

2010

ROČNÍK 1

ČÍSLO 4

Logos Polytechnikos

V Š P

J

Vysoká škola
polytechnická
Jihlava

Vážení přátelé,

Dostává se vám do rukou čtvrté a poslední číslo prvního ročníku našeho odborného celoškolského časopisu Logos Polytechnikos. Jsem velmi potěšen, že mohu na tomto místě vyslovit svoji chválu tištěné formě odborných časopisů obecně a našemu rozhodnutí vydávat v tištěné podobě Logos Polytechnikos speciálně. V záplavě nejrůznějších komerčních tiskovin, kterými jsme permanentně zásobeni, je nový tištěný odborný časopis pro kulturního člověka povzbuzením. Na rozdíl od internetové, velmi často needitované, subjektivní, povrchní prezentace v jazyce syrovém po stránce gramatické i po stránce kultury projevu, klade prezentace v časopisu, jakým se Logos Polytechnikos od prvního čísla úspěšně snaží být, na autory příspěvků významně vyšší nároky. Každé číslo, každý příspěvek prochází několikanásobnou korekturou odbornou a díky monotematickému zaměření jednotlivých čísel i jakousi interní soutěží nejen uvnitř kateder, ale i napříč celou různorodou strukturou naší Vysoké školy.

Letošní poslední číslo je věnováno zatím jediným technickým oborům VŠPJ, tedy elektrotechnice a informatice. Produkty těchto oborů významně ovlivnily a budou i nadále ovlivňovat život lidské společnosti. Pro nás elektrotechniky a informatiky jsou navíc tyto obory prostorem našich celoživotních aktivit a v plné míře nám umožňují realizovat naši hravost a lásku k technice.

Přeji vám při čtení tohoto čísla uspokojení z dostatku zajímavých nových odborných informací, z příležitosti nahlédnout do technik zpracování fyzikálních jevů v elektrických obvodech, z vtipného používání matematických a programátorských metod a z implementačních výstupů naší práce v praxi.

Prof. Ing. František Zezulka, CSc.
Vedoucí katedry elektrotechniky a informatiky
Vysoká škola polytechnická Jihlava

OBSAH

BUREŠ Zbyněk

**Výpočetní model patologické odezvy neuronů colliculus inferior
laboratorního potkana po ohlušení v raném stupni vývoje 3**

BRTNÍK Bohumil

Transformační graf operačního zesilovače postihující tranzitní kmitočty 19

MATOUŠEK David

Metody měření elektrického odporu mikrokontroléry 35

DOSTÁL Tomáš, ŠOTNER Roman, FRYDRYCH Jiří

Syntéza moderních analogových obvodů pomocí grafů signálových toků 51

BENEŠOVÁ Martina

Numerická estetika, počítač a umění..... 66

KAŇKA Miloš

**Geometrical properties of CES production functions, especially with
respect to Gaussian and Mean curvatures..... 84**

Výpočetní model patologické odezvy neuronů colliculus inferior laboratorního potkana po ohlušení v raném stupni vývoje

Zbyněk Bureš

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Ústav experimentální medicíny, Akademie věd ČR

Abstrakt

Pro správnou funkci centrálního sluchového systému je nezbytné, aby byl během vývoje aktivně stimulován přirozenými podněty. Přirozená aktivita neuronů v raných stupních vývoje je bezpodmínečně nutná pro přesnější frekvenční naladění neuronů, pro správné nastavení závislosti odezvy na intenzitě a pro patřičné kódování zvukového podnětu sluchovým systémem. Jestliže je během kritických období vývoje poškozena některá z periferních částí sluchové dráhy, sluchová centra nejsou patřičně stimulována a dojde k jejich nevratnému poškození. Odezvy neuronů zůstanou již trvale nespecifické a je porušena reprezentace frekvence a intenzity podnětu. Předpokládá se, že abnormální odezvy neuronů jsou způsobeny jinou strukturou neuronových spojů, kdy neuron přijímá vstupy z jiných oblastí než v případě normálního vývoje. V článku je tato hypotéza testována pomocí komplexního modelu sluchové dráhy. Jsou vytvořeny dva typy struktury spojů – jeden odpovídající normální situaci a jeden odpovídající patologickému stavu – a výsledky simulace jsou srovnány s experimentálními daty u laboratorního potkana.

Klíčová slova

výpočetní model, sluchová dráha, frekvenční prahová křivka, excitační a inhibiční projekce, laterální inhibice.

JEL Classification: C69, I19

Úvod

Základní struktura sluchové dráhy je dána již na počátku vývoje, odpovídající nervová aktivita během dalších vývojových fází je však nezbytná pro přesné vyladění celého systému [7], [9], [10]. Během finálního dozrávání dochází ke zpřesňování reprezentace frekvence a intenzity podnětu v jednotlivých neuronech: frekvenční prahová křivka (tj. závislost odezvy neuronu na kmitočtu, de facto propustné pásmo neuronového filtru – anglicky tuning curve, TC, viz obr. 1 nahoře) se zužuje, závislost odezvy na intenzitě (anglicky rate-level function, RLF, viz obr. 1 dole) se stává méně strmou, klesá podíl nemonotónních RLF a roste amplituda celkové odpovědi neuronu [1], [3], [22], [28].

Odezva neuronu je do značné míry dána charakterem vstupů, které neuron přijímá. Pro správnou funkci je důležitá rovnováha mezi excitačními vstupy, které vyvolávají aktivitu neuronu, a inhibičními vstupy, jež naopak odezvu neuronu tlumí [29]. Předpokládá se, že na počátku vývoje neuron přijímá excitační i inhibiční projekce z širokých oblastí sluchové dráhy, jeho odezva je tudíž málo specifická. V důsledku fyziologicky relevantní aktivity na jeho vstupech však postupně dochází k eliminaci nadbytečných spojů (synapsí) a k zvyšování specializace neuronu [7], [10], [23]. Jestliže je tok informace k neuronu z nějakého důvodu přerušen, síť projekcí zůstane široká a nespecifická, neuron i nadále jeví příznaky nezralosti a není schopen kódovat charakteristiky podnětu dostatečně přesně [6], [8], [9], [17], [18], [31], [35]. Vývojová porucha tohoto typu přetrvává obvykle do dospělosti a nelze ji nijak účinně odstranit [26].

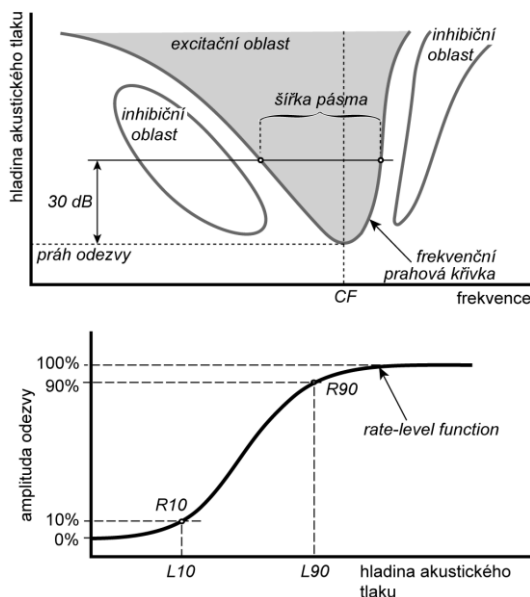
V literatuře lze nalézt řadu prací, které se zabývají poruchami sluchové dráhy, vyvolanými omezením toku informace do vyvíjejících se center, např. [13], [14], [15], [16], [24], [30], [34]. Předkládaná stat' reaguje na práce [5] a [8], v nichž bylo vývojové poruchy neuronů v colliculus inferior potkana dosaženo krátkodobou expozicí vyvíjejícího se organismu nadměrné hlukové zátěži. Uvedené práce identifikují v odezvě neuronů řadu anomálií, jež jsou v souladu s hypotézou, že neurony neprošly finální fází vývoje a uchovaly si charakter nezralého systému v důsledku nedovyvinuté struktury synapsí. V předkládaném článku je tato hypotéza ověřována pomocí výpočetního modelu sluchové dráhy, který umožňuje definovat různá zapojení excitačních a inhibičních vstupů. Simulace dokládají, že nevhodná struktura synapsí skutečně vede k většině pozorovaných poruch, zároveň se však ukazuje, že některé experimentálně zjištěné jevy není možné tímto mechanismem zcela objasnit.

Výchozí experiment

V citovaných pracích [5] a [8] byla čtrnáct dní stará mláďata potkanů vystavena po dobu 8 minut širokopásmovému šumu o hladině akustického tlaku 125 dB. Důsledkem bylo dočasné zvýšení sluchového prahu a tedy i omezení přirozené nervové aktivity, nezbytné pro správný vývoj. Po třech týdnech se sluchový práh vrátil do normálních mezí. Ve věku tří až šesti měsíců byla u již dospělých zvířat měřena odezva neuronů centrálního jádra inferior colliculu na zvukové podněty a proběhlo srovnání charakteristik neuronů exponovaných a zdravých (kontrolních) zvířat.

Význam vyhodnocovaných parametrů je ilustrován na obrázku 1. V horní části je naznačen vzhled typické odezvy neuronu v závislosti na frekvenci a hladině akustického tlaku (sound pressure level, SPL). Je vidět, že v oblasti excitace se neuron chová v podstatě jako pásmová propust, navíc je však jeho odezva závislá na SPL. Na příliš slabé podněty neuron vůbec nereaguje a vykazuje pouze větší či menší míru samovolné (spontánní) aktivity. Nejnižší hladina akustického tlaku čistého tónu, která vyvolá odpověď, je označována jako práh. Frekvence tónu, který vyvolá prahovou odpověď, se nazývá charakteristická frekvence (characteristic frequency, CF). Nejčastěji 30 dB nad prahem se zkoumá šířka excitační oblasti, obvykle se udává v podobě činitele jakosti Q_{30} . Frekvenční prahová křivka je obrys excitační oblasti, je to pro každou frekvenci taková nejmenší hladina akustického tlaku, která již vyvolá odezvu neuronu. Po stranách excitační oblasti se u některých neuronů vyskytují zřetelné oblasti inhibice. Podnět, spadající do oblasti inhibice zeslabuje jakoukoli aktivitu neuronu, tedy jak spontánní (pokud nějaká je), tak vyvolanou. Předpokládá se, že laterální inhibice přispívá k přesnějšímu frekvenčnímu naladění neuronu a pomáhá omezovat vliv podnětů, ležících mimo oblast účinnosti neuronu.

Vyneseme-li amplitudu odezvy neuronu v závislosti na SPL, dostaneme rate-level function (RLF). RLF představuje vertikální řez oblastí odezvy neuronu (viz obr. 1). Je jasné, že RLF lze zkoumat na libovolné relevantní frekvenci podnětu, většinou se však uvažuje pouze na charakteristické frekvenci, neboť tam se očekává dominantní fungování neuronu. Průběh RLF je nejprve rostoucí s minimem na úrovni spontánní aktivity (v obrázku značena jako 0 %). Další průběh RLF se již neuron od neuronu liší: některé RLF jsou ryze monotónní a se zvyšujícím se SPL neustále rostou. Častěji dochází při určitém SPL k saturaci, některé RLF však vykazují dokonce nemonotónní průběh, kdy po dosažení maxima začnou naopak klesat.



Obr. 1. Schematické znázornění charakteristik neuronu. Nahoře: pole odezvy neuronu v závislosti na frekvenci a hladině akustického tlaku (SPL) stimulujícího tónu. Dole: závislost amplitudy odezvy na SPL.

Experimenty, jejichž výsledky zde hodláme modelovat, dospěly k následujícím závěrům:

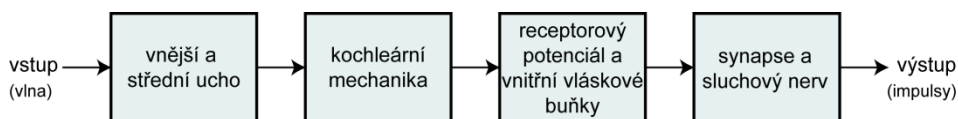
1. Excitační prahy neuronů z postižených a kontrolních zvířat se od sebe neliší. To je velmi důležitý výsledek, neboť vylučuje postižení vnitřního ucha a sluchového nervu a je jedním z indikátorů centrální nervové poruchy. Koreponduje i se zjištěním, že zvířata obou skupin mají stejný sluchový práh (touto psychoakustickou veličinou se však zde nezabýváme).
2. Ohlušená zvířata mají širší propustné pásmo, tj. nižší hodnoty činitele jakosti Q_{30} . Jako doplňkový ukazatel byla zjišťována šířka propustného pásma napravo a nalevo od CF. Z vyhodnocení vyplynulo, že části propustného pásma vpravo od CF jsou u kontrolních zvířat užší než u ohlušených, naproti tomu části propustného pásma nalevo od CF se mezi těmito experimentálními skupinami neliší. To odpovídá představě, že rozšíření celého propustného pásma u ohlušených zvířat je způsobeno rozšířením intervalu mezi CF a vysokofrekvenční hranou odezvy.
3. Ohlušená zvířata mají nižší spontánní aktivitu neuronů.
4. Viditelné inhibiční oblasti jsou častější u kontrolních zvířat.

5. Ohlušená zvířata mají menší dynamický rozsah RLF. Dynamickým rozsahem je míněn interval hladin akustického tlaku L10 až L90, viz obr. 1.
6. Ohlušená zvířata mají větší počáteční relativní sklon RLF.
7. Ohlušená zvířata mají menší maximální amplitudu odezvy (maximum RLF).
8. Ohlušená zvířata mají menší procento ryze monotónních neuronů a více nemonotónních neuronů.

Hypotézou, jež má vysvětlit výše jmenované jevy, je nevyvinutá struktura nervových spojů. Předpokládá se, že excitační, ale především inhibiční projekce se vlivem nedostatečné stimulace nesespecializovaly a namísto vzniku jasně definovaných laterálních inhibičních oblastí zůstal vliv inhibice šířeji rozprostřen. Důsledkem je rozšíření excitační oblasti (snížení Q_{30}) a menší zastoupení viditelných inhibičních polí u postižených zvířat. Tím, že nedošlo k redukci nadbytečných inhibičních synapsí, jeví se systém jako přetlumený, což vede např. k menší amplitudě odezvy nebo změněnému tvaru RLF.

Popis modelu

K ověření uvedené hypotézy byl použit komplexní model sluchové dráhy [4], zahrnující několik stupňů. Jednotlivé stupně odpovídají fyziologii sluchové dráhy savců, parametry modelu byly nastaveny pro člověka. Vzhledem k analogičnosti sluchového systému všech savců však toto nastavení nehraje pro náš účel roli. Vstupem modelu je zvuková vlna při ústí vnějšího zvukovodu, výstupem jsou posloupnosti nervových impulsů (akčních potenciálů, action potentials, AP) ve vláknech sluchového nervu. Struktura modelu je naznačena na obrázku 2.



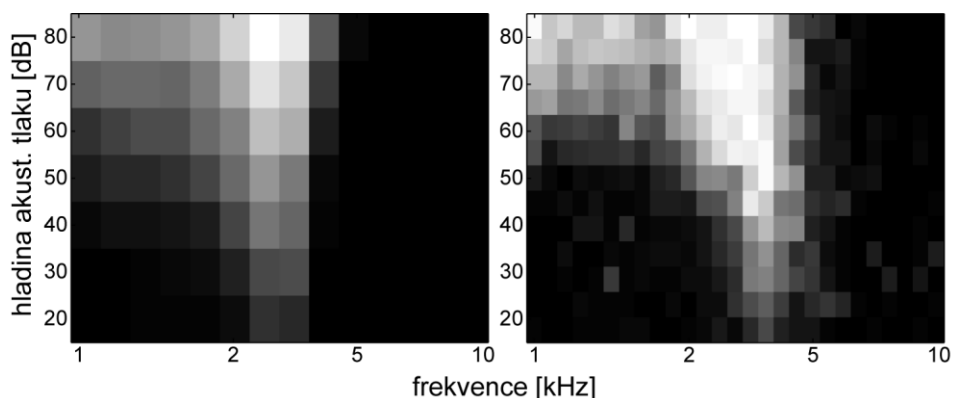
Obr. 2. Struktura modelu sluchové dráhy.

Posledním stupněm modelu je tedy množina vláken sluchového nervu, jednotlivá vlákna jsou naladěna na různé frekvence v celém slyšitelném pásmu v souladu s tonotopickým uspořádáním sluchové dráhy. Kromě frekvenčního ladění se vlákna liší ještě svou RLF. Pro účely modelu jsme (poněkud zjednodušeně) uvažovali pouze dva typy RLF vláken: vlákna s nízkým prahem a vysokou spontánní aktivitou (high spontaneous rate, HSR) a vlákna s vysokým prahem a nízkou spontánní aktivitou (low spontaneous rate, LSR). HSR vlákna mají svou pracovní oblast na

nižších intenzitách stimulu a dosahují relativně brzy saturace, LSR naopak pracují na vyšších intenzitách a pro nízké intenzity podnětu generují pouze slabou spontánní aktivitu. Kombinací těchto dvou typů vláken je možné pokrýt potřebný dynamický rozsah stimulu. V souhrnu bylo v modelu použito 14 dvojic vláken s charakteristickými frekvencemi od 1 kHz do 10 kHz (viz dále).

Signál modelovaných vláken lze následně libovolně kombinovat a simulovat tak různou strukturu projekcí. V souladu s pracemi [5] a [8] byla amplituda odezvy každého vlákna stanovena jednoduše jako počet akčních potenciálů vyvolaných během stimulace. Variabilní struktura projekcí byla modelována prostřednictvím váhování odezvy jednotlivých vláken koeficienty v rozmezí $<-1,1>$. Kladné koeficienty znamenaly excitační působení daného vlákna, záporné koeficienty naopak inhibici, nulový koeficient odpovídal situaci, kdy dané vlákno nemá na odezvu neuronu vliv. Celkovou amplitudu odezvy neuronu pak představoval součet váhovaných příspěvků všech vláken.

Během simulací byla konstruována frekvenčně-intenzitní pole odezvy (viz obr. 1 nahoře) a to rovněž analogicky s experimenty uvedenými v [5] a [8]: model byl stimulován čistými tóny o délce 60 ms, jejichž frekvence a intenzity pokrývaly zkoumané frekvenčně-intenzitní pole. Frekvence tónu se měnila po čtvrtině oktávy v rozmezí od 1 kHz do 10 kHz, hladina akustického tlaku se měnila po 10 dB od 20 dB SPL do 80 dB SPL. Výsledná odezva je reálnou funkcí dvou proměnných: frekvence a intenzity, jako taková bude v dvourozměrném diagramu znázorňována pomocí šedé škály. Na obrázku 3 je srovnán výstup modelu (vlevo) a jedna naměřená odezva neuronu inferior colliculu (vpravo).



Obr. 3. Frekvenčně-intenzitní pole odezvy neuronů, normalizováno. Bílá, resp. černá barva označuje maximální, resp. minimální amplitudu. Vlevo: odezva modelu na charakteristickou excitaci; vpravo: naměřená odezva neuronu colliculus inferior potkana.

Výsledky simulace

Neuron s pouze excitačními vstupy

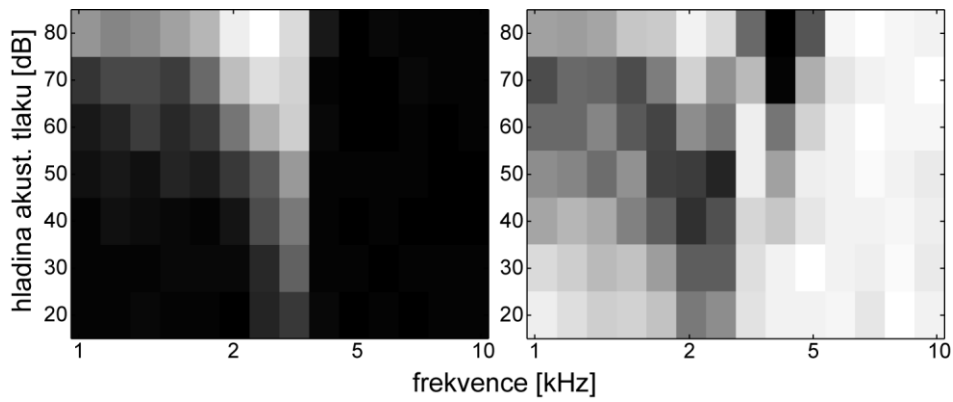
Nejprve bylo testováno, jak vypadá odezva neuronu, který přijímá pouze jednu excitační dvojici HSR a LSR vláken s jedinou charakteristickou frekvencí a shodným kladným koeficientem – tento typ vstupu budu dále nazývat charakteristickou excitací. Nastavení parametrů je shrnuto v tabulce 1. Výsledek zachycuje obrázek 3 vlevo. Je vidět, že již tento velmi jednoduchý stav vede k dobré shodě modelového výstupu a experimentálně zjištěné odezvy. Odezva má typické protažení směrem k nižším kmitočtům, na vysokofrekvenční straně je naopak strmý sklon. Patrná je též ryze monotónní RLF na všech frekvencích, na něž neuron odpovídá, bod maximální excitace leží na stejném kmitočtu jako CF.

CF	1,0	1,2	1,4	1,7	2,0	2,4	2,8	3,4	4,0	4,8	5,7	6,7	8,0	9,5
HSR	0	0	0	0	0	0	0	0,6	0	0	0	0	0	0
LSR	0	0	0	0	0	0	0	0,6	0	0	0	0	0	0

Tabulka 1. Nastavení matice konvergence pro neuron s pouze excitačními vstupy. Shora dolů: charakteristická frekvence nervového vlákna v kHz; koeficient excitace/inhibice u HSR vláken; koeficient excitace/inhibice u LSR vláken.

Neuron s excitačními i inhibičními vstupy – normální stav

V tomto kroku bylo vhodným nastavením parametrů dosaženo vzniku laterálních inhibičních pásem a to tak, aby inhibice pokud možno vedla k zúžení propustného pásma. Nastavení parametrů je shrnuto v tabulce 2. Obrázek 4 vlevo ukazuje sumární působení charakteristické excitace a inhibice, vpravo je pak ilustrováno, jaký tvar má samotná inhibice, jestliže jsou vlákna charakteristické excitace odpojena. Levé (nizkofrekvenční) inhibiční pásmo je navrženo tak, aby nezasahovalo do nejvyšších intenzit podnětu; tohoto stavu je dosaženo kombinací inhibičního působení HSR vláken a doplňkového excitačního vlivu LSR vláken, jenž vyrovná inhibici v oblasti vyšších intenzit. Pokud by se ponechalo pouze inhibiční působení HSR vláken, sumární odezva neuronu by pozbyla typického nizkofrekvenčního protažení. Takové odpovědi neuronů rovněž existují, zde jsme je však neuvažovali. Pravé (vysokofrekvenční) inhibiční pásmo je tvořeno víceméně pouze jedním inhibujícím LSR vláknem.



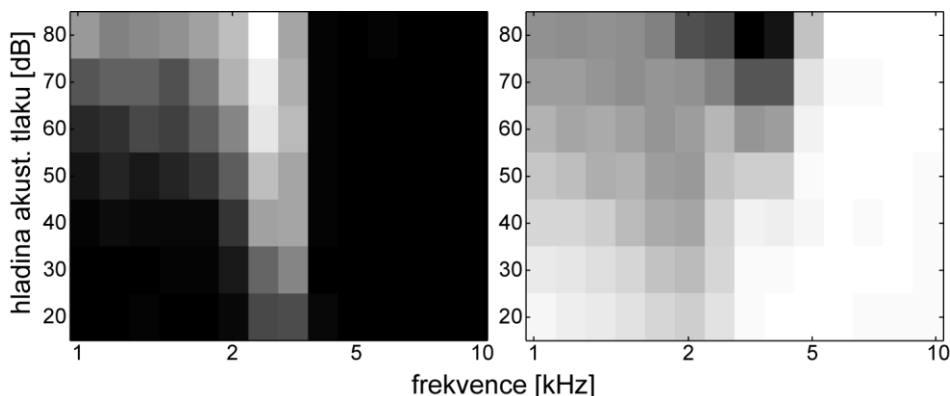
Obr. 4. Frekvenčně-intenzitní pole odezvy neuronů, normalizováno. Vlevo: odezva modelu na charakteristickou excitaci a inhibici, normální stav (bílá, resp. černá barva označuje maximální, resp. minimální amplitudu odezvy); vpravo: inhibice odpovídající normálnímu stavu (bílá, resp. černá barva označuje minimální, resp. maximální sílu inhibice).

