

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta hospodárskej informatiky

Evidenčné číslo: 103006/I/2014/0295596187

**POROVNANIE STANOVENIA VLASTNÉHO VRUBU
POISŤOVNE PRI KONKRÉTNOM ZAISTENÍ
ŠTANDARDNÝMI METÓDAMI A OPTIMALIZÁCIOU**

Diplomová práca

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Fakulta hospodárskej informatiky

**POROVNANIE STANOVENIA VLASTNÉHO VRUBU
POISŤOVNE PRI KONKRÉTNOM ZAISTENÍ
ŠTANDARDNÝMI METÓDAMI A OPTIMALIZÁCIOU**

Diplomová práca

Študijný program: Aktuárstvo (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva FHI
Vedúci záverečnej práce: doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.
Konzultant: Ing. Jozef Zelina

Bratislava, 2014

Matúš Rajský

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom „Porovnanie stanovenia vlastného vrubu poisťovne pri konkrétnom zaistení štandardnými metódami a optimalizáciou“ spracoval samostatne, pod vedením vedúcej diplomovej práce, na základe vlastných teoretických poznatkov a s použitím uvádzanej literatúry.

v Bratislave dňa 30.4.2012

.....

PodĎakovanie

V prvom rade by som chcel poĎakovať vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Galine Horákovéj, CSc. za odbornú pomoc, uvedenie do problematiky ako aj správne smerovanie celej práce. Taktiež chcem poĎakovať Ing. Jozefovi Zelinovi za poskytnutie materiálov a cenné rady. V neposlednom rade chcem poĎakovať mojej rodine, priateľke a známym za ich podporu a motiváciu.

ABSTRAKT

RAJSKÝ, Matúš: Porovnanie stanovenia vlastného vrubu poisťovne pri konkrétnom zaistení štandardnými metódami a optimalizáciou. Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; katedra matematiky. Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.–Bratislava : FHI EU, 2014, 68 s.

Obsahom diplomovej práce s názvom „Porovnanie stanovenia vlastného vrubu poisťovne pri konkrétnom zaistení štandardnými metódami a optimalizáciou“ je návod na výpočet optimálneho zaistenia, ktoré môže byť použité na minimalizáciu maximálnej možnej škody, resp. minimalizovaniu pravdepodobnosti krachu. Venuje sa pojmom kolektívny model rizika, pravdepodobnosť krachu, zaistenie ako aj potrebným vzťahom, ktorých použitie vedie k odhadu potrebného kapitálu na krytie prevzatého rizika. Práca je rozdelená do šiestich oblastí. Prvá časť je zameraná na uvedenie do problematiky a objasnenie súčasného stavu v poisťovníctve. Ďalšia kapitola sa venuje definovaniu kolektívneho modelu rizika a mier rizika VaR a $CVaR$. Štvrtá kapitola sa venuje teórii krachu a výpočtu pravdepodobnosti krachu explicitne a aproximáciami. V ďalšej kapitole je vysvetlený pojem zaistenie a dva typy zaistenia – kvótové a surplus. Šiesta kapitola sa venuje výpočtu optimálnej hodnoty kvóty, resp. vlastného vrubu pre typy zaistení definované v predošlej kapitole. Posledná kapitola poukazuje na spôsoby využitia nadobudnutých vedomostí na troch modelových príkladoch. Na modelovanie a výpočty boli využité programy Mathematica 9, Microsoft Excel 2010 a EasyFit.

Práca obsahuje 12 tabuliek a 8 obrázkov.

Kľúčové slová: VaR , $CVaR$, pravdepodobnosť krachu, zložený Poissonov proces, koeficient korekcie, Brownov pohyb, vlastný vrub, kvóta

ABSTRACT

RAJSKÝ, Matúš: Comparison of determining the retention of insurance in particular reinsurance with standard methods and optimization. University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics, department of Mathematics. Supervisor: doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.–Bratislava : FHI EU, 2014, 68 pages.

The content of the thesis entitled „Comparison of determining the retention of insurance in particular reinsurance with standard methods and optimization „ is a guide to calculate the optimal reinsurance that may be used to minimize the maximum possible damage with a certain probability and also to minimize the probability of ruin. The thesis is divided into six chapters. The first chapter focuses on introducing the issue and clarifying the current situation in the insurance. The next chapter is devoted to defining of the collective risk model. The fourth chapter deals with theory of ruin and calculation of the probability of ruin, using not only exact, but also approximate calculations. The next chapter explains the concept of proportional reinsurance and two of its types: quota and surplus. The sixth chapter deals with the calculation of optimal quota and surplus values, which were defined in the previous chapter. The last chapter highlights the use of acquired knowledge by presenting direct calculations of issues presented in the previous chapters. Calculations were done in Mathematica 9, Microsoft Excel 2010 and EasyFit. The thesis contains 12 tables and 8 images.

Key words: Value-at-Risk, Probability of Ruin, Compound Poisson Process, Adjustment Coefficient, Brownian Motion, Quota, Level of Retention.

Obsah

Úvod.....	1
1 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY	3
2 CIELE PRÁCE.....	7
3 KOLEKTÍVNY MODEL RIZIKA	8
3.1 Zákony rozdelenia celkovej škody S^{kol}	8
3.1.1 Pravdepodobnostná funkcia S^{kol}	9
3.1.2 Distribučná funkcia S^{kol}	9
3.1.3 Momentová vytvárajúca funkcia S^{kol}	11
3.2 Základné charakteristiky celkovej škody S^{kol}	12
3.3 Miery rizika náhodnej premennej S^{kol}	14
3.3.1 Value at Risk	14
3.3.2 Conditional Value at Risk	16
4 TEÓRIA KRACHU	18
4.1 Pravdepodobnosť krachu v spojitom čase pre dlhšie časové periódy	19
4.1.1 Zložený Poissonov proces	19
4.1.2 Proces prebytku (surplus process).....	24
4.2 Lundbergova nerovnosť	26
4.3 Aproximácia pravdepodobnosti krachu.....	30
5 ZAISTENIE	34
5.1 Proporcionálne zaistenie.....	36
5.1.1 Kvótové zaistenie	36
5.1.2 Zaistenie surplus.....	38
5.1.3 Spájanie zaistných ochrán surplus a kvóty.....	39
6 OPTIMALIZÁCIA.....	41
6.1 Kvótové zaistenie	41
6.2 Excedentné (surplus) zaistenie vzhľadom na poistnú sumu	44
6.3 Zaistenie surplus + kvóta.....	44

7	PRAKTICKÁ ČASŤ	46
7.1	Modelový príklad 1	46
7.2	Modelový príklad 2	50
7.3	Porovnanie nastavenia optimálneho zaistenia s konštantnou kvótou	51
	ZÁVER.....	57
	Zoznam použitej literatúry	58
	Prílohy	Error! Bookmark not defined.

Úvod

Všetky finančné a poisťovacie inštitúcie majú jednu spoločnú vlastnosť – pracujú s rizikom. Keďže nevedia dokonale odhadnúť budúce dianie, nevedia ani predpokladať, či im daná finančná operácia, alebo poisťná zmluva, prinesie stratu alebo zisk. Preto je dôležité toto riziko merať a odhadovať. V smernici pre poisťné spoločnosti Solventnosť II, ktorá podľa najnovších odhadov vstúpi do platnosti začiatkom roku 2016, sa ohľadom výpočtu kapitálových požiadaviek zmieňujú hodnoty VaR a $CVaR$, ktoré stanovujú maximálne možnú škodu s určitou pravdepodobnosťou za jeden rok. O pravdepodobnosti, že poisťovňa nebude mať dostatočný kapitál na krytie rizika pojednáva aj teória krachu. Ak táto pravdepodobnosť bude príliš veľká, môže sa poisťovňa rozhodnúť časť rizika postúpiť zaistovateľovi, čím môže znížiť pravdepodobnosť, že nebude schopná vyplácať kapitálové požiadavky. Je dôležité vedieť, akej veľkej časti rizika by sa mal poisťovateľ vzdať, aby bola táto zaistná ochrana optimálna.

V diplomovej práci sa budeme zaoberať stanovením hodnôt VaR a $CVaR$ ako aj pravdepodobnosti krachu v rôznych časových obdobiach. Následne, použitím matematického aparátu, ukážeme spôsob na výpočet optimálneho zaistenia, ktorým budeme spomenuté hodnoty minimalizovať.

V prvej kapitole sa zameriame na uvedenie do problematiky, kde objasníme súčasný stav v poisťovníctve. Bližšie sa pozrieme na smernicu Solventnosť II a zdôrazníme význam zaistenia a jeho využívanie.

V tretej kapitole sa budeme venovať definovaniu kolektívneho modelu rizika na základe rozdelenia výšky individuálnej škody a rozdelenia počtu škôd. Uvedieme spôsob výpočtu mier rizika VaR a $CVaR$.

V štvrtej kapitole objasníme pojem teória krachu a budeme sa venovať stanoveniu pravdepodobnosti krachu explicitným výpočtom, ale aj rôznymi aproximáciami.

V piatej kapitole vysvetlíme zmysel, výhody a nevýhody proporcionálneho zaistenia, pričom sa zameriame na dva typy zaistenia: kvótové a excedentné.

V šiestej kapitole sa budeme zaoberať optimalizáciou zaistenia popísaného v piatej kapitole, za účelom hľadania optimálnej kvóty, resp. vlastného vrubu z pohľadu poisťovateľa.

V siedmej kapitole zhrnieme nadobudnuté vedomosti aplikačne na modelových príkladoch. Na modifikované údaje poisťovne aplikujeme metódy znázornené v teoretickej časti na výpočet optimálnej kvóty, resp. vlastného vrubu.

Nakoniec porovnáme naše výsledky so štandardnou výškou zaistenia a zhodnotíme, či je zaistenie vypočítané spôsobom prezentovaným v diplomovej práci výhodnejšie na minimalizáciu maximálnej škody, resp. minimalizovania pravdepodobnosti krachu.

Táto práca vznikla v spolupráci s Ing. Zelinom z ČSOB.

1 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Poistenie a zaistenie sú spoločensky a hospodársky také dôležité, že dohľad nad obozretnosťou podnikania je všeobecne považovaný za nutný. Poisťovatelia neposkytujú len ochranu pred budúcimi udalosťami, ktoré sa môžu ukázať ako stratové, ale prevádzajú aj úspory domácností na finančné trhy a do reálnej ekonomiky. Poisťovatelia a zaisťovatelia musia spĺňať požiadavky solventnosti, aby mohli zaručiť istoty poistníkom. Súčasné pravidlá nechávajú členským štátom viac priestoru na vnútroštátne odchýlky, sú menej citlivé na riziká a stanovujú menej prísny dohľad. Preto je zavádzaný nový režim solventnosti.

Solventnosť II je Európsky projekt zameraný na reformu regulácie poisťovní, ktorá by poskytovala bezpečnosť pre poistencov a na podporu trhovej stability. Zohľadňuje funkciu risk manažmentu a alokácie kapitálu v poistnom sektore.

Solventnosť II môže prispieť tým, že vytvorí rovnaké požiadavky pre všetky poisťovne. Podporí prehĺbenie jednotného trhu v poisťovníckych službách a lepšiu alokáciu kapitálu. Zmeny by mali pozitívne pôsobiť ako na klientov, tak aj na poskytovateľov poistných služieb. Dôraz sa kladie na súlad regulačného kapitálu s ekonomickým. Solventnosť II ale nie je len o kapitálových požiadavkách. Samotný kapitál nemôže nahradiť schopnosť pochopiť, odmerať a spravovať riziká a žiadny vzorec alebo model nemôže zachytiť všetky aspekty rizika, ktorému čelí poisťovateľ.

Nová regulácia podporuje vyššiu kvalitu risk manažmentu a zaisťuje, aby odhad regulačného kapitálu bol integrovaný so širšími procesmi kapitálového manažmentu.¹ Metódy sú založené na stochastickom prístupe merania rizík, pri ktorom na základe matematického aparátu a modelov určujeme, aké veľké riziko môže daná inštitúcia niesť.

Medzi proklamované hlavné ciele projektu Solventnosť II patria:

- Zvýšená ochrana poistencov
- Väčšia zhoda so skutočným rizikom poisťovne
- Súlad medzi finančnými inštitúciami
- Dôraz na stanovené princípy, ale bez zbytočnej zložitosti
- Odhad celkového stavu solventnosti poisťovateľom
- Podobne ako pri Basel, vytvorenie troj-pilierového prístupu prispôsobeného na poisťovníctvo

¹HM Treasury: Solvency II: a new framework for prudential regulation of insurance in the EU, február 2006, http://www.hm-treasury.gov.uk/d/solvencyII_discussionpaper.pdf

- Členenie kapitálových požiadaviek do dvoch úrovní
 - Kapitálová požiadavka na solventnosť - Solvency Capital Requirement (SCR)
 - Minimálna požiadavka na solventnosť – Minimum Capital Requirement (MCR)
- Harmonizácia kvantitatívnych a kvalitatívnych metód pre dohľad

V projekte Solventnosť II budú zavedené nové prvky, s ktorými sa v minulosti neuvažovalo, ale ukázalo sa, že sú potrebné pre čo najpresnejší odhad rizika.

Kým v Solventnosti I sa uvažovalo iba s poistným a do určitej miery s trhovým rizikom, Solventnosť II zohľadňuje okrem uvedených aj kreditné a operačné riziká.

Ďalším z kľúčových prvkov, ktorému budem venovať zvýšenú pozornosť aj v našej práci, je pravdepodobnostné meranie rizika. Odhad rizika bude založený na výpočte hodnoty VaR^2 s pravdepodobnostným stupňom 99,5%.³ Touto hodnotou sa budeme zaoberať v ďalších kapitolách.

Tretím prvkom pri odhade solventnosti je súvaha oceňovaná v súlade so stálymi trhovými princípmi. Takáto súvaha sa líši od tej v auditovaných účtoch spravovaných pod Solventnosťou I. Tento prístup vyžaduje trhové oceňovanie aktív a pasív. Znamená, že ak boli úpravy vykonané v jednej z položiek súvahy, ovplyvní to celkovú solventnosť podniku, vypočítanú ako čistú hodnotu aktív (aktíva mínus pasíva).⁴

Poist'ovne si stanovujú cieľ na výšku vlastných zdrojov v súvahe tak, aby kryli kapitálovú požiadavku SCR s určitou rezervou.

Teória krachu neponúka dokonalé výsledky, ale môže poskytnúť zaujímavý pohľad vďaka rôznym prípadom, kde môžeme zistiť pravdepodobnosť krachu explicitne alebo aproximáciou.

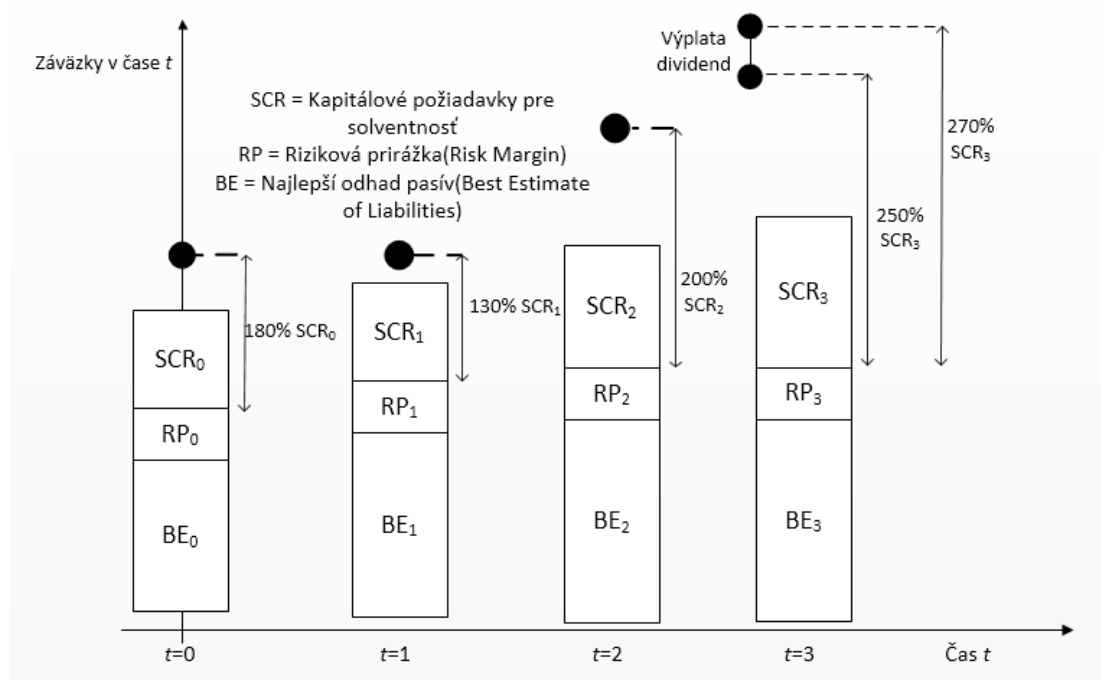
Jeden z prístupov je, že poisťovatelia si stupeň SCR vyberajú na úrovni 110% až 200%. K tomu zvyčajne prijímajú dividendovú stratégiu: ak miera SCR presiahne stanovené kapitálové požiadavky, poisťovateľ vyplatí časť kapitálu, ktorá prevyšuje tieto požiadavky

² VaR (Value at Risk) – hodnota v riziku

³ Susanne Kaske-Taft: Solvency II Introduction, 26.08.2010;
 Susanne Kaske-Taft: Solvency II Introduction, 26.08.2010;
<http://www.casact.org/affiliates/csaf/0810/SolvencyIIIntroduction.pdf>,

⁴ EIOPA: EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II, https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx.../reports/QIS5_Report_Final.pdf, 14.03.2011

v dividendách. Ak miera SCR dosiahne určitú hranicu (napríklad 250%), tak kapitál nad touto hranicou môže byť vyplatený v dividendách.⁵ Dynamická súvaha je ilustrovaná na Obr. 1.1.



Obr. 1.1 Dynamická súvaha v čase t . Vlastné spracovanie.

Ak poisťovateľ nespĺňa kapitálové požiadavky na solventnosť, môže sa rozhodnúť preniesť časť rizika poistného kontraktu, prípadne celého portfólia kontraktov, na inú spoločnosť – na zaistovateľa. Transfer rizika poisťovateľa zaistovateľovi sa nazýva zaistenie.

V súčasnosti plní zaistenie významné úlohy, ku ktorým predovšetkým patrí:

- **Rozdelenie rizika.** Je to jeho prioritná úloha a jeho realizácia je podstatou ochrany poisťovateľa. Zaistenie rozdelí riziko poistené na vysokú sumu na dve (prípadne viac) častí, čím bude budúca možná škoda rozdelená na poisťovateľa a zaistovateľa na základe dohodnutých podmienok.
- **Zvýšenie kapacity cedenta.** Znamená to, že poisťovateľ môže prijať do poistenia väčšie riziko o práve tú časť, ktorú bude cedovať zaistovateľom.
- **Stabilizácia hospodárenia cedenta.** Ekonomická stabilita vplyva pozitívne na goodwill poisťovacej spoločnosti a vytvára dôveru v poskytované služby. Súčasná

⁵ Gerber, U., Loisel, S. 2012. Why Ruin Theory Should Be Of Interest For Insurance Practitioners And Risk Managers Nowadays. In Actuarial and Financial Mathematics, Belgium, , s. 17-20.

ekonomická, politická a sociálna klíma vo vyspelých ekonomikách sa prikláňa k názoru dosahovať dlhodobo nižší, ale stabilný zisk, ako dosahovať vysoký, ale nestabilný zisk.

