NEPARAMETRICKÝ HEURISTICKÝ PŘÍSTUP K ODHADU MODELU GARCH-M A JEHO VÝHODY

Jaromír Kukal, České vysoké učení technické; **Tran Van Quang,** Vysoká škola ekonomická v Praze*

1. Úvod

Volatilita je důležitý ukazatel pro řízení rizik a je také jedním z několika přímých vstupů pro ocenění opčních derivátů. Je dokonce předmětem přímého obchodování na různých trzích. Proto má přesné modelování volatility velký význam jak pro teoretiky, ale i pro obchodníky. Bylo zjištěno, že nepodmíněný rozptyl vypočtený přímo z finančních dat není dostatečně výstižným měřítkem jejich volatility. Také byla pozorována vysoká setrvačnost ve volatilitě finančních aktiv. Na základě těchto skutečností Engle (1982, specifikace ARCH) a později Bollerslev (1986) vypracovali model (zobecněné) autoregresní podmíněné heteroskedasticity ((G)ARCH). Ukazuje se, že modely této třídy jsou cennými nástroji pro modelování volatility ve finančních časových řadách s časově proměnlivou volatilitou. Ve srovnání s výsledky modelování volatility získanými jinými postupy (např. stochastická volatilita, realizovaná volatilita, implikovaná volatilita), modely podmíněné volatility poskytují velmi solidní výsledky při nesrovnatelně snadnějším modelovacím postupu a s menší náročností požadavků na vstupní data. I proto, v konkurenci s těmi již jmenovanými metodami, jsou modely třídy GARCH stále velmi populární (Mishra, Su a Ullah, 2010).

Výše zmíněná skutečnost neznamená, že odhad modelu podmíněné volatility z finančních dat je zcela bezproblémový. Finanční data, jak známo, ve většině případů nemají normální rozdělení. Jejich rozdělení bývají leptokurtická, to znamená, že jsou špičatější a mají tlustší konce než normální rozdělení (Filaček, Kapička a Vošvrda, 1998). Zpočátku tento fakt nebývá brán na zřetel při odhadu parametrů modelu z této třídy. Spíše tomu je naopak, protože parametry modelu GARCH jsou nejčastěji odhadovány metodou maximální věrohodnosti, při které se musí specifikovat typ rozdělení náhodné složky modelu. Častá specifikace odhadu je normální rozdělení. Tuto specifikaci lze modifikovat Studentovým t-rozdělením, případně obecným rozdělením náhodného členu modelu. Víme, že chybná specifikace typu rozdělení při odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti může vést k jejich nekonzistentním odhadům a proto při odhadu parametrů modelu GARCH parametricky pomocí

* Autor Jaromír Kukal děkuje za finanční podporu při vzniku článku grantu SGS11/165/OKH4 /3T/14 CTU v Praze. Autor Tran Van Quang děkuje za finanční podporu při vzniku článku GAČR v rámci grantu č. P402/12/G097

určitého typu rozdělení nemusí zajistit konzistentní odhad jeho parametrů. Tento nedostatek se snažíme odstranit odhadem parametrů modelů GARCH neparametrickou metodou. Lze dokonce tvrdit, že v posledních letech dochází k prudké renesanci tohoto přístupu (Linton a Yan, 2011).

Při odhadu parametrů modelu GARCH se vyskytuje další problém, který je spojen s nalezením optima věrohodnostní funkce. Optimální řešení maximalizující věrohodnostní funkci se obvykle hledá pomocí tradičních iterativních optimalizačních metod. Používá se přitom např. Newtonova-Raphsonova metoda, Berndtův-Hallův-Hallův a Hausmanův algoritmus (zkráceně BHHH, 1977) nebo Marquardtova metoda (Marquardt, 1963). Tyto metody vycházejí z určitých počátečních hodnot všech odhadovaných parametrů modelu a v každém kroku se připočítají k těmto hodnotám jisté přírůstky tak dlouho, až hodnoty hledaných parametrů přibližně maximalizují hodnotu věrohodnostní funkce. Má-li tato funkce jedno jediné maximum, jsou odhadované parametry modelu vždy nalezeny po určitém počtu iterací. Pokud jich má však více, tyto metody mohou nalézt pouze lokální, nikoliv globální maximum. Neexistuje žádný způsob, jak dostat optimalizační iterace z lokálního optima ke globálnímu optimu. Globálně optimální řešení je možné získat pouze v případě, že začínáme optimalizační postup s hodnotami parametrů v okolí bodu optima. To však nemůžeme předem lokalizovat.

U základních modelů GARCH se zmíněné problémy ještě dají zvládnout. U složitějších modelů z třídy GARCH vyřešit tyto problémy už tak jednoduché není. Jeden z takových modelů je GARCH-M. V uvedeném modelu je výnos finančních aktiv mimo jiné také funkcí podmíněné volatility. Podmíněná volatilita se objevuje jak v rovnici podmíněného rozptylu, tak v rovnici podmíněného průměru. Parametrický odhad modelu je možný, ale musí zajistit jak konvergenci ke globálnímu maximu, tak i to, aby odhadnuté parametry zaručily stabilitu a nezápornost nepodmíněného rozptylu za předem specifikovaného rozdělení chybového členu modelu. Podle Lintona a Yana (2011) odhadnuté parametry modelu při chybné specifikaci rozdělení mohou být konzistentní, ale nejsou vydatné. Proto parametry obvykle nejsou statisticky významné. Aby model byl stabilní a nepodmíněný rozptyl nebyl záporný, už nelze při parametrickém odhadu nijak ovlivnit.