CF	1,0	1,2	1,4	1,7	2,0	2,4	2,8	3,4	4,0	4,8	5,7	6,7	8,0	9,5
HSR	0	0	0	0	0	0	-0,6	0,6	0	0	0	0	0	0
LSR	0	0	0,03	0,06	0,1	0	0,35	0,65	0,2	-0,4	0	0	0	0

Tabulka 2. Nastavení matice konvergence pro neuron s excitačními i inhibičními vstupy – normální stav. Legenda: viz tab. 1.

Neuron s excitačními i inhibičními vstupy – patologický stav

Konečným krokem bylo nalezení takového nastavení inhibice, které by vedlo k patologickému tvaru odpovědi neuronu. Hypotéza předpokládá méně specifickou inhibici, postupovali jsme tedy tímto směrem, inhibiční pásma byla propojena a jejich působení rozšířeno. Nastavení parametrů je shrnuto v tabulce 3. Obrázek 5 vlevo ukazuje opět sumární působení charakteristické excitace a inhibice, vpravo pak odpověď neuronu s odpojenými vlákny charakteristické excitace. Z obrázku je patrné, že odezva má ve srovnání s normálním stavem (obr. 4 vlevo) širší excitační pásmo, menší dynamický rozsah na CF a nemonotónní RLF (viz též obr. 6). Přestože neuron je inhibován více než za normálního stavu, laterální inhibiční pásma nejsou patrná.



Obr. 5. Frekvenčně-intenzitní pole odezvy neuronů, normalizováno. Vlevo: odezva modelu na charakteristickou excitaci a inhibici, patologický stav (bílá, resp. černá barva označuje maximální, resp. minimální amplitudu odezvy); vpravo: inhibice odpovídající patologickému stavu (bílá, resp. černá barva označuje minimální, resp. maximální sílu inhibice).

CF	1,0	1,2	1,4	1,7	2,0	2,4	2,8	3,4	4,0	4,8	5,7	6,7	8,0	9,5
HSR	0	0	0	0	0	-0,1	-0,2	0,6	0	0	0	0	0	0
LSR	0	0	0	0	0	0	0	0,6	-0,3	-0,2	0	0	0	0

Tabulka 3. Nastavení matice konvergence pro neuron s excitačními i inhibičními vstupy – patologický stav. Legenda: viz tab. 1.

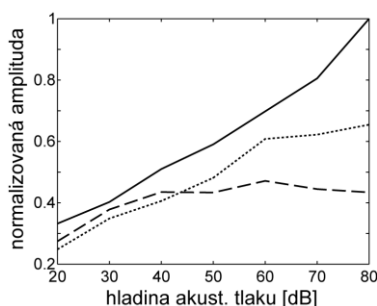
Z důvodu lepší čitelnosti obrázků byly všechny amplitudy odezvy před zobrazením normalizovány, nelze tudíž přímo srovnat amplitudy normálního a patologického stavu. Obrázek 6 ilustruje RLF na charakteristické frekvenci pro všechny tři modelové odezvy: charakteristickou excitaci bez inhibice, normální kombinaci excitace a inhibice a patologickou kombinaci excitace a inhibice. Křivky jsou normalizovány k RLF charakteristické excitace. Je vidět, že se zesilující inhibicí amplituda odezvy klesá, u normální kombinace excitace a inhibice je pro vyšší SPL viditelný náznak saturace, patologická RLF má zřetelně nižší amplitudu odezvy a má lehce nemonotónní průběh.

Diskuse

Fyziologická relevance modelu

Formulovaný model sleduje velmi těsně fyziologickou strukturu sluchové dráhy (např. [29]), přesto se dopouští jistého zjednodušení: vstupem neuronů colliculus inferior, které simulujeme, nejsou ve skutečnosti přímo vlákna sluchového nervu. Mezi sluchovým nervem a neurony colliculu inferior se nachází ještě několik

mezilehlých synapsí – spojů, které postupující signál transformují. Již na těchto nižších úrovních se uplatňuje konvergence excitačních a inhibičních projekcí, která ve svém důsledku ovlivňuje odezvu vyšších etáží sluchové dráhy. Pro účely této práce byl vliv každého mezilehlého spoje zjednodušen a uvažován jako váhovaný součet jeho vstupů. Tím bylo možné redukovat vícevrstvou strukturu na jednovrstvou a veškerá propojení simulovat až v poslední vrstvě. Omezila se tak množina nastavitelných parametrů modelu, aby bylo vůbec možné dospět k nějakému uchopitelnému závěru. Přes toto zjednodušení lze model považovat za realistický: zkoumáme-li pouze počet AP vyvolaných během stimulace a nikoli rozložení AP v čase, je frekvenčně-intenzitní odezva vláken sluchového nervu podobná odezvě neuronů v colliculu inferior [8], [27]. Navíc ke změnám struktury nervových spojů může docházet i na nižší úrovni sluchové dráhy, než je colliculus inferior, sloučení veškerých strukturních změn do jediné vrstvy tedy je možné.



Obr. 6. RLF modelovaných neuronů na charakteristické frekvenci, normalizováno. Plná čára: charakteristická excitace bez inhibice; tečkovaná čára: normální kombinace excitace a inhibice; čárkovaná čára: patologická kombinace excitace a inhibice.

Vliv laterální inhibice

Srovnáním odezvy mající laterální inhibiční pásma s čistou excitací se ukazuje, že laterální inhibice skutečně pomáhá zúžit excitační pásmo, levostranná inhibice navíc posouvá charakteristickou frekvenci vpravo. Jelikož na vyšších intenzitách již levostranná inhibice nepůsobí, kmitočet maximální excitace je nyní nižší než CF. Tento jev je zcela v souladu s experimentálními daty. Neuron má nicméně stále ryze monotónní průběh RLF na všech relevantních kmitočtech. Pravostranná inhibice působí především na vysokých intenzitách, spíše tedy ještě odsouvá bod maximální excitace k nižším kmitočtům. Jejím hlavním efektem je zvýšení strmosti sklonu frekvenční prahové křivky, částečně ale též snižuje amplitudu maximální odezvy neuronu a mírně tlumí sklon RLF na vysokých intenzitách podnětu.

Důležitým zjištěním je, že na zúžení excitačního pásma má dominantní vliv levostranná inhibice. Pokud bychom namísto ní zesílili pravostrannou inhibici (například použitím HSR vlákna), inhibiční oblast by bez použití další doplňující excitace získala výraznější nízkofrekvenční protažení, které by způsobilo silně nemonotónní RLF neuronu. Podobné odpovědi neuronů jsou známy (např. [21]), v současné práci se jimi však nezabýváme.

Patologická struktura projekcí

Vyjděme postupně z experimentálních poznatků, vyjmenovaných v sekci Výchozí experiment a zkoumejme, zda navržená patologická struktura projekcí a následná změna inhibičních oblastí vede k požadovanému chování.

Excitační práh leží v případě patologického stavu na zhruba stejné intenzitě podnětu jako v normálním případě. Model ukazuje, že pro dosažení tohoto chování je nezbytné, aby inhibice v okolí prahu nebyla silnější než excitace – to je ale v naší hypotéze očekávatelné: patologická inhibice má být méně specifická a široce rozprostřená, nikoli silná a soustředěná na některé místo frekvenčně-intenzitní oblasti [7], [10], [19].

Laterální inhibice v modelu přispívá k zúžení excitačního pásma; jestliže se inhibice stane rozprostřenou a laterální inhibiční pásma se slíjí do jednoho, excitační pásmo se rozšíří na hodnotu srovnatelnou se stavem, kdy neuron není vůbec inhibován. Toto chování přesně odpovídá experimentálním výsledkům. Model však přinesl rovněž zjištění, které vyvrací část hypotézy z práce [8]. V citovaném článku se předpokládá, že patologická změna projekcí se projevuje především *nad* CF a že odezva na nižší frekvence než je CF je beze změn; jinými slovy, že za rozšířením excitačního pásma stojí posun či vymizení pravostranné inhibice. Model ukazuje, že pro zúžení excitačního pásma nehraje pravostranná inhibice příliš roli. Klíčová je naopak levostranná inhibice, která však svým působením posouvá vpravo jak nízkofrekvenční část odezvy, tak charakteristickou frekvenci; z tohoto důvodu se vlivem *levostranné* inhibice zúží *pravá* polovina odezvy. Vymizí-li nebo je-li levostranná inhibice rozprostřena, část odezvy včetně CF se posune vlevo a dojde k patologickému rozšíření vysokofrekvenční části odezvy nad CF.

Hypotéza z citované práce [8] předpokládá, že nižší spontánní aktivita u postižených zvířat je důsledkem širší inhibice. Model tuto tezi nepotvrzuje, spontánní aktivita je obdobná v obou případech. Vzhledem k tomu, že spontánní aktivitu vyhodnocujeme v té části frekvenčně-intenzitního pole, která leží co nejdále od excitačního pole, musela by se patologická inhibice rozšířit na celé

vnímané frekvenční pásmo, takto široké projekce se však nedají fyziologicky předpokládat [12].

Model objasňuje, jakým mechanismem je možné docílit stavu, aby byl neuron přehibován, ale aby přitom nebyla patrná laterální inhibiční pásma: obě laterální pásma musejí splynout v jednu inhibiční oblast, která překrývá celou excitační oblast. Vývoj projekcí tedy pravděpodobně postupuje tak, že inhibiční a excitační oblasti se nejprve téměř přesně překrývají a teprve následně během dozrávání systému dochází k oslabení inhibice v jádru excitační oblasti, popř. ke vzniku dvou laterálních inhibičních pásem (viz též [11], [12]).

Tím, že v patologickém případě není pravostranné inhibiční pásmo jasně ohraničené, zasahuje svým vlivem do oblasti vyšších intenzit excitační oblasti. Tím dojde k oslabení odezvy na vyšších intenzitách podnětu, důsledkem čehož je snížení dynamického rozsahu neuronu (neuron dříve dosahuje saturace), zvětšení relativního sklonu RLF (neuron se rychleji dostává z minimální excitace k maximální), snížení maximální amplitudy odezvy neuronu (neboť ta se normálně vyskytuje právě na vysokých intenzitách) a také změna charakteru RLF z ryze monotónní na saturující nebo dokonce nemonotónní.

Vliv ohlušení v dospělosti

Přestože to není hlavní náplní článku, je vhodné se zmínit ještě o jiném typu postižení, vyvolaném hlukovou expozicí: o akustickém traumatu v dospělosti. Je pozoruhodné, že ohlušení v dospělosti má některé projevy shodné s ohlušením během vývoje, jiné projevy jsou však v přímém protikladu [2], [5], [8], [20], [21], [25], [32], [33]. V obou případech postižení dochází k rozšíření excitačního pásma, v obou případech se předpokládá podstatný vliv inhibice, která významně modeluje tvar odezvy neuronu. Avšak zatímco ohlušení v raném stupni vývoje vede k výsledkům, jež odpovídají zvýšené míře inhibice (zejména menší amplituda odezvy neuronů a větší procento nemonotónních neuronů), akustické trauma v dospělosti vede naopak k vyšší amplitudě odezvy neuronů a menšímu procentu nemonotónních neuronů, což odpovídá snížené inhibici. Srovnáme-li výsledky modelu pro čistou excitaci a excitaci se správně vyvinutou laterální inhibicí, vyplyne nám, že potlačení laterální inhibice (tj. ponechání čisté excitace) vede právě k projevům, pozorovaným po akustickém traumatu v dospělosti.

Závěr

Výsledky modelu ukazují, že většina experimentálních zjištění, pozorovaných v pracích [5] a [8], je vysvětlitelná pomocí změněné struktury zejména inhibičních projekcí. Některé části prezentované hypotézy však model nepotvrdil: jedná se o zdůvodnění spontánní aktivity neuronů a o zdůvodnění změny šířky excitačního pásma pod a nad charakteristickou frekvencí neuronu. Omezení spontánní aktivity bude třeba vysvětlit jiným způsobem, změny šířky excitačního pásma nad a pod CF jsou vysvětlené předkládaným modelem.

Z modelu vyplývá, že inhibiční oblast v časném stupni vývoje splývá s excitační oblastí, postupně se však její vliv soustředí do postranních pásem a jádro excitace je tak zvýrazněno. Narušení tohoto vývoje způsobí zakonzervování nezralého stavu a vede k projevům, popsaným v pracích [5] a [8]. Pokud se naopak naruší inhibice v dospělosti, vznikne stav, popsaný např. v článku [21]. Uvedené závěry mohou sloužit jako námět pro další elektrofyziologický experiment, v němž by byla přímo sledována inhibiční aktivita neuronů během raného vývoje a ověřily se tak predikce modelu.

Literatura

- [1] AITKIN, L.M. – MOORE, D.R. Inferior colliculus. II. Development of tuning characteristics and tonotopic organization in central nucleus of the neonatal cat. *J. Neurophysiol.* 1975, 38, s. 1208–1216.
- [2] BARSZ, K. – WILSON, W.W. – WALTON, J.P. Reorganization of receptive fields following hearing loss in inferior colliculus neurons. *Neuroscience* 2007, 147, s. 532–545.
- [3] BONHAM, B.H., *et al.* Spatial organization of frequency response areas and rate / level functions in the developing AI. *J. Neurophysiol.* 2004, 91, s. 841–854.
- [4] BUREŠ, Z. *Modelování lidské sluchové dráhy a vnímání zvuku*. Praha, 2007. 215 s. Dizertační práce. ČVUT v Praze.
- [5] BUREŠ, Z., *et al.* Noise exposure during early development impairs the processing of sound intensity in adult rats. *European Journal of Neuroscience*. 2010, 32, s. 155–164.
- [6] FRANKLIN, S.R. – BRUNSO-BECHTOLD, J.K. – HENKEL, C.K. Unilateral cochlear ablation before hearing onset disrupts the maintenance of dorsal nucleus of the lateral lemniscus projection patterns in the rat inferior colliculus. *Neuroscience* 2006, 143, s. 105–115.

- [7] GABRIELE, M.L. – BRUNSO-BECHTOLD, J.K. – HENKEL, C.K. Plasticity in the development of afferent patterns in the inferior colliculus of the rat after unilateral cochlear ablation. *J. Neurosci.* 2000, 20, s. 6939–6949.
- [8] GRÉCOVÁ, J., *et al.* Brief exposure of juvenile rats to noise impairs the development of the response properties of inferior colliculus neurons. *Eur. J. Neurosci.* 2009, 29, s.1921–1930.
- [9] CHANG, E.F. – MERZENICH, M.M. Environmental noise retards auditory cortical development. *Science* 2003, 300, s. 498–502.
- [10] KANDLER, K. Activity-dependent organization of inhibitory circuits: lessons from the auditory system. *Curr. Opin. Neurobiol.* 2004, 14, s. 96–104.
- [11] KANDLER, K. – FRIAUF, E. Pre- and postnatal development of efferent connections of the cochlear nucleus in the rat. *J. Comp. Neurol.* 1993, 328, s. 161–184.
- [12] KANDLER, K. – GILLESPIE, D.C. Developmental refinement of inhibitory sound-localization circuits. *Trends Neurosci.* 2005, 28, s. 290–296.
- [13] KITZES, L.M. – SEMPLE, M.N. Single-unit responses in the inferior colliculus: effects of neonatal unilateral cochlear ablation. *J. Neurophysiol.* 1985, 53, s. 1483–1500.
- [14] KOTAK, V.C., *et al.* Hearing loss raises excitability in the auditory cortex. *J. Neurosci.* 2005, 25, s. 3908–3918.
- [15] KRAL, A., *et al.* Postnatal cortical development in congenital auditory deprivation. *Cereb. Cortex* 2005, 15, s. 552–562.
- [16] McALPINE, D., *et al.* Response properties of neurons in the inferior colliculus of the monaurally deafened ferret to acoustic stimulation of the intact ear. *J. Neurophysiol.* 1997, 78, s. 767–779.
- [17] McCLURE, M.M., *et al.* Auditory processing deficits in unilaterally and bilaterally injured hypoxicischemic rats. *Neuroreport* 2005, 16, s. 1309–1312.
- [18] NAKAHARA, H. – ZHANG, L.I. – MERZENICH, M.M. Specialization of primary auditory cortex processing by sound exposure in the “critical period”. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 2004, 101, s. 7170–7174.
- [19] PIERSON, M. – SNYDER-KELLER, A. Development of frequency-selective domains in inferior colliculus of normal and neonatally noise-exposed rats. *Brain Res.* 1994, 636, s. 55–67.
- [20] RAJAN, R. Receptor organ damage causes loss of cortical surround inhibition without topographic map plasticity. *Nat. Neurosci.* 1998, 1, s. 138–143.

- [21] SALVI, R.J. – WANG, J. – DING, D. Auditory plasticity and hyperactivity following cochlear damage. *Hear. Res.* 2000, 147, s. 261–274.
- [22] SANES, D.H. – RUBEL, E.W. The ontogeny of inhibition and excitation in the gerbil lateral superior olive. *J. Neurosci.* 1988, 8, s. 682–700.
- [23] SANES, D.H. – TAKACS, C. Activity-dependent refinement of inhibitory connections. *Eur. J. Neurosci.* 1993, 5, s. 570–574.
- [24] SHEPHERD, R.K. – BAXI, J.H. – HARDIE, N.A. Response of inferior colliculus neurons to electrical stimulation of the auditory nerve in neonatally deafened cats. *J. Neurophysiol.* 1999, 82, s. 1363–1380.
- [25] SUN, W., *et al.* Noise exposure-induced enhancement of auditory cortex response and changes in gene expression. *Neuroscience* 2008, 156, s. 374–380.
- [26] SYKA, J. Plastic changes in the central auditory system after hearing loss, restoration of function, and during learning. *Physiol. Rev.* 2002, 82, s. 601–636.
- [27] TABERNER, A.M. – LIBERMAN, M.C. Response Properties of Single Auditory Nerve Fibers in the Mouse. *J. Neurophysiol.* 2005, vol. 93, str. 557–569
- [28] THORNTON, S.K. – SEMPLE, M.N. – SANES, D.H. Conditioned enhancement and suppression in the developing auditory midbrain. *Eur. J. Neurosci.* 1999, 11, s. 1414–1420.
- [29] TROJAN, S. *et al. Lékařská fyziologie.* 4. vyd. Praha: Grada, 2003. 772 s. ISBN 80-247-0512-5.
- [30] VALE, C., *et al.* Unilateral cochlear ablation produces greater loss of inhibition in the contralateral inferior colliculus. *Eur. J. Neurosci.* 2004, 20, s. 2133–2140.
- [31] DE VILLERS-SIDANI, E., *et al.* (2007) Critical period window for spectral tuning defined in the primary auditory cortex (A1) in the rat. *J. Neurosci.* 2007, 27, s. 180–189.
- [32] WANG, J. – SALVI, R.J. – POWERS, N. Plasticity of response properties of inferior colliculus neurons following acute cochlear damage. *J. Neurophysiol.* 1996, 75, s. 171–183.
- [33] WANG, J. – DING, D. – SALVI, R.J. Functional reorganization in chinchilla inferior colliculus associated with chronic and acute cochlear damage. *Hear. Res.* 2002, 168, s. 238–249.
- [34] XU, L. – JEN, P.H. The effect of monaural middle ear destruction on postnatal development of auditory response properties of mouse inferior collicular neurons. *Hear. Res.* 2001, 159, s.1–13.

- [35] ZHANG, L.I. – BAO, S. – MERZENICH, M.M. Persistent and specific influences of early acoustic environments on primary auditory cortex. *Nat. Neurosci.* 2001, 4, s. 1123–1130.

A computational model of pathological response of inferior colliculus neurons after noise exposure during early ontogeny

Abstract

Proper function of central auditory system relies on natural stimulation during early ontogeny: afferent neural activity is necessary for sharper frequency tuning of neurons, proper intensity-dependent response, and correct neural coding of auditory stimuli. Should a peripheral part of auditory system be impaired during development, the auditory centers lack the natural stimulation and their maturation is compromised. Neuronal responses attain the immature unspecific nature and the representation of stimulus frequency and intensity is irreversibly disrupted. It is assumed that these anomalous neuronal responses result from different structure of neuronal connectivity. In the paper, this hypothesis is tested using a complex model of auditory pathway. Two types of connectivity patterns are employed: one corresponding to a normal state, the other corresponding to the pathological state. The simulation outputs are compared to experimental data.

Key words

computational model, auditory pathway, frequency tuning curve, excitatory and inhibitory projections, lateral inhibition

Kontaktní údaje na autora

Ing. Zbyněk Bureš, Ph.D.

Vysoká škola polytechnická Jihlava, Katedra elektrotechniky a informatiky

Tolstého 16, 586 01 Jihlava

e-mail: buresz@vspj.cz

Ústav experimentální medicíny AVČR, v.v.i.

Vídeňská 1083, 142 20 Praha 4

e-mail: buresz@biomed.cas.cz

Transformační graf operačního zesilovače postihující tranzitní kmitočet

Bohumil Brtník

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Abstrakt

Jednou z metod analýzy lineárních elektrických obvodů je metoda tzv. transformačních grafů (T-grafů). Všeobecně jsou známy transformační grafy ideálních operačních zesilovačů, které popsali například Pospíšila Dostál 1991, Dostál 1986 a mnozí jiní, ale je možné také najít transformační grafy jiných prvků například transformační graf operačního zesilovače s konečným napěťovým zesílením, zahrnujícím i jeho změnu zesílení v otevřené smyčce zpětné vazby s kmitočtem.

Využitím transformačních grafů lze redukovat MC graf obvodu obsahující operační zesilovač popsany dvěma kmitočty lomu jeho kmitočtové charakteristiky zesílení. Je ukázáno na příkladech, že transformační graf poskytne výsledek přímo, zatímco maticové metody výpočtů vyžadují poměrně obtížné matematické operace.

Klíčová slova

Transformační graf, metoda uzlových napětí, tranzitní frekvence operačního zesilovače, Masonův vztah, vícenásobné algebraické doplňky.

JEL Classification: L63

1 Úvod

Při řešení lineárních anebo linearizovaných elektrických obvodů obsahujících operační zesilovače je vhodné při jejich kmitočtové analýze v oblasti vyšších frekvencí uvážit průběh kmitočtové charakteristiky zesílení vlastního operačního zesilovače. Protože zesílení operačního zesilovače s kmitočtem klesá, přestává v oblasti vysokých frekvencí platit jednoduchý vztah pro zesílení obvodu s operačním zesilovačem, kdy je toto zesílení dáno pouze vztahem mezi prvky

ve zpětné vazbě a v přímé větvi. To je možné uvážit jen pro oblast nízkých frekvencí, kde zesílení vlastního operačního zesilovače lze pokládat za nekonečné.

Vlastní „ruční“ řešení bývá prováděno s využitím maticového počtu buďto modifikovanou metodou uzlových napětí, kde však každý operační zesilovač zvyšuje rozměr matice o jeden řád anebo metodou redukce počtu proměnných, kde naopak každý operační zesilovač vyvolá snížení řádu matice o jedničku. Toto snížení je však vykoupeno nutností násobit prvky jednoho ze sloupků admitanční matice, popisující obvod převrácenou hodnotou napětíového zesílení a přičítat je k prvkům sloupku, majícího index odpovídající druhému vstupu operačního zesilovače. Tím se výpočty stávají i přes snížený rozměr matice dosti pracnými.

Existuje však i metoda tzv. transformačních grafů, kdy se vlastní redukce děje nikoli algebraickou, ale grafickou cestou, a vyhodnocení grafu (tedy vlastní výpočet) pak relativně jednoduchou aplikací Masonova pravidla.

Tato metoda se v mnoha případech jeví jako nejjednodušší a nejschůdnější cesta analýzy, nesrovnatelně jednodušší nežli jsou metody algebraické. Vlastní transformační grafy lze konstruovat s využitím incidenčních matic, je však možná i relativně jednoduchá jejich konstrukce vycházející se teorií těchto incidenčních matic, a využívající pouze aplikace základních vztahů pro zesílení.

Tento postup je popsán na následujících stránkách.

2 Konstrukce transformačního grafu

2.1 Transformační graf obecně

Nejprve bude uvedena konstrukce transformačního grafu operačního zesilovače majícího konečnou hodnotu napětíového zesílení.