- **Dosiahnutie homogenity kmeňa.** Presunom časti poistných rizík, ktoré presahujú určitú hranicu únosnosti, zo svojho poistného kmeňa na zaistovateľa, môže cedent podstatne znížiť možné nepriaznivé dôsledky kolísania škodového priebehu.
- **Posilnenie solventnosti cedenta.** Miera finančnej sily sa určuje mierou solventnosti. Dohľadný orgán nad poisťovníctvom dohliada na to, aby sa poisťovňa nedostala pod požadovanú úroveň solventnosti. V opačnom prípade môže takejto spoločnosti zastaviť činnosť. Zaistenie znižuje potrebu kapitálu a rezerv poisťovne. Poisťovňa prevedením časti svojich záväzkov na zaistovateľa, uvoľní časť vlastných kapitálových zdrojov, ktoré by boli viazané na krytie prijatých rizík.
- **Cenotvorba.** Zaistovatelia môžu ovplyvňovať poistné sadzby poistných odvetví, ktoré zaistujú. Zaistenie ovplyvňuje aj cenotvorbu nepravidelne sa vyskytujúcich rizík, napríklad povodní, víchríc, zemetrasení a pod.
- **Poskytovanie pomoci pri tvorbe a zavádzaní nových poistných produktov.** Proces tvorby produktu je zložitý a výrazne sa na ňom môže podieľať aj zaistovateľ. Môže pomôcť vylepšiť dizajn produktov, cenovo sprístupniť poistné produkty a vylepšiť ich ocenenie. Štatistické údaje a expertízy mnohých svetových zaistovní sú rozsiahlejšie ako údaje poisťovní, keďže na poistnom trhu vystupujú dlhšie.⁶

⁶ Krátka, Zuzana: Zaistenie. Vydavateľstvo Ekonóm, 2007, s. 43-51

2 CIELE PRÁCE

Štandardné modely zaistenia mnohých poisťovacích spoločností sú stanovované na základe odborných skúseností poisťných matematikov alebo podľa zvyklostí, ktoré sú zaužívané medzi poisťovateľom a zaistovateľom. Napriek tomu, že vplyv stochastiky narastá, stochastické modely na stanovenie správnej zaistnej ochrany stále nie sú samozrejmosťou. Cieľom diplomovej práce je navrhnúť práve takú zaistnú ochranu, ktorá bude pre poisťovateľa optimálna z hľadiska minimalizácie pravdepodobnosti krachu a maximálnej možnej škody, ktorá môže nastať s určitou pravdepodobnosťou počas jedného roka a následne toto zaistenie porovnať so štandardnou metódou stanovenia zaistnej ochrany.

Pre dosiahnutie tohto cieľa bolo potrebné si stanoviť pre rozsiahlosť témy čiastkové ciele:

- Uvedenie metód, ktoré umožnia stanoviť rozdelenie, ktorým sa bude riadiť počet škôd a výška individuálnej škody.
- Objasnenie teórie krachu a spôsobu určenia pravdepodobnosti krachu v určitom časovom horizonte pomocou zloženého Poissonovho procesu.
- Vysvetlenie pojmu proporcionálne zaistenie a priblíženie dvoch typov tohto zaistenia: kvótového zaistenia a zaistenia surplus. Popísanie týchto typov zaistenia a ich skladaní do zaistovacieho reťazca z matematického hľadiska vhodným matematickým modelom, ktorý bude slúžiť na stanovenie optimálnej výšky zaistenia.
- Aplikovanie vybudovanej teórie na modelových príkladoch.

Snahou bude na modifikovaných údajoch jednej poisťovne porovnať zaistnú ochranu stanovenú na základe optimalizácie so štandardne používaným proporcionálnym zaistením.

Na triedenie údajov a jednoduché matematické operácie použijeme program *Excel 2010* a na vysvetlenie priebehu poisťných udalostí pravdepodobnostnými rozdeleniami využijeme softvér *EasyFit*. Na výpočet optimálneho zaistenia a ostatných dôležitých hodnôt použijeme program *Mathematica 9*.

3 KOLEKTÍVNY MODEL RIZIKA

Kolektívny model rizika zobrazuje stochastický model, vďaka ktorému môžeme posudzovať agregátne správanie určitého súboru. Príkladom využitia kolektívneho modelu rizika je poistenie áut. Nevieme, ktorý poistenec havaruje a akú výšku škody spôsobí. Preto nevieme akú škodu má poisťovňa očakávať v určitom období. Na základe štatistických údajov však môžeme predpokladať, aké percento poisteného súboru áut havaruje. To však nestačí na modelovanie celkovej škody, keďže poistné plnenia sú pri rôznych poistných udalostiach rôzne. Preto musíme vytvoriť stochastický model výšky jednotlivých škôd. Keď získame distribúciu rozdelenia výšky individuálnej škody a distribúciu rozdelenia počtu škôd, môžeme tieto rozdelenia skladať. Výsledkom je kolektívny model rizika, ktorý je charakterizovaný náhodnou premennou celkovej škody S^{kol} .

Definujme preto náhodnú premennú S^{kol} ako celkové poistné plnenie poisťovateľa, ktoré vyplýva z určitého portfólia nezávislých poistných zmlúv, ktoré vznikli v jednom období, spravidla jedného roka. Označme X_i ako premennú, ktorá opisuje výšku i -tej škody a náhodnú premennú N , ktorá charakterizuje počet škôd. Celkovú škodu môžeme potom vyjadriť ako súčet všetkých individuálnych škôd, čo môžeme vyjadriť vzhľadom na náhodnú premennú N vzťahom

$$S^{kol} = \sum_{i=1}^N X_i \quad (3.1)$$

Je zrejmé, že ak nenastane žiadna poistná udalosť, teda počet individuálnych škôd bude nula, aj celková škoda bude rovná nule.

$$S^{kol} = 0 \quad ak \quad N = 0$$

Ďalej musia byť splnené aj nasledujúce predpoklady: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných, nezávislých a identicky rozdelených premenných, pričom náhodná premenná N je nezávislá od $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Náhodná premenná, ktorá spĺňa uvedené predpoklady, má zložené rozdelenie.

3.1 Zákony rozdelenia celkovej škody S^{kol}

V tejto kapitole vysvetlíme zákony rozdelenia celkovej škody pomocou pravdepodobnostnej a distribučnej funkcie. Využitie jedného zo spôsobov závisí od konkrétnych rozdelení výšky jednotlivkej škody a počtu škôd. Pravdepodobnostnú funkciu využijeme v prípade, že obidve rozdelenia sú diskrétné. Pomocou nej vypočítame pravdepodobnosť, že celková škoda nastane

v konkrétnej výške s konkrétnou pravdepodobnosťou. Distribučná funkcia zovšeobecňuje pravdepodobnostnú a využíva sa pri diskretných aj spojitých rozdeleniach. Zobrazuje pravdepodobnosť, že celková škoda nepresiahne vopred stanovenú hodnotu.

3.1.1 Pravdepodobnostná funkcia S^{kol}

Predpokladajme, že rozdelenie počtu škôd aj výšky škody sa dá opísať pravdepodobnostnou funkciou. Za tohto predpokladu môžeme vyjadriť jeho pravdepodobnostnú funkciu $p_{S^{kol}}(x)$.

Vyjadríme najprv pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia počtu škôd:

$$p_N(n) = \begin{cases} P(N = n) & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & n \neq 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

Následne vyjadríme pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia individuálnej škody pomocou náhodnej premennej $X_i, i = 1, 2, \dots, N$:

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} P(X_i = x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Potom pravdepodobnostnú funkciu celkovej škody $p_{S^{kol}}(x)$ vyjadríme ako pravdepodobnosť, že celková škoda sa bude rovnať hodnote x . Tento prípad nastane, keď vo všeobecnosti nastane práve n poistných udalostí, vzhľadom na ktoré celková škoda bude rovná sume x . Túto úvahu zapíšeme ako:

$$P(S^{kol} = x) = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} (S^{kol} = x \wedge N = n)\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S^{kol} = x / N = n) \cdot P(N = n)\right) \quad (3.4)$$

Pretože

$$P(S^{kol} = x / N = n) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = p_X^{*n}(x)$$

Môžeme pravdepodobnostnú funkciu rozdelenia celkovej škody vyjadriť vzt'ahom

$$p_{S^{kol}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot p_X^{*n}(x) \text{ pre } x = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.5)$$

Kde p_X^{*n} je n -tá konvolúcia rozdelenia, pričom nultá konvolúcia $p_X^{*0}(x) = 1$ pre $x \geq 1$

3.1.2 Distribučná funkcia S^{kol}

Pre výpočet rezerv poisťovne nie je až tak dôležité poznať pravdepodobnosť, s akou nastane presná výška škody, ako pravdepodobnosť, že škoda nepresiahne určitú výšku. Pravdepodobnosť, že celková škoda bude menšia, resp. rovná hodnote x , sa nazýva distribučná funkcia. Zapíšeme ju ako:

$$F_{S^{kol}}(x) = P(S^{kol} \leq x) \quad \text{pre } x \in R \quad (3.6)$$

Pričom táto funkcia má tieto vlastnosti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{S^{kol}}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{S^{kol}}(x) = 1$$

$F_{S^{kol}}(x)$ je neklesajúca, t.j. ak $x < y \Rightarrow F_{S^{kol}}(x) \leq F_{S^{kol}}(y)$

$F_{S^{kol}}(x)$ je spojitá sprava, t.j. $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_{S^{kol}}(x) = F_{S^{kol}}(x + h)$

Podobne ako pri $p_{S^{kol}}(x)$ odvodíme distribučnú funkciu $F_{S^{kol}}(x)$ pomocou distribučnej funkcie náhodnej premennej $X_i, i = 1, 2, \dots, N$, vyjadrenej vzťahom

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} P(X_i \leq x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

A rozdelenia počtu škôd s pravdepodobnostnou funkciou

$$p_N(n) = \begin{cases} P(N = n) & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & n \neq 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.8)$$

Distribučnú funkciu celkovej škody, ako situácie, že celková škoda bude menšia nanajvýš rovná hodnote x , pričom nastane práve n poistných udalostí môžeme vzhľadom na disjunktnosť jednotlivých udalostí a využitím vety o násobení podmienených pravdepodobností túto úvahu zapísať takto:

$$\begin{aligned} F_{S^{kol}}(x) &= P(S^{kol} \leq x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S^{kol} \leq x \wedge N = n) \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S^{kol} \leq x / N = n) \cdot P(N = n) \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pretože

$$P(S^{kol} \leq x / N = n) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) = F_X^{*n}(x)$$

môžeme distribučnú funkciu rozdelenia celkovej škody vyjadriť vzťahom

$$F_{S^{kol}}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot F_X^{*n}(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

kde F_X^{*n} je n -tá konvolúcia rozdelenia, pričom nultá konvolúcia $F_{X_i}^{*0}(x) = 1$ pre $x \geq 0$

V prípade diskrétného rozdelenia celkovej škody môžeme vyjadriť prepojenie medzi pravdepodobnostnou a distribučnou funkciou celkovej škody

$$p_{S^{kol}}(x) = F_{S^{kol}}(x) - F_{S^{kol}}(x - 1) \quad (3.11)$$

3.1.3 Momentová vytvárajúca funkcia S^{kol}

Momentová vytvárajúca funkcia je pre náhodnú veličinu X definovaná ako stredná hodnota funkcie e^{zX} , kde z je pomocný parameter. Pre diskrétnu náhodnú veličinu je potom momentová vytvárajúca funkcia definovaná ako

$$m_X(z) = \sum_{x \in H} e^{zX} p(x) \quad (3.12)$$

kde $p(x)$ je pravdepodobnostná funkcia veličiny X .

Pre spojitú náhodnú veličinu X potom momentovú vytvárajúcu funkciu definujeme ako

$$m_X(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zX} f(x) dx \quad (3.13)$$

kde $f(x)$ je hustota pravdepodobnosti X .

Môžeme odvodiť **momentovú vytvárajúcu funkciu** pre rozdelenie celkovej škody $m_{S^{kol}}(z)$, ktorá je definovaná ako stredná hodnota funkcie $e^{z \cdot S^{kol}}$:

$$m_{S^{kol}}(z) = E\left(e^{z \cdot S^{kol}}\right) \quad (3.14)$$

Použitím vzťahu 3.1 môžeme náhodnú premennú S^{kol} vyjadriť ako súčet individuálnych škôd

$$m_{S^{kol}}(z) = E\left(E(e^{zX_1} e^{zX_2} \dots e^{zX_N})\right) = E((m_X(z))^N) = E\left(e^{\ln(m_X(z))^N}\right) \quad (3.15)$$

čo upravíme na konečný tvar funkcie

$$m_{S^{kol}}(z) = m_N(\ln m_X(z)) \quad (3.16)$$

3.2 Základné charakteristiky celkovej škody S^{kol}

V tejto časti objasníme výpočet základných charakteristík celkovej škody: strednej hodnoty a disperzie. Keďže existuje viac spôsobov výpočtu týchto charakteristík, uvedieme si ich výpočet tromi spôsobmi: pomocou pravdepodobnostnej, distribučnej a momentovej vytvárajúcej funkcie.

Začiatkový moment k -teho rádu $v_k(S^{kol})$ je definovaný ako stredná hodnota náhodnej premennej X^k a vypočítame ho ako k -tu deriváciu momentovej vytvárajúcej funkcie v bode $z = 0$.

Aplikovaním na našu situáciu sa stredná hodnota celkovej škody $E(S^{kol})$ vypočíta ako prvá derivácia momentovej vytvárajúcej funkcie $m_{S^{kol}}(z)$, keď parameter $z = 0$

$$v_1(S^{kol}) = \frac{d}{dz} m_{S^{kol}}(z)|_{z=0} = E(S^{kol}) \quad (3.17)$$

Disperziu, teda centrálny moment druhého rádu vypočítame ako rozdiel začiatkového momentu druhého rádu a druhej mocniny začiatkového momentu prvého rádu:

$$\mu_2(S^{kol}) = v_2(S^{kol}) - v_1^2(S^{kol}) = D(S^{kol}) \quad (3.18)$$

Tieto vzťahy môžeme odvodiť aj na základe **vlastností strednej hodnoty a disperzie**. Výpočet momentov náhodnej premennej S^{kol} je založený na podmienenej pravdepodobnosti dvoch náhodných premenných, pre ktoré momenty existujú. V takom prípade pre náhodné premenné V a Z platí

$$E(V) = E(E(V/Z))$$

$$D(V) = E(D(V/Z)) + D(E(V/Z))$$

Vzhľadom na to, že celková škoda je závislá od počtu škôd, ktoré sú opísané náhodnou premennou N , platí

$$E(S^{kol}) = E(E(S^{kol}/N))$$

pričom na základe vlastností strednej hodnoty môžeme napísať

$$E(S^{kol}/N=n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n \cdot v_1(X)$$

A keďže posledný vzťah platí pre $n = 0, 1, 2, \dots$, môžeme napísať

$$E(E(S^{kol}/N)) = E(N \cdot v_1(X)) = E(N) \cdot E(X)$$

Tým sme dokázali, že

$$E(S^{kol}) = E(N) \cdot E(X) \quad (3.19)$$

Na výpočet disperzie použijeme obdobné úvahy.

$$D(S^{kol} / N = n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n \cdot (v_2(X) - v_1^2(X))$$

A potom pre $n = 0, 1, 2, \dots$, platí

$$D(S^{kol} / N) = N \cdot (v_2(X) - v_1^2(X))$$

Na základe čoho dostaneme

$$D(S^{kol}) = E\left(N \cdot (v_2(X) - v_1^2(X))\right) + D(N \cdot v_1(X))$$

Čo môžeme upraviť na konečný tvar disperzie celkovej škody

$$D(S^{kol}) = E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) \quad (3.20)$$

Pre výpočet strednej hodnoty a disperzie S^{kol} využitím **pravdepodobnostnej funkcie** použijeme všeobecný vzorec pre strednú hodnotu $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x)$ a aplikujme ho na výpočet strednej hodnoty celkovej škody:

$$E(S^{kol}) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_{S^{kol}}(x) \quad (3.21)$$

Rovnako aplikujeme známy vzorec pre rozptyl na rozdelenie celkovej škody:

$$D(S^{kol}) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p_{S^{kol}}(x) - \left(\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_{S^{kol}}(x)\right)^2 \quad (3.22)$$

Charakteristiky náhodnej premennej S^{kol} využitím **distribučnej funkcie** vypočítame pomocou funkcie hustoty, teda jej prvej derivácie

$$E(S^{kol}) = \int_0^{\infty} x \cdot f_{S^{kol}}(x) dx \quad (3.23)$$

$$D(S^{kol}) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot f_{S^{kol}}(x) dx - \left(\int_0^{\infty} x \cdot f_{S^{kol}}(x) dx\right)^2 \quad (3.24)$$

Zhrnutie výpočtov strednej hodnoty a disperzie

Charakteristiky Spôsob výpočtu pomocou	$E(S^{kol})$	$D(S^{kol})$
Charakteristik: priamy vzťah	$E(N) \cdot E(X)$	$E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N)$
Momentovej vytvárajúcej funkcie: $m_{S^{kol}}(z)$	$\frac{d}{dz} m_{S^{kol}}(z) _{z=0}$	$v_2(S^{kol}) - v_1^2(S^{kol})$
Zákonov rozdeľovania: $p_{S^{kol}}(x)$	$\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_{S^{kol}}(x)$	$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot p_{S^{kol}}(x) - \left(\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_{S^{kol}}(x) \right)^2$
$f_{S^{kol}}(x)$	$\int_0^{\infty} x \cdot f_{S^{kol}}(x) dx$	$\int_0^{\infty} x^2 \cdot f_{S^{kol}}(x) dx - \left(\int_0^{\infty} x \cdot f_{S^{kol}}(x) dx \right)^2$

Tab. 3.1: Spôsoby výpočtu strednej hodnoty a disperzie náhodnej premennej S^{kol}

3.3 Miery rizika náhodnej premennej S^{kol}

Kvantily sú hodnoty náhodnej premennej, ktoré delia interval hodnôt, ktoré náhodná premenná nadobúda na α rovnako pravdepodobných častí s pravdepodobnosťou α^{-1} . k -ty kvantil spojitej náhodnej premennej je hodnota spojitej premennej, pri ktorej distribučná funkcia dosahuje veľkosť k/α :

$$P(X \leq x_r) = F(X \leq x_r) = \int_{-\infty}^{x_r} f(x) dx = \frac{k}{\alpha}$$

Najznámejší kvantil náhodnej premennej, 50-ty percentil, je už spomínaná stredná hodnota. A práve hodnota kvantilov súvisí s niektorými mierami rizika.

3.3.1 Value at Risk

„Metóda *VaR* je založená na odhadnutí štatistického rozdelenia možných ziskov, resp. strát súčasného portfólia. Následne sa z tohto rozdelenia vyberie kvantil na požadovanej hranici spoľahlivosti a táto hodnota predstavuje stratu, ktorú s určitou pravdepodobnosťou a v určitom čase portfólio nepresiahne.“⁷

⁷ Národná banka Slovenska, Prílohy k analýze slovenského finančného sektora za rok 2013

http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Dohlad/ORM/Analzy/protected/AnalzyaSFS2013_p.pdf

My týmto názvom budeme označovať dve hodnoty: maximálnu možnú stratu a maximálnu možnú škodu.

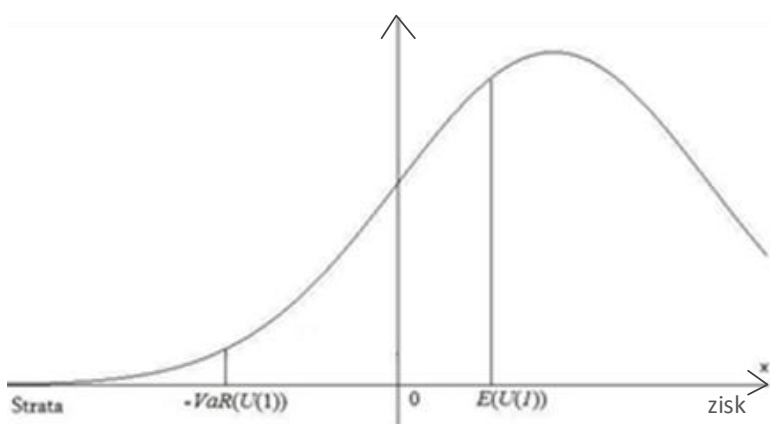
Maximálna možná strata, ktorú budeme označovať ako $VaR_{\varepsilon}^{abs}(U(1))$, je najvyššia hodnota poistných plnení, ktoré bude poisťovňa ešte schopná splácať. Táto udalosť môže nastať s pravdepodobnosťou ε v určitom časovom horizonte. Smernica Solvency II vo svojich kvantitatívnych požiadavkách stanovila túto pravdepodobnosť na 99,5%.

