with the same periodicity to be projected into the same areas of a circle that corresponds to the modelled periodicity. The measured phenomenon projected into this vector space can be then analysed using standard statistical and machine learning tools. This projection reflects the concept that human behaviour in the morning of different days is more similar than in the morning

and afternoon of the same day although the same day afternoon and morning is temporally closer than mornings of two different days. The continuous nature of the model also reflects the fact that a given phenomenon does not change abruptly during midnight although 23:59 and 0:01 appear to be distant.

2 Method Description

2.1 Concept

In (Vintr et al., 2017) we proposed a concept of modelling human activities over the time in their natural environment. We hypothesised that there are some patterns of human behaviour over the timeline. As these patterns are derived from the routines and habits of humans, these patterns show periodical and continuous nature. We also hypothesised that there are no or negligible trends in these patterns due to the nature of human habits. Let us consider these examples outlined in (Vintr et al., 2018) to explain the periodicity and continuity of human behaviour:



Graph 1 An example of the warped hypertime projection. Positive detections during three days are projected onto a warped hypertime with a one day period. The parameters of the distribution of a random time-dependent phenomenon that exhibits a periodic behaviour can be easily estimated. (Source: own elaboration)

Such a periodical behaviour is not only forced by natural physical demands like fatigue or hunger, but also by social demands like regular working hours or the compulsory education system.

- the human behaviour is very similar during every morning as opposed to the difference in behaviour during morning and afternoon of one randomly chosen day,
- human behaviour five minutes before midnight and five minutes after midnight is probably very similar, although we compare behaviour in two different days,
- contrary to that, human behaviour during Sunday afternoon is probably different from behaviour on Monday afternoon.

To create the model of the time-dependent patterns of human behaviour, we need to estimate the parameters of their distribution. As the timeline unfolds indefinitely, it is not possible to go back and repeat the experiment at the same time. Thus, infinite, continuous linear time is not suitable as a domain for time-dependent feature parameters estimation, especially for short duration and rare events.

The conventional approach to this task, known as time series forecasting, is to divide time-dependent events into three different components - a trend, seasonal and cyclic patterns - and analyse them separately (Gould et al., 2008). The cyclic patterns are generally not predictable changes in the time series, seasonal patterns are the periodical changes, and the trend is continuous growth or decrease of measured values. To model human behaviour with the assumption of a dominant periodical nature and no trend, but with the emphasis on the continuity, we not only find a model of prominent periodicities but also project the timeline into the new multidimensional vector space as shown in the Graph 1. This projection preserves the continuity while ensuring that the time domain is constrained, and therefore it is possible to estimate distribution parameters of the time-dependent periodical patterns.

Such a periodical behaviour is not only forced by natural physical demands like fatigue or hunger, but also by social demands like regular working hours or the compulsory education system.

2.2 Warped Hypertime

Let us have time series $R(t_i)$, $i = 1 \dots n$, where $R(t_i) = 1$ for detected and $R(t_i) = 0$ for not detected occurrence of the studied phenomenon in the time t_i . Let the function $M(t_i)$ be the estimation of the expected value: $M(t_i) = \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(t_i)$. First, we apply the spectral decomposition derived from the Frequency Map Enhancement (Krajník et al., 2017) on the difference of this time series and the model to find prominent periodicities. In particular, for every considered period $\mathcal{T}_k$, $k = 1 \dots Y$, we calculate components of the frequency spectrum and select the most prominent periodicity T_τ as follows:

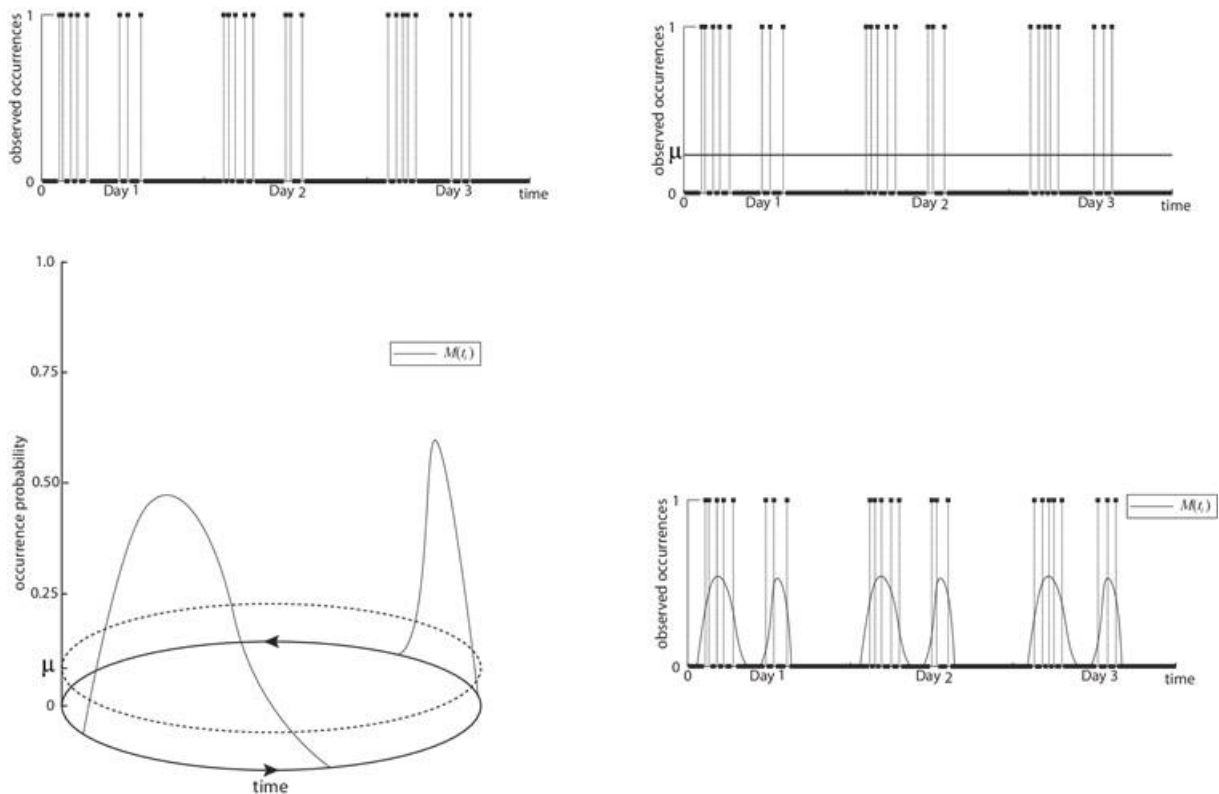
$$T_\tau = \arg \max_{\mathcal{T}_k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R(t_i) - M(t_i)) e^{(-1j)2\pi t_i / \mathcal{T}_k} \quad (1)$$

where $M(t_i)$ is the actual model of the time series.

Then, for the chosen period T_τ and for each t_i of the original measured data we create 2d warped hypertime (Graph 2) as follows:

$$t_i \rightarrow \left(\cos \frac{2\pi t_i}{T_\tau}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_\tau} \right) \quad (2)$$

where warped hypertime $\left(\cos \frac{2\pi t_i}{T_\tau}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_\tau} \right)$ forms a circle in a 2d plane which represents the periodicity and continuity of the occurrences. The time values of occurrences and non-occurrences with the similar position relative to the periodicity T_τ are projected on the similar position on the circle. Then, we use clustering over the projected points to create a new model $M(t_i)$, see Graph 2.