Za tím účelem se uvažuje, že do obvodu popsaného soustavou rovnic sestavených na základě I.Kirchhoffova zákona algoritmem metody uzlových napětí (resp. obvodu popsaného admitanční dvojbranovou maticí $\mathbf{I}=\mathbf{Y}.\mathbf{U}$), která může mít například tvar (1)

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= y_{11}.\tilde{U}_1 + y_{12}.\tilde{U}_2 \\ \tilde{I}_2 &= y_{21}.\tilde{U}_1 + y_{22}.\tilde{U}_2\end{aligned}\tag{1}$$

se připojí zesilovač, jehož činnost je popsána rovnicemi $\tilde{U}_2 = A\tilde{U}_1$ a $\tilde{I}_2 = a.\tilde{I}_1$, kde A označuje napětíové a a proudové zesílení. Pro operační zesilovač s nekonečnou hodnotou proudového zesílení a se z rovnice pro proudové zesílení

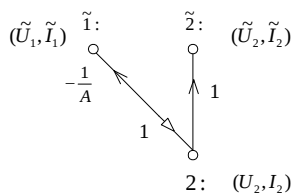
vyjádří vstupní proud $\tilde{I}_1$ takže rovnice pro proudy tím získá tvar $\tilde{I}_1 = \frac{1}{a} \cdot \tilde{I}_2$. Pro konečnou hodnotu napěťového zesílení operačního zesilovače se vyjádří z rovnice pro napěťové zesílení vstupní napětí, takže tato rovnice získá tvar $\tilde{U}_1 = \frac{1}{A} U_2$, kde $\tilde{U}_2 = U_2$. Dosazením těchto dvou rovnic do soustavy (1) se obdrží následující rovnice (2).

$$\frac{1}{a} \cdot y_{21} \cdot \frac{1}{A} \cdot U_2 + \frac{1}{a} \cdot y_{22} \cdot U_2 = y_{11} \cdot \frac{1}{A} \cdot \tilde{U}_1 + y_{12} \cdot U_2 \quad (2)$$

Jak je patrné, původní soustava dvou rovnic (1) se tedy tímto postupem zredukovala na výslednou rovnici jedinou, ve které se vyskytuje pouze napětí U_2 , tedy napětí s indexem 2. Proto i výsledný proud bude označen indexem 2, tedy bude I_2 a platí pro něj vztah $I_2 = \tilde{I}_1 - \frac{1}{a} \cdot \tilde{I}_2$. Pro nekonečně velké proudové zesílení a tedy v limitě pro $a \rightarrow \infty$ výsledný nový proud bude dán vztahem (3).

$$I_2 = \lim_{A \rightarrow \infty} (\tilde{I}_1 - \frac{1}{a} \cdot \tilde{I}_2) = \tilde{I}_1 \quad (3)$$

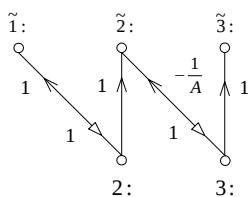
Tři rovnice použité k redukci soustavy rovnic (1), tedy $\tilde{U}_1 = \frac{1}{A} U_2$, $\tilde{U}_2 = 1 \cdot U_2$ a $I_2 = 1 \cdot \tilde{I}_1$ mohou být znázorněny napěťovými a proudovými transformačními grafy (T-grafy), jak je ukázáno na obr.1.



Obr.1 Transformační graf napětí a proudu operačního zesilovače

V případě diferenciálního operačního zesilovače platí pro výstupní napětí $\tilde{U}_3 = A(\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2)$. Položí-li se $\tilde{U}_1 = 1 \cdot U_1$ pak z rovnice pro napětí U_3 je $\frac{1}{A} \cdot U_3 = U_1 - \tilde{U}_2$ a odtud pro $\tilde{U}_2$ plyne vztah $\tilde{U}_2 = -\frac{1}{A} \cdot U_3 + 1 \cdot U_1$, což po doplnění vztahu pro proudy lze znázornit transformačním grafem diferenciálního

operačního zesilovače, zohledňujícího změnu jeho napětového zesílení v otevřené smyčce zpětné vazby, který je nakreslen na obr.2.



Obr.2 Transformační graf napětí a proudu diferenciálního operačního zesilovače

2.2 Výsledný transformační graf operačního zesilovače zahrnující mezní kmitočet

Vlastní pokles napětového zesílení operačního zesilovače vyvolávají v reálu vstupní odpory h_{11} a kapacity mezi bází a kolektorem tranzistorů C_{BC} , z nichž je operační zesilovač sestaven, a které tak vytvářejí v podstatě integrační RC-články. Pro reálný operační zesilovač se pak uvažuje jeden anebo dva kmitočty lomu této jeho kmitočtové charakteristiky zesílení. Jejich matematický popis může pak být následující:

Poměr výstupního ku vstupnímu napětí integračního článku je dán vztahem (4)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \quad (4)$$

Pro mezní kmitočet ω_M platí $RC = \frac{1}{\omega_M}$ takže po dosazení je

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_M} + 1} = \frac{\omega_M}{j\omega + \omega_M} \text{ pro pasivní článek. Aktivní člen má zesílení } A,$$

takže bude $\frac{U_2}{U_1} = \frac{A\omega_M}{j\omega + \omega_M}$ a tento vztah lze pro $\omega \gg \omega_M$ zjednodušit na

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A\omega_M}{j\omega}. \text{ Na tranzitním kmitočtu operačního zesilovače je pak } \frac{U_2}{U_1} = 1 \text{ čili}$$

platí $\frac{\omega_M}{\omega_T} \cdot A = 1$, odkud tedy $\omega_M = \frac{\omega_T}{A}$. Zavedením tohoto kmitočtu vztah pro poměr výstupního napětí ku vstupnímu získá tvar

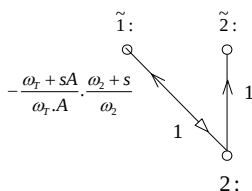
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A \omega_M}{j\omega} = \frac{A \frac{\omega_T}{A}}{\frac{\omega_T}{A} + j\omega} = \frac{\omega_T}{\omega_T + j\omega A} = \frac{A \omega_T}{\omega_T + sA} \quad (5)$$

kde $s = j\omega$ je komplexní frekvence. Pokud se však zohlední oba dva kmitočty lomu zesílení, pak pro druhý kmitočet ω_2 , nastávající nad kmitočtem ω_T (při němž $\frac{U_2}{U_1} = 1$) se pokles zesílení vyjádří dalším integračním článkem, pro jehož poměr

výstupního napětí ku vstupnímu platí $\frac{\omega_2}{\omega_2 + s}$, což spolu s prvním kmitočtem dá výsledný vztah (6)

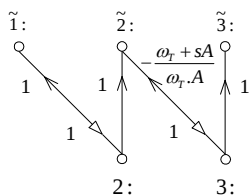
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A \omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \quad (6)$$

Tyto vztahy (5) a (6) se pak vezmou jako přenosy napětí větví transformačního grafu, kde se vyskytuje zesílení, například transformační graf operačního zesilovače s uvažáním dvou kmitočtů lomu pro invertující vstup v uzlu $\tilde{1}$ a výstup v uzlu $\tilde{2}$ je nakreslen na obr.3.



Obr.3 Transformační graf operačního zesilovače zachycující jeho obě mezní frekvence

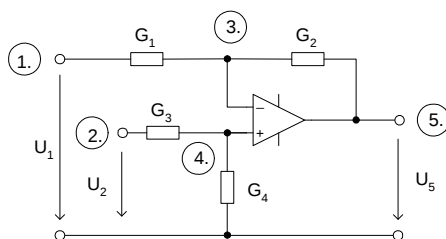
Transformační graf diferenciálního operačního zesilovače například se zohledněním pouze jediného kmitočtu lomu jeho frekvenční charakteristiky zesílení v otevřené smyčce zpětné vazby je pak nakreslen na obr.4.



Obr.4 Transformační graf diferenciálního operačního zesilovače zahrnující jednu mezní frekvenci

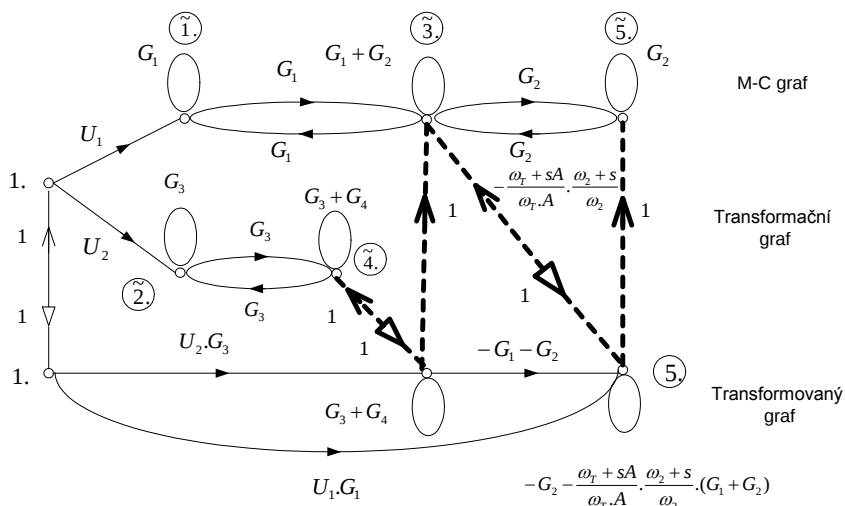
3 Příklad

Popsaný způsob řešení obvodu bude ilustrován na příkladu zapojení tzv. rozdílového zesilovače, jemuž se má najít výstupní napětí U_5 při uvážení obou kmitočtů lomu frekvenční charakteristiky zesílení operačního zesilovače. Schéma zapojení analyzovaného obvodu je nakresleno na obr.5.



Obr.5 Schéma zapojení k příkladu

Při analýze se nejprve nakreslí MC-graf obvodu. Ten je pro schéma zapojení z obr.5 nakreslen obr.6 nahoře. Protože obvod má celkem 5 uzlů, má jich stejný počet i jeho MC-graf. Větvě mezi jednotlivými uzly pak symbolizují jednotlivé rezistory, charakterizované svými vodivostmi G_1 až G_4 . Protože analyzovaný obvod má dva vstupy, zavede se navíc jediný vstupní uzel, ohodnocený jedničkou, aby bylo možno graf vyhodnotit pomocí Masonova pravidla, a vstupní napětí pak vyjadřují větve s přenosy U_1 , U_2 z tohoto vstupního uzlu vystupující.



Obr.6 Grafické řešení obvodu z obr.5.

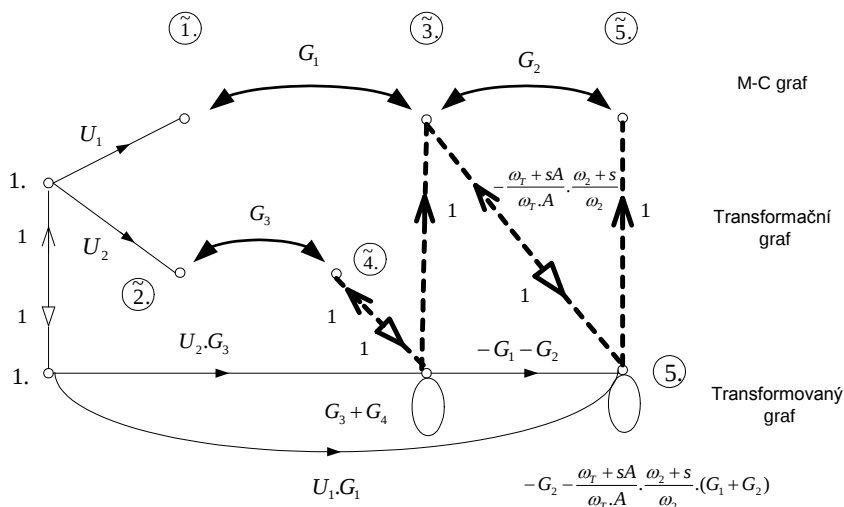
Do takto získaného MC-grafu se následně zakreslí transformační graf diferenciálního operačního zesilovače, který je nakreslen na obr.6 uprostřed, a postupem uvedeným např. v [3] se získá graf transformovaný, nalézající se na obr.6 dole, který je však mnohem jednodušší nežli původní výchozí MC-graf, a který se vyhodnotí aplikací Masonova vztahu

$$\begin{aligned}
 U_5 &= \frac{\sum p_{(i)} \cdot \Delta_{(i)}}{V - \sum S^{(K)} \cdot V^{(K)}} = \frac{U_1 \cdot G_1 \cdot (G_3 + G_4) + U_2 \cdot G_3 \cdot (-G_1 - G_2) \cdot 1}{1 \cdot (G_3 + G_4) \cdot \left[-G_2 - \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_T + sA}{A \omega_T} \cdot (G_1 + G_2) \right]} = \\
 &= \frac{-U_1 \cdot G_1 \cdot (G_3 + G_4) + U_2 \cdot G_3 \cdot (G_1 + G_2)}{(G_3 + G_4) \cdot \left[G_2 + \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_T + sA}{A \omega_T} \cdot (G_1 + G_2) \right]} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Popsaný transformační graf, který byl zkonstruován bez využití incidenčních matic pouze aplikací základních vztahů popisujících zesilovač, umožnil rychle najít výsledek, i když zesílení bylo dáno relativně složitou funkcí.

Přitom však vlastní výchozí MC-graf lze podle [2] zakreslit i značně zjednodušeně, jak je to ukázáno na obr.7, kde se příslušné vodivosti pouze naznačí orientovanou větví, čímž se řešení obvodu ještě dále zjednoduší.

Transformovaný graf je na obr.6 i na obr.7 shodný, proto musí být i shodné výsledky.



Obr.7 Grafické řešení obvodu z obr.5 zjednodušeným výchozím MC grafem.

4 Řešení modifikovanou metodou uzlových napětí

Pro srovnání pracnosti výpočtů lze uvést řešení téhož rozdílového zesilovače běžně používanou modifikovanou metodou uzlových napětí (MMUN) [3]: protože obvod obsahuje pět uzlů a jeden operační zesilovač, bude hybridní matice obvod popisující mít 5 řádků a sloupků plus jeden přidáný řádek a sloupek razítka operačního zesilovače, čili bude následující:

G_1		$-G_1$			
	G_3		$-G_3$		
$-G_1$		$G_1 + G_2$		$-G_2$	
	$-G_3$		$G_3 + G_4$		
		$-G_2$		G_2	1
		$-\frac{A \cdot \omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s}$	$\frac{A \cdot \omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s}$	-1	

Pro vlastní výpočet se použije metoda lineární superpozice [1], protože napětí U_5 je dáno příspěvkem od napětí U_1 při nulovém napětí U_2 (tj. při uzemněném uzlu 2)

o velikosti $U_5^{(1)}$, pro který s využitím metody vícenásobných algebraických doplňků platí vztah

$$U_5^{(1)} = U_1 \cdot \frac{\Delta_{1,2;5,2}}{\Delta_{1,2;1,2}} \quad (8)$$

když uzemněnému uzlu 2. odpovídá vypuštění 2.řádku a 2.sloupku v hybridní matici, a příspěvkem od napětí U_2 při nulovém napětí U_1 (tj. při uzemněném uzlu 1.) o velikosti $U_5^{(2)}$ pro který s využitím metody vícenásobných algebraických doplňků platí vztah

$$U_5^{(2)} = U_2 \cdot \frac{\Delta_{2,1;5,1}}{\Delta_{2,1;2,1}} \quad (9)$$

když uzemněnému uzlu 1. odpovídá vypuštění 1.řádku a 1.sloupku v hybridní matici. Výsledné napětí U_5 tedy bude dáno jejich součtem a je proto následující:

$$U_5 = U_1 \cdot \frac{\Delta_{1,2;5,2}}{\Delta_{1,2;1,2}} + U_2 \cdot \frac{\Delta_{2,1;5,1}}{\Delta_{2,1;2,1}} = \frac{U_1 \cdot \Delta_{1,2;5,2} \cdot (-1)^2 + U_2 \cdot \Delta_{2,1;5,1} \cdot (-1)^3}{\Delta_{1,2;1,2}} =$$

$$= U_1 \cdot \left| \begin{array}{ccc|c} -G_1 & G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & 1 \cdot (-1)^1 + \\ 0 & -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & \frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & 0 \end{array} \right| +$$

$$U_2 \cdot \left| \begin{array}{ccc|c} G_1 + G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ 0 & G_3 + G_4 & 0 & 0 \\ -G_2 & 0 & -G_2 & 1 \cdot (-1)^0 \\ -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & \frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & -1 & 0 \end{array} \right|$$

$$-U_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3 + G_4 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & \frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 =$$

po vyčíslení determinantů nejlépe rozvojem podle prvku posledního sloupku bude

$$= \frac{-U_1 \cdot \begin{vmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 + G_4 \\ 0 & -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & \frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \end{vmatrix} \cdot (-1)^7}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 & 0 & -G_2 \\ 0 & G_3 + G_4 & 0 \\ -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & \frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^7} \cdot (-1)^7$$

$$-U_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & G_1 + G_2 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3 + G_4 \\ 0 & -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} & -\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \end{vmatrix} \cdot (-1)^7 =$$

$$+ U_1 \left[-G_1(G_3 + G_4) \left(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \right) (-1) \right] +$$

$$+ U_2 \left[-G_3(G_1 + G_2) \left(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \right) (-1) \right]$$

$$= \frac{(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s}) \cdot (-G_2)(G_3 + G_4)(-1) + (G_1 + G_2)(G_3 + G_4)(-1)}{(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s}) \cdot (-G_2)(G_3 + G_4)(-1) + (G_1 + G_2)(G_3 + G_4)(-1)} =$$

a konečně po (poměrně pracné) úpravě, spočívající v rozšíření členem

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \\
 & \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \text{ již bude} \\
 & \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \\
 & + U_1 \left[-G_1(G_3 + G_4) \left(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \right) (-1) \right] \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} + \\
 & = \frac{-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} (-G_2)(G_3 + G_4)(-1) + (G_1 + G_2)(G_3 + G_4)(-1) \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \frac{\omega_2 + s}{\omega_2}}{A\omega_T \frac{\omega_2 + s}{\omega_2}} \\
 & + U_2 \left[-G_3(G_1 + G_2) \left(-\frac{A\omega_T}{\omega_T + sA} \frac{\omega_2}{\omega_2 + s} \right) (-1) \right] \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} =
 \end{aligned}$$

a tedy výsledek je

$$\begin{aligned}
 & = \frac{-U_1 \cdot G_1 \cdot (G_3 + G_4) + U_2 \cdot G_3 \cdot (G_1 + G_2)}{(G_3 + G_4) \cdot \left[G_2 + \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_T + sA}{A\omega_T} \cdot (G_1 + G_2) \right]} \quad (10)
 \end{aligned}$$

čili identický s výsledkem (7) získaným výše popsanou metodou transformačního grafu.

Jeho získání modifikovanou metodou uzlových napětí předpokládá ovšem znalost algoritmu sestavení matice, znalost razítka operačního zesilovače a pro vyčíslení pomocí vícenásobných algebraických doplňků i znalost zásad počítání s nimi společně s jejich tvorbou na základě znalosti aplikace principu lineární superpozice, následované poměrně pracným výpočtem, zatímco pro popsaný graf stačí znát transformační graf, algoritmus jeho vyhodnocení a Masonovo pravidlo.

5 Řešení metodou redukce počtu proměnných

Mohlo by se zdát, že mnohem jednodušší bude aplikace algebraické metody redukce počtu proměnných, vedoucí ke snížení řádu matice popisující obvod. Pro vytvoření konkrétní představy bude na závěr alespoň naznačen postup řešení její aplikací.

Protože analyzovaný obvod (z obr.5) obsahuje 5 uzlů, bude v tomto případě jeho regulární část popsána svojí admitanční maticí $\tilde{\mathbf{Y}}$, která bude také pátého řádu (11) a která je sestavena známým algoritmem metody uzlových napětí

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{array}{c|cc|cc} & G_1 & & -G_1 & & \\ & & G_3 & & -G_3 & \\ \hline & -G_1 & & G_1 + G_2 & & -G_2 \\ & & -G_3 & & G_3 + G_4 & \\ & & & -G_2 & & G_2 \end{array} \quad (11)$$

kterou neregulární prvek - zesilovač redukuje na matici $\mathbf{Y}$ vztahem (12)

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}_{5:3}^{\left[:3>4;3, \left(\frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \right) > 5 \right]} \quad (12)$$

což znamená, že prvky třetího sloupku matice $\tilde{\mathbf{Y}}$ je nutno přičíst k prvkům sloupku čtvrtého, dále je vynásobit členem $-\frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2}$ a vynásobené přičíst k prvkům sloupku pátého, zároveň se následně třetí sloupek a pátý řádek vynechá, čímž vznikne matice (13).

$$\begin{array}{lcl} 1: & 2: & 3: + 4: \quad \left(-\frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \right) \cdot 3: + 5: \\ \mathbf{Y} = \begin{array}{c|cc|cc} 1: & G_1 & 0 & -G_1 & -\frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} G_1 \\ 2: & 0 & G_3 & -G_3 & 0 \\ 3: & -G_1 & 0 & G_1 + G_2 & -G_2 - \frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \cdot \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} (G_1 + G_2) \\ 4: & 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 \end{array} & (13) \end{array}$$

Z této matice se již konečně metodou vícenásobných algebraických doplňků za současné aplikace principu lineární superpozice vypočítá napětí U_5 ze vztahu (14).

$$\begin{aligned}
 U_5 &= U_1 \cdot \frac{\Delta_{1,2;5,2}}{\Delta_{1,2;1,2}} + U_2 \cdot \frac{\Delta_{2,1;5,1}}{\Delta_{2,1;2,1}} = \frac{U_1 \cdot \Delta_{1,2;4,2} \cdot (-1)^1 + U_2 \cdot \Delta_{2,1;4,1} \cdot (-1)^2}{\Delta_{1,2;1,2} \cdot (-1)^2} = \\
 &= \frac{-U_1 \cdot \begin{vmatrix} -G_1 & G_1 + G_2 \\ 0 & G_3 + G_4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^1 + U_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & G_1 + G_2 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2}{\begin{vmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 - \frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \\ G_3 + G_4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2} = \\
 &= \frac{-U_1 \cdot G_1 \cdot (G_3 + G_4) + U_2 \cdot G_3 \cdot (G_1 + G_2)}{\left[G_2 + \frac{\omega_T + sA}{\omega_T \cdot A} \frac{\omega_2 + s}{\omega_2} \right] \cdot (G_3 + G_4)} \quad (14)
 \end{aligned}$$

To je výsledek opět identický se vztahem (7) a (10). Jeho získání předpokládá ovšem znalost algoritmu sestavení matice, dále znalost redukčního vztahu operačního zesilovače a pro vyčíslení pomocí vícenásobných algebraických doplňků i znalost zásad počítání s nimi společně s jejich tvorbou na základě znalosti aplikace principu lineární superpozice.

Přitom redukční vztah pro diferenciální operační zesilovač s konečným napětovým kmitočtově závislým zesílením se na rozdíl od redukčního vztahu ideálního diferenciálního operačního zesilovače s nekonečným napětovým zesílením v literatuře (například [1],[3]) bohužel běžně neudává.

Je proto nutno jej za účelem výpočtu touto metodou navíc také odvodit, a to například na základě znalosti principu konstrukce redukčních vztahů následovně:

Činnost diferenciálního zesilovače napětí z obr.5 se vstupem invertujícím v uzlu 3, neinvertujícím v uzlu 4 a výstupem do uzlu 5 lze popsat rovnicí

$$U_5 = A(U_4 - U_3) \quad (15)$$

kde $U_4 - U_3$ je vlastní zesilované napětí. Úpravou

$$\frac{1}{A}U_5 = U_4 - U_3 \quad (16)$$

$$U_3 = U_4 - \frac{1}{A}U_5 \quad (17)$$

Vztah (17) dosazený do admitanční matice znamená, že pro prvky i -tého řádku této matice bude platit

$$\dots + y_{i3}U_3 + y_{i4}U_4 + y_{i5}U_5 + \dots = \quad (18)$$

$$= \dots + y_{i3}U_4 + \left(-\frac{1}{A}\right)y_{i3}U_5 + y_{i4}U_4 + y_{i5}U_5 + \dots = \quad (19)$$

$$= \dots + (y_{i3} + y_{i4})U_4 + \left(y_{i5} - \frac{1}{A}y_{i3}\right)U_5 + \dots \quad (20)$$

tedy že prvky třetího sloupku se přičetly k prvkům čtvrtého sloupku a zároveň se prvky třetího sloupku vynásobí $-\frac{1}{A}$ a přičtou se ke sloupku pátému. Protože napětí

U_3 z rovnice zmizí, když ve výsledku (20) se již nevyskytuje, vypustí se z matice po provedených úpravách třetí sloupek. Důsledkem nekonečného proudového zesílení pak z matice vypadne pátý řádek.

Po dosazení za napěťové zesílení ze vztahu (6) se pak získá konečná hodnota redukčního vztahu (12).