Túto skutočnosť matematicky popíšeme

$$P(U_1 \leq -VaR_{\varepsilon}(U_1)) = \varepsilon \quad (3.25)$$

kde U_1 je prebytok poisťovne v čase 1.

Situáciu zobrazuje Obr. 3.1.



Obr. 3.1 – maximálna možná strata, $VaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1) > 0$. Vlastné spracovanie.

Ako druhú hodnotu *Value at Risk* uvedieme $VaR_p^{abs}(S^{kol})$. Môžeme ju definovať ako najvyššiu možnú škodu, ktorá môže nastať s konkrétnou pravdepodobnosťou počas časového horizontu p . Je odvodená na základe úvahy, že pravdepodobnosť, že škoda bude nadobúdať hodnoty menšie nanajvýš rovné ako vopred stanovená hladina maximálnej škody bola rovná p . Keďže nepoznáme rozdelenie U_1 , na vyjadrenie hodnoty $VaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1)$ použijeme rozdelenie celkovej škody $VaR_p^{abs}(S^{kol})$.

Prebytok v jednom období charakterizujeme vzťahom

$$U_1 = U_0 + RP - S^{kol} \quad (3.26)$$

Vzťah (3.26) dosadíme do (3.25)

$$P(U_0 + RP - S^{kol} \leq -VaR_{\varepsilon}^{abs}) = \varepsilon \quad (3.27)$$

kde U_0 je prebytok na začiatku obdobia a RP je rizikové poistné, ktoré sa stanoví ako netto poistné navýšené o rizikovú prirážku.

Následne vykonáme matematické úpravy

$$P(S^{kol} \leq U_0 + RP + VaR_\varepsilon(U_1)) = 1 - \varepsilon$$

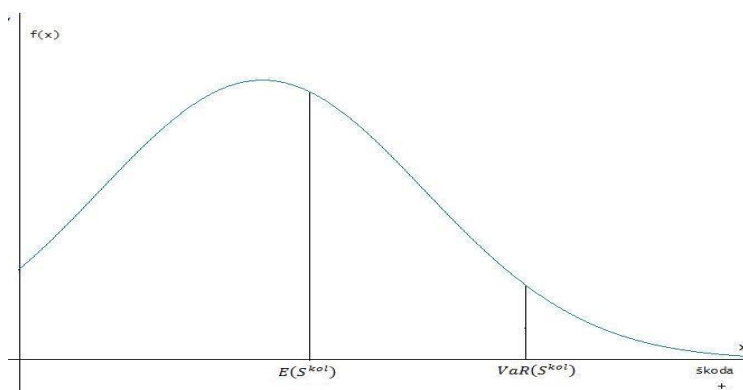
$$F_{S^{kol}}(U_0 + RP + VaR_\varepsilon(U_1)) = p \quad (3.28)$$

$$U_0 + RP + VaR_\varepsilon(U_1) = x_p \quad (3.29)$$

kde x_p je kvantil rozdelenia celkovej škody, $VaR_p(S^{kol})$ a $p = 1 - \varepsilon$.

Vzťah (3.29) vyjadruje vzťah medzi kvantilom náhodnej premennej U_1 a kvantilom náhodnej premennej S^{kol} .⁸

Grafické znázornenie hodnoty $VaR_p(S^{kol})$ vidíme na obrázku 3.2.



Obr. 3.2 – maximálna možná škoda $VaR_p(S^{kol})$. Vlastné spracovanie.

Napriek tomu, že hodnota Value at Risk je v praxi často využívaná, v konkrétnych situáciách nemusí byť vždy postačujúca. Jedná sa hlavne o riziká, ktoré sú stochasticky určené rozdeleniami s ťažkým koncom. Túto situáciu rieši hodnota *Conditional Value at Risk*, ktorá vyžaduje vytvorenie vyšších rezerv a z toho vyplývajúce zníženie rizika.

3.3.2 Conditional Value at Risk

Poist'ovacie spoločnosti sa snažia vyhnúť situácii, v ktorej by ich rezervy nepostačovali na krytie prevzatých záväzkov. Stále sa zvyšujúci záujem o využívanie hodnoty VaR podnietil vznik novej miere rizika, podmienenej strednej hodnoty chvostov rozdelení, $CVaR$. Túto hodnotu nazývame *Conditional Value at Risk* alebo tiež *Tail VaR*, v preklade podmienená hodnota v riziku.

Predstavuje očakávanú škodu, ktorá môže byť spôsobená všetkými škodami presahujúcich hodnotu VaR v danom časovom období. Inými slovami, hodnota $CVaR$ je stredná hodnota všetkých možných hodnôt vyšších ako VaR .

Výšku kvantilu $CVaR_p(S^{kol})$ môžeme za predpokladu poznania hodnoty $VaR_p(S^{kol})$

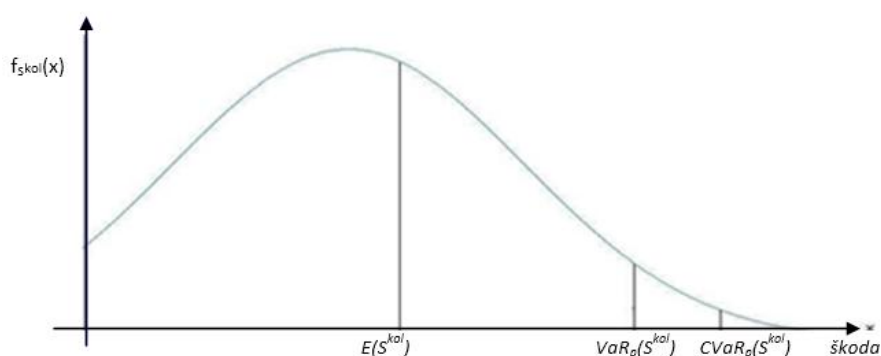
⁸ Prednášky z predmetu Teória rizika 1

najjednoduchšie určiť napríklad pre spojitú náhodnú premennú takto:

$$CVaR_p(S^{kol}) = E(S^{kol} / S^{kol} > x_p) = \frac{\int_{x_p}^{\infty} x \cdot f_{S^{kol}}(x) dx}{P(S^{kol} > x_p)} \quad (3.30)$$

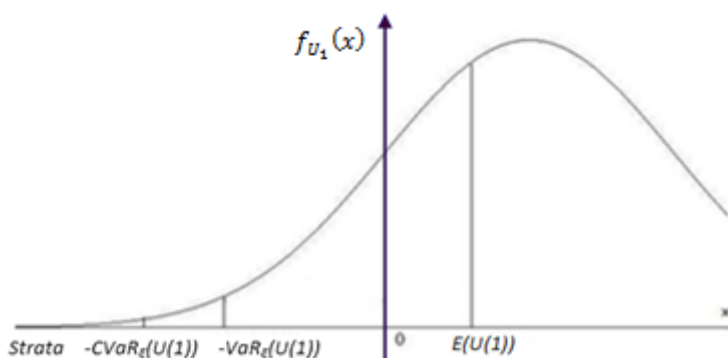
pričom vzťah $E(S^{kol} / S^{kol} > x_p)$ je stredná hodnota všetkých hodnôt, ktoré presahujú kvantil x_p , vzťah $P(S^{kol} > x_p)$ znamená pravdepodobnosť, že náhodná premenná S^{kol} bude vyššia ako hodnota kvantilu x_p , teda $P(S^{kol} > x_p) = 1 - p$

Vzťah medzi hodnotami $VaR_p^{abs}(S^{kol})$ a $CVaR_p^{abs}(S^{kol})$ je zrejmý z obrázku 3.3.



Obr. 3.3 – hodnota $VaR_p^{abs}(S^{kol})$ a hodnota $CVaR_p^{abs}(S^{kol})$. Vlastné spracovanie.

Analogický vzťah medzi hodnotami $VaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1)$ a $CVaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1)$ vidíme na obr. 3.4.



Obr. 3.4 – hodnota $CVaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1)$ a hodnota $VaR_{\varepsilon}^{abs}(U_1)$. Vlastné spracovanie.

Ďalšou mierou rizika, ktorú potrebujeme pri optimalizácii, je pravdepodobnosť krachu.

4 TEÓRIA KRACHU

Teória krachu sa zaoberá štúdiom stochastických procesov, ktoré reprezentujú vývoj prebytku poisťovateľa v čase. Prvý cieľ raných výskumníkov v tomto odbore, Lundberga (1903) a Craméra (1930) bol určiť pravdepodobnosť, že prebytok nadobudne záporné hodnoty. V týchto prácach autori vysvetľujú, že pravdepodobnosť krachu $\Psi(U_0)$ v mnohých prípadoch klesá k nule exponenciálne za predpokladu začiatkovej rezervy $U_0 > 0$. Ak poisťovateľ dostáva poistné c v čase t a vypláca poistné plnenia odhadnuté pomocou zloženého Poissonovho procesu, môžeme vyjadriť hornú hranicu pravdepodobnosti krachu $\Psi(U_0) \leq e^{-RU}$. Tento výsledok platí pre vývoj škôd opísateľný pravdepodobnostnými rozdeleniami s ľahkým koncom, tzn. keď pravdepodobnosť veľkých škôd klesá dostatočne rýchlo. Táto podmienka je splnená, ak sú poistné plnenia ohraničené, čo je často skutočnosťou v praxi.

Pravdepodobnosť krachu možno odhadnúť v diskretnom aj v spojitom čase. V tejto práci sa zameriame na odhad prebytku v spojitom čase.

Pre zovšeobecnenie kolektívneho modelu rizika v spojitom čase definujeme niektoré pojmy a označenia.

Prebytok poisťovne na konci časového úseku $(0, t)$, ktorý označujeme $U(U_0; t)$ definujeme ako hodnotu počiatočných rezerv, zvýšených o prijaté poistné v danom období $(0, t)$, ktoré sú znížené o poistné plnenie v tomto období.

Krach je situácia, keď kedykoľvek v čase $t > 0$ nadobudne prebytok nulovú hodnotu, resp. klesne do záporných hodnôt, teda $U(U_0; t) \leq 0$, pre $t > 0$

T_{U_0} definujeme ako čas krachu v závislosti od počiatočného kapitálu, ktorý je definovaný ako $T_{U_0} = \min\{t > 0: U(U_0; t) \leq 0\}$

N_t je počet poistných udalostí, ktoré nastanú v časovom intervale $(0, t)$

S_t je definovaná ako výška celkového poistného plnenia v časovom intervale $(0, t)$, teda súčet všetkých individuálnych poistných plnení X_i pre $i = 1, 2, 3 \dots$ v období $(0, t)$

$$S_t = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad (4.1)$$

Stochastický proces $\{N_t : t \geq 0\}$, $(\{X_t : t \geq 0\}, \{S_t : t \geq 0\})$ je množina náhodných premenných indexovaných premenou veličinou t (závislých od premennej veličiny t), ktorá v našom prípade predstavuje čas t .

Z uvedeného vyplýva, že pre dané počiatočné rezervy U_0 a pravdepodobnosť krachu v čase $t = 1$ je prebytok poisťovne

$$U(U_0; 1) = U_0 + RP_1 - S_1 \quad (4.2)$$

čo odpovedá vzťahu (3.26), teda $S^{kol} = S_1$. Pravdepodobnosť krachu v čase $t = 1$ budeme označovať

$$\Psi(U_0; 1) = P(U(U_0; 1) \leq 0) \quad (4.3)$$

4.1 Pravdepodobnosť krachu v spojitom čase pre dlhšie časové periódy

V tejto časti sa oboznámime s teóriou krachu v spojitom čase. Znamená to, že poisťovňa prijíma poisťné neustále a poisťné plnenie môže nastať v ktoromkoľvek okamihu. Vysvetlíme zložený Poissonov proces, pomocou ktorého budeme modelovať maximálnu možnú škodu pre rôzne dlhé obdobia, definujeme Lundbergovu nerovnosť, pomocou ktorej odhadneme pravdepodobnosť krachu vo vzdialenom horizonte a v poslednej časti kapitoly objasníme dva spôsoby aproximácie.

4.1.1 Zložený Poissonov proces

Aby sme mohli vyjadriť zložený Poissonov proces, musíme najprv definovať načítací proces. Označme $\{N_t\}_{t \geq 0}$ ako **načítací proces** počtu škôd, pričom pre fixnú hodnotu $t > 0$ náhodná premenná N_t popisuje počet poisťných udalostí v časovom intervale $(0; t)$. V klasickom procese rizika je to náhodná premenná s Poissonovým rozdelením a načítací proces sa nazýva Poissonov proces.

Načítací Poissonov proces $\{N_t\}_{t \geq 0}$ je proces s intenzitou λ , $\lambda > 0$, ktorý reprezentuje celkový počet udalostí, ktoré sa vyskytnú do času t . Tento proces nazývame nepodmienený, lebo všetky prírastky časov sú nezávislé s exponenciálnym rozdelením.

Exponenciálne rozdelenie vyjadruje pravdepodobnosť dĺžky intervalu medzi dvomi poisťnými udalosťami $T_1 \sim E(t)$. Poissonovo rozdelenie vyjadruje pravdepodobnosť výskytu určitého

počtu poistných udalostí za jednotku času, $P(N_t = n)$. Tieto dve rozdelenia teda spolu úzko súvisia. Súvis medzi nimi odvodíme na základe nasledujúcej úvahy.

Majme distribučnú funkciu exponenciálneho rozdelenia

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad x > 0 \quad (4.4)$$

ktorá vyjadruje pravdepodobnosť nastania poistnej udalosti do času t .

Majme poistné obdobie ako interval $(0; 1)$. V tomto období nastane v priemere λ poistných udalostí. Nech pravdepodobnostná funkcia $p(n)$ vyjadruje pravdepodobnosť nastania n poistných udalostí za poistné obdobie. Potom pravdepodobnosť, že nenastane poistná udalosť v poistnom období bude

$$p(0) = 1 - \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_1^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = -[e^{-\lambda t}]_1^\infty = e^{-\lambda} \quad (4.5)$$

Ak nastane práve jedna poistná udalosť a nastane v čase s , kde $0 < s \leq 1$, znamená to, že do konca poistného obdobia $(0; 1)$ už nenastane žiadna poistná udalosť. Keďže exponenciálne rozdelenie je rozdelenie bez pamäti, môžeme situáciu vyjadriť tak, že v intervale $(0; 1 - s)$ nenastane poistná udalosť. Potom

$$p(1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda s} \left(\int_{1-s}^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \right) ds = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(1-s)} ds = \lambda e^{-\lambda} \quad (4.6)$$

Keď chceme, aby nastala prvá udalosť v čase y a druhá v čase $s + y$, kde $s + y \leq 1$, potom nemôže nastať udalosť v intervale $(s + y; 1)$, čo zapíšeme:

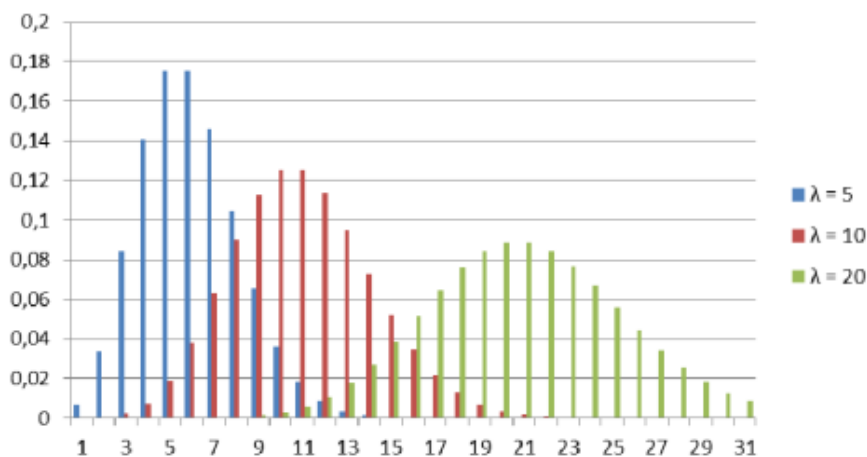
$$\begin{aligned} p(2) &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y} \left(\int_0^{1-y} \lambda e^{-\lambda s} \left(\int_{1-s-y}^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \right) ds \right) dy \\ &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y} \left(\int_0^{1-y} \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(1-s-y)} ds \right) dy \\ &= \int_0^1 \lambda^2 e^{-\lambda} (1 - y) dy = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hore uvedené výpočty môžeme zovšeobecniť a dostaneme

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (4.8)$$

čo je pravdepodobnostná funkcia Poissonovho rozdelenia.⁹

⁹ <http://stats.stackexchange.com/questions/2092/relationship-between-poisson-and-exponential-distribution>



Obr. 4.1: Graf Poissonovho rozdelenia pre uvedené parametre λ^{10}

Použijme Poissonovo rozdelenie, ktoré opisuje počet škôd za jedno časové obdobie na vysvetlenie Poissonovho procesu v čase t . Náhodná premenná počtu poistných udalostí do času t , N_t je opísaná Poissonovým procesom, teda má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda \cdot t$

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (4.9)$$

Pre odhadnutie kapitálu potrebného na krytie škôd potrebujeme zistiť pravdepodobnosť, že počet škôd do času t nepresiahne vopred stanovenú hodnotu. Tá bude ekvivalentná pravdepodobnosti, že súčet časových období do nastania n udalostí prevýši stanovenú hodnotu.

Túto pravdepodobnosť preto môžeme vypočítať vzhľadom na úvahy o čase a počte udalostí dvomi spôsobmi. Zo vzťahu (4.9) vyjadríme pravdepodobnosť, že počet udalostí do času t nepresiahne hodnotu n . Je to distribučná funkcia **Poissonovho rozdelenia** pre počet škôd

$$P(N_t \leq n) = F_{N_t}(n) = p_{N_t}(0) + p_{N_t}(1) + \dots + p_{N_t}(n) = \sum_{i=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \quad (4.10)$$

Exponenciálne rozdelenie je špeciálny prípad Gamma rozdelenia, v ktorom $n = 1$. Teda konvolúcia m identických exponenciálnych rozdelení $X_i \sim E(\lambda)$ je Gamma rozdelenie $X \sim \Gamma(n; \lambda)$, $(X = X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

¹⁰ Zdroj:

http://www.boost.org/doc/libs/1_38_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/dist/dist_ref/dists/poisson_dist.html

Takže pravdepodobnosť, že čas do nastania n udalostí bude vyšší ako hodnota t je funkcia
Gamma rozdelenia

$$P(T_n > t) = 1 - \int_0^t f_{T_n}(t) dx = 1 - \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \quad (4.11)$$

pričom z predchádzajúcich vzťahov vyplýva, že

$$P(N_t \leq n) = P(T_n > t) \quad (4.12)$$

Poissonov proces má teda nasledujúce vlastnosti:

- $N_t \geq 0$, $N_0 = 0$
- nadobúda len nezáporné celočíselné hodnoty
- je neklesajúci

Pre $v < t$ kvantita $N_t - N_v$ reprezentuje počet udalostí, ktoré sa vyskytnú v intervale (v, t) . Tento počet nezávisí od počtu poistných plnení pred začiatkom tohto intervalu.

- Proces má nezávislé a stacionárne prírastky
- $P(N_{t+h} = r / N_t = r) = 1 - \lambda h + o(h)$
 $P(N_{t+h} = r + 1 / N_t = r) = \lambda h + o(h)$
 $P(N_{t+h} > r + 1 / N_t = r) = o(h)$
 $P(N_{t+h} = r + 1 / N_t > r) = o(h)$

pričom $o(h)$ je funkcia, pre ktorú platí:

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$$

Poissonov proces počtu poistných plnení $\{N_t\}_{t \geq 0}$ budeme následne skladať, podobne ako pri zloženom Poissonovom rozdelení, s rozdelením výšky poistných plnení a dostaneme **zložený Poissonov proces** s parametrom λt celkových poistných plnení v dlhšom časovom období. Nech sú splnené tieto predpoklady:

- individuálne poistné plnenia tvoria postupnosť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislých a identicky rozdelených náhodných premenných
- náhodné premenné $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú nezávislé od počtu plnení N_t pre ľubovoľné $t \geq 0$.