Aby se zmírnily výše jmenované problémy, navrhujeme v naší práci neparametrický postup pro odhad parametrů modelu GARCH. Při tomto postupu nejen parametry modelu, ale i pravděpodobnostní rozdělení chybové složky modelu jsou odhadnuty z dat. Tento postup vyřeší problém s možnou chybnou specifikací typu rozdělení, která vede často k nekonzistentním odhadům parametrů modelu. Pokud jde o problém spojený s tradičními optimalizačními metodami, místo nich navrhujeme heuristickou optimalizační techniku, konkrétně diferenciální evoluci, která přímo najde hodnoty parametrů modelu maximalizující jejich věrohodnostní funkci. Heuristické metody sice nezaručí, že nalezené hodnoty jsou skutečně optimální hodnoty, ale spolehlivě zabraní tomu, aby se optimalizační proces uvízl v lokálním maximu věrohodnostní funkce. Heuristický přístup také umožňuje, aby hledané parametry splnily podmínky, které zaručují stabilitu modelu a nezápornost nepodmíněného rozptylu. Takto zvolená metodika, pokud je nám známo, je zcela nová a výrazně se liší od často citovaného přístupu od Buhlmanna a McNeila (2002), ale i od jiných algoritmů shrnutých v práci Mishra, Su a Ullah (2010). Správnost námi navrženého postupu bude ověřena na odhadu parametrů modelu GARCH-M s cílem identifikovat rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči společné měně Euru a americkému dolaru v období 2007–2012. Tyto výsledky jsou následně porovnány s výsledky získanými tradiční optimalizační metodou při parametrickém odhadu pro stejný datový soubor.

2. Model GARCH

Engle (1982) přišel s jednoduchým modelem autoregresní podmíněné heteroskedasticity, jehož specifikace se skládá ze dvou rovnic. První z nich je rovnice podmíněného průměru

$$y_t = X_t^T b + \varepsilon_t \tag{1}$$

Kde y_t je podmíněný průměr, X_t je matice vysvětlujících proměnných, b je vektor koeficientů a ϵ_t je náhodná složka neznámého rozdělení s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem h_t vzhledem k množině informací $\mathcal{F}$ dostupných v čase $t-1\left(\epsilon_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim (0,h_t)\right)$. Druhá rovnice je rovnice podmíněného rozptylu, který je autoregresní proces čtverců náhodné složky řádu p

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 \tag{2}$$

Aby byla zajištěna podmínka nezápornosti podmíněného rozptylu, všechny koeficienty v rovnici podmíněného rozptylu musí být kladné a jejich součet musí být menší než 1.

Bollerslev (1986) zobecnil Engleův model ARCH na model GARCH zahrnutím q zpožděných členů od h_{t-1} až h_{t-q} do vztahu pro podmíněný rozptyl a rovnice (2) nabývá následující podobu:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta h_{t-j} \tag{3}$$

Podmínka nezápornosti podmíněného rozptylu opět vyžaduje, aby všechny koeficienty v rovnici (3) byly nezáporné a jejich součet byl menší než 1. Engle, Lilien a Robins (1987) začlenili podmíněný rozptyl do rovnice (1), tím vytvořili tzv. model ARCH-M, jehož rovnice podmíněného rozptylu má následující podobu

$$y_t = X_t^T b + \delta h_t + \varepsilon_t \tag{4}$$

Začleněním podmíněného rozptylu do rovnice podmíněného průměru činí podmíněný průměr funkcí podmíněného rozptylu. To znamená, že podmíněná variabilita průměru zpětně ovlivní samotný průměr a čím vyšší je tato variabilita v minulosti, tím více se to projeví na samotném podmíněném průměru. Tato původní specifikace ARCH-M byla později rozšířena o členy zpožděného podmíněného rozptylu v rovnici pro podmíněný rozptyl a tak vznikl zobecněný model GARCH-M.

Parametry modelu GARCH-M jsou nejčastěji odhadovány metodou maximální věrohodnosti, pokud jsou p a q jsou relativně malá čísla. Na začátku jsme předpokládali, že náhodná složka modelu pochází z nějakého pravděpodobnostního rozdělení s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem ϵ_t. Z rovnice (3) ji můžeme vyjádřit jako

$$\varepsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta h_t \,. \tag{5}$$

Dosadíme $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta h_{t-j}$ do rovnice (5) a dostaneme

$$\varepsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta h_{t-j} \right) \tag{6}$$

kde y_t je vektor vysvětlované proměnné, X_t je matice vysvětlujících proměnných, oba jsou známé. Z toho je patrné, že odpovídající věrohodnostní funkce náhodné složky modelu musí být funkcí neznámých parametrů b, α_0, α_i a β_j, které spojíme do vektoru neznámých parametrů θ, a jejího podmíněného rozptylu h_t. Souhrnně můžeme věrohodnostní funkci l formalizovat takto:

$$l\left(\theta, h_i; y_t \middle| X_t\right) = f\left(y_t \middle| X_t; \theta, h_t\right) \tag{7}$$

Protože máme T pozorování a jednotlivý člen náhodné složky musí být nezávislý na ostatních, je celková věrohodnostní hodnota rovna

$$L = \prod_{t=1}^{T} f\left(y_t \middle| X_t; \theta, h_t\right) \tag{8}$$

Zlogaritmujeme-li vztah (8), obdržíme tzv. logaritmickou věrohodnostní funkci

$$\ln L = \sum_{t'1}^{T} f\left(y_t \middle| X_t; \theta, h_t\right) \tag{9}$$

Je-li rozdělení náhodné složky modelu známé, odhad vektoru parametrů θ se stává běžným optimalizačním problémem, tj. najít takový vektor θ, který maximalizuje hodnotu ln L. Např. předpokládejme, že náhodná složka má normální rozdělení[1] s nulovým průměrem a podmíněným rozptylem h_t, potom její věrohodnostní funkce je

$$f\left(\varepsilon_t; 0, h_t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\left(y_t - X_t^T b - \delta h_t\right)^2}{2h_t} \right) \tag{10}$$

Zlogaritmujeme rovnici (10), dostaneme

$$\ln f\left(\varepsilon_t; 0, h_t\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{1}{2}\ln h_t - \frac{1}{2}\frac{\left(y_t - X_t^T b - \delta h_t\right)^2}{h_t} \,. \tag{11}$$

1 S ohledem na leptokurtickou vlastnost rozdělení finančních dat s tlustými konci se při parametrickém odhadu modelu GARCH ještě používá t-rozdělení nebo GED (Generalized Error Distribution) rozdělení, viz Hamilton (1994).

Hodnota logaritmické věrohodnostní funkce je

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln h_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\left(y_t - X_t^T b - \delta h_t\right)^2}{h_t}, \tag{12}$$

kde $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta h_{t-j}$.

Odhad parametrů modelu GARCH-M parametrickou metodou je v principu velmi pohodlný. K nalezení optimálního vektoru parametrů modelu θ můžeme použít některou ze známých optimalizačních metod pro nelineární věrohodnostní funkci ln L. Takový odhad ovšem nemusí být konzistentní v případě, že rozdělení náhodné složky je špatně specifikováno. Abychom tomu předešli, jedna z možností je odhadnout z vstupních dat i rozdělení náhodné složky.