Závěr

Lze tady na základě výše uvedeného rozboru uzavřít, že porovnáním pracnosti výpočtů, vedoucích ke vztahům (7), (10) a (14) je metoda transformačních grafů podstatně jednodušší, nežli metoda algebraických výpočtů realizovaných jak modifikovanou metodou uzlových napětí, tak i metodou redukce počtu

proměnných. Je vhodná zejména pro rychlé ruční řešení obvodů, pro algoritmizaci za účelem počítačového řešení je však maticová metoda vhodnější.

Literatura

- [1] Čajka, J., Kvasil, J.: Teorie lineárních obvodů. SNTL/ALFA 1979.
- [2] Dostál, T.: Analýza aktivních obvodů se spínanými kapacitami metodou uzlových napětí a lineární transformací souřadnic. Slaboproudý obzor 45 (1984) č. 1, str. 21-26.
- [3] Pospíšil, J., Dostál, T.: Elektronické obvody a systémy I. Skriptum VUT Brno, 1991.

Transformation Graph of an Operational Amplifier Concerning Transient Frequency

Abstract

One of the methods to the network analyse is the method of the transformation graph (T-graph). There is commonly known T-graph of an ideal operational amplifier, for example in Pospíšil and Dostál, 1991, Dostál, 1986 and more others, but it is possible to find a T-graph of other elements, for example T-graph of an operational amplifier with finite voltage amplification, when the break point frequencies on voltage amplification are considered.

By the use of the transformation graph it is possible to reduce the MC-graph of circuit, contains operational amplifier whose voltage amplification is not infinity and the break point frequencies are concerning. As we can see from the examples, the T-graph give result directly, but difficult calculation is necessary for the matrix methods.

Key words

T-graph, nodal voltage method, transient frequency of the operational amplifier, Mason's relation, multiple signed minors.

Kontaktní údaje na autora

Ing. Bohumil Brtník, Dr.

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Katedra elektrotechniky a informatiky

Tolstého 16, 586 01 Jihlava

e-mail brtnik@vspj.cz, tel. 567 141 119

Metody měření elektrického odporu mikrokontroléry

David Matoušek

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Abstrakt

Cílem článku je seznámit čtenáře s různými metodami měření elektrického odporu pomocí mikrokontrolérů. Článek porovnává různé metody měření z hledisek dosažitelné přesnosti, závislosti výsledku měření na vnějších vlivech, přesnosti použitých elektronických prvků a požadovaném vnitřním vybavením mikrokontroléru a jeho výpočetním výkonu. Jsou rovněž diskutovány možnosti telemetrického provedení, které má smysl hlavně v průmyslovém použití nebo pro distribuované systémy řízení.

Klíčová slova

Elektrický odpor, mikrokontrolér, ATmega644, A/D převodník, analogový komparátor, čítač/časovač, astabilní klopný obvod, nejistota vzorkování, telemetrie.

JEL Classification: L63

Úvod

Technická praxe používá pro měření řady fyzikálních veličin odporová čidla. Běžně se tak veličiny jako: teplota, tlak, vlhkost a mnohé další převádí na elektrický odpor.

Měření těchto veličin převedených na elektrický odpor pak musí probíhat automatizovaně. Měřicí systém poskytuje data, kterými se řídí technologické procesy nebo se protokoluje průběh operace (například při míchání složek při výrobě léčiv).

To jsou typické operace, které lze řešit pomocí mikrokontrolérů. Zabudované jednotky mohou některé měřicí metody zjednodušit, případně zpřesnit nebo poskytnout komunikační rozhraní pro připojení k řídicí jednotce, kterou je prostý počítač nebo programovatelný automat.

V článku budou popsány jednotlivé možnosti měření odporu pomocí mikrokontroléru ATmega644. Tento typ byl zvolen s ohledem na bohaté vnitřní vybavení a vysoký výpočetní výkon. Jedině tak lze předvést všechny uvažované měřicí metody. V případě, že je možné nasadit pro danou úlohu i mikrokontrolér funkčně jednodušší nebo s nižším výpočetním výkonem, bude tato skutečnost uvedena.

Základní pojmy

Mikrokontrolér

je samostatný číslicový systém, který kromě řídicí jednotky a paměti programu a dat disponuje jednotkami pro měření, časování a komunikaci.

A/D převodník

je jednotka, která převádí analogovou veličinu (napětí) do číslicové podoby. Tím dovoluje digitalizovat vzorky vstupních signálů pro účely uložení nebo řízení programu.

Čítač/časovač

je jednotka, která v režimu čítače umožňuje registrovat impulzy a tím například měřit kmitočet signálu a v režimu časovače zajistit odměr časových intervalů.

Analogový komparátor

je jednotka používaná pro vzájemné porovnání dvou napěťových hladin. Stav výstupu se mění podle znaménka rozdílu napětí obou vstupů

Záchytný registr

je jednotka pro přesné měření časových intervalů. Sestává z volně běžícího časovače (jeho obsah se periodicky mění od 0 do $N-1$), spouštěcí logiky a samotného záchytného registru. Pomocí spouštěcí logiky stanovíme, kdy dojde k uložení aktuálního obsahu čítače do registru. Tím může být snadno a velmi přesně (bez doprovodné programové obsluhy) odměřen časový interval.

Stručný popis mikrokontroléru ATmega644

Mikrokontrolér ATmega644 patří mezi mikrokontroléry s velmi rychlou architekturou RISC, výpočetním výkonem až 20 MIPS (provedení instrukce trvá pouze 50 ns) a širokým vybavením zabudovanými jednotkami: 8kanálový 10bitový A/D převodník, dva 8bitové čítače/časovače a jeden 16bitový čítač/časovač,

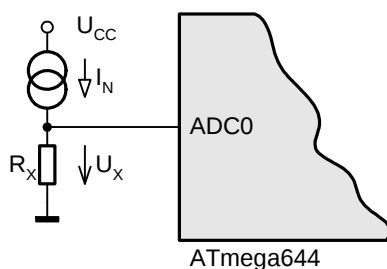
analogový komparátor, hlídač běhu programu WDT, komunikační sběrnice USART, SPI, TWI, čtyři paralelní porty.

Instrukční soubor je navržen tak, aby vyhověl běžně používaným konstrukcím vyšších programovacích jazyků. Úryvky programových kódů budou uvedeny v jazyce C.

Měření elektrického odporu A/D převodníkem

Tato metoda používá principu známého z číslicových multimetrů.

Schéma zapojení je uvedeno na obrázku 1.



Obr. 1 Schéma zapojení pro měření elektrického odporu A/D převodníkem

Princip měření je velmi jednoduchý. Zdroj proudu I_N dodává do měřeného rezistoru R_X konstantní proud, dle Ohmova zákona se pak na rezistoru vytvoří úbytek napětí dle vztahu

$$U_X = R_X \cdot I_N \quad (1)$$

Toto napětí je A/D převodníkem převedeno na výstupní číslo v přesnosti 10 bitů (rozsah 0x0000 až 0x03FF) a uloženo do registrového páru ADCH:ADCL, pro přepočet platí vztah

$$[ADCH:ADCL] = 1024 \frac{U_X}{U_R} \quad (2)$$

kde U_R je referenční napětí nominální hodnoty 2,56 V.

Sloučením vztahů (1) a (2) lze poté vyjádřit naměřenou hodnotu elektrického odporu jako

$$R_X = \frac{[ADCH:ADCL]}{1024} \cdot \frac{U_R}{I_N} \quad (3)$$

Detailním rozбором vztahu (3) je možné vyjádřit relativní chybu určení elektrického odporu

$$\delta_{R_x} = \delta_{U_R} + \delta_{I_N} \quad (4)$$

Vlastní měření proběhne v těchto krocích (podrobnější popis řídicích registrů lze nalézt v [1]):

- konfiguruje A/D převodník pro volbu přiměřeného taktovacího kmitočtu, volbu vnitřního referenčního zdroje a volbu kanálu (například ADC0),
- spustíme převod a počkáme na jeho výsledek,
- přečteme výsledek převodu, registry je třeba číst v pořadí ADCL a potom ADCH,
- z výsledku převodu sestavíme 10bitové číslo.

Fragment programu, který odpovídá výše uvedenému postupu (výsledek odpovídá vztahu (2)):

```
unsigned vysledek; //proměnná pro uložení výsledku
ADMUX=0b11000000; //konfigurace
ADCSRA=0b11000111; //spuštění
while(ADCSRA&0b01000000); //čekání na výsledek převodu
vysledek=ADCL|(ADCH<<8); //čtení výsledku
```

Výhody: jednoduchý přizpůsobovací obvod, snadné provedení, velmi nízké nároky na výpočetní výkon mikrokontroléru v průběhu převodu, linearita převodu.

Nevýhody: zatížení výsledku systematickou chybou (konečná přesnost referenčního napětí a zdroje normálového proudu, přesnost samotného A/D převodníku), nutný A/D převodník.

Použitelnost: metoda je omezena na mikrokontroléry vybavené A/D převodníkem (případně lze použít vnější A/D převodník). Výpočetní výkon pro samotný převod nemusí být vysoký.

Měření elektrického odporu převodem na časový interval

Tato metoda vychází z chování RC článku v přechodném ději, je tedy založena na měření časového intervalu nabíjení kondenzátoru.

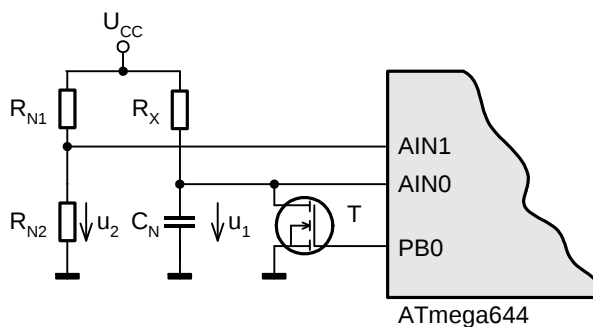
Schéma zapojení je uvedeno na obrázku 2.

Pro zjednodušení obsluhy se uvažuje použití tří vývodů mikrokontroléru.

První vývod PB0 je konfigurován jako výstup a pomocí tranzistoru T vybíjí kondenzátor, aby zajistil nulové počáteční napětí kondenzátoru.

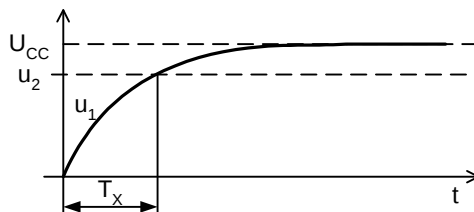
Druhý vývod AIN0 odpovídá neinvertujícímu vstupu analogového komparátoru a sleduje napětí kondenzátoru u_1 .

Třetí vývod AIN1 odpovídá invertujícímu vstupu analogového komparátoru a sleduje napětí odporového děliče u_2 .



Obr. 2 Schéma zapojení pro měření převodem na časový interval

Princip měření je zřejmý z obrázku 3.



Obr. 3 Princip měření převodem na časový interval

Nejdříve ponecháme tranzistor T sepnutý po dostatečně dlouhý interval (není nutné jej přesně odměřit), aby byl vybit kondenzátor C_N .

Odporový dělič R_{N1} , R_{N2} poskytuje napětí dle vztahu

$$u_2 = \frac{R_{N2}}{R_{N1} + R_{N2}} U_{CC} \quad (5)$$

Po rozpojení tranzistoru T vznikne přechodný děj, jeho vyřešením získáme vztah pro napětí kondenzátoru

$$u_1 = U_{CC} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{R_X \cdot C_N}} \right) \quad (6)$$

Označíme-li čas od rozpojení tranzistoru T do vyrovnání obou napětí ($u_1 = u_2$) jako T_X , lze srovnáním vztahů (5) a (6) napsat

$$\frac{R_{N2}}{R_{N1} + R_{N2}} U_{CC} = U_{CC} \cdot \left(1 - e^{\frac{-T_X}{R_X \cdot C_N}} \right) \quad (7)$$

Následně můžeme vztah (7) upravit vyloučením napájecího napětí U_{CC} a celou rovnici upravit pro vyjádření nabíjecí doby

$$T_X = R_X C_N \cdot \ln \left(\frac{R_{N1} + R_{N2}}{R_{N1}} \right) \quad (8)$$

Pro porovnávání obou napětí používáme analogový komparátor. Po vybití kondenzátoru platí: $u_1 = 0$ (v ideálním případě) a $u_2 > 0$. Výstup komparátoru je tedy v log. 0 (protože $u_1 < u_2$). Při nabíjení kondenzátoru se jeho napětí postupně zvyšuje a určitém okamžiku platí $u_1 > u_2$, výstup komparátoru je pak v log. 1. Tím je indikován konec měření časového intervalu T_X .

Pro přesné měření časového intervalu T_X použijeme jednotku čítač/časovač konfigurovanou jako časovač. Počet impulsů hodin mikrokontroléru mezi začátkem a koncem měření, který načítá časovač, pak po vynásobení periodou hodinového kmitočtu určí hodnotu T_X .

Naměřený odpor lze vyjádřit drobnou úpravou vztahu (8)

$$R_X = \frac{T_X}{C_N \cdot \ln \left(\frac{R_{N1} + R_{N2}}{R_{N1}} \right)} \quad (9)$$

Detailním rozбором vztahu (9) vyjádříme relativní chybu měření, ve výsledku působí chyba určení intervalu T_X (nejistota určení začátku a konce měření a nepřesnost hodinového kmitočtu) a dále konečná přesnost jednotlivých elektronických prvků. Velikost napájecího napětí nemá na výsledek vliv

$$\delta_{R_X} = \delta_{T_X} + \delta_{C_N} + \delta_A \quad (10)$$

kde δ_A značí relativní chybu hodnoty A , kde $A = \ln\left(\frac{R_{N1} + R_{N2}}{R_{N1}}\right)$. Takového

zjednodušení se můžeme dopustit proto, že výsledek není určen samotnými hodnotami odporů rezistorů R_{N1} a R_{N2} , ale logaritmem jejich poměru.

Vlastní měření proběhne v těchto krocích (viz [1]):

- konfiguruje analogový komparátor a časovač, vynulujeme časovač a vybijeme kondenzátor sepnutím tranzistoru T,
- necháme časovač čítat a rozpojíme tranzistor T,
- vyčkááme na nastavení výstupu komparátoru do log. 1,
- zastavíme časovač,
- z obsahu časovače určíme počet impulzů tedy interval T_X v jednotkách periody čítaného kmitočtu.

Fragment programu, který odpovídá výše uvedenému postupu (výsledek bude v jednotkách periody hodinového kmitočtu mikrokontroléru):

```
unsigned vysledek; //proměnná pro uložení výsledku
```

```
ACSR=0b00000000; //zapnutí komparátoru
```

```
TCCR1A=0b00000000; //konfigurace č/č 1
```

```
TCCR1B=0b00000000; //jako časovače, zastaven
```

```
TCNT1H=0; //nulování obou registrů
```

```
TCNT1L=0; //časovače 1
```

```
PORTB|=0b00000001; //vybití kondenzátoru
```

```
_delay_ms(10); //časová prodleva 10 ms
```

```
TCCR1B=0b00000001; //časovač čítá hodinový kmitočet
```

```
while(ACSR&ACO==0); //čekání na log. 1 na výstupu komparátoru
```

TCCR1B=0b00000000; //zastavení časovače

vysledek=TCNT1L|(TCNT1H<<8); //čtení výsledku

Výhody: jednoduchý přizpůsobovací obvod, nezávislost výsledku na hodnotě napájecího napětí.

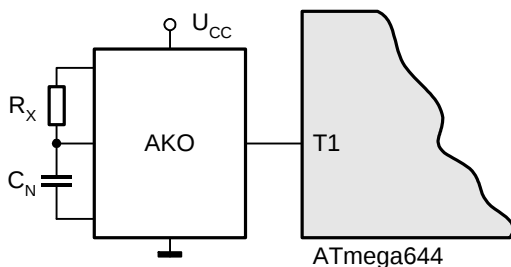
Nevýhody: zatížení výsledku systematickou chybou (konečná přesnost elektronických prvků, zbytkové napětí kondenzátoru po vybití), nutný analogový komparátor, fyzické rozlišení výsledku je silně závislé na taktovacím kmitočtu.

Použitelnost: metoda je omezena na mikrokontroléry vybavené analogovým komparátorem (případně lze použít vnější analogový komparátor). Výpočetní výkon určuje rozlišení, které lze při měření dosáhnout. Vyšší taktovací kmitočet dovolí kvantovat naměřený údaj na vyšší počet bitů. Použitelnost pro mikrokontroléry s nízkým výpočetním výkonem lze zaručit tak, že prodloužíme nabíjecí interval zvýšením kapacity kondenzátoru C_N .

Měření elektrického odporu převodem na kmitočet

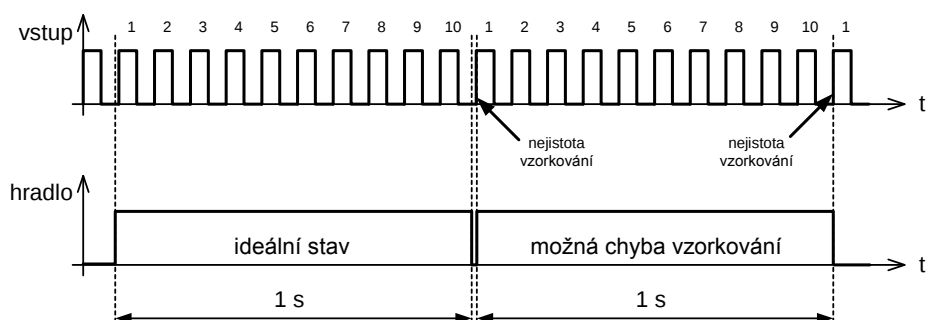
Tato metoda vychází z použití astabilního klopného obvodu (AKO), který vytvoří periodický signál s opakovacím kmitočtem odpovídajícím měřenému odporu. Měření pak odpovídá stanovení hodnoty kmitočtu, viz [4].

Schéma zapojení je uvedeno na obrázku 4. Výstup astabilního klopného obvodu (tedy měřený kmitočet) přivedeme na vstup jednotky čítač/časovač 1.



Obr. 4 Schéma zapojení pro měření převodem na kmitočet

Princip měření kmitočtu je zřejmý z obrázku 5.



Obr. 5 Princip měření kmitočtu

Kmitočet je definován jako počet opakování periodického děje za jednotku času [2]. Bude-li čítač sledovat výstup astabilního klopného obvodu po interval 1 s, je jeho obsah roven počtu vstupních impulzů a odpovídá vlastně kmitočtu v jednotkách Hz (Hertz).

Jak je zřejmé z obrázku 5, je toto měření zatíženo systematickou chybou a sice tzv. nejistotou vzorkování. Jelikož odměr intervalu 1 s není synchronizován s měřeným kmitočtem, můžeme napočítat buď o jeden impuls méně nebo více.

Tato chyba se projevuje především při nízkých hodnotách měřeného kmitočtu. Doprovodná chyba měření kmitočtu se vyjádří jako

$$\delta_M = \frac{1}{N} \quad (11)$$

kde N je počet načítaných impulzů. Například pro $N = 10$ dostáváme relativní chybu 10%, ale pro $N = 1000$ je chyba již pouze 0,1%.

Tuto chybu lze vyloučit prodloužením intervalu měření nebo úpravou kapacity časovacího kondenzátoru C_N tak, aby byl kmitočet dostatečně vysoký a tedy nízká hodnota chyby měření.

Nejznámější integrovaným obvodem, který lze zapojit jako astabilní klopný obvod, je typ NE555. Kmitočet je dle [3] dán vztahem

$$f_x = \frac{1,44}{(R_O + 2 \cdot R_X) \cdot C_N} \quad (12)$$

kde f_x je výstupní kmitočet a R_O je odpor ochranného rezistoru (ve schématu dle obrázku 4 není pro zjednodušení uveden).

Vyjádření měřeného odporu pak dostaneme úpravou vztahu (12)

$$R_x = \frac{0,72}{f_x \cdot C_N} - \frac{R_O}{2} \quad (13)$$

Detailním rozбором vztahu (13) vyjádříme relativní chybu měření, ve výsledku působí chyba určení kmitočtu f_x a dále konečná přesnost kapacity normálového kondenzátoru C_N (vliv konečné přesnosti odporu R_O lze zanedbat)

$$\delta_{R_x} = \delta_{f_x} + \delta_{C_N} \quad (14)$$

Vlastní měření proběhne v těchto krocích (viz [1]):

- konfiguruje čítač a vynulujeme jej,
- necháme časovač čítat po dobu 1 s ,
- čítač zastavíme a z jeho obsahu určíme naměřený kmitočet.

Fragment programu, který odpovídá výše uvedenému postupu (výsledek bude v jednotkách kmitočtu):

```
unsigned vysledek; //proměnná pro uložení výsledku
TCCR1A=0b00000000; //konfigurace č/č 1
TCCR1B=0b00000000; //jako čítače, zastaven
TCNT1H=0; //nulování obou registrů
TCNT1L=0; //čítače 1
TCCR1B=0b00000111; //čítač čítá hodinový kmitočet
_delay_ms(1000); //časová prodleva 1 s
TCCR1B=0b00000000; //zastavení čítače
vysledek=TCNT1L|(TCNT1H<<8); //čtení výsledku
```

Výhody: relativně snadné provedení, všechny typy mikrokontrolérů disponují jednotkou čítač/časovač.

Nevýhody: složitější přizpůsobovací obvod, zatížení výsledku systematickou chybou (konečná přesnost elektronických prvků), přesnost měření je ovlivněna hodnotou měřeného kmitočtu a časovým skluzem mezi odměrem intervalu 1 s a rozběhem nebo zastavením čítače.

Použitelnost: všechny typy mikrokontrolérů mají zabudován čítač/časovač, hodnotu čítaného kmitočtu lze optimalizovat vzhledem k možnostem čítače volbou hodnoty kapacity normálového kondenzátoru C_N .

Telemetrické provedení

Nasazení odporových čidel může narážet na některé praktické problémy. Například průmyslové systémy produkují značné rušení. Pokud je čidlo připojeno na větší vzdálenost, vykážou přírodní vodiče nejen sériový odpor ale hlavně sériové rušení. Použití metod měření odporu A/D převodníkem nebo analogovým komparátorem je pak zatíženo náhodnou složkou chyby.

Pro telemetrické provedení je vhodnější transformovat měřenou veličinu tak, aby byl její přenos odolný rušení a vlivu konečných odporů přírodních vodičů.

V automatizaci se často používá proudová smyčka 4 až 20 mA. Při jejím použití se zmíněné jevy neuplatní. Pro vedení signálu je nutné použít klasické metalické vedení.

Výše zmíněný převod měřeného odporu na kmitočet se ale ukazuje jako univerzálnější. Kromě vysoké odolnosti přenosu v klasickém metalickém vedení (pro přenos signálu lze použít vyšší napěťové úrovně na straně vysílače a provést rekonstrukci hran signálu tvarovačem na straně přijímače), lze signál přenášet optickým kabelem (přenosová cesta je prostá rušení a navíc zaručí galvanické oddělení) nebo radiově (radiový přenos dovoluje snadné multiplexování kanálů, takže je výhodný například v dnes tak populárních systémech centrálního řízení budov).

Výsledky a diskuze

Pro praktické posouzení dosažitelných výsledků měření bude dále uvažována pouze poslední metoda, tedy měření odporu převodem na kmitočet. Původní fragment programu byl rozšířen o přepočít naměřeného kmitočtu na výsledný elektrický odpor a jeho zobrazení na LCD, se kterým se komunikuje asynchronní sériovou linkou (viz [4]). Zde opět využíváme vnitřního vybavení mikrokontroléru ATmega644, konkrétně jednotky USART.

Z úsporných důvodů je níže uveden pouze zdrojový text funkce main.


```

printf("Rx=%.0f", (double)Rx); //vypsání naměřené hodnoty
}
return 1;
}

```

Naměřené údaje z testovací sady odporů v rozsahu tří dekád (v rozsahu 1 k Ω až 1 M Ω) byly zaneseny do tabulky 1 a pro interpretaci výsledků byl rovněž doplněn graf dle obrázku 7.

Z tabulky 1 je zřejmé, že relativní chyba měření v intervalu měřených odporů 2 k Ω až 300 k Ω je přibližně v rozmezí ± 2 %. Spodní mez je dána patrně zanedbáním některých složek ve vztahu (13), případně může působit konečná přesnost R_0 . Horní mez je limitována dle vztahu (11) a patrně i vlivem svodových proudů. Rovněž použitá dekáda má v určeném rozsahu chybu odporu ± 1 %.