Pre pochopenie zloženého Poissonovho procesu vyjadríme najskôr napríklad distribučnú funkciu zloženého Poissonovho rozdelenia $CoPo(\lambda; F_X(x) = 1 - e^{-\delta x})$ a to pomocou n -tej konvolúcie výšky škody $F_X(x)$ vzťahom

$$F_{Skol}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot F_X^{*n}(x) \quad x \geq 0 \quad (4.13)$$

Pretože platí, že $Y = X_1 + \dots + X_n$, $X_i \sim E(\delta) \Rightarrow Y \sim \Gamma(n, \delta)$, hustota funkcie $f_Y(x)$ je potom $f_Y(x) = f_X^{*n}(x)$. Konvolúcia identických exponenciálnych rozdelení je Gamma rozdelenie

$$f_X^{*n}(x) = \frac{\delta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\delta x}, \quad x > 0$$

Integrovaním súčinu per partes dostaneme

$$\begin{aligned} F_Y(x) = F_X^{*n}(x) &= \int_0^x \frac{\delta^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\delta t} dt = 1 - \int_x^{\infty} \frac{\delta^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\delta t} dt \\ &= 1 - \left[-\frac{\delta^n}{(n-1)!} e^{-\delta t} t^{n-1} \right]_x^{\infty} \\ &\quad + \int_x^{\infty} \frac{\delta^n}{(n-1)!} \cdot (n-1) t^{n-2} \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} dt \\ &= 1 - \frac{\delta^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\delta x} x^{n-1} - \int_x^{\infty} \frac{\delta^{n-1}}{(n-2)!} \cdot t^{n-2} e^{-\delta t} dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

Opakovaným použitím metódy per partes dostaneme¹¹

$$F_X^{*n}(x) = 1 - e^{-\delta x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \cdot \delta^i}{i!} \quad (4.15)$$

a preto zložené Poissonovo rozdelenie $CoPo(\lambda; F_X(x) = 1 - e^{-\delta x})$ má distribučnú funkciu, ktorú vyjadríme vzt'ahom

$$F_{Skol}(x) = 1 - e^{-\delta x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \cdot \delta^i}{i!} \quad x \geq 0 \quad (4.16)$$

Na základe uvedeného môžeme zovšeobecniť vyjadrenie zloženého Poissonovho procesu $\{S_t\}_{t \geq 0}$. Pre fixnú hodnotu $t \geq 0$ má S_t zložené Poissonovo rozdelenie s parametrom λt . Funkcia celkového poistného plnenia za určitý čas t bude vyjadrená ako

$$F_{S_t}(x) = P(S_t \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_X^{*n}(x) \quad x > 0 \quad (4.17)$$

Zovšeobecnením údajov v Tab. 4.1 dostaneme charakteristiky zloženého Poissonovho procesu

¹¹ Horáková, G., Mucha, V.: Teória rizika. Bratislava : Ekonóm, 2010, s. 62

$$E(S_t) = \lambda t v_1(X) \quad (4.18)$$

$$D(S_t) = \lambda t v_2(X) \quad (4.19)$$

$$M_{S_t}(z) = e^{\lambda t (M_X(z) - 1)} \quad (4.20)$$

Distribučná funkcia zloženého Poissonovho rozdelenia do času t , v ktorom náhodná premenná výšky škôd má exponenciálne rozdelenie $X \sim E(\delta)$ potom vyjadríme ako

$$F_{S_t}(x) = 1 - e^{-\delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \cdot \delta^i}{i!} \quad x > 0 \quad (4.21)$$

Distribučná funkcia Poissonovho procesu	$\sum_{i=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$
Distribučná funkcia zloženého Poissonovho rozdelenia, $X \sim E(\delta)$	$1 - e^{-\delta x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \cdot \delta^i}{i!} \quad x > 0$
Distribučná funkcia zloženého Poissonovho rozdelenia do času t , $X \sim E(\delta)$	$1 - e^{-\delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \cdot \delta^i}{i!} \quad x > 0$

Tab. 4.1: Distribučné funkcie Poissonovho: procesu, zloženého rozdelenia a zloženého rozdelenia do času t , v prípade, že individuálna škoda má exponenciálny zákon rozdelenia.

4.1.2 Proces prebytku (surplus process)

Prebytok poisťovateľa, ako jeden zo základných pojmov teórie krachu je určený tromi veličinami:

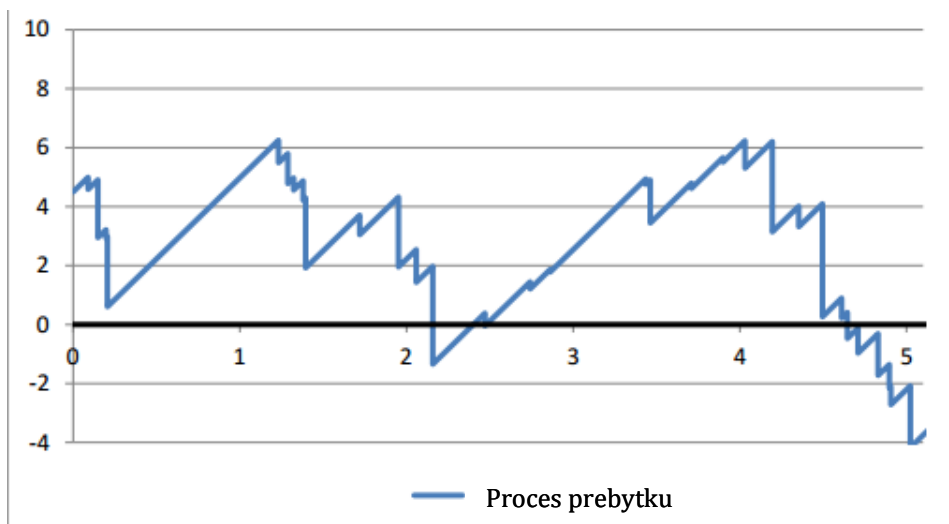
- hodnotou prebytku v čase 0,
- hodnotou poistných plnení vyplatených do času t ,
- hodnotou prijatého poistného do času t .

Proces prebytku $\{U(U_0; t)\}_{t \geq 0}$ vyjadríme nasledujúcim vzťahom

$$U(U_0; t) = U_0 + c \cdot t - S_t, \quad t \geq 0 \quad (4.22)$$

kde

- U_0 je hodnota počiatočnej rezervy,
- S_t je celková výška škody do času t ,
- c je konštantná intenzita prijímaného poistného v čase, teda $c \cdot t$ je celkové prijaté poistné do času t .



Obr. 4.2: Graf procesu prebytku¹²

Pri určovaní procesu prebytku budeme uvažovať s niektorými zjednodušujúcimi predpokladmi:

- Neuvažuje sa úrok z možného kladného prebytku poisťovne,
- všetky poisťné plnenia sú vyplatené okamžite po vzniku nároku,
- neuvažujeme ďalšie náklady spojené s procesom poisťovania,
- neuvažujeme zaistenie.

Pravdepodobnosť, že prebytok klesne do záporných hodnôt potom vyjadríme ako

$$P(U_0 + c \cdot t - S_t < 0) = \Psi(U_0; t) \quad (4.23)$$

Z čoho vyjadríme distribučnú funkciu celkovej škody do času t :

$$\begin{aligned} 1 - P(S_t \leq U_0 + c \cdot t) &= \Psi(U_0; t) \\ 1 - F_{S_t}(U_0 + c \cdot t) &= \Psi(U_0; t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dosadením (4.24) do vzťahu (4.21) vyjadríme pravdepodobnosť krachu do času t

$$\Psi(U_0; t) = e^{-\delta(U_0 + c \cdot t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^n}{n!} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(U_0 + c \cdot t)^i \cdot \delta^i}{i!} \quad (4.25)$$

Vzťah vyjadruje pravdepodobnosť krachu pre rezervy U_0 v konečnom časovom horizonte.

Na otázku, ako sa vyvíja pravdepodobnosť krachu vo vzdialenom horizonte uvádzame odpoveď v nasledujúcej kapitole.

¹² Wuthrich, M. V., From Ruin Theory to Solvency in Non-Life Insurance, 2013

http://www.math.ethz.ch/~wueth/Papers/2013_Ruin_Theory.pdf

4.2 Lundbergova nerovnosť

Predpokladajme klasický proces rezerv v čase t , teda $U(U_0; t) = U_0 + ct - S_t$, pričom celková škoda $S_t \sim CoPo(\lambda \cdot t, F_X(x))$ sa riadi zloženým Poissonovým rozdelením, pričom intenzita prijatého poistného je väčšia ako stredná hodnota očakávanej škody. Potom pre pravdepodobnosť krachu v nekonečnom časovom horizonte platí

$$\Psi(U_0) \leq e^{-RU_0} \quad (4.26)$$

kde R je jediné kladné riešenie vzťahu

$$c \cdot R = \lambda(m_X(R) - 1) \quad (4.27)$$

ktorý sa nazýva koeficient korekcie.

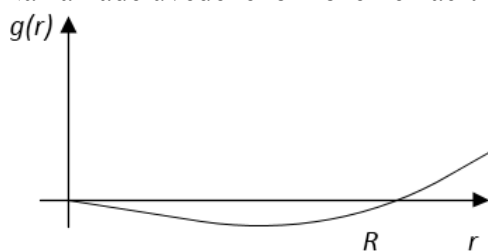
„Koeficient korekcie R popisuje mieru rizika pre proces prebytku. Ten je závislý od dvoch faktorov a to od celkovej škody a od prijatého poistného. Ak agregované poistné plnenie reprezentuje Poissonov proces, koeficient korekcie bude definovaný na základe Poissonovho parametra, momentovej vytvárajúcej funkcie individuálnych poistných plnení a výšky prijatého poistného pre jednotku času.“¹³ V klasickom procese rizika je koeficient R definovaný ako jediné kladné koreň rovnice

$$m_X(R) - 1 = R \cdot E(X) \cdot (1 + \theta) \quad (4.28)$$

Vlastnosti funkcie $g(r)$:

- $g(0) = 0$
- $g'(r) = \lambda \cdot m'_X(r) - c$
- $g'(0) = \lambda \cdot v_1(X) - c$, z predpokladu $c > \lambda \cdot v_1(X)$ vyplýva, že funkcia je v okolí bodu nula klesajúca
- $g''(r) = \lambda \cdot m''_X(r) = \lambda \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-rx} \cdot f_X(x) > 0$, funkcia $g(r)$ je konvexná, $r > 0$

Na základe uvedeného môžeme načrtnúť graf funkcie $g(r)$



Obr. 4.3: Graf funkcie $g(r)$. Vlastné spracovanie.

¹³ Horáková, G., Mucha, V., Teória rizika II. Bratislava: Ekonóm, 2008, s.56.

Vzťah (4.28) nemá vo väčšine prípadov explicitné riešenie. Z obr. 4.3 vidíme, že funkcia $g(r)$ je kladná pre niektorú z hodnôt $r > 0$, z čoho vyplýva, že $R < r$. Ak je záporná pre niektorú z hodnôt, $R > r$. Na základe tejto skutočnosti môžeme koeficient R určiť v rozmedzí horného a dolného ohraničenia.

Explicitné riešenie je možné, ak sa výška individuálnej škody riadi napríklad exponenciálnym rozdelením.

Koeficient korekcie, ak výška individuálnej škody sa riadi exponenciálnym rozdelením

Využitím vzťahov v tretej kapitole môžeme vyjadriť strednú hodnotu a momentovú vytvárajúcu funkciu exponenciálneho rozdelenia ako

$$E(X) = \frac{1}{\delta}$$

$$m_X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta}z}$$

Tieto vzťahy môžeme následne dosadiť do (4.27)

$$\frac{\delta}{\delta - R} - 1 = \frac{1}{\delta}(1 + \theta) \cdot R$$

z čoho osamostatníme koeficient korekcie R

$$R = \frac{\delta\theta}{1 + \theta} \quad (4.29)$$

V prípade, že explicitný výpočet koeficienta R nie je možný, môžeme ho odhadnúť ohraničením zhora alebo zdola, alebo aproximáciou rozvojom do Taylorovho radu.

Odhad hodnoty koeficienta R využitím rozvoja funkcie do Taylorovho radu

„Pre funkcie nekonečne veľa krát diferencovateľné v bode a , môžeme zaviesť nekonečný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n$$

kde $f^n(a)$ je n -tá derivácia funkcie v bode a .

Tento rad sa nazýva Taylorov rad funkcie f a bode a . Je to špeciálny typ funkcionálneho radu, ktorého členmi sú mocninové funkcie, t.j. ide o špeciálny typ tzv. mocninových radov.¹⁴ Tento rozvoj aplikujeme na funkciu $\ln m_X(z)$.

¹⁴ Mojsej, I. Matematická analýza 1 pre informatikov a fyzikov. Košice, 2012

http://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN3a/moc_rady.pdf

Znovu použijeme vzťah (4.27)

$$\begin{aligned}c \cdot r + \lambda &= \lambda \cdot m_X(r) \\(1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E(X) \cdot r + \lambda &= \lambda \cdot m_X(r) \\(1 + \theta) \cdot E(X) \cdot r + 1 &= m_X(r)\end{aligned}$$

Pričom logaritmus pravej a ľavej strany vzťahu vyjadríme rozvojom do tretieho stupňa Taylorovho radu

$$\begin{aligned}\ln m_X(r) &= \ln[(1 + \theta) \cdot E(X) \cdot r + 1] \\[\ln m_X(r)]' &= \frac{1}{(1 + \theta) \cdot E(X) \cdot r + 1} ((1 + \theta) \cdot E(X)) \\[\ln m_X(r)]'_{r=0} &= \left[\frac{1}{(1 + \theta) \cdot E(X) \cdot r + 1} ((1 + \theta) \cdot E(X)) \right]_{r=0} = (1 + \theta) E(X) \\[\ln m_X(r)]''_{r=0} &= \left[-\frac{1}{((1 + \theta) \cdot E(X) \cdot r + 1)^2} ((1 + \theta) \cdot E(X))^2 \right]_{r=0} = -((1 + \theta) E(X))^2\end{aligned}$$

Výsledné vzťahy pre prirodzené logaritmy pravej a ľavej strany je

$$\begin{aligned}\ln m_X(r) &= E(X) \cdot r - \frac{D(X) \cdot R^2}{2} \\\ln[(1 + \theta) E(X) \cdot R + 1] &= (1 + \theta) E(X) \cdot R - \frac{(1 + \theta)^2 E(X)^2}{2} \cdot R^2\end{aligned}$$

na základe ktorých po úprave vyjadríme koeficient korekcie vypočítaný na základe rozvoja do Taylorovho radu

$$R \cong \frac{2\theta E(X)}{D(X) + ((1 + \theta) E(X))^2} \quad (4.30)$$

Koeficient korekcie, vypočítaný týmto spôsobom, dosadíme do vzťahu (4.26)

$$\Psi(U_0) \leq e^{-U_0 \frac{2\theta E(X)}{D(X) + ((1 + \theta) E(X))^2}} \quad (4.31)$$

a získame odhad pravdepodobnosti krachu pre počiatočné rezervy U_0 .

Horné ohraničenie koeficienta korekcie.

Budeme vychádzať zo vzťahu (4.27). Momentovú vytvárajúcu funkciu vyjadríme ako integrál a využitím matematických úprav dostaneme rovnicu

$$c \cdot r + \lambda = \lambda \int_0^{\infty} f(x) e^{rx} dx$$

Rovnakú úvahu ako v predošlom prípade, rozvoj funkcie do Taylorovho radu môžeme využiť na funkcii e^{rx} , pričom budeme uvažovať iba prvé tri sčítance danej sumy a prijaté poistné c vyjadríme ako strednú hodnotu zvýšenú o rizikovú prirážku $\lambda E(X) \cdot (1 + \theta)$

$$\lambda E(X) \cdot (1 + \theta) \cdot R \geq \lambda \int_0^{\infty} \left(1 + Rx + \frac{R^2 x^2}{2} \right) \cdot f(x) dx - \lambda$$

Vzťah môžeme ďalej upravovať

$$E(X) \cdot (1 + \theta) \cdot R \geq \int_0^{\infty} f(x) dx + R \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx + \frac{R^2}{2} \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - 1$$

$$E(X) \cdot (1 + \theta) \cdot R \geq R \cdot E(X) + \frac{R^2}{2} E(X^2)$$

z čoho určíme výsledný vzťah pre horné ohraňenie koeficienta korekcie R

$$R \leq 2\theta \frac{v_1(X)}{v_2(X)} \quad (4.32)$$

Dolné ohraňenie koeficientu R . Nech náhodná premenná výšky poistných plnení X , nadobúda hodnoty z intervalu $(0; M)$. Dôkaz je založený na platnosti vzťahu

$$e^{x-R} \leq \frac{x}{M} e^{R-M} + 1 - \frac{x}{M}$$

z čoho môžeme vyjadriť dolné ohraňenie koeficienta, na základne obdobných úvah ako v predošlom prípade

$$R \geq \frac{\ln(1 + \theta)}{M} \quad (4.33)$$

Z uvedeného vyplýva, že interval možných hodnôt koeficientu korekcie R môžeme zapísať ako

$$\frac{\ln(1 + \theta)}{M} \leq R \leq 2\theta \frac{v_1(X)}{v_2(X)} \quad (4.34)$$

Dosadením horného a dolného ohraňenia koeficientu R do vzťahu 4.(4.1) môžeme vyjadriť pravdepodobnosť krachu

$$e^{-2\theta \frac{E(X)}{E(X^2)} U_0} \leq \Psi(U_0) \leq e^{-\frac{\ln(1+\theta)}{M} U_0} \quad (4.35)$$

Zhrňme vedomosti o výpočtoch koeficienta korekcie. V niektorých prípadoch, napr. keď sa výška škody riadi exponenciálnym alebo Gamma rozdelením, môžeme použiť pomerne jednoduchý explicitný výpočet. Ak sa výška škody riadi rozdelením, pre ktoré rovnica nemá riešenie, budeme vyberať z dvoch možností: horné a dolné ohraňenie koeficienta alebo jeho

aproximácia Taylorovým rozvojom v prípade, že jeho funkcia je opakovane diferencovateľná. Interval medzi horným a dolným ohraničením koeficienta R je spravidla veľký, preto slúži táto metóda len na hrubý odhad pravdepodobnosti krachu. Taylorov rad ponúka omnoho presnejšie výsledky, ktoré sa v porovnaní s presným výpočtom rozchádzajú až na treťom alebo štvrtom desatinnom mieste.

Nasledujúca tabuľka ukazuje rozdiely medzi uvedenými spôsobmi výpočtu koeficienta korekcie, použitím vzťahov (4.26), (4.29), (4.30) a (4.34), kde náhodná premenná výšky škôd X sa riadi exponenciálnym rozdelením $X \sim E(0,08)$ a je nastavená riziková prirážka $\theta = 0,15$.

	Dolné ohraničenie	Horné ohraničenie	Taylorov rad	Explicitný výpočet
R	0,005590478	0,012	0,010333692	0,010434783

Výpočet pravdepodobnosti krachu				
Rezervy U	Dolné ohraničenie	Horné ohraničenie	Taylorov rad	Explicitný výpočet
10	0,9456	0,8869	0,9018	0,9009
50	0,7561	0,5488	0,5965	0,5935
100	0,5718	0,3012	0,3558	0,3522
150	0,4323	0,1653	0,2122	0,209
200	0,3269	0,0907	0,1266	0,1241
250	0,2472	0,0498	0,0755	0,0736
300	0,1869	0,0273	0,045	0,0437

Tab. 4.4: Výpočet koeficienta korekcie a pravdepodobnosti krachu. Vlastné spracovanie.