3. Kernelový odhad rozdělení náhodné složky modelu

Parametrický odhad parametrů modelu GARCH-M je nenáročný, protože apriorně předpokládá funkční tvar pravděpodobnostního rozdělení náhodné složky modelu. Neparametrický přístup odhadu postupuje jinak. Tento přístup vyžaduje, aby funkční tvar rozdělení byl odhadnut z dat stejně tak jako parametry modelu (Hardle, 1992). Vychází z definice hustoty pravděpodobnosti, podle které pro spojitou náhodnou veličinu X s hustotou rozdělení $f(x)$ musí platit

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{13}$$

Tuto hustotu $f(x)$ neznáme a musíme ji odhadnout z pozorování $(x_1, x_2, ..., x_n)$, které jsou považovány za nezávislé realizace náhodné veličiny X. V našem případě je to náhodná složka modelu ϵ_t, která tuto podmínku splňuje. Vztah (13) můžeme aproximovat následujícím způsobem

$$P\left(x - h \le X \le x + h\right) = \int_{x-h}^{x+h} f(x)\,dx \approx 2hf(x) \tag{14}$$

kde h je malé kladné číslo. Vztah (14) dále můžeme upravit na následující podobu

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2h}P\left(x - h \le X \le x + h\right). \tag{15}$$

Protože $P\left(x - h \le X \le x + h\right)$ můžeme vypočíst jako

$$P\left(x - h \le X \le x + h\right) = \frac{\#x \in \left(x - h, x + h\right)}{n},$$,

kde n je celkový počet pozorování, potom upravíme (15) na následující tvar

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2h}\quad\frac{\#x \in \left(x - h, x + h\right)}{n} \tag{16}$$

Vztah (16) není nic jiného než definice histogramu. A histogram je v podstatě hrubý odhad hustoty rozdělení náhodné veličiny. Poskytuje základní informace o typu rozdělení náhodné veličiny, její šikmosti a špičatosti. Nicméně je to pouze hrubý odhad hustoty, protože jednak je to nehladká funkce a jednak v případě, že některý z těch intervalů je prázdný, je to i nespojitá funkce. Hladkost a spojitost odhadnuté hustoty lze zajistit následujícím způsobem. Rovnici (16) upravíme na následující podobu

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x - x_i, h), \tag{17}$$

kde (x_1, x_2, ..., x_n) jsou realizace náhodné veličiny X a $w(t,h)$ je tzv. váhová funkce definovaná následovně

$$w(t,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} & když \ |t| < h \\ 0 & jinak \end{cases}. \tag{18}$$

Je snadné dokázat, že funkce $\hat{f}(x)$ splňuje všechny podmínky pro hustoty pravděpodobnosti, tj. je nezáporná a $\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} w(x - x_i, h) = 1$.

Ukazuje se, že odhadnuté hladké rozdělení pravděpodobnosti je vážený průměr těch pozorování, které padají do symetrického okolí bodu, ve kterém odhadujeme, přičemž jejich váhy jsou určeny váhovou funkcí . Tuto váhovou funkci lze nahradit kernelovou (jádrovou) funkcí, kterou značíme jako . Existuje poměrně velké množství kernelových funkcí, které by měly splnit dva požadavky: měly by být symetrické a ohraničené. Nejčastěji používané kernelové funkce pro tento účel jsou: normální, Epanečnikovova a trojúhelníková. Z rovnice (17) je patrné, že vlastnost odhadnuté hustoty rozdělení závisí jak na volbě kernelové funkce, tak na zvolené délce intervalu kolem bodu, okolo které odhadujeme hustotu. Ukazuje se, že odhad hustoty nezávisí tolik na volbě kernelu, ale je silně závislý na délce vyhlazovacího okna. Čím širší je toto okno, tím hladší je odhadnutá hustota, což ale také znamená, že odklon od skutečné hustoty bude větší. Naopak, pokud je délka tohoto okna je menší, odklon skutečné hustoty bude menší, zato však má větší rozptyl. Volba délky tohoto okna proto musí být kompromisem mezi těmito dvěma faktory (Wassermann, 2007).

Předpokládejme, že máme odhadnutou hustotu rozdělení náhodné složky modelu GARCH-M ve formě

$$\hat{f}(\varepsilon) = \frac{1}{hT}\sum_{t=1}^{T} \kappa\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{h}\right), \tag{19}$$

potom odhad parametrů modelu GARCH-M znamená najít vektor parametrů θ, který maximalizuje hodnotu logaritmické věrohodnostní funkce

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T} \ln\left[\frac{1}{hT}\sum_{t=1}^{T} \kappa\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{h}\right)\right], \tag{20}$$

kde $\epsilon_t = y_t - X_t^T b - \delta h_t$.

4. Diferenciální evoluce

Optimální řešení pro logaritmickou věrohodnostní funkci (20) je možné najít pomocí tradičních optimalizačních metod. Funkce (20) je funkce s poměrně velkým počtem nezávislých proměnných se složitým průběhem, proto nelze vyloučit, že se jedná o vícemodální funkci. Z toho plyne, že optimální řešení nemusí být globální, ale pouze lokální. Abychom obešli tomuto problému, navrhujeme využít heuristický algoritmus zvaný diferenciální evoluce pro hledání optimálního řešení.

Diferenciální evoluce je poměrně nový heuristický postup pro hledání globálního optima funkcí více proměnných, který navrhli Storn a Price (1997) na konci 90. let minulého století. Diferenciální evoluce je vlastně jednoduchý model Darwinovy evoluční teorie vývoje populací a proto lze zde se setkávat s různými pojmy z evoluční teorie jako jedinec, populace, generace, evoluce, rodič, potomek, křížení, mutace, jejichž význam postupně vysvětlujeme. Na začátku postupu se vygeneruje populace (v našem případě je to vektor parametrů modelu $(b_0, \delta, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q)$ s požadovanými vlastnostmi, který chceme odhadnout) s určitým počtem jedinců. Přechod k nové generaci probíhá tak, že se každý jedinec z původní generace kříží se svým vlastním náhodným mutantem. Tím vznikne nový potomek, a pokud je potomek kvalitnější než jeho rodič (v našem případě znamená, že nový vektor parametrů vygeneruje vyšší hodnotu logaritmické věrohodnostní funkce), tak tento potomek nahradí svého rodiče v původní populaci. Tím vzniká nová populace. Jednoduchým cyklem přes všechny jedince staré populace tak dostaneme celou novou populaci, která nemůže být horší, než ta stará. Probíhá tedy určité přibližování se k optimálnímu řešení a tím se liší diferenciální evoluce od náhodného prohledávání. Podstatou úspěchu diferenciální evoluce je tedy generace náhodného mutanta a jeho křížení s rodičem.