Graph 2 Warped hypertime iterations: The method input are observed occurrences of given phenomena over time (top left). Then, a model of the data is established (top right). Then, a dominant frequency of the model error is found by (1), the data points are projected into a unit circle and their distribution is modelled (bottom left). The model is then compared to the original data again (bottom right) and the process is repeated until the model error keeps decreasing. (Source: own elaboration)

Once knowing the new $M(t_i)$, the process is repeated using (1) and each iteration extends the hypertime vector space with another couple of dimensions.

We denote these additional projections of t_i as $@t_i$ where:

$$^{@+1}t_i = \left(@t_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau@+1}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau@+1}} \right), \quad (3)$$

in particular:

${}^2\mathbf{t}_i = \left({}^1\mathbf{t}_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}} \right) = \left(\cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}} \right)$ and ${}^1\mathbf{t}_i = \left(\cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}} \right)$. We call the projection of time into the multiple circles 'Warped Hypertime', or 'WHyTe'.

2.3 Warped Hypertime Space

The previous method only modelled a given phenomenon over time only. However, in (Krajník et al., 2018) we also hypothesised the possibility to extend traditional spatial models with the warped hypertime. We call this projection 'Warped Hypertime Space', 'WHyTeS'.

As before, let us have spatio-temporal detections of occurrences and non-occurrences $(\mathbf{x}_i, t_i)$. Neglecting spatial components $\mathbf{x}_i$ of vectors $(\mathbf{x}_i, t_i)$, we can analyse periodicities of the time series $R(t_i) = R(\mathbf{x}_i, t_i)$ according to the (1) and obtain periods T_τ ordered by their influences. We choose the dominant period T_τ and extend the space with two new dimensions. Then we project every measurement $(\mathbf{x}_i, t_i)$ into the new vector space as follows:

$$(\mathbf{x}_i, t_i) \rightarrow \left(\mathbf{x}_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_\tau}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_\tau} \right), \quad (4)$$

Similarly to the previous case, we perform clustering again over the extended space to obtain the model and recalculate the model error. This allows to repeat the process, extending the vector space with additional two dimensions and create a more dimensional warped hypertime space. We will denote the projection of $(\mathbf{x}_i, t_i)$ into the warped hypertime space ${}^@\mathbf{x}_i$, where:

$${}^{@+1}\mathbf{x}_i = \left({}^@\mathbf{x}_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_{@+1}}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_{@+1}}} \right), \quad (5)$$

and ${}^0\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i$, ${}^1\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{x}_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}} \right)$,

${}^2\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{x}_i, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_1}}, \cos \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}}, \sin \frac{2\pi t_i}{T_{\tau_2}} \right)$, etc.

2.4 Model Building

To create a model, we perform centroid-based clustering, followed by an expectation maximisation method, which estimates a mixture of Gaussians that represent the frequency of a given phenomenon over a given spatiotemporal

volume. Although the model is continuous, one has to discretise it to determine the model error mover time, which is necessary to extract the dominant periodicity required to perform the hypertime extension. Moreover, one of the most desired spatial models used in robotics is an occupancy grid, and therefore, our model should be able to predict the occupancy of grid cells at a particular time. For that, one has to determine a basic volume element, which defines the resolution (granularity) of the discrete model.

The volume b of the basic element of the space-time has to be chosen accordingly to the purposes of the model (for example 1 squared meter hour $[m^2h]$). Thus, we define a histogram $\mathbf{H}$ with bins of volume b .

Spatio-temporal positions of bins are defined by vectors $(\mathbf{b}_k, t_k)$, where k are meaningful indices. Vectors $(\mathbf{b}_k, t_k)$ should lie inside the area of the bin, preferably in the spatio-temporal centres of bins. The values v_k connected to each bin are then calculated as a sum of values $R(\mathbf{x}_i, t_i)$ assigned to every $(\mathbf{x}_i, t_i)$ that lies inside of the volume of the corresponding bin. Using the histogram $\mathbf{H}$, we modelled the most likely number of occurrence of the measured phenomenon per chosen volume unit b as follows:

- 1 Assuming that every measure $R(\mathbf{x}_i, t_i)$ is one or zero, apply a clustering method to $@\mathbf{x}_i$ for every $(\mathbf{x}_i, t_i): R(\mathbf{x}_i, t_i) = 1$,
- 2 using a given clustering method, calculate centroids $\mathbf{c}_c$ and covariance matrices Σ_c of every cluster, and fuzzy membership $u_{i,c}$ of every $@\mathbf{x}_i$ to every cluster, where c is an index of clusters,
- 3 using $\mathbf{c}_c$ and Σ_c calculate membership $u_{k,c}$ of every $@\mathbf{b}_k$ to every cluster,
- 4 calculate cluster weights α_c as

$$\alpha_c = \frac{\sum_i u_{i,c}}{\sum_k u_{k,c}}. \quad (6)$$

- 5 Then the function

$$\rho(\mathbf{x}_0, t_0) = \sum_{j=1}^c \alpha_j u_{0j} @\mathbf{x}_0 \quad (7)$$

estimates the number of occurrence of the concerned phenomenon in the neighbourhood with volume b around $(\mathbf{x}_0, t_0)$.

The quality of the model is based on two parameters, the number of clusters and the set of chosen periodicities to create the hypertime. Typically, we create several models with different parameters and chose the one with minimal overall differences between $\rho(\mathbf{b}_k, t_k)$ and v_k . Unfortunately, we did not find any elegant heuristic to estimate these parameters.

3 Use cases

3.1 Anomaly Detection

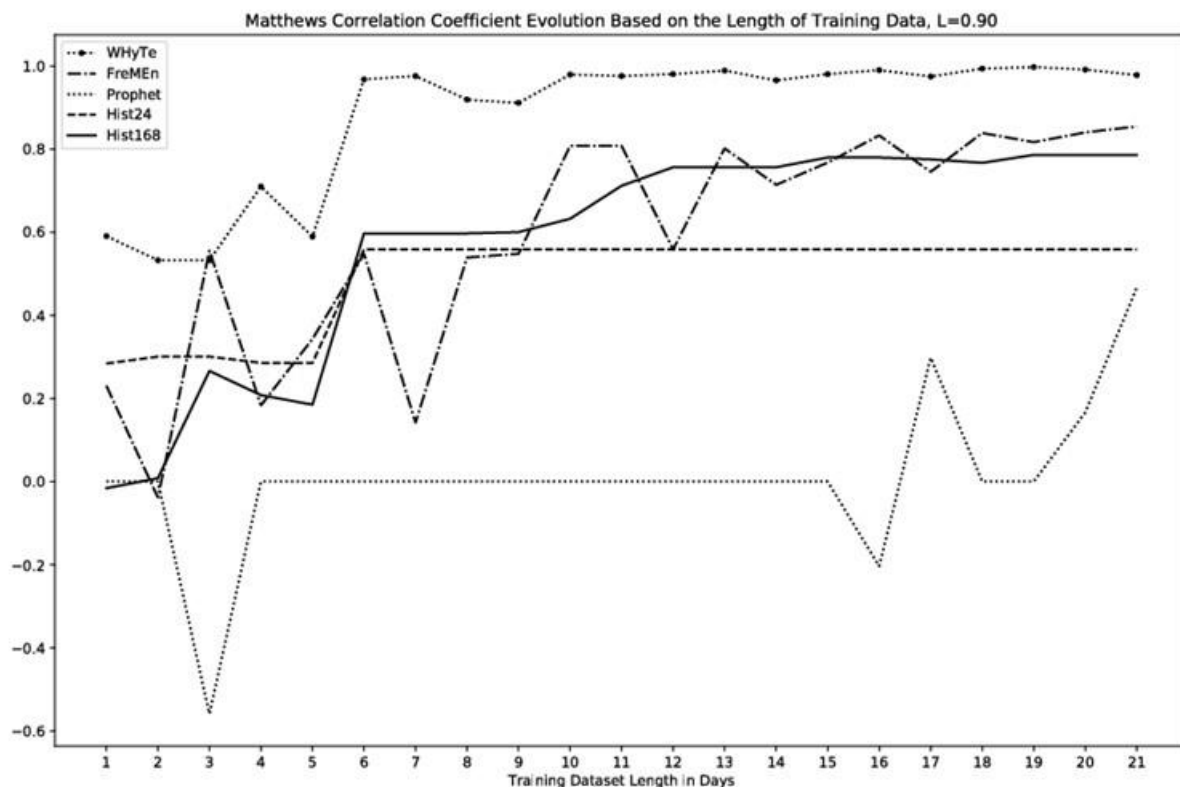
This use case was motivated by the security scenario of the STRANDS project (Hawes et al., 2017), where a regularly-patrolling robot observes the presence of people at a given area and reports anomalous behaviour. To do so, a robot should consider the temporal context of a given activity or person presence, e.g. person present during late hours in an office is an unusual event whereas people occurrence in an office during a day is common.