Z tabuľky vidíme, že rozvoj funkcie do Taylorovho radu ponúka presnejšiu aproximáciu, ako horné a dolné ohraničenie, ktoré môžeme používať len orientačne. S rastom počiatočných rezerv, podľa očakávania, klesá pravdepodobnosť krachu.

4.3 Aproximácia pravdepodobnosti krachu

V kapitole 4.1 sme sa oboznámili s exaktným spôsobom kalkulácie pravdepodobnosti krachu. Tieto metódy sú však numericky náročné, preto sa môžeme v niektorých prípadoch uspokojiť aj s menej presnými metódami. Pre odhadnutie pravdepodobnosti krachu podľa špecifikácie času t použijeme posunutý Gamma proces a nasledovne Brownov pohyb.

4.3.1 Aproximácia zloženého Poissonovho procesu posunutým Gamma procesom

Budeme vychádzať z práce Dicksona a Watersa (1993), ktorí ukázali, že pravdepodobnosť krachu $\Psi(U_0, t)$ pre klasický proces prebytku, môže byť aproximovaná pravdepodobnosťou krachu $\Psi_G(\beta U_0; \alpha t)$ pre štandardizovaný Gamma proces.

Takže zložený Poissonov proces $\{S(t)\}_{t>0}$ budeme aproximovať posunutým Gamma procesom $\{S_t^{PG}\}_{t>0}$. Pre $t > 0$ definujeme

$$S_t^{PG} = S_t^G + x_0 t \quad (4.36)$$

kde $\{S_t^G\}_{t>0}$ je $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ proces a x_0 je konštanta (ktorá môže byť kladná alebo záporná).

Funkcia $S_G(1)$ vyjadruje distribučnú funkciu $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rozdelenia.

Parametre α, β, x_0 sú stanovené obdobne, ako pri aproximácii posunutým Gamma rozdelením, tak, aby pre $t > 0$

$$E(S_t) = \lambda t \cdot v_1(X) = \frac{\alpha t}{\beta} + x_0 t = E(S_t^{PG}) \quad (4.37)$$

$$D(S_t) = \lambda t \cdot v_2(X) = \frac{\alpha t}{\beta^2} = D(S_t^{PG}) \quad (4.38)$$

$$\rho(S_t) = \frac{\lambda t v_3(X)}{(\lambda t v_2(X))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(\alpha t)^{\frac{1}{2}}} = \rho(S_t^{PG}) \quad (4.39)$$

Za predpokladu, že tieto hodnoty existujú, odvodíme z nich hodnoty parametrov

$$\alpha = \frac{4\lambda(E(X^2))^3}{(E(X^3))^2} \quad (4.40)$$

$$\beta = 2 \frac{E(X^2)}{E(X^3)} \quad (4.41)$$

$$x_0 = \lambda E(X) - 2\lambda \frac{(E(X^2))^2}{E(X^3)} \quad (4.42)$$

Všetky tri parametre sú nezávislé od času t , čo môžeme ukázať

$$(\alpha t)^{\frac{1}{2}} = \frac{2(\lambda t v_2(X))^{\frac{3}{2}}}{\lambda t v_3(X)} \Rightarrow \alpha t = \frac{4(\lambda t v_2(X))^3}{(\lambda t v_3(X))^2} \Rightarrow \alpha = \frac{4(\lambda v_2(X))^3}{(\lambda v_3(X))^2}$$

$$\lambda t \cdot v_2(X) = \frac{\alpha t}{\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{\alpha t}{\lambda t \cdot v_2(X)} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda v_2(X)}}$$

$$\lambda t \cdot v_1(X) = \frac{\alpha t}{\beta} + x_0 t \Rightarrow \lambda t \cdot v_1(X) - \frac{\alpha t}{\beta} = x_0 t \Rightarrow x_0 = \lambda \cdot v_1(X) - \frac{\alpha}{\beta}$$

Ak existujú prvé tri začiatkové momenty, existujú aj parametre α, β, x_0 a môžeme aproximovať proces prebytku

$$P(U(U_0, t) < 0) = P(S_t \leq U + c \cdot s, \text{ pre } 0 < s \leq t)$$

Gamma procesom

$$\begin{aligned}
P(U^{PG}(U_0, t) < 0) &= P(S_s^{PG} \leq U_0 + c \cdot s) \\
&= P(S_\tau^G + x_0 \tau \leq U_0 + c \cdot s) \\
&= P(S_s^G \leq U_0 + (c - x_0)s)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

keďže $\lambda E(X) = \frac{\alpha}{\beta} + x_0$, prebytok $U^{PG}(U_0, t)$ predstavuje pravdepodobnosť prežitia v konečnom čase, v prípade, že proces vývoja celkovej škody je opísaný Gamma procesom a keď riziková prirážka je ¹⁵

$$\hat{\theta} = \theta \left(1 + \frac{x_0 \beta}{\alpha} \right) \tag{4.44}$$

4.3.2 Aproximácia zloženého Poissonovho procesu Brownovým pohybom

Brownov pohyb, pomenovaný podľa Roberta Browna, ktorý ho spozoroval v roku 1827, je vo všeobecnosti vysvetlený ako chaotický pohyb veľmi malých častíc v tekutine. Brown zistil, že tento pohyb bol o to rýchlejší, o čo boli častice menšie. Štatistickú teóriu uverejnil Marian Smoluchovski a v podobnom čase aj Albert Einstein. Brownov pohyb, tiež nazývaný Wienerov proces sa využíva v mnohých vedeckých disciplínach a jeho využitie nájdeme aj v oblasti poistnej matematiky. Špeciálnym znakom Brownovho pohybu je veľmi malá stredná hodnota a disperzia.

Stochastický proces $\{W_t, t \geq 0\}$, kde t je spojitý čas sa nazýva Brownov pohyb, ak sú splnené tieto podmienky:

- $W_0 = 0$
- $\{W_t, t \geq 0\}$ má stacionárne a nezávislé prírastky
- W_t má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota je 0 a disperzia $\sigma^2 t$ pre každý čas $t > 0$

O normovanom Brownovom pohybe hovoríme, keď disperzia $\sigma^2 = 1$.

Označme náhodnú premennú Z_t ako rozdiel prebytku $U(U_0; t)$ a počiatočných rezerv U_0

$$Z_t = U(U_0; t) - U_0 = ct - S_t, \quad t \geq 0 \tag{4.46}$$

z čoho vyplýva, že $Z_0 = U(U_0; 0) - U_0 = 0$

Vypočítame jej strednú hodnotu a disperziu tohto procesu

$$E(Z_t) = ct - E(S_t) = ct - \lambda t E(x) = t \theta E(X) \lambda \tag{4.47}$$

¹⁵ Dickson, D.C.M., Waters, H.R.(1993) Gamma Processes And Finite Time Survival Probabilities. Astin Bulletin 23, s.259-271

$$D(Z_t) = D(ct - S_t) = D(S_t) = \lambda E(X^2)t \quad (4.48)$$

Môžeme teda pripustiť, že takto vytvorený proces $\{Z_t, t \geq 0\}$ je založený na Brownovom pohybe.

Naším cieľom je odhadnúť pravdepodobnosť krachu pomocou Brownovho pohybu. Označme $U_t = U_0 + W_t$ ako Brownov pohyb s posunom, ktorý je daný prebytkom U_0 . Uvažujme pravdepodobnosť krachu v časovom intervale $(0; \tau)$. Pravdepodobnosť krachu do času τ môžeme potom vyjadriť ako

$$\Psi(U_0, \tau) = 1 - \Phi(U_0; \tau) = P(T < \tau) = P(U_t < -U_0)$$

Vyjadríme pravdepodobnosť krachu pomocou náhodnej premennej Z_t .

Pravdepodobnosť, že celková škoda prevýši prijaté poistné a rezervy, aproximujeme normálnym rozdelením pri využití vzťahov (4.47) a (4.48)

$$P(Z_t < -U_0) \approx \Phi\left(-\frac{U_0 + \theta \lambda E(X)t}{\sqrt{\lambda E(X^2)t}}\right)$$

Naopak, pravdepodobnosť, že súčet prijatého poistného a rezervy U_0 bude postačovať na krytie škody vyjadríme ako

$$P(Z_t > U_0) \approx 1 - \Phi\left(\frac{U_0 - \theta \lambda E(X)t}{\sqrt{\lambda E(X^2)t}}\right) = \Phi\left(-\frac{U_0 - \theta \lambda E(X)t}{\sqrt{\lambda E(X^2)t}}\right)$$

Pre pravdepodobnosť krachu vo vzdialenom horizonte použijeme vzťah (4.32) a vypočítame pravdepodobnosť krachu $\Psi(U_0, \tau)$ ako súčet pravdepodobností, že krach nastane v krátkodobom a dlhodobom horizonte.

$$\Psi(U_0, \tau) = \Phi\left(-\frac{U_0 + \mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right) + e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}U_0} \cdot \Phi\left(-\frac{U_0 - \mu\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau}}\right) \quad (4.49)$$

Vzťahy uvedené v tejto kapitole použijeme v prípade, že individuálna škoda bude kalkulovaná v súvislosti s proporcionálnym zaistením.

5 ZAISTENIE

Zaistenie je špecifickou formou poistenia, pri ktorom poisťovateľ prenáša časť rizika poistného kontraktu na inú poisťovaciu spoločnosť – zaistovateľa. Poistné plnenie sa tak rozdelí, podľa druhu zaistenia, medzi priameho poisťovateľa a zaistovateľa. Za prenesenie časti rizika prvopoisťovateľ podstupuje zaistovateľovi časť inkasovaného poistného. Zaistovateľ môže časť rizika ďalej cedovať, takže nakoniec môže byť riziko chránené viacerými poisťovacími subjektami so zložitou štruktúrou vzťahov a ekonomických väzieb.

Zaistenie plní veľmi dôležitú úlohu v činnosti každej poisťovne. Zvyšuje kapacitu poisťovacej spoločnosti, diverzifikuje jej rizikové portfólio, posilňuje jej solventnosť a ekonomickú stabilitu a umožňuje získavať know-how zaistovateľa. Z dlhodobého hľadiska je zaistenie stabilizujúcim prvkom, ktorý vyrovnáva hospodárenie poisťovateľov. Zvlášť veľký význam má pre novovznikajúce a malé poisťovne, pretože im umožňuje mnohonásobne zvýšiť ich poisťovaciu kapacitu a teda aj ich konkurencieschopnosť.

Medzi výhody zaistenia pre poisťovateľov patrí:

- Redukcia volatility a následkov z prijatia poistného rizika,
- poskytovanie kapitálovej podpory a flexibilného financovania,
- prístup k expertízam a rôznym službám zaistovní, napr. pomoc pri vývoji nových produktov, oceňovaní, prijatí poistného rizika a riadení nákladov a škôd.¹⁶

Medzi úlohy, ktoré vzhľadom na svoju zložitosť, mnohostrannosť a medzinárodnú dimenziu zaistenie plní, patrí predovšetkým:

- rozdelenie rizika,
- zvýšenie kapacity cedenta,
- dosiahnutie potrebnej homogenity poistného kmeňa,
- posilnenie solventnosti cedenta,
- poskytovanie pomoci pri tvorbe a zavádzaní nových poistných produktov.

Existuje veľa spôsobov členenia zaistenia, my si uvedieme členenie zaistenia na fakultatívne a obligatórne, potom na proporcionálne a neporporcionálne.

¹⁶ Krátka, Zuzana: Zaistenie. Vydavateľstvo Ekonóm, 2007, str 7-43

Fakultatívne zaistenie je historicky staršie. Dojednáva sa individuálne pre jednotlivé poistné zmluvy, čiže prvopoistoiteľ a zaistoiteľ zvažujú každý prípad osobitne, pričom prvopoistoiteľ nie je zmluvne povinný príslušnú poistnú zmluvu ponúknuť na zaistenie a zaistoiteľ nie je zmluvne povinný ju na zaistenie prijať.

Výhody fakultatívneho zaistenia sú:

- Prvopoistoiteľ môže zvýšiť svoju poistnú kapacitu, bez toho aby musel zasiahnuť do obligatórneho zaistenia a niekedy nájde zaistoiteľa pre riziká, ktoré sú pôvodne oceňované ako nepoistoiteľné,
- prvopoistoiteľ ponúkne na zaistenie iba potrebné prípady a tak si ponechá maximum z pôvodného poistného,
- riziká ponúknuté na poistenie sú preskúmané viacerými odborníkmi,
- zaistoiteľ má možnosť ovplyvniť prvopoistoiteľa pri vytváraní pôvodnej poistnej zmluvy, navrhnutím úprav alebo zmien v podmienkach

Nevýhody fakultatívneho zaistenia:

- Často vznikajú oneskorenia pri uzatváraní poistných zmlúv prvopoistoiteľom, lebo musí najprv získať súhlas zaistoiteľa,
- tento typ zaistenia je viac náchylný na vznik rôznych chýb a konfliktných situácií v porovnaní s obligatónym zaistením,
- prvopoistoiteľ niekedy stráca voľnosť pri uzatváraní poistných zmlúv, lebo musí brať do úvahy námietky zaistoiteľa.

Obligatórne zaistenie je dnes častejšia zaistná forma než fakultatívne zaistenie. Dojednáva sa pre celé portfólio poistných zmlúv. Ak sú splnené podmienky rámcovej zaistnej zmluvy, má zaistoiteľ povinnosť prevziať príslušné časti rizika z jednotlivých poistných zmlúv daného portfólia. Zaistoiteľ je po uzavretí zaistnej zmluvy v pasívnej roli a nemôže individuálne zasahovať do uzatvárania jednotlivých poistných zmlúv spadajúcich do zaisteného portfólia. Preto je dôležitá vzájomná dôvera: zaistoiteľ verí, že prvopoistoiteľ bude postupovať pri uzatváraní a správe zaistovaného poistného obchodu kvalifikovane a spravodlivo voči zaistoiteľovi. Prvopoistoiteľ sa pritom spolieha, že zaistoiteľ bude bez odkladu plniť záväzky v prípade potreby.

Výhody obligatórneho zaistenia:

- prvopoistoiteľ môže uzavrieť poistný obchod bez pochyb o dostupnosti zaistenia,

- administratívne náklady sú pre obidve strany nižšie v porovnaní s fakultatívnym zaistením,
- znižuje sa oneskorenie výplaty poistného plnenia, lebo zaistovateľ sa nezaobrá jednotlivými poistnými prípadmi,
- typická je kontinuita, ktorá často trvá niekoľko rokov, čím sa zvyšuje istota prvopoistovateľa a zisk zaistovateľa
- zaistovateľ lepšie diverzifikuje riziko.

Nevýhody obligatórneho zaistenia:

- zaistovatelia sa snažia eliminovať svoje riziká rôznymi výlukami v zaistej zmluve, takže môže dôjsť ku nedostatočnému zaisteniu,
- ceduje sa väčší objem poistného obchodu v porovnaní s fakultatívnym zaistením a prvopoistovateľ sa ak často zbavuje väčšej časti inkasovaného poistného, ako je nutné.

5.1 Proporcionálne zaistenie

Proporcionálne zaistenie znamená, že poistná suma, poistné plnenie a poistné sa delí medzi poistovateľa a zaistovateľa v určitom, vopred dojednanom pomere. Kľúčový je teda pomer, v ktorom sa v každej poistej zmluve delí pôvodné poistené riziko medzi poistovateľa a zaistovateľa ale tiež finančné toky – poistné a prípadne aj poistné plnenie. Treba pripomenúť, že tento pomer však nezávisí od výšky škody.

My si ukážeme dva typy proporcionálneho poistenia – kvótové a surplus.

5.1.1 Kvótové zaistenie

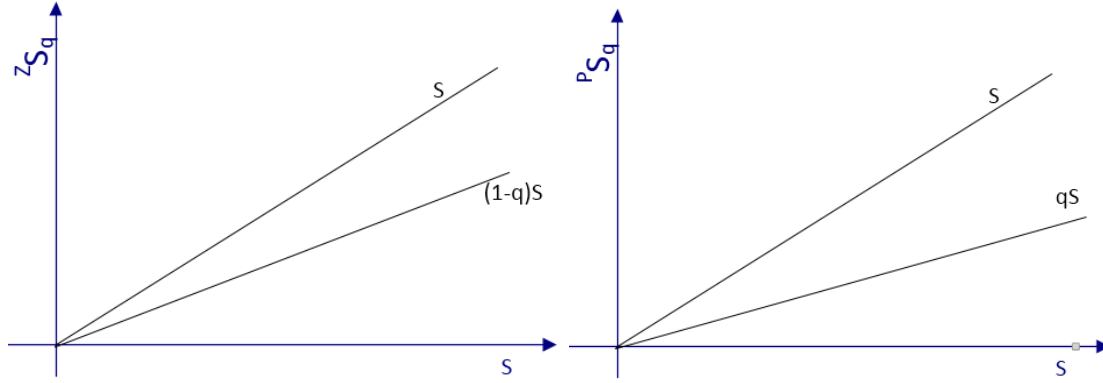
Kvótové zaistenie je často využívaný typ proporcionálneho zaistenia, kde sa poistná suma S , poistné plnenie X a poistné P delia medzi poistovateľa a zaistovateľa s pevne dojednanou percentuálnou sadzbou, ktorá je označovaná ako kvóta q .

To môžeme označiť ako

$$\begin{array}{lll} {}^Z S_q = (1 - q)S, & {}^Z X_q = (1 - q)X, & {}^Z P_q = (1 - q)P \\ {}^P S_q = qS, & {}^P X_q = qX, & {}^P P_q = qP \end{array} \quad (5.1)$$

kde ${}^Z S_q$, ${}^Z X_q$ a ${}^Z P_q$ sú v poradí poistná suma, poistné plnenie a poistné, ktoré prenechá poistovateľ zaistovateľovi a ${}^P S_q$, ${}^P X_q$ a ${}^P P_q$ sú poistná suma, poistné plnenie a poistné, ktoré si poistovateľ ponechá pre seba.

Situáciu si priblížime grafmi vyjadrujúcimi pomer ručenia vzhľadom na poistnú sumu.



Obr. 5.1: Grafy rozdelenia poistnej sumy medzi poistovateľa a zaistovateľa pri kvótovom zaistení. Vlastné spracovanie.

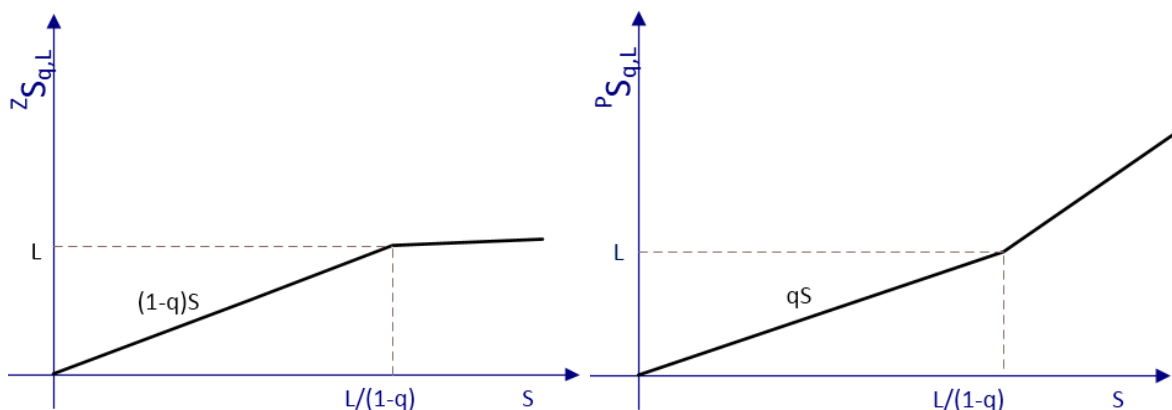
Kvótové zaistenie je administratívne jednoduché, nie je však účinným nástrojom na homogenizáciu poistného kmeňa. Môže zmierniť, ale nie úplne odstrániť dopady extrémnych poistných zmlúv.