Při hledání optima spojité funkce $f(x)$ na neprázdné oblasti $D = \left\{x \in R^d \ : a \le x \le b\right\}$ vycházíme z náhodné populace N jedinců, tedy z množiny $P = \{x_1, ..., x_N\} \subset D$. Potom pro každý vektor x_k ze staré populace určíme mutanta y s využitím nových vzájemně různých jedinců r_1, r_2, r_3 z populace P podle vztahu

$$y = r_1 + F(r_2 - r_3), \tag{21}$$

kde $0 < F \le 1$ je parametr ovlivňující rozsah mutace. Uvedená technika mutace je označována jako náhodná evoluce. Alternativním postupem při vygenerování nové generace je cílená mutace, kdy vybereme nejlepšího (má nejlepší hodnotu účelové funkce f) jedince x_{best} z populace P a čtyři od sebe různé jedince r_1, r_2, r_3, r_4 z populace P podle vztahu

$$y = x_{\text{best}} + F\left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4\right). \tag{22}$$

Takto vzniklý mutant y nemusí být prvkem oblasti D. V tom případě ho překlopíme zpět s využitím jedné nebo několika hraničních nadrovin oblasti. Uvedená korekce polohy je nazývána zrcadlení. Při křížení rodiče x_k s (případně korigovaným) mutantem y vyjadřujeme genetickou převahu mutanta parametrem $0 \le C \le 1$ a náhodného křížence z generujeme po složkách vztahem

$$z_j = \begin{cases} y_j & \text{pro} \quad rnd_j < C \\ x_j & \text{jinak} \end{cases}, \tag{23}$$

kde $j = 1, ..., d$ a rnd_j je náhodné číslo z rovnoměrného rozdělení na intervalu (0,1). Nejen pro $C = 0$ se může stát, že $z = x_k$ V takovém případě náhodně vybereme index j a modifikujeme z_j na y_j. Souboj křížence z s rodičem x_k vyhrává kříženec, pokud hodnota věrohodnostní funkce $f(z)$ je vyšší než $f(x_k)$. V opačném případě vyhrává rodič, tj. původní vektor parametrů zůstane ve vygenerované populaci beze změny. Jeden z nich se tak dostane do nové populace $Q \subset D$. Takto se postupně dopracujeme až ke konečné populaci, kterou poznáme podle toho, že rozpětí funkčních hodnot a jednotlivých souřadnic prvků populace nepřekračuje předem stanovené meze.

Pro diferenciální evoluci jsou důležité tři parametry: N, F a C. Vysoký počet jedinců N v populaci usnadňuje výběr, ale znesnadňuje výpočet. Parametr F, který se také nazývá diferenciální váha, umožňuje optimalizačnímu postupu přeskakovat z jedné lokální oblasti na druhou. Parametr C určí, jak bude vypadat nová generace. Diferenciální evoluce je poměrně závislá na volbě těchto parametrů. Storm a Price (1997), a také Tvrdík (2004) doporučují, aby se volilo $N = 4d$, $F = 0{,}8$ a $C = 0{,}5$. Má se za to, že diferenciální evoluce je z hlediska programování jednoduchá a rychlá. Optimum se najde s vysokou pravděpodobností.

5. Implementace navrženého postupu a verifikace jejích výsledků

Výše popsaný postup pro neparametrický odhad koeficientů modelu GARCH-M budeme aplikovat na odhad rizikové prémie forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru modelem GARCH-M. Oprávněnost využití tohoto modelu pro tento případ hned vysvětlujeme. Podle kryté verze teorie parity úrokové míry musí platit

$$1 + r = \frac{F_t^{t+1}}{S_t}\left(1 + r^f\right), \tag{24}$$

kde r je výnos aktiv denominovaných v domácí měně, r^f je výnos aktiv denominovaných v zahraniční měně, S_t je spotový měnový kurz v čase t, kde F_t^{t+1} je forwardový měnový kurz sjednaný v čase t a platný v čase $t + 1$. Vztah (24) zlogaritmujeme a po malé úpravě dostaneme

$$f_t^{(t+1)} - s_t = r - r^f, \tag{25}$$

kde $F_t^{t+1} = \ln F_t^{t+1}$ a $s_t = \ln S_t$. Podobným způsobem můžeme odvodit vztah pro očekávaný spotový měnový kurz v nekryté verzi teorie parity úrokových sazeb, a sice musí platit

$$1 + r = \frac{E_t S_{t+1}}{S_t}\left(1 + r^f\right), \tag{26}$$

kde S_{t+1} je očekávaný spotový měnový kurz v čase t pro období t +1. Vztah (26) opět zlogaritmujeme a dostaneme:

$$E_t s_{(t+1)} - s_t = r - r^f, \tag{27}$$

kde S_{t+1} = ln S_{t+1} [2] Dříve se mělo za to, že by forwardový měnový kurz měl být nestranným odhadem budoucího spotového měnového kurzu, tj.

$$F_t^{t+1} = E_t\left(S_{t+1}\right) = S_{t+1} + v_{t+1}, \tag{28}$$

kde v_{t+1} je náhodná složka s nulovým průměrem a nenulovým rozptylem. Nicméně, platnost této hypotézy není potvrzena výsledky výzkumu. Naopak, zaznamenává se systematická deviace forwardového kurzu od budoucího spotového kurzu a předpokládejme, že tuto deviaci vyjadřujeme jako procentuální část samotného forwardového kurzu. Tato odchylka by měla být prémií za riziko pro majitele forwardového kontraktu. Je nutné podotknout, že tato prémie může mít v závislosti na charakteru spekulativních obchodů jak kladné, tak i záporné znaménko a formálně lze vztah mezi forwardovým měnovým kurzem a jeho očekávaným budoucím spotovým kurzem v přítomnosti rizikové prémie zapsat následujícím způsobem

$$E_t\left(S_{t+1}\right) = F_t^{t+1} + rp_t F_t^{t+1} = \left(1 + rp_t\right) F_t^{t+1}, \tag{29}$$

kde rp_t je riziková prémie forwardového měnového kurzu. Zlogaritmujeme (29) a dosadíme do (27) a po malé úpravě dostaneme následující vztah pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu

$$rp_t = r - r^f - \left(f_t^{t+1} - s_t\right). \tag{30}$$

Rizikovou prémii se snaží identifikovat mnoho studií. Zpočátku byla modelována lineárním modelem. Pakliže platí hypotéza, která postuluje, že forwardový měnový kurz je nestranným odhadem budoucího měnového kurzu, v následujícím lineárním modelu

$$s_{t+1} - s_t = \alpha + \beta\left(f_t^{t+1} - s_t\right) + \varepsilon_{t+1}.$$