The scenario is described in detail in (Vintr et al., 2018), which aims specifically with anomaly detection in human presence. The dataset used was gathered at a lecturer's office at the University of Lincoln, where we installed a depth camera, which was taking snapshots every 5 seconds for two years. For our purposes, we selected 4 weeks of data indicating either ones (humans present) or zeros (humans absent). From these data, we formed 21 training datasets, which started on the same day and lasted for 1 to 21 days. The testing dataset consists of one week of people presence captured 18 weeks after the start of the training dataset. To allow for anomaly detection testing, we manually labelled anomalous events and artificially introduced additional anomalies. The method was expected to detect both labelled and artificially introduced events. To show the evolution of the quality of the predictions, we created models of the human presence based on each training dataset.

The models using warped hypertime were established as follows. First, we divided the gathered time series into two separate time series - one of them consisting of occurrences (person presence) and the second of non-occurrences (person absent). Then we apply the warped hypertime as described in section 2.2, and create clusters over the two modelled series. To estimate the probability of occurrence, we project a given time point into the hypertime and calculate its membership in both „presence“ and „absence“ sets. The probability is then estimated by a ratio of these memberships.

We use these models to detect anomalous events in the 18th week. We quantify the ability to detect anomalous events by the Matthews correlation coefficient (Matthews, 1975). We compare this ability of models based on warped hypertime to other approaches, e.g. FreMEn, the Frequency Map Enhancement method (Krajník et al., 2017) developed to model binomial time series, and Prophet (Taylor, Letham, 2018), an open source, time series analysis tool created by Facebook. We used three comparison metrics (Graph 3): a number of days needed to learn the correct model, the correctness of anomaly detection and robustness to the choice of significance level (Vintr et al., 2018). We proved that it is possible to model patterns matching different periodicities

by the projection of the timeline into the multidimensional warped hypertime. It also proved the hypothesis, that it is possible to neglect trend in time series when modelling human behaviour. The Prophet was the only one method that estimated the trend, which led on our dataset to a poor prediction of models trained on shorter training datasets. It needed almost six weeks of training data to predict anomalous events equally to the FreMEn.



Graph 3 Evolution of the Matthews correlation coefficient using significance level $\alpha = 0.1$. On the x-axis there are numbers of days used to train model, on the y-axes are values of Matthews correlation coefficient $[-1; 1]$. A coefficient of value 1 means correct labelling of outliers by the corresponding method. (Source: (Vintr et al., 2018))

3.2 Spatio-Temporal Distribution of Pedestrians

In the second scenario, we use the hypertime to model and predict future occurrences of people across a corridor junction. In particular, our model generates a time-dependent function over a 2d domain, representing people density, see Figure 1. In (Krajník et al., 2018) we evaluated the methods predictive power when modelling a temporal evolution of a function with a 2d domain. The dataset, collected at the School of Computer Science at the University of Lincoln (Molina et al., 2019), consists of vectors (x, y, t) , which indicate human detections (Yan et al., 2017) at a T-shaped junction over three weeks. We divided the dataset to the training part, consisting of two weeks of

measurement and the test part consisting of two days from another week. The model was created according to the procedure described in section 2.4.

The model was then compared in the power of prediction to three other spatio-temporal models (Graph 4). These three models are not continuous, but they associate each cell of the spatial 2d grid with a temporal model $R_k(\mathbf{b}_k, t_i)$ as follows: The *Mean*, is an average of the past measurements in each spatial cell, the *Hist* splits each day into the 24 intervals and calculates an average of each one-hour interval in each cell, and *FreMEn* uses spectral analysis to represent and predict periodicities of people presence frequency at each cell.

We tested the prediction capabilities of different methods on different resolutions, i.e., histograms with different size of basic volume b , ranging from 5 to 20 centimetres and 5 to 10 minutes. The values of the mean square errors that we use to compare the prediction and test dataset values differ for each resolution. To better visualise errors of different models on different resolutions, we show the percentual reduction of a mean square error (MSE) of predictions of every compared method to a MSE of prediction obtained by the *Mean*, i.e.

$$reduction = \left(1 - \frac{MSE_{method}}{MSE_{Mean}}\right) \cdot 100. \quad (8)$$

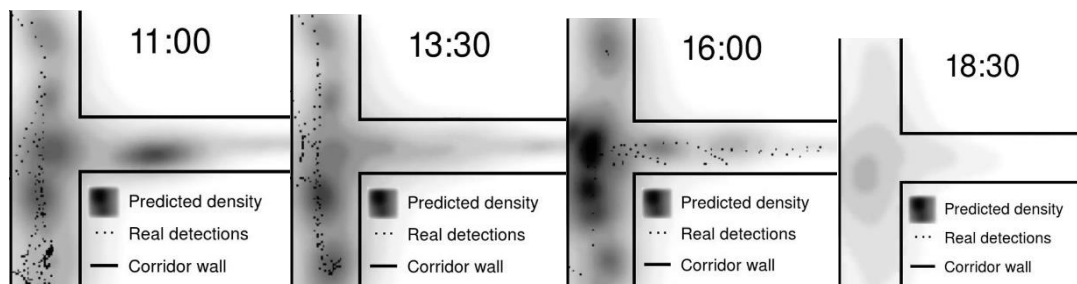
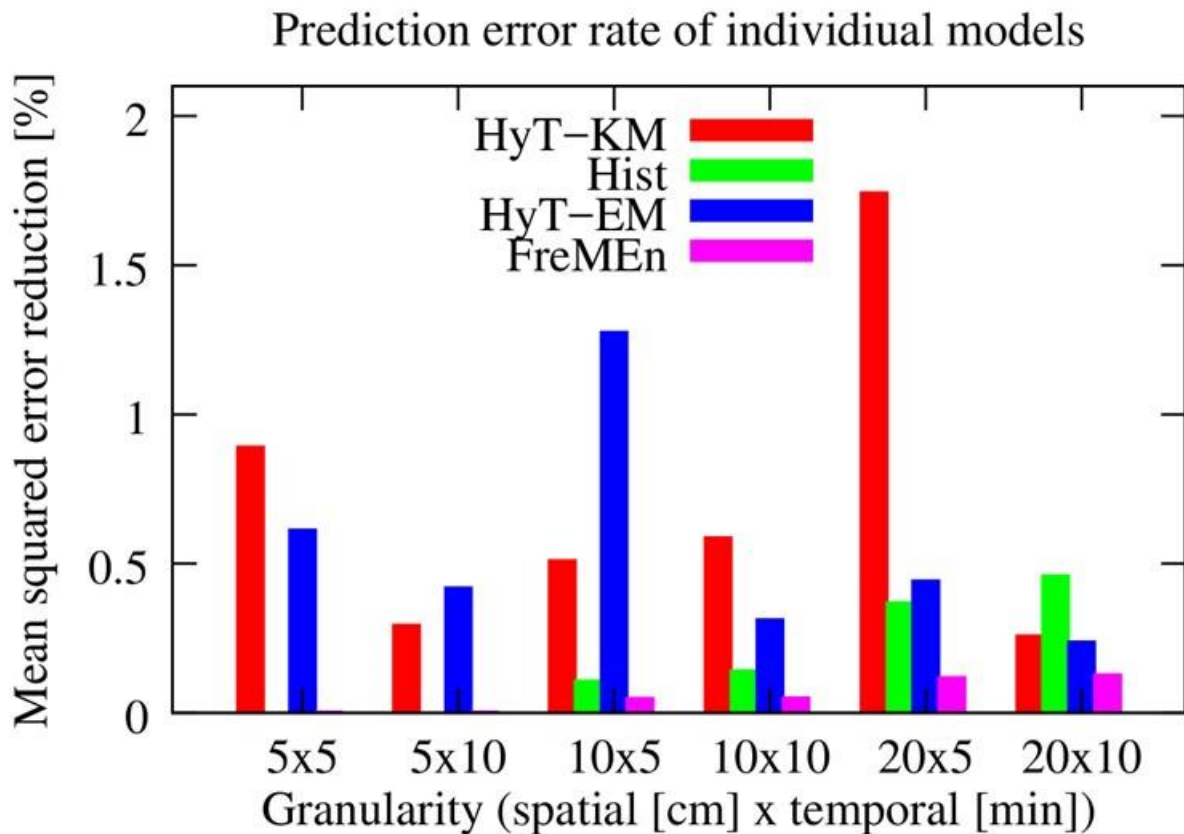