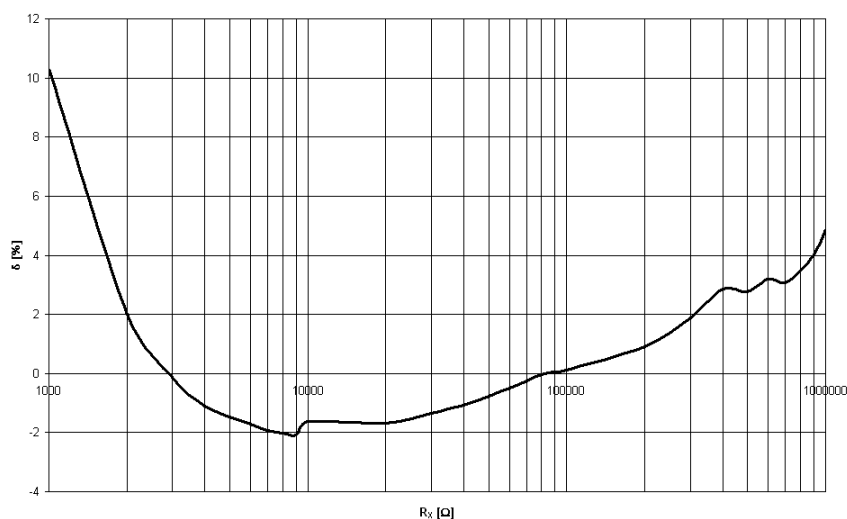
Tab. 1 Naměřené hodnoty pro metodu převodu odporu na kmitočet

R_{XS} [Ω]	f_X [Hz]	R_{XN} [Ω]	δ [%]	1/N [%]
1 000	49 090	1 102,944	10,294	0,002
2 000	30 977	2 040,224	2,011	0,003
3 000	22 509	2 995,869	-0,138	0,004
4 000	17 658	3 956,254	-1,094	0,006
5 000	14 502	4 926,046	-1,479	0,007
6 000	12 302	5 896,401	-1,727	0,008
7 000	10 685	6 864,392	-1,937	0,009
8 000	9 438	7 837,415	-2,032	0,011
9 000	8 450	8 812,251	-2,086	0,012
10 000	7 612	9 837,431	-1,626	0,013
20 000	3 903	19 661,036	-1,695	0,026
30 000	2 615	29 591,214	-1,363	0,038
40 000	1 964	39 565,440	-1,086	0,051
50 000	1 570	49 620,079	-0,760	0,064
60 000	1 307	59 705,451	-0,491	0,077
70 000	1 119	69 820,397	-0,257	0,089
80 000	978	79 958,614	-0,052	0,102
90 000	869	90 050,661	0,056	0,115
100 000	782	100 124,712	0,125	0,128

$R_{XS} [\Omega]$	$f_x [Hz]$	$R_{XN} [\Omega]$	$\delta [\%]$	$1/N [\%]$
200 000	389	201 784,125	0,892	0,257
300 000	257	305 681,030	1,894	0,389
400 000	191	411 481,804	2,870	0,524
500 000	153	513 804,082	2,761	0,654
600 000	127	619 094,682	3,182	0,787
700 000	109	721 413,070	3,059	0,917
800 000	95	827 800,259	3,475	1,053
900 000	84	936 268,150	4,030	1,190
1 000 000	75	1 048 680,328	4,868	1,333

Legenda:

- R_{XS} je skutečná hodnota měřeného odporu nastavená pomocí odporové dekády METREL MA 2116, výrobní číslo: 21389, v uvažovaném rozsahu je chyba $\pm 1 \%$,
- f_x je naměřená hodnota kmitočtu z výstupu AKO,
- R_{XN} je naměřená hodnota odporu zjištěná pomocí mikrokontroléru dle vztahu (13),
- δ je relativní chyba stanovení odporu,
- $1/N$ je složka relativní chyby dle vztahu (11).



Obr. 7 Graf závislosti chyby měření na elektrickém odporu $\delta=f(R_X)$

Závěr

V předchozím textu byly diskutovány tři metody měření elektrického odporu pomocí jednotek zabudovaných v mikrokontroléru ATmega644.

Metody se liší složitostí přizpůsobovacího obvodu, nároky na vnitřní vybavení mikrokontroléru, požadavky na jeho rychlost a náročností programové obsluhy.

Metodou, kterou lze chápat jako univerzální, je převod elektrického odporu na kmitočet. Výhodou jsou především nízké nároky na vnitřní vybavení mikrokontroléru (všechny běžné mikrokontroléry disponují čítačem/časovačem) a snadná úprava pro systémy dálkového měření.

Literatura

- [1] Matoušek, D.: Práce s mikrokontroléry ATMEL AVR – ATmega16, 4. díl, BEN – technická literatura, Praha 2006. ISBN 80-7300-174-8. (monografie)
- [2] Fajt, V.; Hassz, V.; Sedláček, M.: Elektrická měření, ČVUT, Praha 1992. (skripta)
- [3] SGS-Thomson Microelectronics: NE555/SA555/SE555, 1994. (katalogový list)
- [4] Brtník, B.; Matoušek, D.: Řešené příklady z mikroprocesorové techniky, BEN – technická literatura, Praha 2010. ISBN 978-80-7300-264-0 (monografie)

The methods of electrical resistance measurement by microcontrollers

Abstract

The aim of the article is to inform about various methods of electrical resistance measurement by microcontrollers. The article compares different methods of measurement in light of obtainable accuracy, dependence of the measurement result on external conditions, and required internal instrumentation of the microcontroller and its performance. Telemetric design options are also discussed. The telemetric design is important mainly in industrial usage and for distributed control systems.

Key words

Electrical resistance, microcontroller, ATmega644, ADC, analog comparator, timer/counter, multivibrator, sampling jitter, telemetry.

Kontaktní údaje na autora

Ing. David Matoušek
Katedra elektrotechniky a informatiky VŠPJ
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
e-mail: matousek@vspj.cz

Syntéza moderních analogových obvodů pomocí grafů signálových toků

Tomáš Dostál

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Roman Šotner, Jiří Frydrych

Vysoké učení technické v Brně

Abstrakt

Článek se zabývá syntézou analogových obvodů, s moderními funkčními bloky, pracujícími v proudovém nebo smíšeném módu, a to pomocí úpravy vhodně sestrojených grafů signálových toků Masonova typu (bez vlastních smyček) a jejich následné postupné obvodové realizace. Postup je ukázán na návrhu obvodů s více smyčkami zpětné vazby, jmenovitě filtrů a fázového equalizeru. Pak je zde podrobně diskutována syntéza multifunkčního biquadu s nastavitelnými parametry. Navržené obvody jsou ověřeny experimentálně.

Klíčová slova

Obvody v proudovém módu, syntéza obvodů, grafy signálových toků.

JEL Classification: L 63

Úvod

Nová zapojení elektronických obvodů lze získat různým způsobem. Zprv zkusmo intuicí. Dále pak úpravou a modifikací již známých obvodů, které budou sloužit jako prototyp. Experimenty na počítači v obvodovém simulátoru (PSpice) nebo s využitím symbolické analýzy (SNAP). Popřípadě známá zapojení z klasického napětového módu (VM) převést přidruženou transformací do módu proudového (CM), což dovoluje využít řadu ověřených obvodů a bohatě rozpracovanou teorii jejich návrhu. Syntézu obvodů lze také provést pomocí úpravy a bližší realizace vhodně navržených jednoduchých modelů, které zachycují na určité úrovni jen

podstatné chování navrhovaného obvodu (Analog Behavioural Modeling - ABM). Model ABM může mít formu blokového schématu, tvořeného z vhodných stavebních bloků. V tomto příspěvku si ukážeme jiné vhodné modelování, a to ve formě grafů signálových toků (SFG).

Obvody v proudovém módu

V poslední době v různých elektronických aplikacích našly výhodné uplatnění obvody pracující v CM [1], a to především pro zpracování signálů ve vyšších kmitočtových pásmech (např. ARC filtry v pásmu video). Obvody CM nabízejí vedle vyššího kmitočtového rozsahu i větší dynamiku a možnost činnosti při velmi malých stejnosměrných napájecích napětích. Jednoduše se v nich realizuje sumace proudů. Naskytá se zde také možnost použít více nezávislých výstupů, kde se navíc neprojeví vliv zátěže. Na rozdíl od klasického módu VM, kdy při zpracování signálů převážně využíváme napěťové odezvy, v obvodech CM uvažujeme odezvu proudů. Nicméně hlavní charakteristikou CM je především nižší odporová úroveň všech uzlů v tomto obvodu, včetně vnitřních uzlů všech aktivních funkčních bloků. To zajistí menší vliv parazitních kapacit (třebaže stejných hodnot), a to důsledkem odpovídající menší časové konstanty. Místo standardních (napěťových) operačních zesilovačů se zde s výhodou používají nové moderní funkční bloky, s vyšším tranzitním kmitočtem. Moderní technologie přinesly celou řadu takovýchto stavebních bloků, převážně již v integrované monolitické formě nebo jako zákaznické hybridní obvody. Vhodným typem se ukázaly například proudové konvejory (CC II), dnes již dost rozšířené transimpedanční zesilovače (CFA), transadmitanční zesilovače (OTA) aj. [2]. Pracuje-li část obvodu nebo jen funkční blok v CM a celý obvod ve VM (sledujeme přenos napětí), hovoříme o módu smíšeném, který může také vykazovat lepší vlastnosti než klasický VM.

Metoda orientovaných grafů

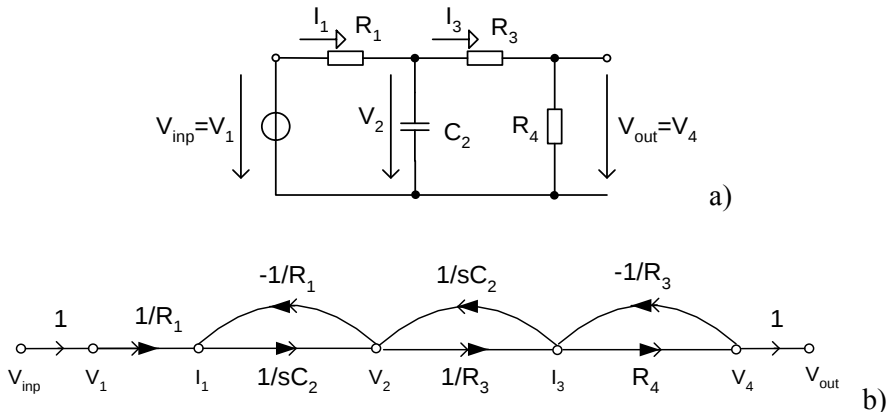
Podstata této metody spočívá ve vyjádření rovnic popisujících obvod nebo systém pomocí orientovaného grafu. Pro popis obvodů metodou uzlových napětí [3] se hodí grafy MC (Coatesovy) [4], mají vlastní smyčky a jsou vyhodnocované zobecněným Masonovým pravidlem [3]. Ty totiž přímo korespondují s odpovídajícími maticovými metodami, popisem a vyhodnocením admitanční matice [3]. Pro naše účely jsou však vhodnější jednodušší Masonovy grafy M, bez vlastních smyček [3, 5]. Ty přímo ukazují tok zpracovávaných signálů, proto se nazývají grafy signálových toků (SFG). Vhodné jsou k blokovému modelování

větších obvodů a systémů, obsahujících i zpětné vazby, popřípadě k modelování filtrů nebo jiných obvodů vyšších řádů.

Tuto metodu si objasníme na jednoduchém příkladu na Obr. 1. Pasivní RC příčkový filtr (Obr. 1a) lze popsat následující soustavou smíšených rovnic, postihující příčinu a následek toku signálu

$$\begin{aligned} V_{inp} = V_1, \quad I_1 &= \frac{1}{R_1}(V_1 - V_2), \quad V_2 = \frac{1}{sC_2}(I_1 - I_3), \\ I_3 &= \frac{1}{R_3}(V_2 - V_4), \quad V_4 = R_4 I_3, \quad V_{out} = V_4. \end{aligned} \quad (1)$$

SFG odpovídající těmto rovnicím je na Obr. 1b. Jednotlivé uzlové veličiny jsou zde dány druhými, násobenými odpovídajícími přenosy větví. Šipky ve větvích reprezentují přenos napětí (otevřená šipka) a proudu (uzavřená šipka) nebo jejich kombinace signalizuje konverzi mezi obvodovými veličinami $V \leftrightarrow I$, což je v souladu s dále uváděnou metodou syntézy obvodů CM a bude ještě blíže ořejmeno. Poznamenejme, že v řadě případů SFG obsahuje pouze uzly stejného charakteru (buď V , nebo jen I).



Obr. 1. Jednoduchý obvod analyzovaný grafem signálových toků.

Odvozený graf (Obr. 1b) vyhodnotíme pomocí známých Masonových pravidel [3, 5]. Přenos napětí je obecně dán vztahem

$$K_V = \frac{V_{out}}{V_{inp}} = \frac{\sum_i^n P_i \cdot \Delta_i}{\Delta(V_{inp})}, \quad (2)$$

kde n je počet cest z uzlu vstupního (V_{inp}) do výstupního (V_{out}), $P_i = P(V_{inp} \rightarrow V_{out})$ je přenos i -té cesty z V_{inp} do V_{out} , Δ je determinant celého grafu, $\Delta(V_{inp})$ je determinant části grafu (subgrafu), která se nedotýká vstupního uzlu, $\Delta_i = \Delta(V_{inp} \rightarrow V_{out})$ je determinant části grafu (subgrafu), která se nedotýká uvažované i -té cesty. Determinant grafu resp. subgrafu je obecně dán Masonovým vztahem

$$\Delta = 1 - \sum_k S_k + \sum_l S_a^{(l)} S_b^{(l)} - \sum_m S_a^{(m)} S_b^{(m)} S_c^{(m)} + \dots, \quad (3)$$

kde S_k je přenos k -té smyčky, $S_a^{(l)} S_b^{(l)}$ je součin přenosů l -té kombinace dvou smyček, které se nedotýkají, $S_a^{(m)} S_b^{(m)} S_c^{(m)}$ je součin přenosů m -té kombinace tří smyček, které se nedotýkají atd. Na základě těchto vztahů vyhodnotíme graf na Obr. 1b, kde jsou tři smyčky, jen jedna cesta z uzlu vstupního do výstupního a není žádná smyčka, která by se této cesty nedotýkala. Výsledkem je hledaný přenos napětí, který lze popsat následující soustavou rovnic

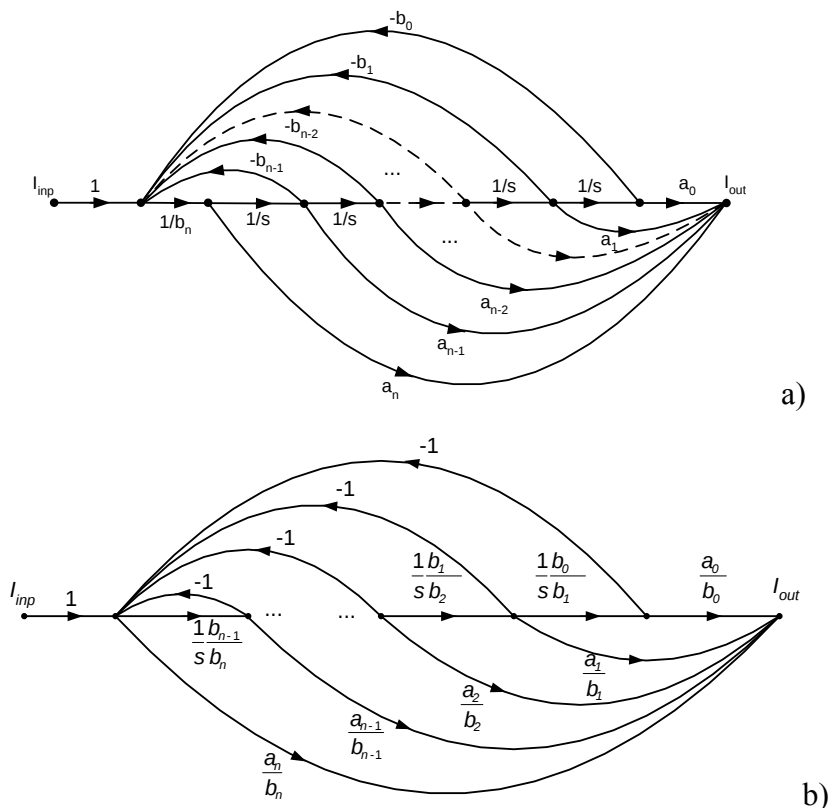
$$\begin{aligned} K_V = \frac{V_{out}}{V_{inp}} &= \frac{P(V_{inp} \rightarrow V_{out}) \cdot \Delta(V_{inp} \rightarrow V_{out})}{\Delta(V_{inp})}, \quad P(V_{inp} \rightarrow V_{out}) = \frac{1}{R_1} \frac{1}{sC_2} \frac{1}{R_3} R_4, \\ \Delta(V_{inp} \rightarrow V_{out}) &= 1, \quad \Delta(V_{inp}) = 1 - S_1 - S_2 - S_3 + S_1 S_3, \\ S_1 &= \frac{1}{sC_2} \left(-\frac{1}{R_1} \right), \quad S_2 = \frac{1}{R_3} \left(-\frac{1}{sC_2} \right), \quad S_3 = R_4 \left(-\frac{1}{R_3} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Vedle ukázaného obecného postupu, přes soustavu popisujících rovnic, můžeme grafový model daného obvodu získat i jinak, např. přímo inspekci z obvodu nebo z jeho ekvivalentu či prototypu, popřípadě se znalosti dané struktury nebo odpovídajícího modelu. To vše využijeme v následujících kapitolách při syntéze obvodů pracujících v CM.

Obvody s více smyčkami zpětné vazby

První skupinou, kterou si blíže rozebereme, jsou obvody v CM s vícesmyčkovou zpětnovazební strukturou (MLFS). Tyto obvody umožňují přímou realizaci zadané přenosové funkce proudu libovolného (n -tého) řádu

$$K(s) = \frac{I_{out}}{I_{inp}} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (5)$$

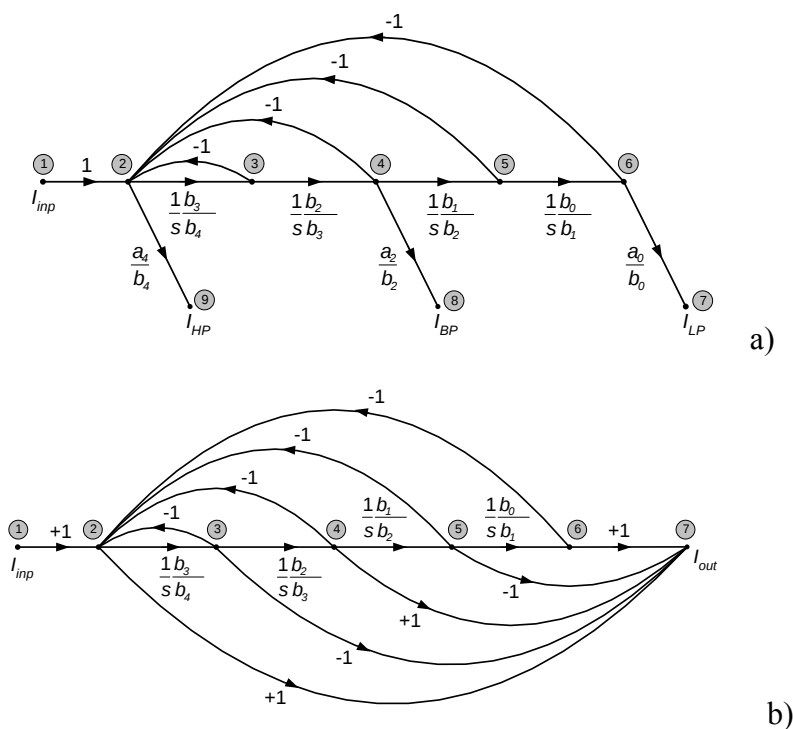


Obr. 2. Graf signálových toků struktury FLF-OS v proudovém módu (a) a jeho vhodná modifikace (b).

Tento obecný vztah (5) bývá často normován tak, že $b_n = 1$. Čítatel má podle typu propusti jednodušší konkrétní tvar, jako např. u dolní propusti je nenulový pouze koeficient a_0 . V klasickém VM jsou známy čtyři kanonické realizace s integrátory (state-variable structures), jejichž bloková schémata jsou uvedena v [6]. Pro CM se nejvíce hodí struktura se sumací zpětných vazeb i dopředných cest, známá pod názvem „follow the leader feedback with output summation” (FLF-OS), protože v ni není zapotřebí distribuce proudů a dvě sumace několika proudů se realizují jednoduše prostým uzlem v obvodu, kde platí 1. Kirchhoffův zákon. Grafový model FLF-OS v CM je na obr. 2a. Vyhodnocením tohoto grafu, Masonovými vztahy (2) a (3), získáváme požadovaný přenos (5). K obvodové realizaci kromě integrátorů (realizují větve s přenosem $1/s$) budeme však potřebovat celou řadu proudových zesilovačů k realizaci větví s přenosy a_k, b_k . Proto tento SFG (obr. 2a) modifikujeme tak, aby zpětnovazební větve měly přenos jedna a koeficienty celkového přenosu určovaly hlavně integrátory. Přenos (5) upravíme do tvaru

$$K(s) = \frac{\frac{a_n}{b_n} + \frac{a_{n-1}}{sb_n} + \frac{a_{n-2}}{s^2b_n} + \dots + \frac{a_1}{s^{n-1}b_n} + \frac{a_0}{s^n b_n}}{1 + \frac{b_{n-1}}{sb_n} + \frac{b_{n-2}}{s^2b_n} + \dots + \frac{b_1}{s^{n-1}b_n} + \frac{b_0}{s^n b_n}}, \quad (6)$$

jemuž odpovídá SFG na obr. 2b. Pro ilustraci uvádíme na obr. 3 dva konkrétní grafové modely obvodů 4-tého řádu v CM se strukturou FLF-OS, kde veškeré uzly odpovídají proudům (uzel 1 je vstupní - budicí, 7, 8, 9 výstupní). Na obr. 3a je SFG multifunkčního filtru, který současně realizuje dolní (LP), pásmovou (BP) a horní (HP) propust [7]. Na obr. 3b je SFG fázového equalizeru, u kterého se polynomy čitatele a jmenovatele přenosu (5) liší jen znaménky u lichých koeficientů [8].



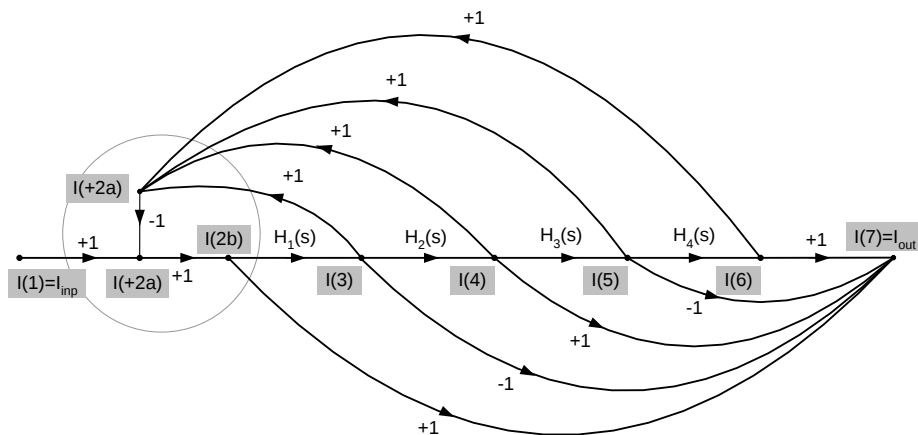
Obr. 3. Zpětnovazební struktury FLF-OS 4-tého řádu v CM.

a) SFG multifunkčního filtru, b) SFG fázového equalizeru.