Ručenie zaistovateľa nie je obvykle ponechané pri aplikácii kvóty v neobmedzenej výške, ale je zmluvne obmedzené *limitom zaistovateľa* L . Ak stanovené ručenie zaistovateľa prevýši tento limit, tak maximálna suma, ktorá sa bude cedovať, je vo výške limitu zaistovateľa. Časť poistnej sumy, ktorá prevyšuje tento limit, pripadá poistovateľovi.

Limit zaistovateľa vyjadríme týmto spôsobom:

$$\begin{aligned}
 {}^Z S_{q,L} &= \begin{cases} (1-q)S & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ L & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases} & {}^P S_{q,L} &= \begin{cases} qS & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ S-L & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases} \\
 {}^Z X_{q,L} &= \begin{cases} (1-q)X & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ \frac{L}{S} \cdot X & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases} & {}^P X_{q,L} &= \begin{cases} qX & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ \left(1 - \frac{L}{S}\right) \cdot X & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases} \\
 {}^Z P_{q,L} &= \begin{cases} (1-q)P & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ \frac{L}{S} \cdot P & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases} & {}^P P_{q,L} &= \begin{cases} qP & \text{pre } S \leq \frac{L}{1-q} \\ \left(1 - \frac{L}{S}\right) \cdot P & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Limit zaistovateľa znázorníme aj graficky z pohľadu zaistovateľa aj poisťovateľa na Obr. 5.2.



Obr. 5.2: Grafy rozdelenia poistnej sumy medzi poisťovateľa a zaistovateľa pri kvóтовom zaistení s limitom zaistovateľa. Vlastné spracovanie.

Na základe vlastností strednej hodnoty a disperzie vypočítame konkrétne charakteristiky pre optimalizáciu.

5.1.2 Zaistenie surplus

V surplus zaistení, nazývanom aj excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu, preberá zaistovateľ pri každej poistnej sume tú časť nazývanú excedent, ktorá presahuje zmluvne dohodnutý vlastný vrub prvopoisťovateľa α , pričom $\alpha > 0$. Pre poistnú sumu S , poistné P , a poistné plnenie X v tomto prípade pre zaistovateľa platí

$$\begin{aligned} zS_{\alpha} &= \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ (S - \alpha) & \text{pre } S > \alpha \end{cases} & pS_{\alpha} &= \begin{cases} S & \text{pre } S \leq \alpha \\ \alpha & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \\ zX_{\alpha} &= \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{(S-\alpha)}{S}X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} & pX_{\alpha} &= \begin{cases} X & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{\alpha}{S}X & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \\ zP_{\alpha} &= \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{(S-\alpha)}{S}P & \text{pre } S > \alpha \end{cases} & pP_{\alpha} &= \begin{cases} P & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{\alpha}{S}P & \text{pre } S > \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Na rozdiel od kvótového zaistenia môže byť pomer pre delenie rizika pri surplus zaistení pre každú poistnú zmluvu iný. Tento typ zaistenia je administratívne zložitejší, ale je to dobrý nástroj pre homogenizáciu poistného kmeňa prvopoisťovateľa. Poistné zmluvy s nízkymi poistnými sumami kryje z veľkej časti, alebo úplne poisťovateľ, pričom poistné zmluvy s vysokými poistnými sumami sú z väčšej časti kryté zaistovateľom.¹⁷

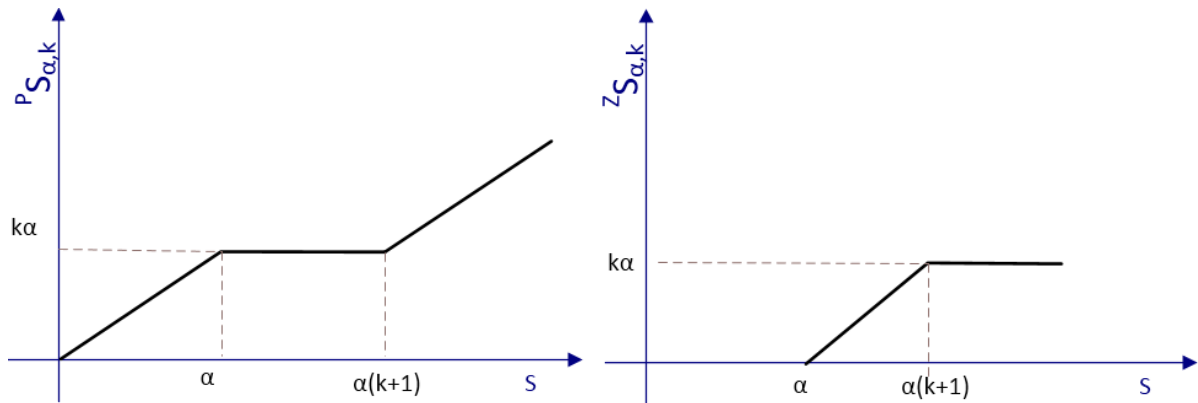
¹⁷ Cipra, T.: Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha, Grada Publishing, 2004. ISBN: 80-247-0838-8.

Podobne ako pri kvóтовom zaistení, aj pri surplus zaistení sa môže uplatniť limit zaistovateľa. Ten sa vyjadruje ako k -násobok vlastného vrubu. Ukážeme vzťahy pre zaistovateľa, vzťahy pre poisťovateľa sa dajú odvodiť rovnako ako v predošlom prípade.

$${}^z S_{\alpha,k} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ (S - \alpha) & \text{pre } \alpha < S \leq \alpha(k+1) \\ k \cdot \alpha & \text{pre } S > \alpha(k+1) \end{cases}$$

$${}^z X_{\alpha,k} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{(S - \alpha)}{S} X & \text{pre } \alpha < S \leq \alpha(k+1) \\ k \cdot \frac{\alpha}{S} X & \text{pre } S > \alpha(k+1) \end{cases} \quad (5.4)$$

Pomer ručenia vzhľadom na poisťnú sumu znázorníme na grafoch z pohľadu poisťovateľa aj zaistovateľa



Obr. 5.3: Grafy rozdelenia poisťnej sumy medzi poisťovateľa a zaistovateľa pri zaistení surplus s k -násobným limitom zaistovateľa. Vlastné spracovanie.

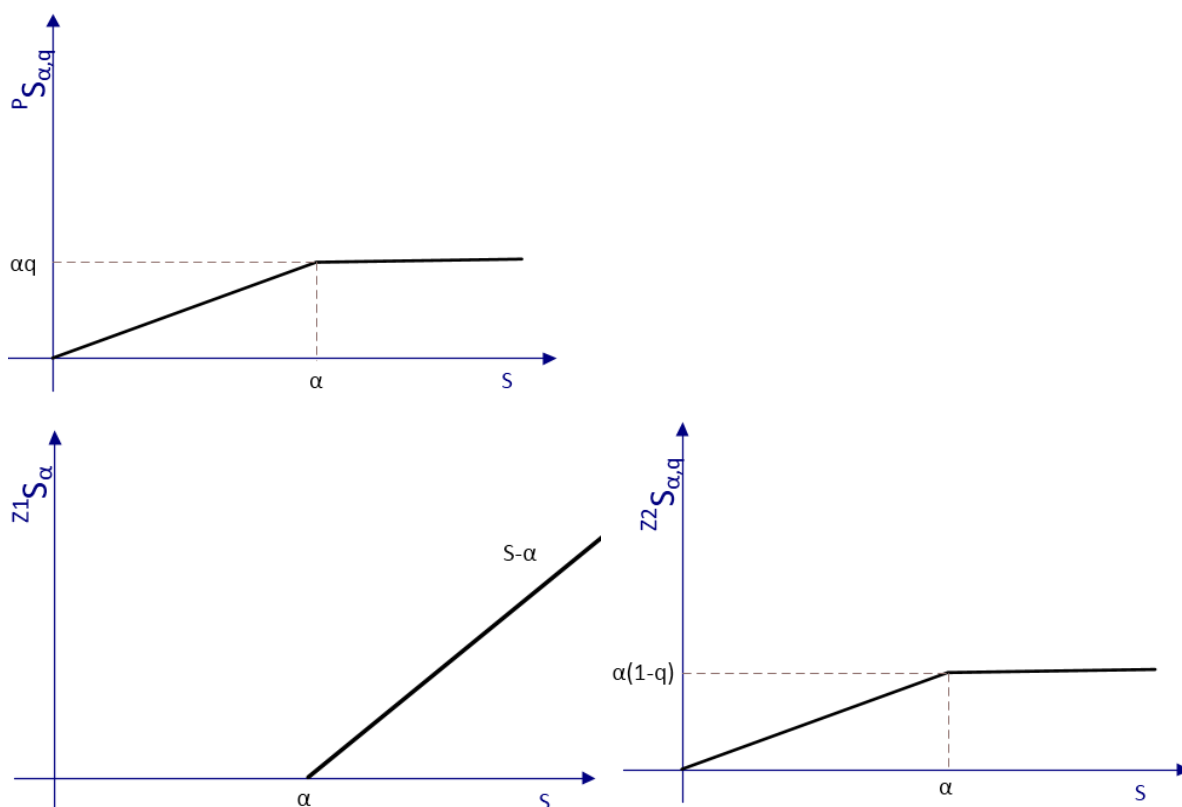
5.1.3 Spájanie zaistných ochrán surplus a kvóty

V predchádzajúcich kapitolách sme si ukázali delenie rizika medzi poisťovateľa a zaistovateľa v prípade surplus zaistenia a kvótového zaistenia. Ak chceme kombinovať výhody oboch zaistných ochrán, môžeme ich spájať. V prvom prípade budeme predpokladať, že si poisťovateľ zaistí portfólio zmlúv zaistením surplus a následne aplikuje kvótové zaistenie na riziko, ktoré nesie poisťovateľ po aplikácii zaistenia surplus.

$$\begin{aligned}
{}^P X_{\alpha,q} &= \begin{cases} qX & \text{pre } S \leq \alpha \\ q \frac{\alpha}{S} X & \text{pre } S \geq \alpha \end{cases} \\
{}^{Z_1} X_{\alpha} &= \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq \alpha \\ \left(\frac{S - \alpha}{S} \right) X & \text{pre } S \geq \alpha \end{cases} \\
{}^{Z_2} X_{\alpha,q} &= \begin{cases} (1 - q)X & \text{pre } S \leq \alpha \\ \frac{\alpha}{S} (1 - q)X & \text{pre } S \geq \alpha \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Druhý prípad by nastal, keby poisťovateľ zaistil portfólio poisťných zmlúv kvótou a následne aplikoval zaistenie surplus na riziko, ktoré nesie po aplikácii kvóty. Toto zaistenie by sme odvodili obdobnými vzťahmi.

Nasledujúce grafy zobrazujú, akú časť z celkovej poisťnej sumy kryje poisťovateľ a aká časť spadá na zaistenie surplus a kvótu.



Obr. 5.4: Grafy rozdelenia poisťnej sumy medzi poisťovateľa a zaistovateľa (resp. zaistovateľov) pri kombinácii zaistenia surplus a kvóty. Vlastné spracovanie.

V nasledujúcej kapitole využijeme vybudovanú teóriu pri hľadaní optimálneho nastavenia proporcionálneho zaistenia.

6 OPTIMALIZÁCIA

V zaistovacej zmluve majú cedent a zaistovateľ protichodné záujmy. Každý z nich chce minimalizovať riziko pri vysokom príjme z poistného. Na druhej strane, keďže obidve spoločnosti majú spoločné ciele v riadení rizika, ktoré zdieľajú, poisťovateľ a zaistovateľ majú spoločné záujmy a môžeme ich považovať za partnerov. Dôležitá podmienka pre dosiahnutie solventnosti a finančnej stability spočíva v minimalizovaní maximálnej straty, ktorá môže nastať s určitou pravdepodobnosťou.¹⁸

Čím viac je riziko zaistené, tým viac je prenesené riziko na zaistovateľa, ale na druhej strane sa znižuje očakávaný zisk. Naším cieľom bude nastaviť najlepšiu stratégiu zaistenia pri rôznych typoch zaistenia, ktorej výsledkom bude minimalizácia hodnôt VaR a $CVaR$.

6.1 Kvótové zaistenie

O kvótovom zaistení sme už povedali, že na zníženie pravdepodobnosti krachu nebude mať veľký vplyv. Dôvodom je, že podiel zníženia maximálnej škody, ktorú môže poisťovňa dosiahnuť s určitou pravdepodobnosťou je priamo naviazaný na podiel poistného, ktoré si poisťovateľ ponecháva pre seba.

V tejto časti budeme pracovať s nasledujúcimi označeniami:

$VaR_p\left(\frac{P}{C} S_q^{kol}\right)$ je maximálna možná škoda, ktorá môže vzniknúť poisťovateľovi s pravdepodobnosťou p , ktorý je zaistený kvótou q vrátane nákladov na zaistenie.

${}^Z\Pi_q$ sú náklady, ktoré musí poisťovateľ uhradiť zaistovateľovi za krytie rizika kvótovým zaistením.

ξ_q je prirážka zaistovateľa za krytie rizika kvótovým zaistením.

Pozn. analogické označenia budú použité pri surplus zaistení a pri skladaní zaistných ochrán. Maximálnu možnú škodu poisťovateľa po aplikácii kvótového zaistenia a pripočítaní nákladov na zaistenie môžeme charakterizovať ako

$$\begin{aligned} VaR_p\left(\frac{P}{C} S_q^{kol}\right) &= VaR_p\left(\frac{P}{C} S_q^{kol}\right) + {}^Z\Pi_q \\ VaR_p\left(\frac{P}{C} S_q^{kol}\right) &= q \cdot VaR_p(S^{kol}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Náklady poisťovateľa na zaistenie sa dajú kalkulovať rôznymi spôsobmi. My si uvedieme tri z nich.

¹⁸Zhi Li, Optimal Reinsurance Retentions under Ruin-Related Optimization Criteria, dizertačná práca, 2008

Princíp strednej hodnoty

Princíp strednej hodnoty stanovuje náklady na zaistenie ako strednú hodnotu škody zaistovateľa rozšírenú o prirážku na zaistenie ξ_q

$${}^Z\Pi_q = E({}^Z S_q^{kol}) \cdot (1 + \xi_q) = (1 - q)E(S^{kol}) \cdot (1 + \xi_q)$$

Ako sme už uviedli na začiatku kapitoly, naším optimalizačným kritériom je minimalizácia hodnoty VaR a $CVaR$. Vieme, že derivovaním funkcie môžeme nájsť extrém tejto funkcie. Funkčnou hodnotou druhej derivácie v stacionárnom bode môžeme určiť, či daný extrém je maximum alebo minimum funkcie.

Aplikujme naše poznatky na uvedený vzťah

$$VaR_p({}^P S_q^{kol}) = q \cdot VaR_p(S^{kol}) + (1 - q)E(S^{kol}) \cdot (1 + \xi_q) \quad (6.2)$$

ktorý následne zderivujeme podľa premennej q

$$\frac{\partial VaR_p({}^P S_q^{kol})}{\partial q} = VaR_p(S^{kol}) - E(S^{kol}) - E(S^{kol}) \cdot \xi_q$$

Deriváciou tejto funkcie je konštanta, čo znamená, že v tomto prípade funkcia (6.2) nemá extrém, preto týmto spôsobom nemôžeme optimalizovať kvótu.

Zobrazme túto situáciu aj graficky. Graf $VaR_p({}^P S_q^{kol})$ pre kvótu $q \in \langle 0; 1 \rangle$ je priamka, z čoho usudzujeme že táto funkcia nemá extrém a preto pre tento prípad nie je vhodná na optimalizáciu.

Princíp smerodajnej odchýlky

Ako vyplýva z názvu, náklady na zaistenie stanovené princípom smerodajnej odchýlky vypočítame ako strednú hodnotu škody zaistovateľa navýšenú o ξ_q -tu časť smerodajnej odchýlky.

$${}^Z\Pi_q = E({}^Z S_q^{kol}) + \sigma({}^Z S_q^{kol}) \cdot \xi_q = (1 - q)E(S^{kol}) + (1 - q) \cdot \sigma(S^{kol}) \cdot \xi_q \quad (6.3)$$

Situácia je analogická ako v princípe strednej hodnoty, pretože derivácia tejto funkcie bude znovu konštanta.

Princíp disperzie:

Extrém funkcie však môžeme nájsť pri stanovení nákladov na zaistenie použitím princípu disperzie. Je to vďaka vlastnosti disperzie $D(aX) = a^2 D(X)$.

Stanovenie nákladov použitím princípu disperzie bude potom

$${}^Z\Pi_q = E({}^ZS_q^{kol}) + D({}^ZS_q^{kol}) \cdot \xi_q = (1-q)E(S^{kol}) + (1-q)^2 \cdot D(S^{kol}) \cdot \xi_q \quad (6.4)$$

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, deriváciu funkcie maximálnej straty položíme rovnú 0, aby sme získali stacionárny bod

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial VaR_p({}^P_c S_q^{kol})}{\partial q} \right| &= VaR_p(S^{kol}) + E(S^{kol}) + 2(1-q)(-1)D(S^{kol}) \cdot \xi_q = 0 \\ \left. \frac{\partial VaR_p({}^P_c S_q^{kol})}{\partial q} \right| &= VaR_p(S^{kol}) + E(S^{kol}) - 2 \cdot D(S^{kol}) \cdot \xi_q + qD(S^{kol}) \cdot \xi_q = 0 \\ q^* &= \frac{2 \cdot D(S^{kol}) \cdot \xi_q - VaR_p(S^{kol}) - E(S^{kol})}{D(S^{kol}) \cdot \xi_q} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Vidíme, že pomocou princípu disperzie sme schopní určiť minimum funkcie definovanej vzťahom (6.4).

Následne druhou deriváciou určíme, či hodnota q má v tomto bode maximum alebo minimum

$$\frac{\partial^2 VaR_p({}^P_c S_q^{kol})}{\partial^2 q} = D(S^{kol}) \cdot \xi_q$$

Keďže disperzia celkovej škody, ako aj prirážka zaistovateľa sú vždy kladné hodnoty, môžeme tvrdiť, že pri zaistení s kvótou q^* dosiahneme minimum celkovej škody $VaR_p({}^P_c S_{q^*}^{kol})$.

Vidíme, že realizácia výpočtu je pre každodennú prax náročná. Môžeme však využiť matematický softvér so schopnosťou optimalizácie. Kvôli prehľadnosti a jednoduchosti sme vybrali výpočtový systém *Mathematica*.

Za predpokladu, že poznáme všetky hodnoty parametrov okrem výšky kvóty, môžeme v programe *Mathematica* použiť funkciu *Minimize*, ktorá zistí minimum funkcie celkovej škody a vypočíta optimálnu kvótu.

Vstup pre funkciu *Minimize* môžeme zadať ako

$$\text{Minimize}[q \star \text{VAR} + (1 - q) \star \text{ES} + (1 - q)^2 \star \text{DS} \star \text{e1}, \{q\}] \quad (6.6)$$

6.2 Excedentné (surplus) zaistenie vzhľadom na poistnú sumu

V piatej kapitole sme definovali, že zaistovateľ preberá pri každej poistnej sume časť nazývanú excedent, ktorá presahuje zmluvne dohodnutý vlastný vrub prvopoistovateľa α , pričom $\alpha > 0$.

Maximálna možná škoda, ktorá môže nastať počas jedného obdobia pri surplus zaistení je potom

$$VaR_p\left(\frac{P}{C} S_{\alpha^*}^{kol}\right) = \frac{\alpha}{S} VaR_p(S^{kol}) + {}^Z\Pi_{\alpha} \quad (6.7)$$

Aj pri tomto type zaistenia si ukážeme použitie princípu disperzie.