Figure 1 Predicted people occurrence over a T-shaped corridor. (Source: <https://youtu.be/4SW4j7DDxYE>)

Although the reduction of MSE does not seem significant (Graph 4), the visualisation of this model shows its useful properties. It is visualised in the form of a video that can be found online. Every video frame, see Figure 1, consists of 5 minutes time frame reconstruction and the whole video represents the evolution of the density functions over two days. We can see that the model changes over time and respects corridor boundaries. Moreover, the maxima of the predicted distributions are located close to the doors. It should be noticed, that the models based on the warped hypertime space reduce the error even for small granularities, although they are memory much less demanding compared to discrete representations build by the *Mean*, *FreMEn* and *Hist* methods.



Graph 4 Comparison of the predictive power of different methods. The graph shows the reduction of the prediction error compared to the *Mean* model, which neglects the temporal properties of the people presence. The indicated values (y-axes) are calculated using the equation (8). On the x-axis, there are cell sizes or basic volumes. Beside the *Hist* and *FreMEn*, models we compare two models based on the WHyTeS: *HyT-KM*, which used k-means for clustering, and *HyT-EM*, which used EM GMM for clustering. (Source: (Krajník et al. 2018))

We proved that it is possible to extend spatial dimensions by the warped hypertime and create the model of frequencies of a measured phenomenon over this projection. While being memory efficient, building the representation takes longer time compared to the other methods we tested. For example, *FreMEn* calculated all temporal models for each cell in less than a minute, but our method builds the spatio-temporal model in several minutes (CPU Intel Core i7-5005U).

4 Conclusions

In this paper, we propose a representation of the time domain, which allows mobile robots to represent periodic changes occurring in human-populated environments. The representation allows to identify and represent patterns of human habits, which are driven by periodic processes, such as the daily cycle. The core idea is not to represent the time as a one-dimensional timeline, but to project it onto a series of circles, which represent the periodicities identified in

the data by means of spectral analysis. This representation causes the distances of periodically-occurring events to be low even if these events are separated by significant time intervals. In other words, the representation naturally clusters events that occur at similar times of a day or similar days of a week etc. To evaluate the approach, we apply it to two different datasets, which represent the presence of people over several weeks. The evaluations demonstrate that the proposed representation allows capturing people habits, which can be used not only to predict future people presence across corridors, but also to identify unusual occurrences of persons within a given area. Comparison of the performance of the proposed methods to other state-of-the-art methods indicates that it can predict peoples presence with higher accuracy, and it is more successful in detecting anomalies.

In the future, we will extend the method, so that it will be able to generate time-dependent probabilistic distributions of given environmental phenomena. Moreover, we will evaluate the impact of the method on the efficiency of mobile robot operation in long-term deployments.

5 References

- Biber, P., & Duckett, T. (2009). Experimental analysis of sample-based maps for long-term SLAM. *The International Journal of Robotics Research*, 28(1), 20-33.
- Cadena, C., Carlone, L., Carrillo, H., Latif, Y., Scaramuzza, D., Neira, J., ... & Leonard, J. J. (2016). Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: Toward the robust-perception age. *IEEE Transactions on Robotics*, 32(6), 1309-1332.
- Chinellato, E., Mardia, K. V., Hogg, D. C., & Cohn, A. G. (2017, July). An incremental von mises mixture framework for modelling human activity streaming data. In *Proceedings ITISE 2017*. Leeds.
- Churchill, W., & Newman, P. (2013). Experience-based navigation for long-term localisation. *The International Journal of Robotics Research*, 32(14), 1645-1661.
- Elfes, A. (1989). Using occupancy grids for mobile robot perception and navigation. *Computer*, (6), 46-57.
- Kunze, L., Hawes, N., Duckett, T., Hanheide, M., & Krajník, T. (2018). Artificial Intelligence for Long-Term Robot Autonomy: A Survey. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(4), 4023-4030.
- Lowry, S., & Milford, M. J. (2016). Supervised and unsupervised linear learning techniques for visual place recognition in changing environments. *IEEE Transactions on Robotics*, 32(3), 600-613.
- Gould, P. G., Koehler, A. B., Ord, J. K., Snyder, R. D., Hyndman, R. J., & Vahid-Araghi, F. (2008). Forecasting time series with multiple seasonal patterns. *European Journal of Operational Research*, 191(1), 207-222.