Z grafového modelu pak navrhne me korespondující obvod s konkrétními funkčními bloky. Výhodné zde jsou zejména bloky (zde integrátory) s více výstupy, které mohou přímo realizovat potřebnou distribuci proudů, a není třeba dalších proudových zrcadel. Protože v tomto případě (obr. 3) potřebujeme blok se třemi výstupy, zvolili jsme pětibranový transkonduktor CDTA [9]. Blíže si ukážeme obvodovou realizaci grafu fázového equalizeru na obr. 3b. Každé větvi, resp. uzlu,

odpovídá určitý subobvod. Základními stavebními bloky jsou zde především proudové integrátory v kaskádě, které realizují čtyři větve přímé cesty s přenosem

$$H_k(s) = \frac{1}{s} \cdot k = \frac{1}{s} \cdot \frac{b_k}{b_{k+1}}. \quad (7)$$



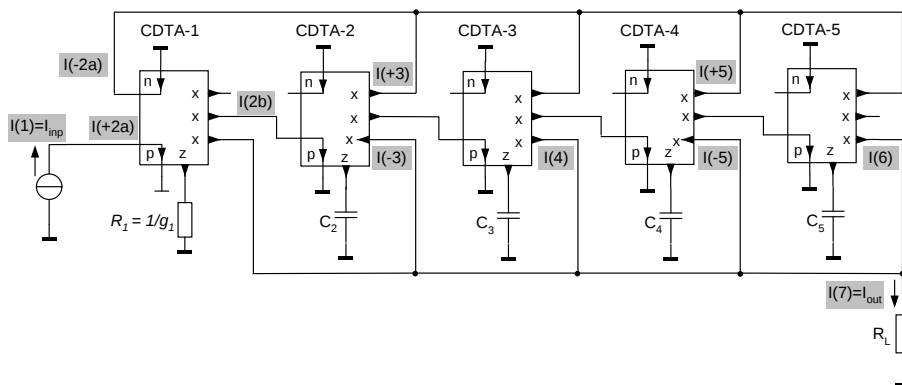
Obr. 4. Modifikace grafu fázového equalizeru (obr. 3b) pro bloky CDTA.

Prvek CDTA (obr. 5) má dva proudové vstupy (p , n), z nichž jeden je invertující (n) a tři výstupy (x) s různou orientací proudových replik I_x . Dovoluje tedy současně realizovat distribuci a sumaci proudů, z nichž některé budou navíc i invertovány. Z tohoto důvodu jsme graf z obr. 3b modifikovali do tvaru na obr. 4. Uzel (2) jsme rozštěpili na dvě části (2a, 2b), část (2a) realizuje sumaci proudů i s inverzí ($-2a$) a část (2b) zajišťuje dvě shodné proudové repliky I_x . Tuto (zakroužkovanou) část grafu (obr. 4) obvodově realizuje stavební blok CDTA-1 a R_1 (obr. 5), který lze popsat následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} I_{x1} &= g_1 R_1 (I_{p1} - I_{n1}) \Big|_{R_1=1/g_1} = I_{p1} - I_{n1}, \\ I_{p1} &= I_{inp}, \quad I_{n1} = I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + I_{x5}, \end{aligned} \quad (8)$$

při čemž nutno dodržet podmínku shody transkonduktance (g_1) s hodnotou vodivosti rezistoru (R_1). Proudový integrátor s CDTA získáme jednoduše, připojením kapacitoru (C_k) na bránu (z) (obr. 5). Výstupní proud I_x je zde dán integrací rozdílu vstupních proudů, dle vztahu

$$I_x = \pm \frac{1}{s} \frac{g_m}{C} (I_p - I_n). \quad (9)$$



Obr. 5. Realizace fázového equalizeru 4-tého řádu s bloky CDTA.

Tento proud je s různou orientací (dle šipky) na třech výstupech CDTA (x), které představují zdroje proudu. Proudové repliky jsou pak, dle uvedeného SFG (obr. 4), dále rozváděny do obvodu (obr. 5). Poznamenejme, že větve grafu s přenosem jedna realizujeme obecně proudovým sledovačem. V obvodu, který se blíží ideálnímu, kdy zdroj proudu pracuje do zátěže s nízkou impedancí, lze tuto větev realizovat přímým propojením. Tak je tomu v našem případě propojení výstupních bran (x) se vstupními branami (p, n). Ze stejného důvodu, pokud R_L nesplňuje tuto podmínku, musíme před něj zařadit oddělovací sledovač.

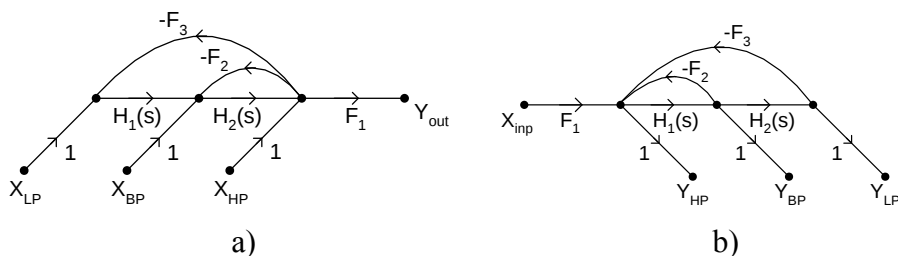
Syntéza multifunkčního biquadu s nastavitelnými parametry

Multifunkční (LP, BP, HP) filtry druhého řádu (biquady) s elektronicky nastavitelnými parametry (f_c a Q) jsou velmi žádané obvody, hlavně dají-li se parametry nastavovat nezávisle a jsou-li biquady schopny pracovat ve vyšších kmitočtových pásmech, tedy v CM a s moderními funkčními bloky. Přenosová funkce takového filtru má obecný tvar

$$K(s) = \frac{Y_{out}}{X_{inp}} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{N(s)}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q} s + \omega_c^2}, \quad (10)$$

kde čítec $N(s)$ je pro dolní propust (LP) $N(s) = a_0$, pro pásmovou (BP) $N(s) = s a_1$ a pro horní propust $N(s) = s^2 a_2$. Obvodové veličiny obecně značeny X, Y , mohou být jak proud (I), tak i napětí (V). První realizace přenosové funkce (10) byly s využitím klasických operačních zesilovačů. Velmi rozšířený je typ označovaný zkratkou KHN [11], který je bohužel použitelný jen v nižších kmitočtových pásmech, může však pro nás být vhodným vodítkem. Princip je založen na kaskádě dvou integrátorů, které jsou umístěny do struktury se zpětnými vazbami (ZV). Na obr. 6

jsou uvedeny obecné grafové modely takovýchto dvou struktur. Obě mají dvě smyčky ZV (F_1, F_2) a v přímé cestě dva integrátory, s přenosy H_k (7). Struktury se liší typem ZV a počtem vstupů a výstupů (Y). U první (obr. 6a) jde o distribuci ZV signálu. Druhá struktura (obr. 6b) je charakteristická sumací ZV signálů. Ta bude pro nás výhodnější, protože dovoluje realizovat všechny požadované funkce současně na třech různých výstupech.



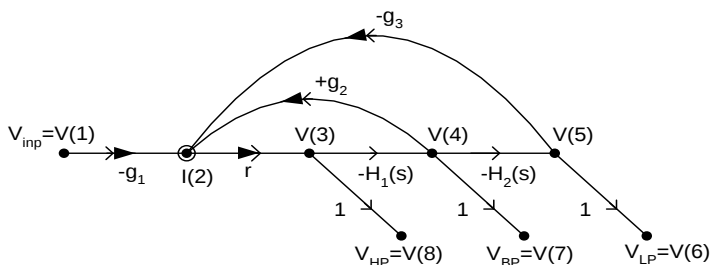
Obr. 6. Grafové modely realizace přenosové funkce druhého řádu.
a) struktura s výstupní distribucí, b) struktura se vstupní sumací.

Vyhodnocením grafu na obr. 6b dostáváme požadovaný přenos

$$K(s) = \frac{Y_{out}}{X_{inp}} = \frac{F_1 N_1(s)}{s^2 + s k_1 F_2 + k_1 k_2 F_3}, \quad (11)$$

kde $N_1(s)$ je různý pro jednotlivé výstupy, pro LP: $N_1 = k_1 k_2$, pro BP: $N_1(s) = s k_1$ a pro HP: $N_1(s) = s^2$. Porovnáním vztahů (11) a (10) je patrné, že charakteristický kmitočet f_c (kmitočet pólů) lze nastavovat změnou parametrů integrátorů (H_1, H_2) resp. změnou F_3 , činitel jakosti Q změnou F_2 a základní přenos K_0 změnou F_1 . K zajištění elektronické změny těchto parametrů vybíráme vhodný aktivní prvek EL 2082, který je komerčně dostupný pod názvem analogová násobička v CM [12]. V podstatě to je tříbranový proudový konvektor CCII(-), u kterého lze měnit přidavným řídicím napětím přenos proudu B z brány X na Z . U klasických CC je $B = 1$, zde jej lze měnit v rozsahu $B = 0 - 2$. Protože se s tímto prvkem lépe realizuje integrátor invertující, provedeme modifikaci grafu (obr. 6b) na tuto variantu (obr. 7). Navíc přejdeme do módu smíšeného, s jedním proudovým uzlem $I(2)$, kde jednoduše realizujeme sumaci proudů. Ostatní uzly zůstávají napěťové, takže některé větve budou mít charakter konverze $V \rightarrow I$, s přenosovou vodivostí (g) a opačně $I \rightarrow V$, s přenosovým odporem (r). Konverzi rozlišujeme i šipkami (obr. 7). Takto upravený SFG na obr. 7 má přenosovou funkci

$$K(s) = \frac{V_{out}}{V_{inp}} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\pm g_1 r N_1(s)}{s^2 + s k_1 r g_2 + k_1 k_2 r g_3}. \quad (12)$$



Obr. 7. Modifikace SFG z obr. 6b do vhodnějšího smíšeného módu.

Grafový model (obr. 7) realizujeme obvodem na obr. 8. Základem jsou dva invertující integrátory, tvořené bloky CCII(-)₁ a CCII(-)₂, které realizují větve grafu s přenosy

$$H_1(s) = -\frac{1}{s} \cdot k_1 = -\frac{1}{s} \cdot \frac{B_1}{R_1 C_1}, \quad H_2(s) = -\frac{1}{s} \cdot k_2 = -\frac{1}{s} \cdot \frac{B_2}{R_2 C_2} \quad (13), (14)$$

Těmito vztahy jsou pak určeny parametry (k_1 , k_2) ve vztahu (11) a (12). Větve s přenosy ($-g_1$) a ($-g_3$) realizují invertující konvertory $V \rightarrow I$, tvořené bloky CCII(-)₃ a CCII(-)₅, s přenosovými vodivostmi

$$g_1 = -\frac{B_3}{R_3}, \quad g_3 = -\frac{B_5}{R_5} \quad (15), (16)$$

Neinvertující konvertor, k realizaci větve ($+g_2$), je tvořen složitějším podobvodem, kde vedle CCII(-)₄ je i napěťový sledovač (VB₄) (volíme BUF 634). Konvertor má přenosovou vodivost

$$g_2 = \frac{B_4}{R_4} \quad (17)$$

Poznamenejme, že všechny uvedené parametry (13 až 17) se dají měnit elektronicky, změnou odpovídajícího B_k . Tři sledovače napětí (VB₁, VB₂, VB₃) realizují větve s jednotkovým přenosem a slouží k oddělení zátěže. Pro ideální případ, kdy hodnota $R_L \rightarrow \infty$, můžeme tyto VB nahradit přímým propojením. Sumace vstupního a zpětnovazebních proudů v $I(2)$ je v obvodu realizována prostým spojením vodičů do uzlu. Výsledný proud se pak na rezistoru R_6 mění na napětí $V(3)$. Rezistor R_6 tedy představuje konvertor $I \rightarrow V$ a realizuje větev grafu s přenosem

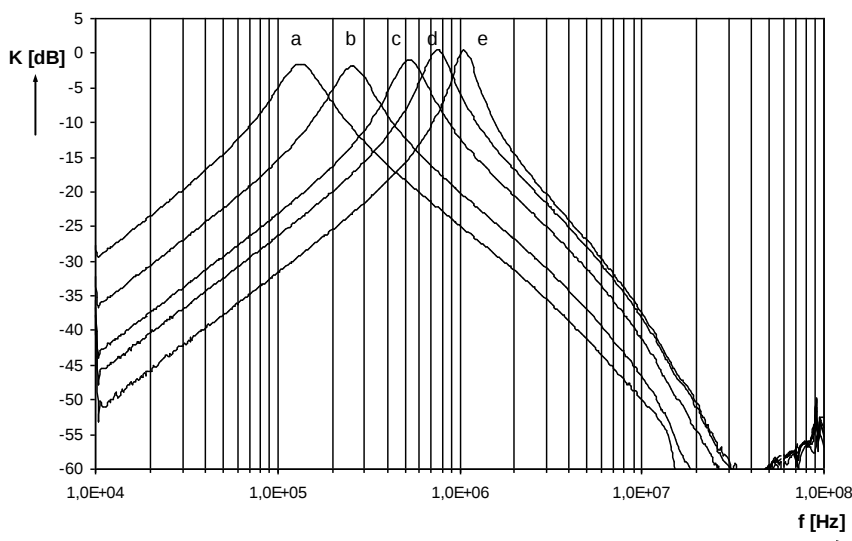
$$r = R_6. \quad (18)$$

Pro správnou činnost musí být jeho hodnota daleko menší než branové odpory okolních bloků, což v našem případě je zřejmé. Dosazením vztahů (13) až (18) do

$$Q = \frac{R_1 R_4 C_1}{R_6 B_1 B_4} \sqrt{\frac{R_6 B_1 B_2 B_5}{R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}}, \quad K_0 = -\frac{B_3}{R_3} R_6 \quad (24), (25)$$

Experimentální ověření navržených obvodů

Fázový equalizer na obr. 5 byl navržen v [8] pro konkrétní specifikaci ($f_c=1\text{MHz}$, $\tau=600\text{ns}$) a simulován na počítači simulátoru PSpice. Získaná charakteristika skupinového zpoždění uvedená v [8] potvrdila teoretické předpoklady a záměr syntézy. Podobný obvod s bloky OTA byl publikován a ověřen v [10].



Obr. 9. Změřené modulové charakteristiky přeladované pásmové propusti.

Obdobně byl navržen, pro $f_c=0,5\text{MHz}$ a $Q=1$, multifunkční filtr na obr. 8. A to pomocí návrhových vztahů (23) až (25), kde byly uvažovány zjednodušující podmínky shody hodnot některých součástek: $C_1=C_2=2,2\text{ nF}$, $R_1=R_2=220\Omega$, $R_3=R_4=R_5=1\text{k}\Omega$, $B_1=B_2=1,52$ ($V_g=1,52\text{V}$) a $B_3=B_4=B_5=B_6=1$ ($V_g=1\text{V}$). Simulacemi získané modulové charakteristiky dokumentují v [13] správnou činnost tohoto obvodu pro všechny tři výstupy (LP, BP, HP) a ukazují možnosti elektronického přeladování a nezávislého nastavování parametrů. Vedle počítačových simulací byl obvod na obr. 8 realizován a laboratorně ověřen pomocí obvodového analyzátoru Agilent E5071C. Změřené modulové charakteristiky přeladované pásmové propusti jsou uvedeny na obr. 9. Při nastavení parametrů funkčního vzorku $V_{CC}=\pm 5\text{ V}$, $V(Q)=0,5\text{ V}$, $V(K_0)=0,32\text{ V}$ a čtyřech hodnotách $V(f_c)$, křivky prakticky dokumentují použití a přeladování tohoto obvodu. Křivka (a) byla změřena pro $V(f_c)=0,25\text{ V}$,

její vrchol je pro $f_c = 132$ kHz. Obdobně pak pro křivku (b): $V(f_c) = 0.5$ V, $f_c = 257$ kHz, křivku (c): $V(f_c) = 1.03$ V, $f_c = 530$ kHz, křivku (d): $V(f_c) = 1.50$ V, $f_c = 775$ kHz, křivku (e): $V(f_c) = 2.10$ V, $f_c = 1060$ kHz, činitel jakosti určený ze šířky pásma charakteristiky je $Q = 3.9$.

Závěr

V tomto příspěvku bylo ukázáno, že grafy signálových toků jsou vhodným modelem pro syntézu analogových obvodů s moderními funkčními bloky, pracujících v proudovém nebo smíšeném módu. Na rozdíl od klasické analýzy metodou uzlových napětí jsme zde použili jednodušší Masonovy grafy bez vlastních smyček. Na několika příkladech jsme ukázali postup sestrojení a úpravy grafového modelu a jeho postupnou realizaci odpovídajícím obvodem. Navržené obvody byly ověřeny simulacemi na počítači v obvodovém simulátoru PSpice a laboratorně měřením. Získané výsledky potvrdily teoretické předpoklady a záměr syntézy.

Literatura

- [1] Toumazou, C., Lidgely, E. J., Haigh, D. G. *Analogue IC design: The current mode approach*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1990.
- [2] Biolek D., Senani R., Biolkova V., Kolka Z. Active elements for analog signal processing: Classification, Review, and New Proposal, *Radioengineering*, 2008, Vol. 17, No. 4, p. 15 – 32.
- [3] Dostál, T. *Pokročilé metody analýzy lineárních elektronických obvodů*, monografie, Evropský polytechnický institut, Kunovice, 2008.
- [4] Coates C. L., Flow-graph Solution of Linear Algebraic Equations, *IRE Transactions of Circuit Theory*, 1959, Vol. CT-6, p. 170-187.
- [5] Mason S. J., Feedback Theory: Further properties of Signal Flow Graphs, *Proceeding IRE*, 1956, Vol. 44, No. 7, p. 920-926.
- [6] Chen, W.K. *The circuits and filters handbook*. CRC Press, Florida, 1995.
- [7] Dostál, T. Filters with multi-loop feedback structure in current mode. *Radioengineering*, 2003, Vol. 12, No. 3, p. 6 - 12.
- [8] Dostál, T. All-pass filters in current mode. *Radioengineering*, 2005, Vol. 14, No. 3, p. 48 - 53.
- [9] Biolek D. CDTA - building block for current-mode analog signal processing. In: *Proceeding of European conference on circuit theory and design*, Krakow, Poland, 2003, vol. III, p. 397-400.

- [10] Dostál, T. Fázovací obvody s moderními funkčními bloky. *Slaboproudý obzor*, 2007, roč. 63, čís. 3-4, s. 20 – 24.
- [11] Kervin, W. J., Huelsman, L.P., Newcomb, R. W. State variable synthesis for insensitive integrated circuit transfer functions. *Transactions IEEE on Circuit and systems*, 1967, Vol. 2, No. 2, p. 87 - 92.
- [12] Intersil (Elantec). EL 2082CN Current-Mode Multiplier - datasheet, 1996, 16 p., dostupné na [www: http://www.intersil.com](http://www.intersil.com).
- [13] Sotner R., Slezak J., Dostal T., Multifunctional Voltage Adjustable CM Biquad Using Commercially Available Current Conveyors, *Elektronika*, 2009, No. 12, 61-64.

Synthesis of modern analog circuits using signal flow graphs

Abstract

The article deals with the synthesis of analog circuits, with modern functional blocks, working in the current or mixed mode, namely by modifying appropriately constructed signal flow graphs of the Mason type (without own loops) and subsequently implementing these graphs by corresponding circuits. The procedure is demonstrated on design of the circuits with multi-loop feedback structure, namely the filters and phase equalizer. Then there is discussed in detail the synthesis of the multifunctional biquad with adjustable parameters. The proposed circuits are verified experimentally.

Key words

Current-mode circuits, circuit synthesis, signal flow graphs.

Kontaktní údaje na autory

Prof. Ing. Tomáš Dostál, DrSc.
Vysoká škola polytechnická Jihlava,
Katedra elektrotechniky a informatiky
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
tel.: +420 567 141 197
e-mail: dostal@vspj.cz

Ing. Roman Šotner
student doktorského studia
Vysoké učení technické v Brně,
Ústav radioelektroniky
Purkyňova 118. 612 00 Brno
tel.: +420 541 149 140
e-mail: xsotne00@stud.feec.vutbr.cz

Ing. Jiří Frydrych
student doktorského studia
Vysoké učení technické v Brně,
Ústav radioelektroniky
Purkyňova 118, 612 00 Brno
tel.: +420 541 149 162

Numerická estetika, počítač a umění

Martina Benešová

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Abstrakt

Příspěvek se zabývá prolínáním matematiky, informačních technologií a umění, které nabízí moderní doba. Pro ilustraci takového prolínání byly použity fraktální útvary vytvořené pomocí počítače a člověkem vytvořený estetický objekt. Vlastnosti těchto objektů jsou kvantifikovány a porovnány nástroji numerické estetiky a teorie informace. Příspěvek též ve stručnosti poskytuje historický náhled na kvantifikaci estetiky a nabízí možnosti dalšího výzkumu.

Klíčová slova

Numerická estetika, art-ware, teorie informace, fraktální útvar, entropie, informační tok, redundance

JEL Classification: C000

Úvod

Blahoslaveni, kteří neviděli a uvěřili.

Jan 20, 29

Může se zdát poněkud neobvyklé, že bude v tomto příspěvku pojednáno spojení vědy, konkrétně matematiky, a umění. V moderní době je často zvykem striktně oddělovat vědy exaktní a vědy humanitní, nemluvě již o umění. Na druhé straně počítačová technika již zdaleka není ničím novým, není používána jen čistě k účelům, které samo o sobě slovo počítač naznačuje. Dnes je běžné, že moderní výpočetní technika může být prostředkem pro zábavu a s úspěchem se používá jako nástroj pro tvorbu výtvarného umění, můžeme-li jej tak nazvat.

Programy využívající estetických možností počítačů se začaly vytvářet asi na počátku šedesátých let. S jejich používáním však vyvstal také problém, zda

používat slova „umění“ pro takto vzniklý obor. Navzdory všem pochybnostem se zažilo označení „computer art“. To s sebou přineslo další diskuse, zda je možné, aby umění mohlo vycházet z počítače. Ač doposud nebyla podána jednoznačná odpověď, stále takto vznikají nová a nová díla.

Prostřednictvím počítače operujeme s daty, která jsou jen jakýmsi pojmenováním pro číslo. Číslo pak jsou jen znaky daného obsahu. Obrazy pak jsou jen jinými znaky, tedy jiný způsob pojmenování obsahu. Tato tvrzení úzce souvisí s takzvanou znakovou povahou některých jevů, jako například jazyka či obrazů. Toto učení je velmi staré, setkáváme se s ním již u starověkých filozofů (Aristoteles, Augustinus, aj.). Základní tezi pro moderní zkoumání systémů znaků však ustavil až významný švýcarský jazykovědec Ferdinand de Saussure (1857–1913). Znak podle této tzv. bilateralistické teorie představuje jednotu označujícího a označovaného. Označujícím¹ rozumíme jeho vnější (napsanou, nakreslenou, zvukovou, aj.) podobu, označovaným² určitý úsek lidského vědomí, představu, tj. odraz určitého úseku objektivní reality v našem vědomí. [1]

Z této znakové teorie tedy vyplývá, že obrazy mohou být stejně jako čísla kódovány, a tudíž s nimi lze prostřednictvím počítače také operovat obdobným způsobem. Samozřejmě může kdokoli namítnout, že počítače nebyly sestaveny, aby produkovaly umělecká díla, stejně tak může kdokoli odpovědět, že vývoj nelze zastavit a že nikdo nestanovil hranice, kde končí věda a začíná umění a naopak.

Další možný problém, který může vyvstat, je, zda má obrazová informace stejnou hodnotu jako informace verbální. Jedno přísloví praví, že obraz má cenu tisíce slov. Pravda však je, že jazyk je společenský jev, jehož primární funkce je komunikativní a mentální. [2] Mezi jeho sekundární funkce však patří i funkce estetická, což znamená, že záměrem sdělujícího je vyvolat u příjemce nějaké pocity. Můžeme říci, že u výtvarného umění nastává situace opačná. Primární je zde estetická funkce a sekundární je komunikativní. To však znamená, že obrazovou a verbální informaci v podstatě není možné porovnat, neboť leží na zcela jiných úrovních.