Musí platit $\alpha = 0$ a $\beta = 1$ současně. Mnoho prací se věnovalo testování této hypotézy (viz rozsáhlý přehled o těchto pracích od Engleho (1996), případně práce Haie, Marka a Wua (1997). Výsledky těchto prací sice detekují statisticky významnou deviaci forwardového měnového kurzu od budoucího spotového kurzu, což vyvrací hypotézu, že forwardový měnový kurz je nestanným odhadem budoucího spotového kurzu. Nicméně, tento postup nedokázal spolehlivě kvantifikovat velikost této deviace (Ballie a Bollerslev, 2000).

---

2 Jelikož $\dfrac{E_t S_{t+1}}{S_t} = E_t\left(\dfrac{S_{t+1}}{S_t}\right) = E_t \exp\left(\ln\left(\dfrac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right) = E_t\left(\exp\left(s_{t+1} - s_t\right)\right) = E_t\left(1 + s_{t+1} - s_t\right) = 1 + E_t s_{t+1} - s_t,$

když je s_(t+1)-s_t malé. Za platnosti této podmínky potom platí $\ln\left(\dfrac{E_t S_{t+1}}{S_t}\right) = E_t s_{t+1} - s_t.$

Ve snaze překonat tento nedostatek lineární regrese jiní autoři využívali různé postupy. Jedni (Bhar, Chiarella a Pham, 2001 a Pošta, 2012) pro tento účel používají Kalmanův filtr. Při tomto postupu forwardová riziková prémie je nepozorovatelná stavová veličina a pozorovatelné veličiny jsou spotový a forwardový měnový kurz (Bhar a kol.) nebo změna spotového kurzu (Pošta). Druzí pro kvantifikaci rizikové prémie forwardového měnového kurzu využívali model oceňování aktiv. Tento model předpokládá, že v rovnováze pro investora, který optimalizuje svoje chování na trhu s cizími měnami, musí platit, že výnos jeho investice do finančních aktiv denominovaných v různých měnách diskontovaný stochastickým diskontním faktorem musí být stejný, tedy

$$E_t\left(M_{t+1}\left(1+r\right)\right)=E_t\left(M_{t+1}\left(1+r^f\right)\frac{F_t^{t+1}}{S_t}\right)=1, \tag{31}$$

kde M_{t+1} je stochastický diskontní faktor. Zlogaritmujeme (31), využíváme vztah (30) definující rizikovou prémii a vlastnost momentové generující funkce pro normální rozdělení[3] a po malé úpravě dostaneme

$$E_t rp_t=-\frac{1}{2}Var_t\left(rp_t\right)-\frac{1}{2}Cov_t\left(rp_t,m_{t+1}\right). \tag{32}$$

Riziková prémie forwardového měnového kurzu je tedy funkcí volatility budoucího kurzu a volatility stochastického diskontního faktoru. Tento přístup sice poskytuje solidní teoretický základ existence rizikové prémie forwardového měnového kurzu, ale výsledná kvantifikace rizikové prémie založená na tomto přístupu není nijak přesvědčivá. Přehled výsledků modelování lze najít v práci Stulze (1994). Jako příčinu tohoto stavu Bekaert (1994) uvádí omezený výběr vhodných užitkových funkcí pro tento model.

Rizikovou prémii forwardového měnového kurzu definovanou vztahem (32) lze zjednodušit na funkci jenom její volatility za předpokladu, že diskontní faktor je stabilní a zdrojem forwardové rizikové prémie je potom pouze nejistota ohledně jejího budoucího vývoje. Tento předpoklad je přípustný zejména v případě vysokofrekvenčních dat, kdy hodnota stochastického diskontního faktoru nemůže tak rychle měnit. Za zmíněného zjednodušeného předpokladu můžeme aproximovat rizikovou prémii forwardového měnového kurzu modelem GARCH-M s následující specifikací
rovnice podmíněného průměru:

$$rp_t=b_0+\delta h_t+\epsilon_t, \tag{33}$$

rovnice podmíněného rozptylu:

$$h_t=\alpha_0+\alpha_1\,\epsilon_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1}. \tag{34}$$

Tato základní specifikace pro rovnici podmíněného rozptylu je zvolena na základě

3 Momentová generující funkce pro náhodnou veličinu $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ je $E\left[e^X\right]=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, kde μ je její průměr a σ^2 je její rozptyl.

výsledků práce Hansena a Lundeho (Hansen a Lunde, 2005), kteří tvrdí, že žádná jiná specifikace modelu GARCH nemůže překonat prediktivní schopnost základní specifikace modelu GARCH(1,1).[4] Takto poprvé modelovali forwardovou rizikovou prémii Domowitz a Hakkio (1985). V průběhu času se často autoři snaží o různá vylepšení tohoto modelu, např. Kočenda a Poghosyan (2010). Zde autoři chtějí využít kovarianční strukturu vysvětlujících proměnných prostřednictvím vícevariantním modelem GARCH.

5.1 Použitá data a jejich předběžná analýza

Pro ověření námi navrženého postupu při odhadu parametrů modelu GARCH-M(1,1) za účelem modelování rizikové prémie forwardového měnového kurzu používáme tyto časové řady: dvě řady denních spotových měnových kurzů CZK/EUR a CZK/USD. Dále jsou využívány čtyři řady denních forwardových prémií na euro a USD pro dvě lhůty: tři měsíce a šest měsíců. Tyto prémie přičítáme k hodnotám spotových kurzů, čímž získáváme řady denních forwardových kurzů CZK/EUR a CZK/USD na tři měsíce a 6 měsíců. Protože v České republice nejsou dostupné řady denních výnosů vládních dluhopisů se splatností 3 a 6 měsíců, používáme místo nich úrokovou sazbu na mezibankovním trhu v Praze PRIBOR na období 3 a 6 měsíců. Odpovídající sazby na mezibankovním trhu pro zahraniční měny jsou EURIBOR na euro a LIBOR na americký dolar na období tři a šest měsíců. Všechna data použitá k odhadu parametrů modelu GARCH-M(1,1) jsou v období z května roku 2007 do února roku 2012. Jejich deskriptivní statistiky jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2.