Princíp disperzie:

$$\begin{aligned} {}^Z\Pi_{\alpha} &= E({}^Z S_{\alpha}^{kol}) + D({}^Z S_{\alpha}^{kol}) \cdot \xi_{\alpha} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) + \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D(S^{kol}) \cdot \xi_{\alpha} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Optimálny vlastný vrub α by sme mohli počítat rovnakým spôsobom, aký bol znázornený pri kvótovom zaistení. Pre minimalizáciu hodnoty $VaR_p\left(\frac{P}{C} S_{\alpha^*}^{kol}\right)$, resp. $CVaR_p\left(\frac{P}{C} S_{\alpha^*}^{kol}\right)$ vyčíslením nákladov na zaistenie pomocou princípu disperzie použijeme funkciu *Minimize* a vzťah (6.8)

$$\text{Minimize} \left[\frac{a}{S} \cdot \text{VAR} + \left(1 - \frac{a}{S}\right) \cdot \text{ES} + \left(1 - \frac{a}{S}\right)^2 \cdot \text{DS} \cdot e2, \{a\} \right] \quad (6.9)$$

6.3 Zaistenie surplus + kvóta

Pri zaistení u dvoch zaistovateľov budeme predpokladať, že poistovateľ sa s prvým zaistovateľom dohodol na zaistení surplus a následne sa s druhým zaistovateľom dohodol na zaistení portfólia kvótou.

Vzťah pre celkovú škodu vrátane nákladov na zaistenie potom vyjadríme ako

$$VaR_p\left(\frac{P}{C} S_{\alpha^*,q^*}^{kol}\right) = \frac{\alpha}{S} \cdot q \cdot VaR_p(S^{kol}) + {}^Z\Pi_{\alpha,q} \quad (6.10)$$

Tri princípy stanovenia nákladov na zaistenie budú vypočítané ako súčet zaistenia surplus a kvótového zaistenia, ktoré je však znížené o hodnotu, ktorú už zaistuje prvý zaistovateľ.

Princíp strednej hodnoty:

$${}^Z\Pi_{\alpha,q} = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) \cdot (1 + \xi_{\alpha}) + \frac{\alpha}{S} (1 - q) E(S^{kol}) \cdot (1 + \xi_{\alpha,q}) \quad (6.11)$$

Princíp smerodajnej odchýlky:

$$^Z \Pi_{\alpha,q} = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) + \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot \sigma(S^{kol}) \cdot \xi_{\alpha} + \frac{\alpha}{S} (1 - q) E(S^{kol}) + \frac{\alpha}{S} \cdot (1 - q) \cdot \sigma(S^{kol}) \xi_{\alpha,q} \quad (6.12)$$

Princíp disperzie:

$$^Z \Pi_{\alpha,q} = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) + \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D(S^{kol}) \cdot \xi_{\alpha} + \frac{\alpha}{S} (1 - q) E(S^{kol}) + \left(\frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot (1 - q)^2 \cdot D(S^{kol}) \xi_{\alpha,q} \quad (6.13)$$

Pre zachovanie kontinuity budeme v ďalších výpočtoch nákladov na zaistenie znovu uvádzať princíp disperzie.

V systéme *Mathematica* využijeme funkciu *Minimize* na stanovenie optimálneho vlastného vrubu a optimálnej kvóty pre minimalizáciu celkovej škody poisťovateľa

```
Minimize[q * VAR * a / S + (1 - a / S) * ES + (1 - a / S) ^ 2 * DS * e2 + a / S * (1 - q) * ES +
+ (a / S) ^ 2 * (1 - q) ^ 2 * DS * e1, {q, a}]
```

Keďže v tomto prípade optimalizujeme dve premenné, ich vzájomný priebeh sa dá zobrazit' na trojdimenzionálnom grafe. V programe *Mathematica* na vykreslenie 3D grafu musíme zadať funkciu *Plot3D*

```
Plot3D[q * VAR * a / S + (1 - a / S) * ES + (1 - a / S) ^ 2 * DS * e2 + a / S * (1 - q) * ES +
(a / S) ^ 2 * (1 - q) ^ 2 * DS * e1, {a, 0, 100}, {q, 0, 1}]
```

Podobným spôsobom by sme mohli vyjadriť aj opačné poradie zaistenia, čo si ukážeme v praktickej časti.

7 PRAKTICKÁ ČASŤ

V tejto časti ukážeme, ako môžeme využiť doteraz nadobudnuté vedomosti aplikačne. Ilustrujeme výpočet optimálneho zaistenia a pravdepodobnosti krachu na dvoch modelových príkladoch a na záver využijeme modifikované dáta jednej poisťovne s cieľom porovnať štandardné zaistenie s nami vypočítaným optimálnym zaistením.

7.1 Modelový príklad 1

Majme portfólio poistných zmlúv, v ktorom sa výška individuálnej škody riadi Gamma rozdelením $X \sim \Gamma(5; 2)$ a počet škôd sa riadi negatívne binomickým rozdelením $N \sim NBi(150; 0,8)$. Poistná suma $S = 100$, prirážka na kvótové zaistenie $\xi_q = 0,15$, prirážka na zaistenie surplus $\xi_\alpha = 0,2$ ¹⁹ a rizikovú prirážku $\theta = 0,1$.

- Vypočítajme maximálnu celkovú škodu s pravdepodobnosťou 0,995, $VaR_{0,995}(S^{kol})$, presným výpočtom a aproximáciou normálnym a posunutým Gamma rozdelením,
- Vypočítajme optimálnu kvótu, vlastný vrub pri zaistení surplus a optimálny reťazec zložený z týchto zaist'ovacích ochrán.

Riešenie:

a) Pravdepodobnostná funkcia negatívne binomického rozdelenia má tvar

$$p_N(n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Distribučnú funkciu Gamma rozdelenia použijeme v tvare (4.15). Potom distribučná funkcia celkovej škody bude mať podľa vzťahu (4.21) tvar

$$F_{S^{kol}}(x) = 1 - e^{-\delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n \sum_{i=0}^{mn-1} \frac{\delta^i x^i}{i!} \quad (2)$$

Na základe tohto vzťahu vyjadríme príslušný kvantil pre pravdepodobnosť $p = 0,995$, teda

$$F_{S^{kol}}(VaR_{0,995}(S^{kol})) = 0,995 \quad (3)$$

Strednú hodnotu a disperziu vypočítame na základe vzťahov (3.19) a (3.20)

¹⁹ V systéme *Mathematica* označujeme $\xi_q = e1$, $\xi_\alpha = e2$

$$E(S^{kol}) = \frac{r(1-p)}{p} \cdot \frac{m}{\delta} = \frac{150 \cdot 0,2}{0,8} \cdot \frac{5}{2} = 93,75$$

$$D(S^{kol}) = \frac{r(1-p)}{p} \cdot \frac{m}{\delta^2} + \frac{r(1-p)}{p^2} \cdot \frac{m}{\delta} = \frac{150 \cdot 0,2}{0,8} \cdot \frac{5}{4} + \frac{150 \cdot 0,2}{0,64} \cdot \frac{5}{2} = 339,844$$

Na výpočet hodnoty $VaR_{0,995}(S^{kol})$ využijeme program *Mathematica*. Pre explicitný výpočet súvisiaci s distribučnou funkciou zloženého negatívne binomického rozdelenia použijeme funkciu *FindRoot*.

```
Zadajte parametre NBi rozdelenia
r = 150; p = 0.8;
Zadajte parametre Gamma rozdelenia
m = 5; delta = 2;
VAR =
FindRoot[
  1 - E^(-delta*xp) *
  Sum[Binomial[n+r-1, r-1]*p^r*(1-p)^n*
  Sum[delta^i*xp^i/i!, {i, 0, m*n-1}], {n, 1, 200}] = 0.995, {xp, 15}]
```

```
Out[967]= {xp -> 145.514}
```

Explicitným výpočtom sme vypočítali hodnotu $VaR_{0,995}(S^{kol}) = 145,514$ p.j.

Pri aproximácii normálnym rozdelením môžeme vypočítať stredné hodnoty a disperzie jednotlivých rozdelení pomocou vstavaných funkcií systému²⁰ a vzťahov definovaných v teoretickej časti. 99,5-ty percentil celkovej škody vypočítame pomocou funkcie *InverseCDF*.

```
EX = Mean[GammaDistribution[m, 1/delta]];
EN = Mean[NegativeBinomialDistribution[r, p]];
DX = StandardDeviation[GammaDistribution[m, 1/delta]]^2;
DN = StandardDeviation[NegativeBinomialDistribution[r, p]]^2;
ES = EX*EN
DS = (EN*DX + DN*EX^2)
VAR = InverseCDF[NormalDistribution[ES, Sqrt[DS]], 0.995]
```

```
Out[48]= 93.75
```

```
Out[49]= 339.844
```

```
Out[50]= 141.235
```

Aproximáciou normálnym rozdelením sme odhadli hodnotu $VaR_{0,995}(S^{kol}) = 141,235$.

²⁰ Pozn. v systéme *Mathematica* sa stredná hodnota Gamma rozdelenia vypočíta ako $E(X) = m \cdot \delta$, teda pracuje sa s rozdelením hustoty Gamma rozdelenia v tvare $f(x) = \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot x^{m-1}$

Pri aproximácii zloženým posunutým Gamma rozdelením musíme vypočítať začiatočné momenty druhého a tretieho rádu rozdelenia výšky škody a následne vypočítať charakteristiky, ktoré v súlade s označením v programe *Mathematica* označíme ako $S^{kol} \sim \Gamma(\alpha, \beta, x_0)$.

```
EX = Mean[GammaDistribution[m, 1/delta]];
EN = Mean[NegativeBinomialDistribution[r, p]];
DX = StandardDeviation[GammaDistribution[m, 1/delta]]^2;
DN = StandardDeviation[NegativeBinomialDistribution[r, p]]^2;
EX2 = FactorialMoment[GammaDistribution[m, 1/delta], 2];
EX3 = FactorialMoment[GammaDistribution[m, 1/delta], 3];
ES = Round[Mean[GammaDistribution[alpha, 1/beta, 1, x0]]];
DS = (EN*DX + DN*EX^2);
alpha = 4*(EX2*(EX2*(1-p) + p)*sqrt(EX2*(1-p)*r*(EX2*(1-p) + p)) /
(3*EX2*p*(1-p)*EX + p^2*EX3 + 2*(1-p)^2*EX3);
beta = sqrt(alpha/DS);
x0 = EN*EX - alpha/beta;
VAR = InverseCDF[GammaDistribution[alpha, 1/beta, 1, x0], 0.995]
```

Out[1070]= 146.208

Aproximáciou posunutým Gamma rozdelením sme odhadli hodnotu

$$VaR_{0,995}(S^{kol}) = 146,208 \text{ p.j.}$$

Záver:

Presnou metódou sme stanovili hodnotu $VaR_{0,995}(S^{kol})$ vo výške 145,514 p.j. Aproximáciou normálnym rozdelením sme hodnotu $VaR_{0,995}(S^{kol})$ odhadli na 141,235 p.j. a aproximáciou posunutým Gamma na 146,208 p.j. Vidíme, že aproximácia posunutým Gamma ponúka presnejšie výsledky ako aproximácia normálnym rozdelením, keďže pôvodné rozdelenie je pravostranne zošikmené.

b) Pre stanovenie optimálneho zaistenia sme vytvorili na základe vzťahov uvedených v teoretickej časti interaktívnu kalkulačku, ktorá umožňuje výber zo štyroch druhov zaistenia: kvótové, surplus a zaistné reťazce kvóta + surplus a surplus + kvóta. Optimálne zaistenie nájdeme pomocou funkcie *Minimize* a využitím vzťahov (6.2), (6.9) a (6.13).

```

Zadajte zaistnú ochranu: 1=kvóta, 2=surplus, 3=kvóta+surplus, 4=surplus+kvóta
hodnota = 4;
Zadajte PS a prirážky
S = 100; e1 = 0.15; e2 = 0.2; theta = 0.1;
EX = Mean[GammaDistribution[m, 1/delta]];
EN = Mean[NegativeBinomialDistribution[r, p]];
DX = StandardDeviation[GammaDistribution[m, 1/delta]]^2;
DN = StandardDeviation[NegativeBinomialDistribution[r, p]]^2;
ES = EX*EN;
DS = (EN*DX + DN*EX^2);

VAR =
FindRoot[
  1 - E^(-delta*xp) *
    Sum[Binomial[n+r-1, r-1]*p^r*(1-p)^n*Sum[delta^i*xp^i/i!, {i, 0, m*n-1}],
    {n, 1, 200}] = 0.995, {xp, 15}]
Which[hodnota == 1,
  Minimize[q*VAR + (1-q)*ES + (1-q)^2*DS*e1, {q}],
hodnota == 2,
  Minimize[a/S*VAR + (1-a/S)*ES + (1-a/S)^2*DS*e2, {a}],
hodnota == 3,
  Minimize[q*VAR*a/S + (1-q)*ES + (1-q)^2*DS*e1 + q*(1-a/S)*ES + q^2*(1-a/S)^2*DS*e2,
  {q, a}],
hodnota == 4,
  Minimize[q*VAR*a/S + (1-a/S)*ES + (1-a/S)^2*DS*e2 + a/S*(1-q)*ES + (a/S)^2*(1-q)^2*DS*e1,
  {q, a}]]

```

Optimálne zaistenie vzhľadom na kvótu, surplus a reťazce z týchto zaistení je zhrnuté v tabuľke 7.1. Vychádzali sme z explicitného výpočtu maximálnej škody s pravdepodobnosťou 0,995.

Typ zaistenia	Optimálna kvóta, resp. vlastný vrub	$Var_{0,995}(^P S^{kol})$	$E(^P Z_0)$
Bez zaistenia		145,514	33,9844
Kvóta	$q^* = 0,492276$	71,63305	20,84347
Surplus	$\alpha^* = 61,9207$	90,10329	24,1287
Kvóta + surplus	$q^* = 0,492276, \alpha^* = 22,6466$	16,2224	10,9878
Surplus + kvóta	$q^* = 0,180043, \alpha^* = 61,9207$	16,2224	10,9878

Tab. 7.1: Optimálne zaistenie pri minimalizácii maximálnej škody pre $p = 0,995$

Záver:

Vidíme, že v našom prípade je kvótové zaistenie efektívnejšie na minimalizáciu maximálnej škody v porovnaní so surplus zaistením. Najlepšie výsledky však dosiahneme spájaním poistných ochrán, pričom z pohľadu poisťovateľa dostaneme rovnakú hodnotu maximálnej škody nezávisle od poradia, v ktorom určité portfólio zmlúv zaistujeme.

7.2 Modelový príklad 2

Majme portfólio poisťných zmlúv v ktorom výška individuálnej škody sa riadi Gamma rozdelením $X \sim \Gamma(5; 0,2)$, počet škôd sa riadi Poissonovým rozdelením $N \sim \lambda(30)$ a riziková prirážka $\theta = 0,1$. Odhadnime pravdepodobnosť krachu pre rôzne časové obdobia a konkrétne výšky rezerv U_0 Brownovým pohybom. Porovnajme s pravdepodobnosťou krachu odhadom Lundbergovou nerovnosťou.

Pre odhad pravdepodobnosti krachu v čase τ použijeme vzťah (4.47) a (4.48), ktoré dosadíme do vzťahu (4.49)

$$\Psi(U_0, \tau) = \Phi\left(-\frac{U_0 + \tau\theta E(X)\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot E(X^2)\tau}}\right) + e^{-\frac{2\theta E(X)\lambda}{\lambda \cdot E(X^2)}U_0} \cdot \Phi\left(-\frac{U_0 - \tau\theta E(X)\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot E(X^2)\tau}}\right) \quad (1)$$

Pravdepodobnosť krachu pre časové obdobia $\tau = 1, 2, 4, 8$ a počiatočné rezervy $U_0 = 100, 200, 400, 600, 800, 1000$ potom vypočítame v programe *Mathematica*.

```
m = 5; delta = 0.2; lambda = 30; t = 1; theta = 0.1; U0 = {100, 250, 500, 1000};
DX = m / delta ^ 2;
ES = m * lambda / delta; DS = lambda * m / delta ^ 2 + lambda * m / delta;
Est = m * lambda * t / delta; RP = m * lambda * (1 + theta) * t / delta;
xt = RP; sigma = Sqrt[m / delta ^ 2];
EX2 = FactorialMoment[GammaDistribution[m, 1 / delta], 2]; EX = m / delta;
1 - E ^ (-delta * xt) * Sum[(E ^ (-lambda * t) * (lambda * t) ^ n / n!) *
Sum[delta ^ i * xt ^ i / i!, {i, 0, m * n - 1}], {n, 1, 200}];
Brownian = CDF[NormalDistribution[theta * lambda * EX * t, (Sqrt[DS * t])], -U0] +
E ^ (-2 * theta * EX * U0 / (EX2)) *
(1 - CDF[NormalDistribution[theta * lambda * EX * t, (Sqrt[DS * t])], U0])
```

Vypočítané hodnoty porovnáme s pravdepodobnosťou krachu určenú koeficientom korekcie. Tieto hodnoty stanovíme vzťahmi (4.34) a (4.35), čo jednoducho vypočítame pomocou softvéru *Mathematica*

```
R = 2 * theta * EX / (DX + ((1 + theta) EX) ^ 2);
Krach = E ^ (-U0 * R)
```

z čoho dostaneme koeficient korekcie $R = 0,0056738$.

Jednotlivé pravdepodobnosti krachu v závislosti od času a počiatočných rezerv zhrnieme do tabuľky 7.2.

U_0	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 4$	$\tau = 8$	$\tau = \infty$
100	<u>0.182511</u>	<u>0.35589</u>	<u>0.469055</u>	<u>0.499752</u>	<u>0.567011</u>
200	<u>0.007876</u>	<u>0.07541</u>	<u>0.194442</u>	<u>0.247357</u>	<u>0.321502</u>
400	$4.02 \cdot 10^{-8}$	0.00027	<u>0.014452</u>	<u>0.054131</u>	<u>0.103363</u>
600	$4.07 \cdot 10^{-17}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$	0.000202	<u>0.007978</u>	<u>0.033232</u>
800	$3.45 \cdot 10^{-39}$	$1.47 \cdot 10^{-14}$	$3.90 \cdot 10^{-7}$	0.000586	<u>0.010684</u>
1000	$4.26 \cdot 10^{-58}$	$4.035 \cdot 10^{-34}$	$9.17 \cdot 10^{-11}$	0.000018	0.0034349

Tab. 7.2: Pravdepodobnosť krachu v závislosti od času a veľkosti počiatočných rezerv

Záver:

Hodnoty podčiarknuté a zvýraznené červenou farbou sú tie, ktoré sú pre poisťovňu nežiaduce, lebo pravdepodobnosť krachu je pre dané časové obdobie a počiatočné rezervy vyššia ako 0,005. Pri počiatočných rezervách $U_0 = 100$ je pravdepodobnosť krachu príliš vysoká už v prvom časovom období. Pri počiatočných rezervách $U_0 = 1000$ je už pravdepodobnosť krachu prijateľná aj vo vzdialenom horizonte. Z takto získaných výsledkov pre konkrétny stav počiatočných rezerv možno vyvodit' patričné opatrenia v súvislosti so zaistením. Ako ich využiť budeme ilustrovať na riešení nasledujúcej problémovej situácie.

7.3 Porovnanie nastavenia optimálneho zaistenia s konštantnou kvótou

V našom príklade použijeme modifikované údaje o 1119 náhodne vybraných poistných udalostiach poistenia casco. Uvažujeme, že na tomto poistení bola stanovená štandardná kvóta vo výške $q = 0,4$. Výsledok porovnáme s optimálnym proporcionálnym zaistením v podobe optimálneho kvótového, surplus zaistenia a zloženie reťazca z týchto dvoch ochrán

a) Stanovme optimálne zaistenie na základe modelu rozdeľníka počtu a výšky individuálnej škody s realizáciou kritéria minimalizácie maximálnej celkovej škody $Var_{0,995}(S^{kol})$. Uvažujme poistnú sumu $S = 220$ p.j., kalkuláciu rizikového poistného podľa princípu disperzie, rizikovú prirážku $\theta = 0,1$ a prirážky na zaistenie $\xi_q = 0,15$, $\xi_\alpha = 0,2$.

b) Odhadnime pravdepodobnosť krachu pre uvedenú situáciu a nastavené hodnoty parametrov zaistenia uvažované v úlohe **a)**, pre rôzne časové obdobia.