Výtvarné umění, tedy pokud připustíme, že i art-ware sem patří, nabízí rozsáhlé pole působnosti pro lidskou imaginaci, tzn. pro experimentování lidské mysli. Art-ware však přináší i značnou možnost pro experimentování s výchozími podmínkami při tvorbě. [3]

¹ lat. designans, fr. signifiant

² lat. designatum, fr. signifié

Věda dlouho zakládala své úspěchy na předpokladu, že z přibližně stejných příčin vznikají stejné důsledky. Tyto obrazy však dokazují naprosto odlišnou situaci. Připustíme-li totiž jen jemné odchylky na počátku samého procesu, dočkáme se ohromných rozdílů v závěru. Je to možná velmi překvapující, avšak naprosto běžné v životě. Například u procesů probíhajících v mozku často stačí jen velmi malé impulsy.³

Fakt, že každý empiricky pozorovatelný a vnímatelný jev splňuje jisté matematické zákony, způsobil velký rozmach a úspěch matematických věd. To, že předcházející tvrzení není tak docela pravdivé, je však proto ještě zajímavější a více překvapující. A to, že produkty počítačového umění tento fakt potvrzují, ještě zvyšuje jejich pomyslnou hodnotu. Ještě více fascinující je jejich struktura. Na první pohled vypadají, jakoby je ovládl zcela chaos, ale při podrobnějším studiu jejich struktury je jasné, že ji celou neovládl. Chaos a řád jsou zde v jakémsi podivném souladu, což je lidskému oku tak přirozené, neboť absolutní pravidelnost sice neodporuje přírodním zákonům, ale je pro ně zcela netypická. Dalo by se říci, že je pro ně až jakýmsi patologickým zákonem. Jako příklad takto vzniknuvších struktur byly zvoleny fraktální objekty, objekty, které se vykazují matematickou soběpodobností.⁴

Vědci totiž nejsou nezkažení pozorovatelé. Naopak oni vytvořili zákony přírody pozorováním umělých systémů, které byly vybrány jen pro svou absolutní pravidelnost. Paradoxem zůstává, že právě produkty této absolutní pravidelnosti – počítače – napomohly pochopení přírodních zákonů, které jsou zákony harmonie a chaosu.

Umění jako takové má vždy co dělat s komunikací. Je jakýmsi zprostředkovatelem mezi umělcem a jeho publikem. V ideálním případě by měl být tento cyklus uzavřený. Situace je však poněkud komplikována. Obraz není nakreslen, není vystaven v galerii, je prakticky dostupný pouze na „neuměleckém“ monitoru

³ Což je podstatou teorie chaosu, malá změna počátečních podmínek ovlivní podstatně výstupní data.

⁴ Míry matematické soběpodobnosti je možno dosáhnout pouze v teoretickém případě nekonečně mnoha iteračních kroků. Tuto vlastnost samozřejmě nemůže mít žádný přirozený, v reálném světě existující objekt. Pokud je tedy možné najít nějaký přírodní objekt vykazující fraktální strukturu, může být matematickým fraktálem pouze modelován, aproximován.

⁵ Fraktální objekty mohou být definovány i jinými způsoby než jen pomocí soběpodobnosti (angl. self-similarity), tj. pomocí fraktální dimenze nebo jako ITF (iterated function system). Ne každý fraktální objekt splňuje každou z definic. [4]

počítače. Avšak s rozvojem výpočetní techniky se postupně počítač stává stále více součástí lidského života, tudíž je i velice snadno dostupný.

Materiál a metody

*Výsledkem tvořivé činnosti v oblasti
umění je dílo; ve sféře vědy – metoda
nebo teorie...*

A. A. Charkevič

Estetika je souhrnný pojem pro vědu a teorii o estetické činnosti člověka. Podstatným rysem estetické činnosti je formování světa podle zákonů krásy. Hodnocení a utváření objektivní reality podle estetických měřítek je podstatným rysem zpředměťování lidských bytostných sil.

Estetické hodnocení jevů probíhá mezi dvěma protilehlými póly hodnot, jimiž jsou „krásné“ a „ošklivé“. „Krásné“ zde představuje pozitivní hodnocení a protiklad „ošklivé“ záporné hodnocení. Tato polarita hodnocení se odráží ve všech jazycích a to téměř ve stejném významovém určení. [5]

Estetika je tedy v podstatě humanitní věda zabývající se estetickým vnímáním⁶ a těmi estetickými předměty, které toto vnímání či cítění vyvolávají. Tyto předměty se dají rozdělit do různých tříd a takto je možno porovnávat jejich estetickou hodnotu. A již zde je možné vysledovat jemný přechod od humanitní k exaktní vědě. Především zásluhou lingvistiky se zavádějí exaktnější matematické metody, což znamená, že se při zkoumání estetických jevů uplatňuje vědecká teorie, která vznikla za hranicemi estetiky. Takto vznikají vědní odvětví zvaná strukturalismus a formalismus. Ta se pak zaměřují především na zkoumání formy a zákonů tvorby estetického díla.

Průkopník matematických a strukturálních metod zkoumání byl Georg D. Birkhoff, který v letech 1928–32 pracoval na teorii estetické míry pro umělecká díla. Nebyl však ani zdaleka první, kdo se pokoušel vyjádřit umělecké dílo exaktním způsobem – řečí čísel. Byli to již například příslušníci slavné Pythagorejské školy, Aristoteles, Leonardo da Vinci, Galileo Galilei a jeho komentář Danteho „Pekla“, Edgar Allan Poe a jeho „Teorie básnické skladby“ a mnoho dalších.

Významným způsobem se o rozvoj zasloužil také Abraham Moles se svým výzkumem aplikace metod teorie informace. Zavádí pojem komunikátu, což je řada prvků obsahujících informaci, která je úměrná relativní originalitě

⁶ angl. feeling, něm. Empfinden

(nepředvídatelnost v porovnání s maximálním významem originálu, který je dosažen v případě, že jsou všechny prvky stejně pravděpodobné). Dále Moles zavádí míru informací, která je rovna míře nepředvídatelnosti komunikátu. Moles také důsledně rozlišuje sémantickou informaci, která umožňuje přesnou představu, jde přeložit a je adresována univerzálním stránkám adresáta, a informaci estetickou, která se nedá předpokládat, přeložit. Každý reálný komunikát je potom sjednocením informace estetické a sémantické. Moles se tedy významně zasloužil o rozvoj takzvané informační estetiky, která zkoumá statistické charakteristiky repertoárů a stylů, vycházel zde z umění jako permutačního systému. [6]

Souhrn úloh moderní estetiky sestavil R. Gunzenhäuser:

1. Umělecké dílo se musí dát statisticky popsat jako prostorově nebo časově seskupené jevy, které se skládají z diskrétních prvků materiální povahy, jako např. tóny, písmena, barvy atd.
2. Za umělecké dílo se považují jen takové předměty, které byly vytvořené člověkem, tj. vědomě.
3. Člověk je vysílač a přijímač „estetických komunikátů“, případně estetické informace.
4. Každý estetický proces je znakový proces. Umělecká díla vznikají jako kombinace znaků z dané soustavy.
5. Systém a uspořádání znakových prvků jsou určující charakteristikou formy uměleckého díla.
6. Všechna díla podléhají vztahu „estetické neurčitosti“ (Bense); jejich estetické znaky vyjadřují neurčitost (nezřetelnost) způsobenou šumem (poruchami) a destrukcí. [7]

Umělecké dílo lze chápat jako jistou permutaci. [8] Označíme-li si tedy příslušné umělecké dílo jako zprávu Z , můžeme jej zapsat:

$$Z = \{z_i\}, \quad (1)$$

a dále jako adekvátní formu:

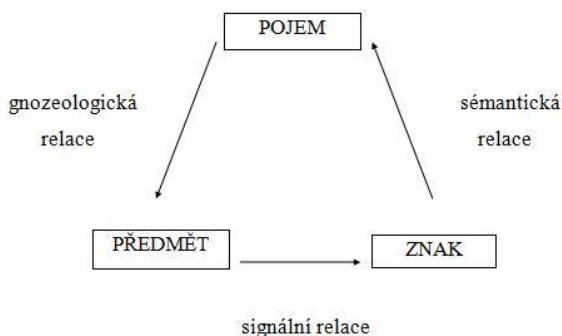
$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

kde p_i jsou pravděpodobnosti výskytu jednotlivých znaků z_i , které vypočteme jako podíl výskytu prvku z_i ku celkovému počtu prvků. Dále musí platit:

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{a} \quad \sum_i p_i = 1. \quad (3),(4)$$

Je tedy na první pohled jasná a viditelná souvislost s kombinatorikou a teorií pravděpodobnosti a všemi adekvátně platnými zákony.

Další exaktní odvětví, které proniklo do estetiky a které také vychází z teorie pravděpodobnosti, je teorie informací. Důsledkem její silné exploze do umění je vznik mnoha druhů umění založených na prostředcích komunikace. Podstatou je reference předmět – pojem – znak, jak ukazuje takzvaný Richardsův trojúhelník, obr. 2. [8]



Obr. 1 Richardsonův trojúhelník

Platí zde také vztah nepřímé úměrnosti, neboť kvantita informace je tím větší, čím méně byl znak očekávaný.

Podstata zkoumání uměleckého díla tedy spočívá ve dvou základních krocích. Prvním je definování matematického modelu díla a druhým klasifikace metodami informační estetiky.

Praktické příklady použití numerické estetiky a teorie informace

Dříve, než zahájíme výpočty nejrůznějších veličin z oboru teorie informace, je nutné upozornit, že pokud zjišťujeme tyto hodnoty u obrazů fraktálního typu, musíme předpokládat (pokud to není zcela zřejmé), že jejich vývoj byl zastaven, tzn., že jejich iterace byly ukončeny, tzn., musíme předpokládat konečný počet znaků. Tento způsob zjišťování počtu znaků byl aplikován u příkladů 1, 2 a 3.

Druhá možnost, jak postupovat u poněkud složitějších estetických objektů, která byla nakonec zvolena, neboť se zdá být zde nejpříjemnější, je, že je uvažován jistý počet iterací (u esteticky vyhodnocovaných objektů je snad lepší používat termínu počet vyobrazených znaků) a jako poslední znak je uvažován znak prostřední (jako v příkladu č. 4). Tyto znaky právě představují a zastupují onu zmíněnou nekonečnost, kterou nelze podle názoru autorky vypustit pouhým zdánlivým ukončením iterací. V akceptaci těchto znaků se také odráží fakt, že v určité fázi i nejdokonalejší oko přestane znaky rozlišovat a ty mu začnou splývat.

První způsob je vhodný zejména pro objekty fraktálního typu vytvořené počítačově a druhý způsob je použitelný obzvláště pro zvolený výtvarný objekt M. C. Eschera, který byl připojen pro kontrast počítačově a člověkem vytvořeného výtvarného objektu.

příklad číslo 1:

Jako první příklad pro praktické využití teorie z předchozí kapitoly byl vybrán Pascalův trojúhelník o 16 řadách (třetí iterace), viz obr. 2, kde na místech sudých čísel jsou použity bílé znaky a na místě lichých znaky černé.

Jelikož je tento objekt uměle vytvořen a jeho iterace jsou ukončeny, je možno použít zde první způsob výpočtu.

Problém, který je také nutno rozhodnout, je, co si stanovíme jako jednotku pro výpočet – tedy, co si stanovíme jako znak. Na první pohled by se mohlo zdát jasné, že se zde vyskytují pouze dva znaky – a to černý a bílý bod. Tak by to zřejmě bylo, kdybychom uvažovali Pascalův trojúhelník, kde jsou barevně rozlišena sudá a lichá čísla. Předmětem tohoto zkoumání jsou však útvary fraktálního typu, a proto jsou brány v úvahu „soběpodobné“ znaky – tedy zmenšující se trojúhelníky, jež splňují fraktální vlastnosti.

Tato první varianta se skládá z $N = 94$ znaků s repertoárem z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) znaků:

z_1 – velký bílý trojúhelník

z_2 – menší bílé trojúhelníky

z_3 – jednoduché bílé znaky

z_4 – jednoduché černé znaky.

Schéma uspořádání:

z_i	z_1	z_2	z_3	z_4
N_i	1	3	9	81

Informační obsah zprávy (viz [8]) se rovná

$$I = N \cdot H = - \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \log_2 \frac{N_i}{N} = N \cdot \log_2 N - \sum_{i=1}^4 N_i \cdot \log_2 N_i \quad (5)$$

$$I = (94 \cdot \log_2 94 - 1 \cdot \log_2 1 - 3 \cdot \log_2 3 - 9 \cdot \log_2 9 - 81 \cdot \log_2 81) \text{ bit}$$

$$I = 69,32 \text{ bit}$$

Důležitým pojmem používaným v teorii informace je pojem entropie. Pojem entropie (z řeckého entrophein – odvracet) zavedl roku 1865 Rudolf Clausius jako míru neurčitosti tepelného pohybu molekul v termodynamice (viz [8], [9]). Pro teorii informace pak znamená míru informace, kterou zpráva nese a jež je určena hodnotou logaritmu převrácené hodnoty pravděpodobnosti. Jako základ tohoto logaritmu se bere číslo 2. Jednotkou entropie je bit (binary unit):

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i \quad (6)$$

Entropii můžeme snadno zjistit ze vztahu mezi ní a informačním obsahem zprávy, viz výše vztah (5)

$$I = N \cdot H.$$

$$H = 0,74 \text{ bit.}$$

Dalším výpočtem zjistíme maximální entropii pro rovnoměrné rozložení všech použitých znaků, abychom následně mohli určit redundanci R (viz [8], [9]):

$$H_{\max} = \log_2 i \quad (7)$$

$$H_{\max} = \log_2 4 \text{ bit}$$

$$H_{\max} = 2 \text{ bit}$$

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}} \quad (8)$$

$$R = 1 - \frac{0,74}{2}$$

$$R = 0,6313 = 63,13\%$$

Redundance zvyšuje nadbytečnost zprávy, tím se snižuje efektivnost přenosu v kanále, na druhé straně to však přispívá ke spolehlivosti přenosu a srozumitelnosti zprávy. Odstraňuje se tak negativní vliv šumu v kanále. Čím vyšší je frekvence jistého prvku, tím vyšší je pravděpodobnost jeho výskytu, a tedy i jeho redundance. Tím menší je pak množství přenášené informace, nebo také míra neurčitosti a entropie.⁷

Veličina, která hodnotí míru přenosu informací, se nazývá informační tok (viz [8])

$$\bar{I} = \frac{I}{T}. \quad (9)$$

Tento vztah udává, jaké množství informací (dané informačním obsahem I) v bitech se přenese za jednotku času v sekundách. Jelikož se přenos realizuje prostřednictvím kanálu, je také důležité zjistit jeho přenosové vlastnosti, které udává kapacita kanálu C_k , tj. maximální informační tok, který může kanál propustit (viz [8]):

$$C_k = \text{Sup}(\bar{I}) \quad (10)$$

Z předchozích tvrzení je zřejmá platnost takzvané Shannonovy podmínky (viz [8]):

$$C_k > \bar{I} \quad (11)$$

To znamená, že kapacita kanálu musí být větší než informační tok, jinak kanál celý tok nepropustí a dojde k omezení zprávy.

Při používání termínů běžných v teorii komunikace a informace je nutné si uvědomit jejich odpovídající protějšky při vnímání estetických děl. To znamená, že smyslové orgány společně s vyšším nervovým centrem představují onen zmíněný

⁷ Redundance je například v běžném jazyce nezbytná, aby se odstranil vliv různých poruch a šumů v komunikaci, jako jsou například nedbalá výslovnost, nepozornost, překlapy a poruchy telefonního spojení. Bez redundance by mohlo dojít k nesrozumitelnosti a snížené vnímatelnosti, připomeňme si například nutnost opakování nových a neznámých pojmů při přednáškách. O něco jinou funkci může mít redundance u uměleckých děl, kde nemusí jít jen o snahu o předcházení nesrozumitelnosti, ale například o zvýšení napětí nebo vyvolání jistého pocitu.

komunikační kanál, informace je potom umělecký či estetický obsah, vysílač může být autor a přijímač například člověk obdivující či odmítající dané umělecké dílo.

Na základě Frankových pokusů v oboru experimentální estetiky (viz [10]), které prováděl v letech 1959–62, bylo zjištěno, že vnímání je určeno krátkodobou pamětí (tj. schopností zapamatovat si odděleně uvědomění jednotlivých znaků za sebou) pohybující se v rozmezí $5s < T < 12s$ (viz [8]).

Obvykle se však bere do úvahy tzv. prezenční čas $T = 8s$. Dalšími pokusy se zjistilo rozpětí kapacity kanálu (lidských smyslů) – 12–25 $\text{bit} \cdot \text{s}^{-1}$, jako odhad se tudíž bere

$$C_k = 16 \text{bit} \cdot \text{s}^{-1} \quad [8] \quad (12)$$

Obsah krátkodobé paměti (tj. vnímaná informace) je pak daný jako (viz [8]):

$$K_k = C_k \cdot T = 128 \text{bit} \quad (13)$$

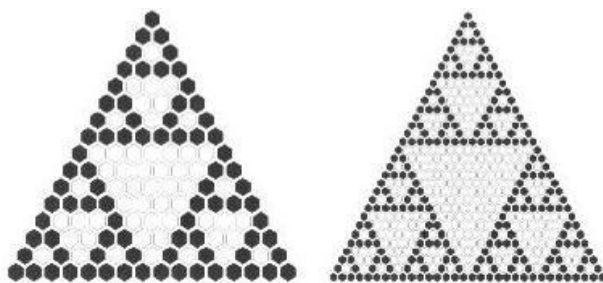
Tato hodnota udává v informační estetice kritérium srozumitelnosti díla. Jak řekl A. Moles: „Dílo musí být v rozpětí horní a dolní meze, aby se dalo vnímat a aby zároveň nebylo chudé na informaci, což znamená formální a nudné.“ [8, str. 46]

Tedy

$$\bar{I} = \frac{69,32}{8} \text{bit} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{I} = 8,67 \text{bit} \cdot \text{s}^{-1}$$

Podle Shannonovy podmínky (11) a odhadu (12) můžeme říci, že vypočtená hodnota $\bar{I}$ je menší než C_k , což znamená, že zkoumané dílo si můžeme snadno osvojit a je člověku srozumitelné.



Obr. 2 Pascalův trojúhelník o 16 a 32 řadách

příklad číslo 2:

Jako druhý příklad byl pro porovnání vybrán opět stejný typ Pascalova trojúhelníka s obdobným rozmístěním černých a bílých znaků, tentokrát však o 32 řadách, viz

obr. 2. Jeho struktura se stala složitější, celkový počet znaků je $N = 283$ a počet jednotlivých druhů je $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Jelikož je zvolený objekt stejným typem fraktálního útvaru jako v příkladu č. 1, způsob výpočtu bude také obdobný.

Také způsob výběru znaků je stejný jako výše.

Schéma uspořádání:

z_i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
N_i	1	3	9	27	243

Dále provedeme obdobné výpočty jako v prvním případě:

$$I = 217,54 \text{ bit}$$

$$H = 0,77 \text{ bit}$$

$$H_{\max} = 2,32 \text{ bit}$$

$$R = 0,6687 = 66,87\%$$

$$\bar{I} = 27,19 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} > 16 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$$

Zejména z poslední nerovnice je viditelné, že hodnota příslušného informačního toku o něco převyšuje odhad maximálního informačního toku, který „snese“ náš kanál (nervová soustava). To znamená, že toto zkoumané dílo, které je v podstatě jen zjemněním prvního příkladu, je už hůře zapamatovatelné a vnímatelné v daném časovém intervalu.

příklad číslo 3:

Jako třetí příklad byla vybrána jiná fraktální konstrukce zvaná Pythagorejský strom (angl. the Pythagorean tree), viz obr. 3. Tyto konstrukce jsou založeny na podstatě Pythagorovy věty a především na tvrzení $a^2 + b^2 = c^2$. Jen na nás však záleží, používáme-li rovnoramenné či libovolné pravoúhlé trojúhelníky. Vybrána byla druhá zajímavější eventualita, kdy jsou použity nerovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Zajímavější proto, že máme opět možnost výběru, protože můžeme používané trojúhelníky stejně orientovat či jejich orientaci při každém dalším kroku měnit.

Pravdou však zůstává, že ať trojúhelníky orientujeme jakkoli, počet i druhy použitých znaků zůstávají stejné. Výpočty jsem prováděla na modelech čtvrtého

stupně. Celkový počet znaků tedy byl $N = 30$ a počet jejich druhů byl $i = 30$. Již teď můžeme vidět, že se jedná o zprávu délky N obsahující právě N znaků.

I v tomto případě je možné k výpočtu použít první způsob stanovení počtu jednotek, neboť tento opět uměle vytvořený objekt má iterace ukončeny a tudíž i počet použitých znaků je bezpochyby konečný.

Výběr znaků pro tento případ není složitý, neboť v podstatě není volby. Jako znaky uvažují trojúhelníky a čtverce různých velikostí. Neuvažují jako znaky úsečky.

Schéma uspořádání:

z_i	z_1	...	z_{30}
N_i	1	...	1

Úpravy, které jsou nyní provedeny, jsou v podstatě stejné jako v předchozích případech:

$$I = 147,21 \text{ bit}$$

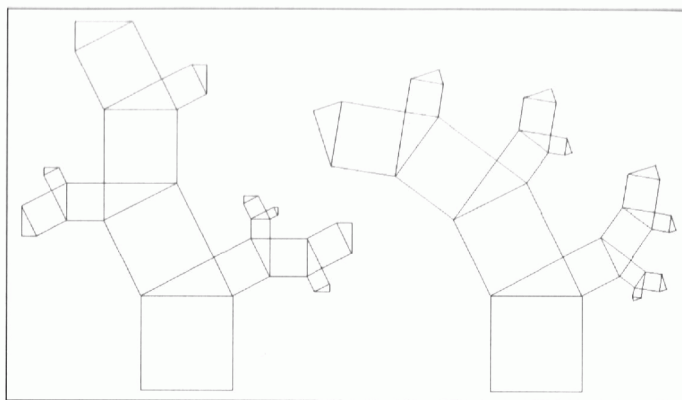
$$H = 4,91 \text{ bit}$$

$$H_{\max} = H = 4,91 \text{ bit}$$

$$R = 0$$

$$\bar{I} = 18,40 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} > 16 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$$

Jen jako poznámku je možno dodat, že redundance je skutečně nulová, neboť každý znak je použit právě jednou, tudíž se informacemi skutečně „neplýtvá“.



Obr. 3 Pythagorejské stromy (čtvrtá iterace)

Přestože zpráva – fraktální útvar – je jen čtvrtého stupně, z výsledného informačního toku je jasné, že i tento obrázek přesahuje kapacitu kanálu a tudíž je hůře zapamatovatelný. A to díky faktu, že každý znak je skutečně použit pouze a právě jednou. Tento fakt však jeho matematickou ani estetickou „krásu“ nijak nesnižuje.

příklad číslo 4:

Jako čtvrtou praktickou ukázkou aplikace teorie informace bylo pro porovnání zvoleno dílo, které pro kontrast nebylo stvořeno počítačem. Jeho autorem je M. C. Escher. Tento estetický objekt také splňuje fraktální vlastnosti, což je vlastně příznačné už z jeho názvu „Smaller and smaller“, viz obr. 4. Obtížnost počítání jednotlivých znaků byla zde poněkud zvýšena, neboť autor mimo jiné použil také své oblíbené techniky parketáže. Znovu je zde také nutno zdůraznit, že je předpokládána ukončenost tohoto objektu a nikoli jeho „pokračování donekonečna“. Proto je také za jeden ze znaků považován prostřední „terč“ objektu, který není možné přiřadit k ostatním. Za tímto znakem snad jakousi „nekonečnost“ očekávat můžeme. Z toho je také jasné, že na rozdíl od prvních čtyř příkladů, kde byl použit první způsob výpočtu, zde je použit druhý, o něco složitější způsob.

Je však nutné zdůraznit, že tento způsob se neobejde bez jistých obtíží. První z nich je problém, s kolika relevantními iteracemi počítat. Zde je uvažován takový počet, při kterém oči a nervová soustava jsou schopny rozlišovat jednotlivé znaky. Z toho vyplývá, že počet iterací i znaků samotných se může subjektivně lišit.

Druhým, velmi závažným problémem, bylo samotné počítání znaků. A to bylo ještě ztíženo tím, že autor použil techniky parketáže, kdy je plocha beze zbytku pokryta různými znaky. Ještě navíc tento objekt disponuje se znaky o třech barvách. To tedy znamená, že bylo nutno uvažovat o kvantitě (počtu) a o kvalitě (barvě a velikosti) jednotlivých znaků.

Další fakt, který je předpokládán za platný, je, že znakem v tomto objektu je právě jedna ještěrka. Nikoliv tedy například čára či bod. Je proto možné říci, že znak je stanoven.