Tabulka 1:
Deskriptivní statistiky dat spojených s Eurem

	CZK/EUR	Forward 3m	Forward 6m	Euribor3	Euribor6	Pribor3
Průměr	25,53	25,53	25,52	2,26	2,45	1,98
Medián	25,34	25,37	25,37	1,429	1,68	1,490
Maximum	29,53	29,55	29,57	5,39	5,44	4,24
Minimum	22,94	22,89	22,83	0,63	0,94	0,74
Std. odch	1,18	1,18	1,19	1,68	1,59	1,26
Šikmost	0,839	0,768	0,702	0,690	0,714	0,557
Špičatost	3,213	3,102	2,999	1,673	1,715	1,621
Počet pozorování	1230	1230	1230	1230	1230	1230

4 Odhad parametrů obecného modelu GARCH-M (p,q) touto metodou se v podstatě neliší od odhadu parametru základního modelu GARCH-M (1,1). Při odhadu parametrů obecného modelu se místo generace populace jedinců typu (b_0, δ, α_0, α_1, β_1) vygeneruje zvýšená populace jedinců typu (b_0, δ, α_0, α_1, ..., α_p, β_1, ..., β_q), pro které platí $0 \leq \alpha_i$, β_j,< 1 pro $i = 1, \ldots, p$ a $j = 1, \ldots, q$ a také $\sum_1^p \alpha_i + \sum_1^q \beta_j < 1$. Pak se už postupuje stejně jako při odhadu parametrů modelu GARCH-M (1,1).

Tabulka 2
Deskriptivní statistiky dat spojených s americkým dolarem

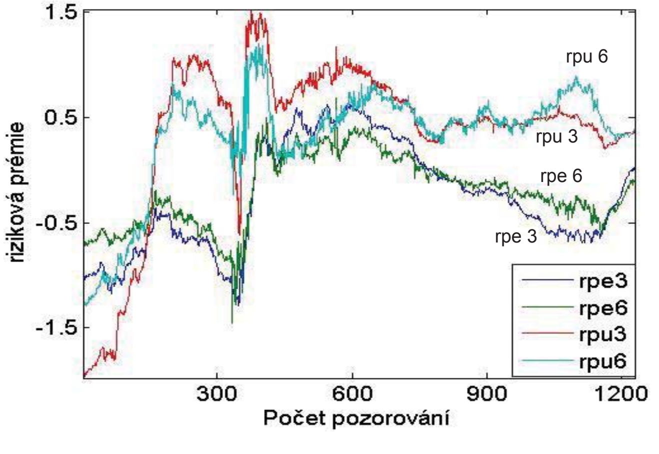
	CZK/USD	Forward 3m	Forward 6m	Libor 6m	Libor U3m	Pribor6
Průměr	18,42	18,43	18,44	1,54	1,73	2,19
Medián	18,40	18,42	18,42	0,52	0,76	1,72
Maximum	23,44	23,48	23,48	5,72	5,44	& 5,59
Minimum	14,40	14,44	14,46	0,24	0,38	1,03
Std. odch	1,55	1,54	1,52	1,72	1,62	1,17
Šikmost	0,144	0,153	0,153	1,196	1,097	0,557
Špičatost	2,822	2,853	2,883	1,673	2,847	1,633
Počet pozorování	1230	1230	1230	1230	1230	1230

Z těchto dat vygenerujeme čtyři řady rizikové prémie forwardového měnového kurzu EUR/CZK a USD/CZK podle vztahu (30), které značíme jako RPE3, RPE6, RPU3, RPU6. Jejich vývoj v čase je uveden na obrázku 1. Pro ověření jejich stacionarity je proveden test jednotkového kořenu upraveným Dickey-Fullerovým (ADF) testem. Výsledky tohoto testování jsou uvedeny v tabulce 3.

Tabulka 3
Test jednotkového kořenu na řadách rizikových prémií

ŘADA	Coefficient	S.E.	Stat.	p-value
RPE3	-0,001513	0,000815	-1,856831	0,0636
RPE6	-0,001608	0,000830	-1,936223	0,0531
RPU3	-0,002536	0, 001420	-1,786448	0,0745
RPU6	-0,003526	0,001872	-1,883183	0,0602

Obrázek 1
Vývoj vypočtených rizikových prémií v čase



Z výsledků testu jednotkového kořenu je patrné, že tyto řady nejsou stacionární, proto musíme je transformovat na řady jejich prvních diferencí, které už jsou stacionární. Řady prvních diferencí jsou použity pro odhadu modelu GARCH-M.

5.2 Výsledky odhadu modelu GARCH-M neparametrickou metodou

Model GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru specifikovaný ve vztazích (33) a (34) je odhadován metodou maximální věrohodnosti. Odpovídající věrohodnostní funkce je definována vztahem (20), kde $\epsilon_1 = \Delta rp_t - b_0 - \delta h_t$ a h_t je definována vztahem (34). První hodnota $\epsilon_1 = h_1 = \frac{1}{T}\sum_1^T \Delta\, rp_t^2$. Protože odhad rozdělení náhodné složky modelu není ovlivněn volbou kernelu, používáme normální kernel jako kernelovou funkci. Pokud se jedná o délku vyhlazovacího okna, doporučuje se v literatuře, aby $h = 1{,}06 h_t T^{-\frac{1}{5}}$. My toto doporučení respektujeme. Odhadovaný vektor koeficientů je pětiprvkový: $\theta = \left(b_0, \delta, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1\right)^T$, tedy máme $d = 5$. Koeficienty α_0, α_1, β_1 musí být nezáporné a jejich součet nesmí být vyšší než 1. Na β_0, δ není kladen žádný apriorní požadavek. Hodnoty těchto koeficientů maximalizující věrohodnostní funkce jsou odhadnuty diferenciální evolucí, jejíž parametry jsou: $N = 10d = 50$, $F = 0{,}8$ a C = 0,5, jak je doporučeno v literatuře. Pro každou řadu provádíme 100000 optimalizací. Pokud jde o přesnost odhadů, protože se jedná o odhady metodou maximální věrohodnosti, měly by mít asymptotické vlastnosti. Pro jejich rozptyl musí platit, že je omezen zdola, tedy:

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \geq \frac{1}{I(\theta)} \ ,$$

kde $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f\left(X,\theta\right)\middle|\theta\right]$ je tzv. Fisherova informační matice. Tato matice je vypočítána numericky. Celý výpočet je proveden v prostředí Matlab. Výsledky neparamerického odhadu koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru jsou uvedeny v tabulce 4. Výsledky neparamerického odhadu koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru jsou uvedeny v tabulce 5. V obou tabulkách jsou v hranatých závorkách uvedeny hodnoty odhadnuté standardní chyby.

Tabulka 4

Výsledky neparamerického odhadu modelu GARCH-M

	RPE3	RPE6	RPU3	RPU6
b_0	7,4440e-4 [0,0054e-4]	2,0619e-4 [0,2218e-4]	1,9696e-3 [NaN]	8,7083e-4 [1,6771e-4]
δ	7,8239 [0,5718e-4]	4,1048 [0,3356e-4]	3,6916 [0,0045e-6]	4,3378 [0,0014e-0]
α_0	8,5751e-4 [0,0038e-4]	7,9337e-4 [0,0001e-4]	5,5706e-4 [1,0317e-6]	5,2224e-4 [NaN]
α_1	0,0867 [0,0647e-4]	0,0296 [0,0246e-4]	4,6487e-3 [3,5106e-6]	5,0721e-3 [3,0359e-5]
β_1	0,8560 [0,0638e-4]	0,9598 [0,0012e-4]	0,9886 [8,6481e-6]	0,9862 [6,6635e-9]
ln L	-21,280	-13,081	-46,225	-59,810

Tabulka 5

Výsledky paramerického odhadu modelu GARCH-M

	RPE3	RPE6	RPU3	RPU6
b_0	-0,0023 [0,0008]	0,0004 [0,0009]	0,0003 [0,0005]	0,0012 [0,0012]
δ	4,4603 [1,4660]	0,2441 [0,5325]	-0,0738 [0,6956]	-0,1182 [0,4105]
α_0	5,55E-6 [9,86E-7]	2,85E-05 [0,0001e-4]	3,15E-06 [1,44E-06]	6,33E-05 [8,69E-06]
α_1	0,0547 [0,0049]	0,1817 [0,0063]	0,1840 [0,012]	0,1540 [0,0100]
β_1	0,9378 [0,0043]	0,8502 [0,0048]	0,8523 [0,0085]	0,8404 [0,0081]
ln L	-122,680	-103,108	-186,522	-229,112

Výsledky ukazují, že výsledky neparametrického odhadu se podstatně liší od výsledků parametrického odhadu modelu GARCH-M. Podle hodnoty věrohodnostní funkce se jeví neparametrický odhad modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu koruny vůči euru a americkému dolaru jako lepší ve všech čtyřech řadách. Hodnoty věrohodnostní funkce neparametrickým odhadem jsou vyšší než hodnoty této funkce při parametrickém odhadu (parametrické odhady po dosazení do věrohodnostní funkce pro neparametrický odhad dávají nižší hodnoty věrohodnostní funkce, jsou tedy suboptimální z hlediska neparametrického odhadu). Také koeficient δ v rovnici podmíněného průměru je statisticky významný při neparametrickém odhadu ve všech případech, zatímco tento koeficient při parametrickém odhadu je statisticky významný pouze pro řadu RPE3. Další rozdíl mezi dvěma způsoby odhadu je ten, že zatímco můžeme velmi dobře kontrovat podmínku kladenou na hodnoty koeficientů α_0, α_1, β_1 při neparametrickém odhadu s využitím diferenciální evoluce, v případě parametrického odhadu koeficientů modelu GARCH-M s využitím tradiční optimalizační metody (Newtonovy-Raphsonovy metody) toto nemůžeme ovlivnit. Proto při neparametrickém odhadu součet hodnot koeficientů α_0, α_1, β_1 je vždy menší než 1, při parametrickém odhadu s tradiční optimalizační technikou tato podmínka není splněna v případě řady RPE6 a řady RPU3. Jsme si vědomi, že odhad koeficientů modelu GARCH je vždy spojen s řadou problémů. Odhad modelu GARCH-M je ještě složitější, protože se podmíněný rozptyl objeví v rovnici podmíněného průměru. Nicméně námi navržený způsob odhadu koeficientů modelu GARCH-M se jeví jako spolehlivý. Proto rizikovou prémii forwardového měnového kurzu české koruny vůči Euru a americkému dolaru můžeme vyjádřit takto:

$$rp_t = r_{pt-1} + b_0 + \delta h_t + \epsilon_t \,, \tag{35}$$

kde h_t je podmíněný rozptyl Δrp_t.

6. Závěr

Parametry modelů GARCH jsou obvykle odhadovány metodou maximální věrohodnosti. Takto lze je poměrně snadně odhadnout parametrickým způsobem, kdy se apriorně předpokládá typ rozdělení náhodné složky modelu. To však hrozí určité nebezpečí. Pokud rozdělení náhodné složky není správně zvoleno, výsledné odhady koeficientů modelu mohou být nekonzistentní. Navíc se při hledání optima může vyskytnout problém, kdy nalezené řešení může být jedno z mnoha lokálních optim, nikoliv globální optimum. Proto v našem příspěvku navrhujeme alternativní přístup, kdy jak koeficienty modelu, tak i rozdělení náhodné složky jsou odhadnuty současně z dat. Tento neparametrický přístup ještě vylepšíme tím, že na řešení úlohy maximalizace věrohodnostní funkce používáme heuristickou techniku zvanou diferenciální evoluce. která umožňuje iteračnímu optimalizačnímu postupu uniknout z lokálních extrémů a tím se vyřeší již zmíněný problém lokálního optima.