- Hawes, N., Burbridge, C., Jovan, F., Kunze, L., Lacerda, B., Mudrova, L., ... & Ambrus, R. (2017). The STRANDS project: Long-term autonomy in everyday environments. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 24(3), 146-156.
- Hebesberger, D. V., Dondrup, C., Gisinger, C., & Hanheide, M. (2017, March). Patterns of use: how older adults with progressed dementia interact with a robot. In *Proceedings of the Companion of the 2017 ACM/IEEE International Conference on Human-Robot Interaction* (pp. 131-132). ACM.
- Krajník, T., Fentanes, J. P., Santos, J. M., & Duckett, T. (2017). Fremen: Frequency map enhancement for long-term mobile robot autonomy in changing environments. *IEEE Transactions on Robotics*, 33(4), 964-977.
- Krajník, T., Vintr, T., Molina, S., Fentanes, J. P., Cielniak, G., & Duckett, T. (2018). Warped Hypertime Representations for Long-term Autonomy of Mobile Robots. *arXiv preprint arXiv:1810.04285*.
- Kucner, T., Saarinen, J., Magnusson, M., & Lilienthal, A. J. (2013, November). Conditional transition maps: Learning motion patterns in dynamic environments. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 1196-1201). IEEE.
- Kucner, T. P., Magnusson, M., Schaffernicht, E., Bennetts, V. H., & Lilienthal, A. J. (2017). Enabling flow awareness for mobile robots in partially observable environments. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2), 1093-1100.
- Matthews, B. W. (1975). Comparison of the predicted and observed secondary structure of T4 phage lysozyme. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA)-Protein Structure*, 405(2), 442-451.
- Molina, S., Cielniak, G., Krajník, T., & Duckett, T. (2018, July). Modelling and Predicting Rhythmic Flow Patterns in Dynamic Environments. In *Annual Conference Towards Autonomous Robotic Systems* (pp. 135-146). Springer, Cham.
- Molina, S., Cielniak, G., & Duckett, T. (2019, under Review). Go with the flow: Exploration and mapping of pedestrian flow patterns from partial observations. *IEEE Robotics and Automation Letters*.
- Neubert, P., Sünderhauf, N., & Protzel, P. (2015). Superpixel-based appearance change prediction for long-term navigation across seasons. *Robotics and Autonomous Systems*, 69, 15-27.
- O'Callaghan, S. T., & Ramos, F. T. (2012). Gaussian process occupancy maps. *The International Journal of Robotics Research*, 31(1), 42-62.
- Palmieri, L., Kucner, T. P., Magnusson, M., Lilienthal, A. J., & Arras, K. O. (2017, May). Kinodynamic motion planning on Gaussian mixture fields. In *Robotics and Automation (ICRA), 2017 IEEE International Conference on* (pp. 6176-6181). IEEE.
- Ramos, F., & Ott, L. (2016). Hilbert maps: scalable continuous occupancy mapping with stochastic gradient descent. *The International Journal of Robotics Research*, 35(14), 1717-1730.
- Rosen, D. M., Mason, J., & Leonard, J. J. (2016, May). Towards lifelong feature-based mapping in semi-static environments. In *Robotics and Automation (ICRA), 2016 IEEE International Conference on* (pp. 1063-1070). IEEE.

- Taylor, S. J., & Letham, B. (2018). Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72(1), 37-45.
- Tipaldi, G. D., Meyer-Delius, D., & Burgard, W. (2013). Lifelong localization in changing environments. *The International Journal of Robotics Research*, 32(14), 1662-1678.
- Vintr, T., Eyisoy, K., Vintrová, V., & Krajník, T. (2018, under Review). Spatiotemporal models of human activity for robotic patrolling. In *International Workshop on Modelling and Simulation for Autonomous Systems*. Springer, Cham.
- Vintr, T., Molina Mellado, S., Cielniak, G., Duckett, T., & Krajník, T. (2017). Spatiotemporal models for motion planning in human populated environments. eprints.lincoln.ac.uk.
- Wang, Z., Ambrus, R., Jensfelt, P., & Folkesson, J. (2014). Modeling motion patterns of dynamic objects by IOHMM. In *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2014)*, 14-18 Sept. 2014, Chicago, IL (pp. 1832-1838). IEEE conference proceedings.
- Yan, Z., Duckett, T., & Bellotto, N. (2017, September). Online learning for human classification in 3d lidar-based tracking. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2017 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 864-871). IEEE.

6 Acknowledgement

The work has been supported by the Czech Science Foundation project 17-27006Y, the Grant Agency of the CTU in Prague grant No. SGS16/235/OHK3/3T/13. We thank the School of Computer Science, University of Lincoln, UK for providing us with the long-term datasets. Special thanks go to Dr Grzegorz Cielniak.

Informácie z vedeckého seminára Výpočtová štatistika 2018

Information from the Scientific Seminar Computational Statistics 2018

V dňoch 6. – 7. decembra 2018 sa uskutočnil už 27. ročník medzinárodného vedeckého seminára Výpočtová štatistika 2018. Miesto konania je už tradične Prírodovedecká fakulta UK, Prezentačné centrum AMOS, pavilón B1, Mlynská dolina, Bratislava 4. Prvý deň, štvrtok 6.12.2018, sa niesol v znamení prezentácií príspevkov účastníkov seminára. Spolu odznelo 15 príspevkov z rôznych oblastí štatistiky aj demografie.

Popoludní vystúpili prihlásení študenti v rámci Priehliadky prác mladých štatistikov a demografov 2018 a prezentovali výsledky svojej práce počas štúdií.



Obr. 1: Odovzdávanie certifikátov za účasť na prehliadke prác študentov (zľava):

K. Krausová (SAS sponzor), L. Jančovičová (SPU Nitra), L. Plichtová (FHI EU), N. Slavíková (PriF UK) a I. Stankovičová (predsedníčka SŠDS)

V piatok 7.12.2018 sme pripravili pre študentov vysokých škôl pásmo prednášok pod názvom „Analytika očami profesionálov“. Účasť študentov bola bohatá (cca 100 študentov). Prišli študenti z Univerzity Komenského v Bratislave (FM UK, FMFI UK, PriF UK), ale aj z Ekonomickej univerzity v Bratislave (FHI) a SPU v Nitre.



Obr. 2: Pohľad do audotória počas pásma prednášok pre študentov „Analytika očami profesionálov“.

Študnetom prednášali odborníci z praxe, ktorí majú skúsenosti v oblasti analýzy údajov. Témy prednášok boli nasledovné:

1. Mgr. Katarína Žiaková (Profesia): Absolventi na trhu práce,
2. Ing. Ján Kavec (Trexima): Informačný systém o cene práce (ISCP) a jeho podsystemy,
3. Ing. Marek Bičár (SAS)[®]: Umelá Inteligencia v Marketingu – Ako zlepšiť zákaznícku skúsenosť?

Informácie o prednášajúcich:

Mgr. Katarína Žiaková absolvovala Fakultu matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, odbor aplikovaná matematika. Po skončení štúdia pracovala na Štatistickom úrade SR na sekcii všeobecnej metodiky a registrov. V súčasnosti je členom analytického oddelenia firmy Profesia spol. s r. o., ktorá prevádzkuje najväčší pracovný portál na Slovensku. Vo svojej práci sa venuje štatistickému spracovaniu údajov, analýze a interpretácii dát týkajúcich sa dopytu a ponuky na trhu práce.

Ing. Ján Kavec pracuje vo výskumno-štatistickej a poradensko-konzultačnej spoločnosti TREXIMA Bratislava, ktorá od roku 1992 vyvíja a úspešne aplikuje nové, efektívne metódy v oblasti výskumu miezd podľa konkrétnych zamestnaní, zamestnanosti, pracovných a sociálnych podmienok zamestnancov v SR a jej jednotlivých regiónov. Súčasťou originálnych aktivít spoločnosti je tvorba a implementácia komplexných sústav povolaní a kvalifikácií, realizácia

analyticko-štatistických štúdií a prognózovanie vývoja na trhu práce. Do TREXIMY Bratislava nastúpil po absolvovaní štúdia na Ekonomickej univerzite v Bratislave.

Ing. Marek Bičár je Business Consultant poradenskej a softvérovej spoločnosti SAS Slovakia, s.r.o. od roku 2013 a od začiatku sa venuje problematike Customer Intelligence. Celý svoj profesijný život pracuje v oblasti riadenia vzťahov so zákazníkmi, najprv ako Segment manager v Tatra banke, neskôr v Slovenskej sporiteľni. Marek je absolventom Ekonomickej univerzity v Bratislave

doc. Ing. Iveta Stankovičová, PhD.
predsedníčka SŠDS

Informácie zo zasadnutia výboru SŠDS zo dňa 6. 12. 2018

Information from the Meeting of the Committee of SSDS held on 6 December 2018

Vo štvrtok 6. decembra od 16:00 sa uskutočnilo prvé zasadnutie nového výboru SŠDS zvoleného 18. júna 2018 na Valnom zhromaždení SŠDS v Častej – Papierníčke. Predsedníčka SŠDS, doc. Ing. Iveta Stankovičová, PhD. zhodnotila činnosť Spoločnosti za rok 2018, poďakovala organizátorom jednotlivých akcií a vyzdvihla bezproblémovú spoluprácu so Štatistickým úradom SR pri príprave slávnostnej konferencie k 50. výročiu založenia SŠDS.