Kvůli značné složitosti tohoto díla a zdůraznění jeho numerických hodnot, je předpokládáno provedení až dvacáté sedmé iterace (je-li možné zde tento termín použít), a proto je i počet znaků $27 + 1$ středový, jak je výše uvedeno. Celkový počet použitých znaků je tedy potom $N = 173$.

z_1 – největší ještěrky černé barvy

z_2 – největší ještěrky bílé barvy

z_3 – největší ještěrky oranžové barvy

z_4 – menší ještěrky černé barvy

z_5 – menší ještěrky oranžové barvy

z_6 – menší ještěry bílé barvy

...

z_{28} – prostřední nekonečný „terčik“

Schéma uspořádání:

z_i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
N_i	4	4	4	8	4	4	8
z_i	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}
N_i	12	12	8	4	4	8	8
z_i	z_{15}	z_{16}	z_{17}	z_{18}	z_{19}	z_{20}	z_{21}
N_i	8	4	4	8	8	8	4
z_i	z_{22}	z_{23}	z_{24}	z_{25}	z_{26}	z_{27}	z_{28}
N_i	4	8	8	8	4	4	1

Nyní znovu provedeme příslušné výpočty:

$$I = 808,15 \text{ bit}$$

$$H = 4,67 \text{ bit}$$

$$H_{\max} = 4,81 \text{ bit}$$

$$R = 2,83\%$$

$$\bar{I} = 101,02 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} > 16 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$$

Poslední příklad se zdál být již na první pohled nejsložitější včetně toho, že je předpokládán největší provedený počet „operací“. Tento předpoklad se potvrdil i početně.

Obr. 4 M.C. Escher *Smaller and smaller*

Výsledky a jejich diskuse

Výsledky necht' jsou přehledně seřazeny do tabulky:

	informační tok (bit.s ⁻¹)	entropie (bit)	redundance (%)
Pascalův trojúhelník o 16 řádcích	8,67	0,74	63,13
Pascalův trojúhelník o 32 řádcích	21,19	0,77	66,87
Pythagorejské stromy	18,40	4,91	0
Escherův <i>Smaller and smaller</i>	101,02	4,67	2,83

Tab. 1 Porovnání výsledků

Nejjednodušší a nejsrozumitelnější objekt (podle uvedených průměrných hodnot) je příklad číslo jedna – Pascalův trojúhelník o 16 řádcích.

Následují pak Pythagorejské stromy, Pascalův trojúhelník o 32 řádcích a nejsložitější – Escherova grafika „Menší a menší“. Posledně jmenované pak už všechny přesáhly hranici zapamatovatelnosti a srozumitelnosti.

Problémy, které se vyskytnou při aplikaci teorie informace a numerické estetiky, byly už výše v krátkosti nastíněny. Pro závěrečné shrnutí však je důležité je znovu projít a zhodnotit.

Prvním krokem, který je pro zahájení výpočtu nutné projít, je zjištění a stanovení si, co je znakem – stavebním prvkem estetického objektu i výpočtu. Tento úvodní krok byl poměrně jednoduchý u objektů typu příkladů č. 1, 2 a 3, kdy se jednalo o objekty jednoduššího fraktálního typu, které ani nedosáhly většího počtu iterací.

Složitější situace pak nastává u typů příkladu číslo 4. Tento objekt je dílem člověka, a proto také nepostrádá značnou dávku invence, jež s sebou však přináší jisté potíže. U takovýchto estetických objektů je totiž nutné si znak stanovit a nikoli jej prostě jen zjistit. Důvodem je, že tyto stavební jednotky jsou složitější a dále ještě rozložitelné na menší jednotky, jež se nehodí pokládat za znakové.

Dalším úskalím, které musíme překonat, je určení celkového počtu znaků nutné pro úspěšný výpočet. Také zde je nutné si stanovit jistá pravidla, jak postupovat. Za prvé je důležité předpokládat konečný počet znaků, tedy i konečný počet vykonaných iterací.

Situace je poměrně jasná u typů objektů č. 1, 2 a 3, kdy předpokládáme relativně nízký počet iterací a kdy jednotlivé znaky jsou tudíž relativně snadno rozeznatelné. K neshodám se dostáváme u příkladu č. 4, kdy je počítání znesnadněno umělcovou invencí a také velkým množstvím použitých znaků.

Aby se dal celkový počet znaků spočítat, je nutné se také vypořádat s problémem nekonečna, který některé typy těchto objektů s sebou přinášejí. Existují dvě cesty. První je uvažovat ukončené vývoje objektu, jako například u př. č. 1, 2, 3. Druhý způsob si vyžadují zejména obrazy typu 4, ve kterém je nekonečno nebo alespoň iluze nekonečna nezbytnou součástí. Zvolen je proto způsob, kdy je uvažován jistý počet již provedených iterací a tedy i vzniklých znaků, a posledním zvláštním znakem je potom ona „iluze nekonečna“. Počet iterací je stanoven v závislosti na zřetelnosti jednotlivých znaků pro zrakové a nervové orgány, což je ovšem samozřejmě také otázka čistě subjektivní, která by mohla mírně pozměnit konečné výsledky.

Závěrem je tedy možno říci, že tato metoda není rozhodně použitelná u všech typů fraktálních objektů. Pro její použitelnost je nutné, aby dané objekty splňovaly jisté výše diskutované podmínky. Ani tak však není zajištěna úplná jednoznačnost výsledků, neboť vše dále závisí na subjektivních faktorech, například jaké určit znaky, jakou má dané oko rozlišovací schopnost, apod. Přesto však lze touto metodou dosáhnout různých zajímavých výsledků a porovnání. Autorka navrhuje její aplikaci na díla literární, popřípadě například na řetězce DNA.

Použité obrázky

Obr. 1 Richardsonův trojúhelník

Obr. 2 Pascalův trojúhelník o 16 a 32 řadách

Obr. 3 Pythagorejské stromy (čtvrtá iterace)

Obr. 4 M. C. Escher *Smaller and smaller*

Použité tabulky

Tab. 1 Porovnání výsledků

Literatura

- [1] DE SAUSSURE, F. *Kurz obecné lingvistiky*. Praha : Academia, 2007. 409 s. ISBN 978-80-200-1568-6.
- [2] ČERNÝ, J. *Dějiny lingvistiky*. Olomouc : Votobia, 1996. 517 s. ISBN 8085885964.
- [3] ANDRES, J. Graziotti, Escher a art-ware I, II. *Matematika, fyzika a informatika*. 1995/96, 2,3, s. 97-101, 153-157.
- [4] ANDRES, J. On a Conjecture about the Fractal Structure of Language. *Journal of Quantitative Linguistics*. 2010, 17, 2, s. 101-122. [článek]
- [5] KLAUS, G., et al. *Filozofický slovník*. Praha : Svoboda, 1985.
- [6] MOLES, A. *Teórija informaciji i estetičeskoje vosprijatije*. Moskva : Mir, 1965.
- [7] SLOBODNÍK, D. *Teória informácie a estetika I.* . Bratislava : SAV, 1967. 100 s.
- [8] BARTÓK, I.; JANOUŠEK, I. *Počítače a umenie*. Bratislava : SPN, 1980. 169 s.
- [9] PAVLÍK, Ján. Informace, ontologie, entropie. *E-Logos : Electronic Journal for Philosophy* [online]. 2004, č. 4, [cit. 2010-08-09]. Dostupný z WWW: <<http://nb.vse.cz/kfil/elogos/epistemology/pav11-04.pdf>>. ISSN 1211-0442.
- [10] GREENBERG, Ira. *Processing Creative Coding and Computational Art* [online]. New York : Springer-Verlag, 2007 [cit. 2010-11-21]. Dostupné z WWW: <http://books.google.cz/books?id=TKgfVpWPb0sC&pg=PA15&lpg=PA15&dq=herbert+w.+franke+perception&source=bl&ots=pMLyXuD2iH&sig=kgPWlcv_pGFcTfOSkC795IDTexA&hl=cs&ei=MzzpTLr0F4nDswbVg42PCQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CFEQ6AEwBzgK#v=onepage&q&f=false>. ISBN 978159059617X.

Numerical Aesthetics, Computer and Art

Abstract

This paper deals with mingling mathematics, information technologies and art which is invited by modern era. To illustrate such diffusion, fractal objects created by means of the computer and an artist-made work of art are used. The aesthetic properties of such objects are quantified and compared by means of the tools of numerical aesthetics and information theory. The paper also provides the reader with a historical outline on the quantification of aesthetics, and offers subjects for further research.

Key words

Numerical aesthetics, art-ware, information theory, fractal object, entropy, information flow, redundancy

Kontaktní údaje na autora

Mgr. Martina Benešová
Katedra jazyků
VŠP Jihlava
Tolstého 16, 586 01 Jihlava
e-mail: benesova@vspj.cz
tel.: +420 567 141 185

Geometrical properties of CES production functions, especially with respect to Gaussian and Mean curvatures

Miloš Kaňka

VŠE, Praha; VŠPJ, Jihlava

Abstract

The paper deals with geometrical properties (Gaussian curvature, Mean curvature, Principal curvatures and other geometrical invariants) of CES production functions studied as surfaces in $\mathcal{R}^3$. These calculations were done because there is a hypothesis concerning connections between economical properties of CES production functions and their geometrical properties. Methods used in this paper are mostly classical which means classical calculation of Gaussian, Mean and Principal curvatures. This paper doesn't give new and therefore unknown results in pure mathematics. The aim of this work is to offer certain kind of information to economists.

Keywords: *Gaussian curvature, Mean curvature, Principal curvatures, First fundamental form, Second fundamental form, Production function, CES function.*

JEL Classification: C02

Introduction

The aim of this paper is to study geometrical properties of CES production functions that display constant elasticity of substitution. The two factors (capital, labour) CES production functions introduced by Arrow, Chenery, Minkaus and Sollow are:

$$(1) \quad h(K, L) = F \cdot (a \cdot K^r + (1 - a) \cdot L^r)^{\frac{1}{r}},$$

where $a \cdot K^r + (1 - a) \cdot L^r > 0$, a is a real constant, $a \in (0, 1)$, $K > 0$, K (number of units of capital), $L > 0$, L (number of units of

labour) $r \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ and $F > 0$ is a real constant. As the economical properties are in connection with the geometrical properties of this function, we are going to study the function (1) as a surface S in $\mathcal{R}^3$ given parametrically by the equation

$$g(K, L) = (K, L, h(K, L)).$$

Let us denote $A = (a \cdot K^r + (1 - a) \cdot L^r)^{\frac{1}{r}}$.

Basic equations

The tangent and normal vectors at an arbitrary point $p = (K, L, h(K, L))$ have the form

$$g_K = (1, 0, h_K) = (1, 0, F a K^{r-1} A^{1-r}) = \left(1, 0, F a \left(\frac{K}{A}\right)^{r-1}\right),$$

$$g_L = (0, 1, h_L) = (0, 1, F(1-a)L^{r-1}A^{1-r}) = \left(0, 1, F(1-a)\left(\frac{L}{A}\right)^{r-1}\right),$$

$$\mathbf{n} = \left(-F a \left(\frac{K}{A}\right)^{r-1}, -F(1-a)\left(\frac{L}{A}\right)^{r-1}, 1\right).$$

The unit normal is $N = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$, where

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}\| &= \left(1 + F^2 a^2 \left(\frac{K}{A}\right)^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 \left(\frac{L}{A}\right)^{2r-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{A^{r-1}} (A^{2r-2} + F^2 \cdot a^2 K^{2r-2} + F^2 \cdot (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} N &= \left(-\frac{F \cdot a \cdot K^{r-1}}{(A^{2r-2} + F^2 \cdot a^2 K^{2r-2} + F^2 \cdot (1-a)^2 \cdot L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}}, \right. \\ &\quad -\frac{F \cdot (1-a) \cdot L^{r-1}}{(A^{2r-2} + F^2 \cdot a^2 K^{2r-2} + F^2 \cdot (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}}, \\ &\quad \left. \frac{A^{r-1}}{(A^{2r-2} + F^2 \cdot a^2 K^{2r-2} + F^2 \cdot (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Consequently

$$\mathbf{g}_{KK} = (0, 0, h_{KK}), \quad \mathbf{g}_{KL} = (0, 0, h_{KL}), \quad \mathbf{g}_{LL} = (0, 0, h_{LL}).$$

where

$$\begin{aligned} h_{KK} &= F a (r-1) K^{r-2} A^{1-r} - F a^2 (r-1) K^{2r-2} A^{1-2r}, \\ h_{KL} &= -F a (1-a) (r-1) K^{r-1} L^{r-1} A^{1-2r}, \\ h_{LL} &= F (1-a) (r-1) L^{r-2} A^{1-r} - F (1-a)^2 (r-1) L^{2r-2} A^{1-2r}. \end{aligned}$$

The equation $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ gives

$$(2) \quad (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})_K = 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_K = 0 \quad \text{and} \quad (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})_L = 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_L = 0.$$

From (2) follows that $\mathbf{N}_K, \mathbf{N}_L \in \mathbf{T}_p(S)$. So vectors $\mathbf{N}_K$ and $\mathbf{N}_L$ can be expressed as a linear combination of the bases of $\mathbf{T}_p(S)$. We have:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_K &= a_{11} \cdot \mathbf{g}_K + a_{12} \cdot \mathbf{g}_L, \\ \mathbf{N}_L &= a_{21} \cdot \mathbf{g}_K + a_{22} \cdot \mathbf{g}_L. \end{aligned}$$

From (3) follows

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_K \cdot \mathbf{g}_K &= a_{11} \cdot g_{11} + a_{12} \cdot g_{12}, \\ \mathbf{N}_K \cdot \mathbf{g}_L &= a_{11} \cdot g_{12} + a_{12} \cdot g_{22}, \\ \mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_K &= a_{21} \cdot g_{11} + a_{22} \cdot g_{12}, \\ \mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_L &= a_{21} \cdot g_{12} + a_{22} \cdot g_{22}, \end{aligned}$$

where functions

$$\begin{aligned} g_{11} &= \mathbf{g}_K \cdot \mathbf{g}_K = 1 + F^2 \cdot a^2 \cdot K^{2r-2} \cdot A^{2-2r}, \\ g_{12} &= \mathbf{g}_K \cdot \mathbf{g}_L = F^2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot K^{r-1} \cdot L^{r-1} \cdot A^{2-2r}, \\ g_{22} &= \mathbf{g}_L \cdot \mathbf{g}_L = 1 + F^2 \cdot (1-a)^2 \cdot L^{2r-2} \cdot A^{2-2r} \end{aligned}$$

are coefficients of the first fundamental form

$$g_{11} dK^2 + 2 g_{12} dK dL + g_{22} dL^2.$$

On the other hand, we have

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_K = 0 \Rightarrow \mathbf{N}_K \cdot \mathbf{g}_K + \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KK} = 0 \Rightarrow -\mathbf{N}_K \cdot \mathbf{g}_K = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KK},$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_K = 0 \Rightarrow \mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_K + \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KL} = 0 \Rightarrow -\mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_K = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KL},$$

and

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_L = 0 \Rightarrow \mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_L + \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{LL} = 0 \Rightarrow -\mathbf{N}_L \cdot \mathbf{g}_L = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{LL}.$$

The functions

$$G_{11} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KK}, \quad G_{12} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{KL}, \quad G_{22} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g}_{LL}$$

are the coefficients of the second fundamental form

$$G_{11} dK^2 + 2G_{12} dK dL + G_{22} dL^2.$$

The functions G_{11} , G_{12} and G_{22} have the form

$$\begin{aligned} G_{11} &= F(r-1) \frac{a K^{r-2} - a^2 K^{2r-2} A^{-r}}{(A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}}, \\ G_{12} &= -F(r-1) \frac{a(1-a) K^{r-1} L^{r-1} A^{-r}}{(A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}}, \\ G_{22} &= F(r-1) \frac{(1-a) L^{r-2} - (1-a)^2 L^{2r-2} A^{-r}}{(A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

From (4) follows

$$\begin{aligned} G_{11} &= -a_{11} \cdot g_{11} - a_{12} \cdot g_{12}, \\ G_{12} &= -a_{11} \cdot g_{12} - a_{12} \cdot g_{22}, \\ G_{12} &= -a_{21} \cdot g_{11} - a_{22} \cdot g_{12}, \\ G_{22} &= -a_{21} \cdot g_{12} - a_{22} \cdot g_{22}. \end{aligned} \tag{5}$$

The equation (5) can be written in the form

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

or in the form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \cdot \begin{pmatrix} G_{11} \cdot g_{22} - G_{12} \cdot g_{12} & G_{12} \cdot g_{11} - G_{11} \cdot g_{12} \\ G_{12} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{12} & G_{12} \cdot g_{12} - G_{22} \cdot g_{11} \end{pmatrix}.$$

So we have

$$\begin{aligned} -a_{11} &= \frac{G_{11} \cdot g_{22} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}, & -a_{12} &= \frac{G_{12} \cdot g_{11} - G_{11} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}, \\ -a_{21} &= \frac{G_{12} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}, & -a_{22} &= \frac{G_{22} \cdot g_{11} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

The Weingarten map is defined for a regular surfaces S by the formula

$$W(\mathbf{v}_p) = -\mathbf{N}_{\mathbf{v}},$$

where $\mathbf{v}_p \in T_p(S)$ and $\mathbf{N}$ is a unit normal defined in a neighbourhood of a point $p \in S$ and $\mathbf{N}_{\mathbf{v}}$ is the derivative with respect to $\mathbf{v}_p$. So we have

$$W(\mathbf{g}_K) = -\mathbf{N}_K \quad \text{and} \quad W(\mathbf{g}_L) = -\mathbf{N}_L,$$

The Gaussian curvature K equals to the determinant $\det W$. This implies

$$\begin{aligned} -\mathbf{N}_K &= \frac{G_{11} \cdot g_{22} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \mathbf{g}_K + \frac{G_{12} \cdot g_{11} - G_{11} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \mathbf{g}_L, \\ -\mathbf{N}_L &= \frac{G_{12} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \mathbf{g}_K + \frac{G_{22} \cdot g_{11} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \mathbf{g}_L. \end{aligned}$$

The Gaussian curvature equals $K = \det \mathbf{A}$, where

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{G_{11} \cdot g_{22} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} & \frac{G_{12} \cdot g_{11} - G_{11} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \\ \frac{G_{12} \cdot g_{22} - G_{22} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} & \frac{G_{22} \cdot g_{11} - G_{12} \cdot g_{12}}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2} \end{pmatrix}.$$

It follows

$$(6) \quad \mathbf{K} = \det \mathbf{A} = \frac{G_{11} \cdot G_{22} - G_{12}^2}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2}.$$

The denominator of (6) equals

$$g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \frac{A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2}}{A^{2r-2}} \neq 0.$$

Results

After substituting the expressions for G_{11} , G_{12} and G_{22} we obtain

$$G_{11} G_{22} - G_{12}^2 = 0 \implies \mathbf{K} = 0.$$

The mean curvature is given by the formula

$$(7) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A} = \frac{G_{11} g_{22} - 2 G_{12} g_{12} + G_{22} g_{11}}{2 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Substituting into (7) we obtain

$$\mathbf{H} = \frac{A^{r-2} F (r-1) a (1-a) K^{r-2} L^{r-2} [K^2 + L^2 + F^2 A^2]}{2 [A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2}]^{\frac{3}{2}}},$$

or

$$\mathbf{H} = \frac{A^{3r-3} \left\{ h_{KK} + h_{LL} - \frac{F^2 A^2}{K L} h_{KL} \right\}}{2 [A^{2r-2} + F^2 a^2 K^{2r-2} + F^2 (1-a)^2 L^{2r-2}]^{\frac{3}{2}}}.$$

If $\mathbf{K} = 0$ than the points for which $\mathbf{H} \neq 0$ are parabolic and principal curvatures at these points are $\mathbf{k}_1 = 0$ and $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{H}$. If $\mathbf{H} = 0$ than both principal curvatures are zero and these points are planar.

Economical functions can be studied with the use of relatively sophisticated methods of differential geometry. There is a hypothesis that Gaussian curvature for functions with constant elasticity of substitution is zero. There are many types of curvatures. This fact enable us to give relatively complex description of functions (economical functions including) and analysis of their properties. There is also another hypothesis concerning curvatures and the possibility of substitution between production factors, returns of scale, etc. The detail analysis of the first hypothesis (mentioned above) is very serious problem, analysis (mathematical and economical) of which will be given in the next paper.

References

- [1] ARROW, K.J.; CHENERY, H.B.; MINHAS, B.S; SOLOW, R.M. Capital-labour substitution and economic efficiency, *Review of Economics and Statistics*, MIT Press 43(3):225-250, 1961.
- [2] BUREŠ, J., KAŇKA, M. *Some Conditions for a Surface in E^4 to be a Part of the Sphere S^2* . *Mathematica Bohemica* 1994 No. 4, pp. 367–371, 1994.
- [3] GRAY, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press LLC, 1998.
- [4] JORGENSON, Dale W., *Econometrics, vol.1: Econometric Modelling of Producer Behaviour*. Cambridge, MA: MIT Press, p. 2.ISBN 0262100827, 2000.
- [5] KAŇKA, M. *Some Examples of Gaussian Curvature, Mean Curvature and Principal Curvatures of Surfaces in $\mathcal{R}^3$* . International conference AMSE in Trutnov, 2006.
- [6] KAŇKA, M. *Some Examples of Gaussian Curvature, Mean Curvature and Principal Curvatures of Generalized Cobb–Douglas Surfaces in $\mathcal{R}^3$* . International conference AMSE in Poprad, 2007.
- [7] KAŇKA, M., JAROŠOVÁ, J., ZEITHAMER, T., ELIÁŠOVÁ, L. *The Gaussian Curvature of a Special Type of Superquadrics*. *Mundus Symbolicus*, Ročník 17, ISSN 1210-809X, pp. 67–71, 2009.

- [8] KAŇKA, M., KAŇKOVÁ, E., JAROŠOVÁ, J., ZEITHAMER, T., ELIÁŠOVÁ, L. *Some Examples of Utility Functions Studied from Geometrical Point of View*. Mundus Symbolicus, Ročník 17, ISSN 1210-809X, pp. 73–78, 2009.
- [9] KAŇKA, M. *An Example of Basic Structure Equations for Riemannian Manifolds*. Mundus Symbolicus 1995, pp. 57–62, 1995.
- [10] KAŇKA, M., KAŇKOVÁ, E. *The Using of the Model on Decision Making about the Access the Currency Union*. Mundus Symbolicus Ročník 13, ISSN 1210-809X, pp. 31–39, 2005.
- [11] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. New York, 1963.
- [12] NOMIZU, K. *Lie Groups and Differential Geometry*. The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [13] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1979.
- [14] STERNBERG, S. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, INC., 1964.
- [15] SOUKUPOVÁ, J., HOŘEJŠÍ, B., MACÁKOVÁ, L., SOUKUP, J. *Mikroekonomie*. Praha: Management Press, ISBN 80-7261-005-8, 2003.

Kontaktní údaje na autory

Doc. RNDr. Miloš Kaňka, CSc.

University of Economics

Department of Mathematics

Ekonomická 957, 148 00 Prague 4, Czech Republic

e-mail: kanka@vse.cz

Logos Polytechnikos

Odborný recenzovaný časopis Vysoké školy polytechnické Jihlava, který svým obsahem reflektuje zaměření studijních programů VŠPJ. Tematický je zaměřen do oblastí společenskovedních a technických. Jednotlivá čísla jsou úžeji vymezená.

Šéfredaktor: RNDr. Jana Borůvková, Ph.D.

Redakce: Ing. Eva Lajtkepová, Ph.D., Ing. Martina Kuncová, Ph.D.,

Ing. Bc. Ota Kovář, CSc., RNDr. Jana Borůvková, Ph.D.,

Ing. Bohumil Brtník, Ph.D., Mgr. Martina Benešová, PaedDr. Ladislav Jirků,

PaedDr. Emanuel Hurych, Ph.D., Mgr. Milena Hradová

Editor: Ing. Lenka Lízalová, Ph.D. (komunikace s autory a recenzenty)

Technické zpracování: Mgr. Hana Vojáčková

Web editor: Jitka Kalabusová

Redakční rada: prof. Ing. Bohumil Minařík, CSc.,

prof. Ing. Tomáš Dostál, DrSc., prof. PhDr. Ivo Jirásek, Ph.D.,

prof. MUDr. Aleš Roztočil, CSc., doc. Mgr. Ing. Martin Dlouhý, Dr.,

prof. RNDr. Ivan Holoubek, CSc., doc. PhDr. Ladislav Benyovszky, CSc.,

prof. PhDr. Ivan Blecha, CSc., doc. PhDr. Karel Pstružina, CSc.,

doc. PhDr. Ján Pavlík

Pokyny pro autory a deklarovaná forma příspěvků jsou dostupné na

http://www.vspj.cz/veda_vyzkum/logos.php?id=4&id_druha_uroven=161

Zasílání příspěvků

Redakce přijímá příspěvky v českém, slovenském nebo světovém jazyku elektronicky na adrese logos@vspj.cz

Adresa redakce:

Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava

Distribuce: časopis je dostupný v elektronické podobě na webových stránkách školy

V omezeném množství jej lze vyžádat zdarma na adrese redakce

© Vysoká škola polytechnická Jihlava