Vhodnost našeho přístupu je ověřena na modelování forwardové prémie směnného kurzu, a to kurz české koruny vůči americkému dolaru a společné měně euro modelem GARCH-M v období od roku 2007 do roku 2012. Stejný model je také odhadován tradiční optimalizační metodou s apriorním předpokladem o rozdělení chybového členu modelu. Ukazuje se, že náš přístup zajišťuje vydatnější odhad koeficientů modelu GARCH-M pro rizikovou prémii forwardového měnového kurzu s vyššími hodnotami věrohodnostní funkce než tradiční přístup. Také námi navržený přístup lépe kontroluje splnění podmínek kladených na odhadované parametry než tradiční přístup, protože hledá parametry modelu pouze v populaci jedinců splňujících požadované vlastnosti. Náš přístup dokáže identifikovat statisticky významný vliv podmíněného rozptylu na rizikovou prémii forwardového měnového kurzu ve všech případech ve zkoumaném období, zatímco tradiční přístup tento vliv zaznamená pouze ve dvou případech. Podle těchto výsledků se jeví, že volatilita ve měnovém kurzu ovlivňuje výši rizikové prémie forwardového měnového kurzu české koruny vůči americkému dolaru a společné měně Euro, což je v souladu s teorií.

Literatura

BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T. 2000. The Forward Premium Anomaly Is Not as Bad as You Think. *Journal of International Money and Finance*. 2000, Vol. 19, pp. 471–488.

BEKAERT, G. 1994. Exchange Rate Volatility and Deviation from Unbiasedness in a Cash-in-Advance Model. *Journal of International Economics*. 1994, Vol. 36, pp. 29–52.

BERNDT, E.; HALL, B.; HALL, R.; HAUSMAN, J. 1974. Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. *Annals of Economic and Social Measurement*. Vol. 3, No. 4, pp. 653–665.

BHAR, R.; CHIARELLA, C.; PHAM T. 2001. Modelling the Currency Forward Risk Premium: A New Perspective. *Asia-Pacific Financial Markets*. 2001, Vol. 8, No. 4, pp. 341–360.

BÜHLMANN, P.; MCNEIL, A. J. 2002. An Algorithm for Nonparametric GARCH Modelling. *Journal of Computational Statistics and Data Analysis*. 2002, Vol. 40, pp. 665–683.

BOLLERSLEV, T. 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 1986, Vol. 31, No. 4, pp. 307–327.

DOMOWITZ, I.; HAKKIO, C. S. 1985. Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market. *Journal of International Economics*. Vol. 19, pp. 47–66.

ENGLE, R. F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*. Vol. 50, No. 4, pp. 987–1007.

ENGEL, C. 1996. The Forward Discount Anomaly and the Risk Premium: A Survey of Recent Evidence. *Journal of Empirical Finance*. Vol. 3, No. 2, pp. 123–192.

ENGLE, R. F.; LILIEN, D.; ROBINS, A. 1987. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica*. March 1987, Vol. 55, pp. 391–407.

FILAČEK, J.; KAPIČKA, M.; VOŠVRDA, M. 1998. Testování hypotézy efektivního trhu na BCPP. *Finance a úvěr*. 1998, Vol. 48, No. 9, pp. 554–566.

HAI, W.; MARK, N. C.; WU, Y. 1997. Understanding Spot-Forward Exchange Rate Regressions. *Journal of Applied Econometrics*. 1997, Vol. 12, pp.715–734.

HAMILTON, J. D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. 2005. A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1). *Journal of Applied Econometrics*. 2005, Vol. 20, pp. 873–89.

HARDLE, W. 1992. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.

KOČENDA, E.; POGHOSYAN, T. 2010. Exchange Rate Risk in Central European Countries. *Finance a úvěr*. 2010, Vol. 60, No. 1, pp. 22–39.

LINTON, O. B.; YAN Y. 2011. Semi- and Nonparametric ARCH processes. *Journal of Probability and Statistics*, Vol. 2011, Article ID 906212, 17 pages.

MANDEL, M.; TOMŠÍK, V. 2008. *Monetární ekonomie v malé otevřené ekonomice*. 2. rozšířené vydání. Praha: Management Press, 2008.

MARQUARDT, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal on Applied Mathematics*. 1963, Vol. 11, No. 2, pp. 431–441.

MISHRA, S.; SU, L.; ULLAH, A. 2010. Semiparametric Estimator of Time Series Conditional Variance. *Journal of Business & Economic Statistics*. 2010, Vol. 28, No. 2, pp. 256–274.

POŠTA, V. 2012. Estimation of the Time Varying Risk Premium in the Czech Foreign Exchange Market. *Prague Economic Papers*. 2012, Vol. 21, No. 1, pp. 3–17.

STORN, R.; PRICE, K. 1997. Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization. *J. Global Optimization*. 1997, Vol. 11, pp. 341–359.

STULZ, R. 1994. International Portfolio Choice and Asset Pricing: An Integrative Survey. NBER Working paper No. 4645, NBER, Cambridge, MA.

TVRDÍK, J. 2004. *Evoluční algoritmy*. Učební texty Ostravské University, Ostrava, 2004.

WASSERMAN, L. 2007. *All of Nonparametric Statistics*. Secaucus, NJ: Springer-Verlag New York, Inc., 2007.

ESTIMATING A GARCH-M MODEL BY A NON-PARAMETRIC HEURISTIC METHOD AND ITS ADVANTAGES

Jaromír Kukal, Czech Technical University, Trojanova 13, CZ – 120 00 Praha 2 (jaromir.kukal@fjfi.cvut.cz); **Tran Van Quang**, University of Economics, nám. W. Churchilla 4, CZ – 130 67 Praha 3 (tran@vse.cz).

Abstract

The models from the GARCH family are often estimated by maximum likelihood method, either parametrically or non-parametrically. Since the parametric estimation procedure is based on an a priori distribution, its misspecification can lead to the inconsistency of the estimators. Therefore non-parametric approach, in which both model's parameters and the distribution of error terms are estimated from the data, seems to be a better alternative. In our work, we propose a non-parametric technique with the use of a heuristic called differential evolution to estimate the parameters of a GARCH-M model. This technique can more likely reach to a global solution of maximum likelihood estimation (MLE) task. Further, it can also more effectively control the required properties of the estimates. The suitability of our approach is verified on modeling the CZK/USD and CZK/EURO forward exchange rate premium of period from 2007 to 2012 by a GARCH-M model.

Keywords

GARCH-M model, Non-parametric method, heuristic, forward risk premium

JEL Classification

pC14, C61, F31