Na zasadnutí výboru prebehla relatívne dlhá diskusia ohľadom neustále klesajúcej účasti študentov na Prehliadke prác mladých štatistikov a demografov a možnostiach motivácie študentov k vyššej účasti. Od budúceho ročníka preto bude študentom ponúknutá možnosť zaslať len abstrakt prezentácie, bez podmienky plného článku. Ďalšou motiváciou pre študentov bude finančná motivácia (finančné ceny pre víťazov Prehliadky prác mladých štatistikov a demografov).

Predsedníčka informovala o hospodárení SŠDS v roku 2018. Spoločnosť v roku 2018 hospodárila so ziskom, celkový finančný stav Spoločnosti je výborný. Predsedníčka ďalej informovala o akciách plánovaných na rok 2019.

Dôležitým bodom programu zasadnutia Výboru bola aj voľba nového vedenia, pričom výbor v tajnej voľbe zvolil:

- za predsedníčku SŠDS: doc. Ing. Ivetu Stankovičovú, PhD.,
- za podpredsedu pre medzinárodné vzťahy: RNDr. Petra Macha,
- za podpredsedu pre demografiu: doc. RNDr. Branislava Blehu, PhD.,
- za podpredsedu pre štátnu štatistiku: Ing. Františka Bernadiča,
- za podpredsedu pre akademickú štatistiku: doc. Ing. Vladimíra Úradníčka, PhD.,
- za podpredsedníčku pre medicínsku štatistiku: doc. RNDr. Ivetu Waczulíkovú, PhD.,
- za vedeckého tajomníka: doc. Mgr. Ing. Martina Boďu, PhD.,
- za hospodárku: Mgr. Ivetu Synekovú.

Revízná komisia si za svojho predsedu zvolila Ing. Ivana Lichnera, PhD.



Za Jankom Luhom
Memory of Ján Luha
(*8. 4. 1947 – † 6. 11. 2018)



V novembri 2018 sme sa naposledy rozlúčili s jednou z najvýraznejších osobností Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti – RNDr. Jankom Luhom, CSc. (*8. 4. 1947 – † 6. 11. 2018). Janko bol jeden z tých, ktorí pred mnohými rokmi „oživilí“ činnosť našej Spoločnosti a rozhodujúcou mierou prispeli k tomu, že SŠDS aj v súčasnosti aktívne pôsobí na Slovensku. V roku 1990 navrhol nový, dodnes používaný znak SŠDS. V rokoch 2010 – 2014 bol vedeckým tajomníkom SŠDS, predtým bol 20 rokov členom jej sekretariátu. Od vzniku časopisu Forum Statisticum Slovaceum (v roku 2005) bol desať rokov tajomníkom jeho redakčnej rady. Bol iniciátorom, organizátorom alebo spoluorganizátorom desiatok podujatí a autorom mnohých príspevkov o histórii spoločnosti a o výskumoch verejnej mienky, ktorým sa ako štatistik profesionálne venoval.

Janko bol jeden z mála skutočných priateľov, na ktorých sa dalo vždy (nezištne) spoľahnúť, ktorý vždy ochotne pomohol, bol skutočným odborníkom a takmer nevyčerpatelným zdrojom dobrej a optimistickej nálady, kdekoľvek sme mali možnosť sa spolu stretnúť.

Dovoľte mi použiť, upraviť a parafrázovať výrok známej českej herečky Stelly Zázvorkovej: *Janko, prišli sme o povesť, o peniaze a možno aj o zdravie. Ale bolo to krásne a bola to veľká sranda.* Ďakujem Ti za možnosť byť pri tom.

Vlado Úradníček

Pár reminiscencií ďalších členov našej spoločnosti na Janka Luhu:

Hoci má naša spoločnosť už 50 rokov, absentuje nám zmapovanie nášho kompletného historického vývoja. Chýba najmä podrobnejšie preskúmanie a súhrnné spracovanie jej prvých dvadsiatich rokov. Strávil som istý čas v archívoch SAV, aby som sa to pokúsil zaplniť. A práve tam som si uvedomil, že jednou z mnohých vecí, za ktoré naša spoločnosť vďačí svojmu neúnavnému a pritom nenápadnému funkcionárovi Jankovi Luhovi je aj to, že od chvíle, kedy sa v roku 1990 stal členom Sekretariátu SŠDS, začal postupne triediť, sumarizovať a publikovať fakty o akciách a činnosti Spoločnosti. Jeho príspevky (spolu s Jozefom Chajdiakom) na slávnostné konferencie k výročiam našej spoločnosti sú základom, ktorý tvorí kostru novšej histórie našej spoločnosti.

Jedno je isté už dnes, že i keď sa stále nemôžeme pochváliť kompletnou históriou SŠDS, významné miesto v nej má a bude mať náš kolega Janko Luha.

Peter Mach

Prvýkrát som spoznala Janka Luhu na Ekomstate. Nevieť ktorý rok to bolo, ale bolo to už dávno. Popri veľkom Jožkovi Chajdiakovi stál malý človečik s veľkým úsmevom. A neskôr som zistila, že nielen s úsmevom, ale aj s veľkým srdcom. Jankov úprimný úsmev nás vítal, keď sme sa po čase opäť stretli, rozohnal pochybnosti, keď sme riešili nejaký problém, sprevádzal nás na všetkých štatistických akciách. Vďaka nemu sme pochopili zákutia a čaro kvalitatívnych dát, nastavenia a spracovania dotazníkov, vyhodnocovania a interpretácie výsledkov. Nech sme mali akýkoľvek problém, snažil sa pomôcť. Nielen formálne, ale tak, ako bol zvyknutý – podal pomocnú ruku úprimne, od srdca.

Je nezabudnuteľná jeho identifikácia dotazníkových „áno-nie“ odpovedí „jó – nem jó“, či v počiatkoch vzniku e-mailových schránok jeho veta, ktorú opäť predniesol so širokým úsmevom: „Ja mám e-mail eném ve vane.“ Možno sme pozabudli na všetky súvislosti a spoločne strávené chvíle na štatistických a demografických konferenciách či podujatiach (napr. Ekomstat, Fernstat či Výpočtová štatistika). Ale hlboko v srdciach nám ostane jeho veselosť v očiach a úprimný úsmev.

Alena Kaščáková

Pred viac ako dvadsiatimi rokmi neočakávane vstúpilo do môjho života „malé bielo vlasé slniečko“, ktoré ma hrialo až do svojho rovnako neočakávaného „zapadnutia“. Za ten čas sme spoločne prežívali veľa pracovných a osobných úspechov, ale aj problémov, sklamaní a ťažkých životných situácií. Na každej štatistickej akcii vedel človeka odborne obohatiť, poradiť ako spracovať údaje, čo najviac z nich vyťažiť, ako ich využiť – aj keď z nich občas vyplynuli pre našich

majiteľov „šokujúce“ závery, napr. že viac ako po Dunaji by sa s nami chceli klienti plaviť loďou po Karibiku...

Na našich stretnutiach nechýbali objatia a príjemné chvíle plné dobrej nálady. Boli sme si blízki pracovne aj súkromne. Časom Janka spoznala tiež moja rodina. O to bolestivejší je pre nás jeho odchod bez rozlúčky. Na druhej strane ale vieme, že sa mu splnil jeho sen, ktorý od smrti manželky opakoval – že chce ísť za ňou.