Riešenie:

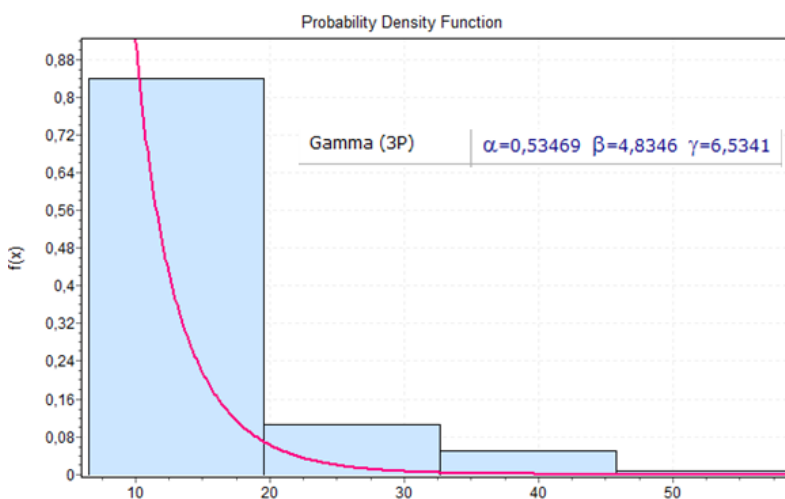
a) Modifikované výšky škôd sme rozdelili do intervalov použitím funkcie *Frequency* v programe *Excel*. Pravdepodobnostné rozdelenie výšky škody sme použitím vytvorených intervalov stanovili pomocou programu *EasyFit*, ktorý tromi štatistickými metódami zoradí rozdelenia podľa relevantnosti. V našom prípade vysvetlíme výšky škôd trojparametrovým rozdelením Gamma, ktoré je podľa Kolmogorov-Smirnovho testu na treťom mieste, ale keďže nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu, postačuje na vysvetlenie náhodnej premennej X .

Distribution	Kolmogorov Smirnov	
	Statistic	Rank
Log-Logistic (3P)	0,13656	1
Gen. Gamma (4P)	0,16517	2
Gamma (3P)	0,2553	3
Normal	0,34521	4
Gamma	0,3465	5
Lognormal (3P)	0,34685	6

Gamma (3P) [#7]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	9				
Statistic	0,2553				
P-Value	0,52073				
Rank	3				
α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Critical Value	0,3391	0,38746	0,43001	0,4796	0,51332
Reject?	No	No	No	No	No

Tab. 7.3: Kolmogorov Smirnov test dobrej zhody

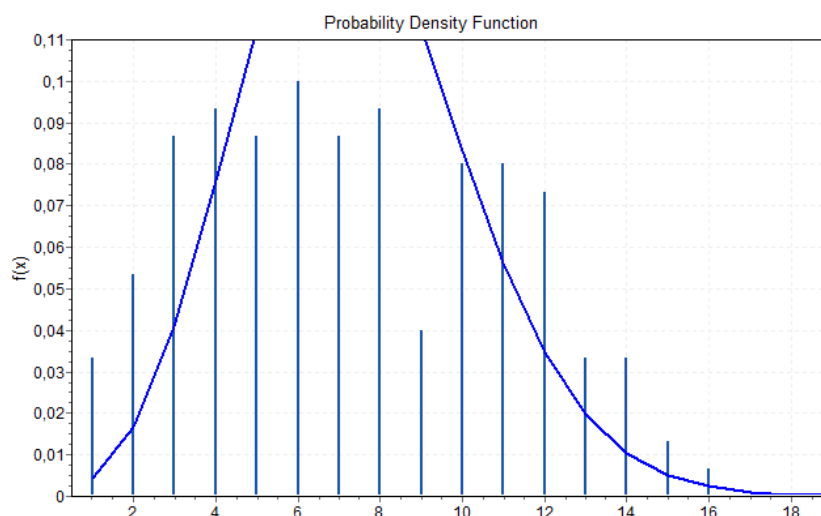
Program *EasyFit* stanovil rozdelenie výšky škôd $X \sim \Gamma(m = 0,53469; \delta = 4,8346; x_0 = 6,5341)$.



Obr. 7.1: Rozdelenie výšky škody popísané Gamma rozdelením

Na základe údajov, ktoré sme mali k dispozícii spočítame poistné udalosti podľa jednotlivých dní. Z počtov poistných udalostí za jednotlivé dni vytvoríme pravdepodobnostné rozdelenie, ktoré znovu určíme pomocou programu *EasyFit*. Najlepší odhad poskytuje Poissonovo rozdelenie.

Rozdelenie počtu udalostí za rok bude potom $N \sim Po(24,59868)$ ²¹



Obr. 7.2: Rozdelenie počtu škôd vysvetlené Poissonovým rozdelením

Teraz, keď máme parametre rozdelenia výšky a počtu škôd, môžeme vypočítať maximálnu možnú škodu, ktorá môže nastať s pravdepodobnosťou $p = 0,995$. Na výpočet, rovnako ako v prvom modelovom príklade použijeme aproximáciu rozdelenia celkovej škody zloženým posunutým Gamma rozdelením v programe *Mathematica*.

```
Zadajte parametre Poissonovho a posunutého Gamma rozdelenia
lambda = 24.58794; alfa = 0.53469; beta = 4.48346; x00 = 6.5341;
Zadajte zaistnú ochranu: 1=kvóta 2=surplus 3=kvóta+surplus 4=surplus+kvóta
hodnota = 4;
S = 220; e1 = 0.2; e2 = 0.15;
EX = Mean[GammaDistribution[alfa, beta, 1, x00]];
DX = StandardDeviation[GammaDistribution[alfa, beta, 1, x00]]^2;
EN = Mean[PoissonDistribution[lambda]]; DN = StandardDeviation[PoissonDistribution[lambda]]^2;
EX2 = FactorialMoment[GammaDistribution[alfa, beta, 1, x00], 2];
EX3 = FactorialMoment[GammaDistribution[alfa, beta, 1, x00], 3];
alpha = (4 * EN * EX2^3) / (EX3^2); betha = 2 * EX2 / EX3; x0 = EN * EX - 2 * EN * EX2^2 / EX3;
VAR = InverseCDF[GammaDistribution[alpha, 1 / betha, 1, x0], 0.995]
ES = Round[Mean[GammaDistribution[alpha, 1 / betha, 1, x0]], 2]
DS = Round[StandardDeviation[GammaDistribution[alpha, 1 / betha, 1, x0]]^2];
Which[hodnota == 1, Minimize[q * VAR + (1 - q) * ES + (1 - q)^2 * DS * e1, {q}],
hodnota == 2, Minimize[a / S * VAR + (1 - a / S) * ES + (1 - a / S)^2 * DS * e2, {a}],
hodnota == 3,
Minimize[q * VAR * a / S + (1 - q) * ES + (1 - q)^2 * DS * e1 + q * (1 - a / S) * ES + q^2 * (1 - a / S)^2 * DS * e2, {q, a}],
hodnota = 4,
Minimize[q * VAR * a / S + (1 - a / S) * ES + (1 - a / S)^2 * DS * e2 + a / S * (1 - q) * ES + (a / S)^2 * (1 - q)^2 * DS * e1,
{q, a}]]
```

22

²¹ Rozdelenia počtu a výšky škôd boli modifikované.

²² Pozn. V programe *EasyFit* sa pracuje s rozdelením hustoty Gamma rozdelenia v tvare $f(x) = \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{x}{\delta}}$.

x^{m-1} . Potom výška celkovej škody $S \sim \Gamma(\text{alpha}, \frac{1}{\text{betha}}, x0)$. Výška individuálnej škody $X \sim \Gamma(\text{alfa}, \text{beta}, x00)$

Hodnota maximálnej možnej škody $VaR_{0,995}(S^{kol}) = 344,649$ p.j. Použitím štandardnej kvóty $q = 0,4$ by sme maximálnu možnú škodu znížili na

$$VaR_p({}^P S_q^{kol}) = 0,4 \cdot VaR_{0,995}(S^{kol}) = 137,8596$$

Optimálne hodnoty kvóty a vlastného vrubu pre poistnú sumu $S = 220$, vypočítaných pomocou nášho modelu, sú zhrnuté v tabuľke 7.4.

Typ zaistenia	Optimálna q, α	$VaR_{0,995}({}^P S^{kol})$	$E({}^P Z^o)$	$VaR_{0,995}({}^P S^{kol})$
Bez zaistenia		344,649	200,6	344,649
Kvóta q	$q = 0,4$	137,8596	92,276	378,183
Kvóta q^*	$q \rightarrow 0,7928$	273,2377	193,333	331,740
Surplus	$\alpha \rightarrow 185,824$	291,109	183,388	334,967
Kvóta + surplus	$q \rightarrow 0,7548$ $\alpha \rightarrow 176,896$	234,081	176,129	322,058
Surplus + kvóta	$q \rightarrow 0,8041$ $\alpha \rightarrow 185,824$	234,081	176,129	322,058

Tab. 7.4: Minimalizácia hodnoty $VaR_{0,995}({}^P S^{kol})$

Vidíme, že v závislosti od výšky rizika, ktoré poisťovateľ prenecháva zaistovateľovi, klesá aj očakávaná hodnota zisku. Pri štandardnej hodnote kvóty $q = 0,4$ by sme dosiahli nižšiu maximálne možnú škodu ako v prípade nami vypočítaného optimálneho zaistenia, na druhej strane by sme však dosiahli aj nižší očakávaný zisk. Keď však vezmeme do úvahy aj náklady na zaistenie, pri štandardnej kvóte dosiahneme dokonca vyššiu hodnotu $VaR_{0,995}({}^P S^{kol})$, ako v prípade, že by sme portfólio poistných zmlúv vôbec nepostúpili na zaistenie.

Pri zaistení kvótou sa však do úvahy berú rôzne faktory, ktoré sme my neuvažovali, ako napr. zníženie očakávanej škody a ekonomické výhody na trhu (rozbiehanie nového produktu a pod.).

Nami stanovená optimálna kvóta ponúka nižšiu hodnotu $VaR_{0,995}({}^P S^{kol})$ ako optimálny vlastný vrub pri surplus zaistení. Dôvod je ten, že prirážka na kvótové zaistenie je spravidla vyššia ako prirážka na zaistenie surplus.

Najnižšiu maximálne možnú škodu s pravdepodobnosťou 0,995 vrátane nákladov na zaistenie sme dosiahli pri kombinácii surplus a kvótového zaistenia, pričom sa potvrdilo, že z hľadiska poisťovateľa nezáleží na poradí zaistenia. Z hľadiska zaistovateľa ale na poradí môže záležať.

b) Použitím vzťahov (4.47), (4.48) a (6.4) vypočítame strednú hodnotu a disperziu procesu Z_t pri kvótovom zaistení

$$\mu_q t = ((1 + \theta)E(X)\lambda - (1 - q)E(X)\lambda - (1 - q)^2 E(X^2)\lambda \cdot \xi_1)t - q\lambda E(X)t \quad (1)$$

$$\sigma_q^2 t = q^2 \lambda E(X^2)t \quad (2)$$

Pre výpočet koeficienta korekcie aplikujeme kvótové zaistenie na vzťah (4.30)

$$R_q = 2 \frac{\theta E(X) - (1 - q)^2 D(X)\xi}{q^2 E(X^2)} \quad (3)$$

čo dosadíme do vzťahu (4.49)

$$\Psi(U_0, \tau) = \Phi\left(-\frac{U_0 + \mu_q \tau}{\sqrt{\sigma_q^2 \tau}}\right) + e^{-R_q U_0} \cdot \Phi\left(-\frac{U_0 - \mu_q \tau}{\sqrt{\sigma_q^2 \tau}}\right) \quad (4)$$

Realizujeme (4.49) pre štandardnú kvótu $q = 0,4$ a hodnoty kvóty a vlastného vrubu vypočítané optimalizačnou metódou v úlohe **a)**. Jednotlivé výšky stredných hodnôt E_{Z_t} v prvom období sú zobrazené na Tab. 7.5.

Výška kvóty, resp. vlastného vrubu	E_{Z_t}
$q = 0,4$	-31,28
$q^* = 0,7928$	10,1588
$\alpha^* = 185,824, S = 220$	12,7783

Tab. 7.5: stredná hodnota procesu Z_t

Vidíme, že pre štandardnú kvótu je stredná hodnota procesu Z_t v našom modeli záporná. Pravdepodobnosť krachu bude potom v porovnaní s optimálnou kvótou omnoho vyššia.

Pravdepodobnosť krachu bez zaistenia aj so zaistením vypočítame pomocou programu *Mathematica*. Uvažujme kvótové zaistenie.

```

m = 0.53469; delta = 1 / 4.8346; x0 = 6.3711; lambda = 24.59868; t = 2; theta = 0.1; U0 = 40; q = 0.7928;
eta1 = 0.15;
EX2 = FactorialMoment[GammaDistribution[m, delta, 1, x0], 2];
EX = Mean[GammaDistribution[m, delta, 1, x0]];
DX = m * delta ^ 2;
mi = ((1 + theta) * EX * lambda - (1 - q) * EX * lambda - eta1 * (1 - q) ^ 2 * EX2 * lambda) * t - q * lambda * EX * t;
si = q ^ 2 * (lambda * m / delta ^ 2 + lambda * m / delta) * t;
R = 2 * theta * EX / (DX + ((1 + theta) * EX) ^ 2);
Rq = 2 * (EX * theta - (1 - q) ^ 2 * DX * eta1) / (q ^ 2 * EX2);
lund = E ^ (-Rq * U0);
1 - E ^ (-delta * xt) * Sum[(E ^ (-lambda * t) * (lambda * t) ^ n / n!) *
Sum[delta ^ i * xt ^ i / i!, {i, 0, m * n - 1}], {n, 1, 200}];
BrownianZaistenie = CDF[NormalDistribution[mi, (sqrt[si])], -U0] +
lund * (1 - CDF[NormalDistribution[mi, (sqrt[si])], U0]);
Brownian = CDF[NormalDistribution[theta * lambda * EX * t, (sqrt[DS * t])], -U0] +
E ^ (-2 * theta * EX * U0 / (EX2)) * (1 - CDF[NormalDistribution[theta * lambda * EX * t, (sqrt[DS * t])], U0])

```

V Tab. 7.6 porovnáme pravdepodobnosti krachu pre rôzny čas a rezervy v prípade aplikácie optimálneho kvótového zaistenia s hodnotami bez zaistenia.

U_0	$\tau = 1$			$\tau = 2$		$\tau = 4$	
Zaistenie:	žiadne	$q = 0,792$	$q = 0,4$	žiadne	$q = 0,792$	žiadne	$q = 0,792$
20	0,2320	0,1060	0,9285	0,3509	0,1898	0,4354	0,2590
30	0,0855	0,0213	0,5661	0,1882	0,0675	0,2786	0,1223
40	0,0265	0,0030	0,1289	0,0932	0,0205	0,1737	0,0543
50	0,0065	0,0003	0,0076	0,0422	0,0053	0,1049	0,0225

Tab. 7.6: Porovnanie pravdepodobnosti krachu so zaistením optimálnou kvótou a bez zaistenia

Záver:

Vidíme, že pri zaistení optimálnou kvótou sme dosiahli podstatné zníženie pravdepodobnosti krachu pre uvedené rezervy a sledovaný čas, pričom rozdiel sa zväčšuje pri narastajúcich počiatočných rezervách.

Štandardná kvóta $q = 0,4$ však poskytuje pre dané rezervy nepriaznivé výsledky. Zdôvodniť by sme to mohli rovnako ako v úlohe a). Ďalší dôležitý faktor, ktorý sme nebrali do úvahy, je provízia od zaistovateľa, ktorá kryje časť administratívnych nákladov.

ZÁVER

Diplomová práca sa venuje vytvoreniu optimálnej zaistnej ochrany, ktorá slúži na minimalizáciu maximálnej možnej škody, ktorá môže nastať s určitou pravdepodobnosťou, ako aj pravdepodobnosti krachu v rôzne dlhých časových intervaloch. Optimálne zaistenie stanovené spôsobom znázorneným v tejto práci je vhodné na zníženie kapitálových požiadaviek, vďaka čomu môže poisťovateľ viazať menej finančných prostriedkov v technických rezervách a viac investovať.

Stanoveniu optimálnej zaistnej ochrany predchádzalo vytvorenie stochastických modelov na určenie hodnôt VaR , $CVaR$ ako aj pravdepodobnosti krachu. Znázornili sme explicitný výpočet týchto hodnôt, ale aj rôzne spôsoby ich aproximácie, ktoré sú vhodné pre jednoduchosť ich výpočtu a na zníženie výpočtovej sily potrebnej na ich stanovenie.

V poslednej kapitole sme ukázali postup, ktorým môžu byť vedomosti nadobudnuté v predchádzajúcich kapitolách, využité v praxi.

V poslednom príklade sme využili reálne údaje poistenia casco, ktoré sme vysvetlili pravdepodobnostnými rozdeleniami. Následne sme vypočítali hodnotu VaR a pravdepodobnosť krachu. Na tieto hodnoty sme aplikovali optimálne zaistenie stanovené vysvetleným modelom a porovnali sme výhodnosť našej zaistnej ochrany so štandardnou kvótou. Zaistenie stanovené na základe nášho modelu ponúklo zníženie pravdepodobnosti krachu ako aj maximálnej možnej škody s pravdepodobnosťou 0,995. Ak by dané portfólio zmlúv bolo zaistené štandardnou kvótou, viedlo by to dokonca k zvýšeniu pravdepodobnosti krachu v porovnaní s modelom bez zaistenia.

Môžeme preto predpokladať, že zavedenie štandardnej kvóty uvažovanej v našom prípade by malo z hľadiska zabezpečenia solventnosti negatívny dopad na portfólio poistných zmlúv. Pritom ale nevylučujeme, že štandardná kvóta je vhodná na plnenie ostatných úloh, ktoré sú uvedené v prvej kapitole.

Nami vytvorený model však môže byť použitý aj pri iných typoch zaistenia.

Zoznam použitej literatúry

- [1] HM Treasury. 2006. Solvency II: a new framework for prudential regulation of insurance in the EU. Dostupné na internete:
http://www.hm-treasury.gov.uk/d/solvencyII_discussionpaper.pdf
- [2] Kaske-Taft, S. 2010. Solvency II Introduction. Dostupné na internete:
<http://www.casact.org/affiliates/csaf/0810/SolvencyIIIntroduction.pdf>,
- [3] EIOPA: 2011 EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II. Dostupné na internete:
https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx.../reports/QIS5_Report_Final.pdf
- [4] Horáková, G., Mucha, V. 2006. Teória rizika v poistení . Bratislava : Ekonóm. 174 s. ISBN 80-225-2141-8.
- [5] Horáková, G., Mucha, V. 2008. Teória rizika v poistení, II. časť. Bratislava: Ekonóm. 164 s. ISBN 80-225-2141-8
- [6] Prednášky z predmetu Teória rizika 1 a 2
- [7] Gerber, U. - Loisel, S. 2012. Why Ruin Theory Should Be Of Interest For Insurance Practitioners And Risk Managers Nowadays. In Actuarial and Financial Mathematics, Belgium.
- [8] Wuthrich, M.V. 2013. From Ruin Theory to Solvency in Non-Life Insurance. Dostupné na internete:
http://www.math.ethz.ch/~wueth/Papers/2013_Ruin_Theory.pdf
- [9] Mojsej, I. 2012. Matematická analýza 1 pre informatikov a fyzikov. Košice. Dostupné na internete:
http://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN3a/moc_rady.pdf
- [10] Dickson, D.C.M. - Waters, H.R. 1993. Gamma Processes And Finite Time Survival Probabilities. In Astin Bulletin 23, Edinburgh.

- [11] Krátka, Zuzana: Zaistenie. 2007. Bratislava:Ekonom. 161 s. ISBN:978-80-225-2411-7
- [12] Cipra, T. 2004. Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: Grada Publishing.264 s. ISBN: 80-247-0838-8.
- [13] Zhi Li. 2008. Optimal Reinsurance Retentions under Ruin-Related Optimization Criteria, dizertačná práca,