Jana Marková s rodinou

Pán doktor Ján Luha mi bude veľmi chýbať. Začiatkom novembra ma mimoriadne zaskočila správa, že nás navždy opustil. V poslednom čase sme sa už síce menej vídali, no napriek tomu som sa stále tešil na ďalšie a ďalšie stretnutia, napríklad aj na blížiacom sa seminári Výpočtová štatistika. Pred niekoľkými rokmi som ho spoznal práve na tejto akcii a stále si veľmi dobre pamätám naše prvé stretnutie. Náš spoločný známy ho vopred informoval, že sa zúčastní tradičného medzinárodného semináru, a tak pán doktor Luha ma srdečne očakával a osobitne privítal. Padlo mi to samozrejme veľmi dobre a už počas našich prvých rozhovorov sa mi zdôveril, že podľa neho práve takí „mladí súdruhovia“, ako ja, by mali v budúcnosti „potiahnuť“ Výpočtovú štatistiku, časopis Forum Statisticum Slovaceum či Slovenskú štatistickú a demografickú spoločnosť.

Doktora Luhu som poznal ako milého a bezprostredného človeka, ktorý v každej situácii dokázal povedať pár povzbudivých slov a odľahčiť diskusiu vtipom či krátkou príhodou z minulosti. Síce opustil tento svet, no jeho životné dielo, nezmazateľná stopa v Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti a spoločné spomienky tu zostali s nami. Vždy naňho budem spomínať ako na príjemného a ochotného kolegu, ktorého som si veľmi vážil.

Gábor Szűcs

Keď som sa dozvedela tú veľmi smutnú správu, že nás opustil Janko Luha, odmietala som tomu uveriť. Tento rok naša Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre v spolupráci so Slovenskou štatistickou a demografickou spoločnosťou a Pracoviskom Štatistického úradu Slovenskej republiky v Nitre organizuje už 10. ročník medzinárodnej konferencie Nitrianske štatistické dni a Janko Luha bol ich neoddeliteľnou súčasťou. Nielen že stál pri zrode tejto konferencie, ale sa jej aj aktívne zúčastňoval - pomáhal nielen pri jej príprave ale aj priebehu konferencie. Vždy k nám prichádzal s úsmevom a skvelou náladou – svojim optimizmom dokázal „nakaziť“ všetkých účastníkov konferencie - v tej chvíli zmizli aj všetky problémy a starosti s organizáciou konferencie. Pre každého z nás mal povzbudivé slová a nikdy neváhal, keď bolo treba pomôcť. Janko, budeš nám všetkým veľmi chýbať.

Anna Tirpáková

Za prof. RNDr. Beloslavom Riečanom, DrSc., Dr. h. c.
Memory of prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc., Dr. h. c.
(*11. 11. 1936 – † 13. 08. 2018)



V auguste 2018 sme sa rozlúčili s Prof. RNDr. Beloslavom Riečanom, DrSc., významným slovenským matematikom. Vedecky sa venoval teórii miery a integrálu, teórii množín, kvantovej logike a teórii pravdepodobnosti, kde dosiahol najvýznamnejšie výsledky.

Niektoré fakty z jeho života¹:

V roku 1942-1946 navštevoval Cvičnú školu pri Učiteľskej akadémii v Banskej Bystrici, 1946-1953 študoval na gymnáziu a na strednej chlapčenskej škole v Banskej Bystrici, 1953-1958 absolvoval štúdium na Prírodovedeckej fakulte UK v Bratislave. Pôsobil na Stavebnej fakulte SVŠT v Bratislave ako asistent, odborný asistent a docent (1958-1971), ako docent na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave (1972-1979), ako docent a profesor na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave (1980-1985, dekan 1990-1991), na Vysokej vojenskej technickej škole v Liptovskom Mikuláši ako profesor (1985-1989) a na Matematickom ústave SAV v Bratislave ako vedúci vedecký pracovník a riaditeľ (1992-1998). Od roku 1998 pôsobil na Fakulte prírodných vied UMB v Banskej Bystrici ako profesor, od roku 2001 ako vedúci Katedry matematiky.

¹ Použité zdroje:

https://sk.wikipedia.org/wiki/Beloslav_Rie%C4%8Dan

<https://spravy.pravda.sk/domace/clanok/164442-bieda-vysokych-skol-lezi-v-profesorskom-zbore/>

V roku 1971 bol spoluzakladateľom časopisu Matematické obzory (výkonný redaktor 1972-1989), od r. 1995 bol vedeckým redaktorom časopisu Obzory matematiky, fyziky a informatiky, bol členom viacerých profesijných spoločností a organizácií, od r. 1965 bol členom a od r. 1996 predsedom Jednoty matematikov a fyzikov, od r. 1993 bol členom a neskôr predsedom Slovenskej asociácie Rímskeho klubu a členom českej asociácie Rímskeho klubu.

Profesor Riečan bol aktívnym členom spoločenstva Evanjelickej cirkvi a. v. Venoval sa aj hre na organ, bol organistom v evanjelickom kostole v Banskej Bystrici. V roku 1984 viedol semináre Matematika a hudba. Spolu s Romanom Bergerom editoval knihu Matematika a hudba, ktorá vyšla v roku 2002 aj v anglickom preklade.

Je spoluautorom troch v zahraničí vydaných monografií a vyše 200 časopiseckých publikácií. Bol autorom viacerých vysokoškolských učebníc a vysokoškolských skrípt, stredoškolských učebníc a učebných pomôcok, popularizačných kníh a televíznych scenárov. Publikoval vedecké štúdie, odborné články, publicistické príspevky. Bol držiteľom mnohých medailí univerzít, akadémií a rôznych ďalších organizácií. Okrem iných ocenení bol nositeľom Radu Ľudovíta Štúra 1. triedy a Zlatej plakety SAV J. Hronca za zásluhy v matematických vedách.

Spomienky na veľkého matematika a človeka:

Milý Belo,

nedovolila by som si písať o tom, čo vedia všetci – teda o tom, že si bol geniálny matematik, úžasný učiteľ, hudobník ..., teda – že si bol neuveriteľne všestranný. Ja by som chcela napísať o Tebe ako o učiteľovi s veľkým srdcom.

Úplne prvú spomienku, kedy si neuveriteľným spôsobom vstúpil do môjho života, mám z roku 1986. Nikdy na to nezabudnem. Pripravovala som na prijímacie pohovory na doktorandské štúdium z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky a dohodla som si u Teba konzultáciu. Medzitým som však šla na bežnú lekársku kontrolu, lebo som čakala môjho syna. Kontrola však nedopadla najlepšie – lekár oznámil, že mi neodporúča cestovať. Tak som Ti telefonovala, že sa veľmi ospravedlňujem, ale že na konzultáciu do Bratislavy nemôžem pricestovať zo zdravotných dôvodov. Napriek tomu, že som nebola Tvojou doktorandkou, Ty si nezaváhal ani sekundu a veľkoryso si sa ponúkol, že keď nemôžem pricestovať do Bratislavy ja, tak Ty pricestuješ za mnou do Nitry. Úplne si ma zaskočil, takže som sa ani nezmohla na nejaké protesty. Pricestoval si a bol si skvelý – ako vždy, plný elánu a nadšenia a tvrdil si mi, že je to úplne normálne, že učiteľ cestuje za študentom konzultovať! Konzultácia trvala celé dopoludnie a keď som sa Ťa spýtala na to, ako Ti toto všetko môžem vynahradiť,

tak si mi odpovedal, že nijako, Ty toto považuješ za samozrejmosť a že budeš veľmi rád, keď si to zapamätám a budem sa aj ja takto správať k svojim študentom. Vtedy som si myslela, že sa mi to iba sníva, alebo že to je iba náhoda – ale keď som Ťa poznala dlhšie, pochopila som, že to vôbec nie je náhoda, ale že Ty si bol jednoducho taký a že to, čo si urobil pre mňa, si považoval vždy za samozrejmé. Ty si vždy bol obetavý a skvelý človek a takým si aj zostal do konca svojho života. Vždy si sa staral o svojich študentov, prežíval si s nimi pracovné aj ich osobné problémy a vždy si im nezištne pomáhal. Pre Teba Tvoji študenti a doktorandi zostali Tvojimi „deťmi“ a aj vtedy, keď mnohí už prekročili päťdesiatku, stále si bol s nimi v kontakte a vždy si bol pripravený poradiť a pomôcť. Aj mne si takto veľmi pomohol. Stačilo, aby som sa Ti pošťazovala, že môj školiť (prof. RNDr. Jozef Komorník, DrSc.) odišiel do zahraničia na viacročný pobyt a keďže v tom čase ešte neexistoval ani internet ani mobily, tak som s ním stratila kontakt. Ty si zasa našiel riešenie. Veľmi ochotne si ma zoznámil s jedným zo svojich „detí“ – so svojim bývalým doktorandom, s prof. RNDr. Dvurečenským, DrSc., a spýtal si sa ho, či nechce byť mojim školiťom.

Belko, celý život Ti budem za toto vďačná, lebo som získala toho najlepšieho školiťa na svete, a to aj preto, že prof. Dvurečenskij má všetky skvelé vlastnosti svojho školiťa. Prepáč, že zo všetkých tých spomienok a zážitkov za tie roky, čo sme sa spolu stretávali na rôznych konferenciách, seminároch, komisiách a pod. som uviedla iba tieto dve. Ale myslím si, že práve tieto dve spomienky úplne charakterizujú Teba ako učiteľa s veľkým srdcom.

Belko, Tvoje úprimné srdce a spôsob, akým si vplýval na svojich študentov, je tak presvedčivý a úprimný, že každý Tvoj študent má pocit, že musí pokračovať v Tvojich myšlienkach, lebo každá iná cesta je nesprávna. Som naozaj veľmi vďačná Bohu za to, že mi v mojom živote doprial stretnúť sa s takými ľuďmi ako si Ty a tvoj doktorand prof. Dvurečenskij.

Čeť Tvojej pamiatke.

prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre



Konferencie
Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti
Conferences of
Slovak Statistical and Demographic Society



Uskutočnené akcie v roku 2018 / Previous Events in Year 2018

32. vedecká konferencia EKOMSTAT 2018 32th scientific conference EKOMSTAT 2018	3. - 7. jún 2018 / 3 - 7 June 2018 Trenčianske Teplice, Slovensko / Slovakia
Slávnostná konferencia k 50. výročiu založenia SŠDS Valné zhromaždenie členov SŠDS Voľby výboru SŠDS Ceremonial conference of the SSDS General Assembly of SSDS Election of Committee of SSDS	18. jún 2018 / 18 June 2018 Častá Papiernička, Slovensko / Slovakia
Pohľady na ekonomiku Slovenska 2018 Views on the Slovak Economy 2018	19. jún 2018 / 19 June 2018 Častá Papiernička, Slovensko / Slovakia
Vedecká konferencia FERNSTAT 2018 Scientific conference FERNSTAT 2018	20. jún 2018 / 20 June 2018 Častá Papiernička, Slovensko / Slovakia
27. medzinárodný seminár Výpočtová štatistika 2018 27th international seminar Computational Statistics	6. – 7. december 2018 / 6 – 7 December 2018 Bratislava, Slovensko / Slovakia
Prehliadka prác mladých štatistikov a demografov 2018 Review of Papers of Young Statisticians and Demographers	6. december 2018 / 6 December 2018 Bratislava, Slovensko / Slovakia
Analytika očami profesionálov 2018 Analytics from the Eye View of Professionals 2018	7. december 2018 / 7 December 2018 Bratislava, Slovensko / Slovakia

Pripravované akcie v roku 2019 / Upcoming Events in Year 2019

Nitrianske štatistické dni 2019 Statistical Days in Nitra 2019	4. – 5. apríl 2019 / 4 – 5 April 2019 Nitra, Slovensko / Slovakia
Pohľady na ekonomiku Slovenska 2019 Views on the Slovak Economy 2019	25. apríl 2019 / 25 April 2019 Bratislava, Slovensko / Slovakia
33. vedecká konferencia EKOMSTAT 2019 33th scientific conference EKOMSTAT 2019	2. – 6. jún 2019 / 2 – 6 June 2019 Trenčianske Teplice, Slovensko / Slovakia
17. slovenská demografická konferencia 17th Slovak Demographic Conference	13. – 15. jún 2019 / 13 – 15 June 2019 Trnava, Slovensko / Slovakia
28. medzinárodný seminár Výpočtová štatistika 28th international seminar Computational Statistics	5. – 6. december 2019 / 5 – 6 December 2019 Bratislava, Slovensko / Slovakia
Prehliadka prác mladých štatistikov a demografov Review of Papers of Young Statisticians and Demographers	5. december 2019 / 5 December 2019 Bratislava, Slovensko / Slovakia
Analytika očami profesionálov 2019 Analytics from the Eyeview of Professionals 2019	6. december 2019 / 6 December 2019 Bratislava, Slovensko / Slovakia



Môžu sa vaše štatistické odhady **zlepšiť o 96%**,
ak využijete kvalitný analytický nástroj?

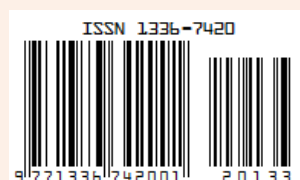
Áno, môžu. SAS vám dáva The Power to Know®.

SAS Business Analytics pomáha organizáciám zo všetkých odvetví objavovať inovatívne spôsoby ako zvyšovať ziskovosť, znižovať riziká, predikovať trendy, meniť dáta na informácie a získavať tým skutočnú konkurenčnú výhodu.

Obsah / Table of Contents

Vedecké články/Original contributions

Pokroky v modelování ekonomických dat pomocí spojitých pravděpodobnostních rozdělení Advances in Modeling Economic Data Using Continuous Probability Distributions Diana Bílková	1
Důchodový věk na Slovensku a v Česku stanovený na základě relativního prospektivního věku Retirement Age in Slovakia and Czechia Based on Relative Prospective Age Concept Tomáš Fiala, Jitka Langhamrová	19
Analýza dopadov vonkajších rizík na slovenskú ekonomiku s využitím makroekonomického modelu Analysis of External Risk Impacts on the Slovak Economy Using the Macroeconomic Model Tomáš Miklošovič	28
Zhlukovanie časových radov dlhodobých úrokových mier Clustering Time Series of Long-term Interest Rates Beáta Stehlíková	51
Praktická reprezentace času pro modely lidského chování A Practical Representation of Time for the Human Behaviour Modelling Tomáš Vintr, Kerem Eyisoy, Tomáš Krajník	61
<u>Zo života SŠDS/From Life of SSDS</u>	
Informácie z vedeckého seminára Výpočtová štatistika 2018 Information from the Scientific Seminar Computational Statistics 2018	76
Informácie zo zasadnutia výboru SŠDS zo dňa 6. 12. 2018 Information from the Meeting of the Committee of SSDS held on 6 December 2018	79
Za Jankom Luhom (*8. 4. 1947 – † 6. 11. 2018) / Memory of Ján Luha Vladimír Úradníček	80
Za Belom Riečanom (*11. 11. 1936 – † 13. 08. 2018) / Memory of Belo Riečan Anna Tirpáková	83



Price/Cena: 25 €
Year Subscription/Ročné predplatné: 50 €
Published in/Dátum vydania: December 2018