Problém minimalizácie nákladov pri prestavovaní linky

Juraj Pekár

Summary
The model task was to minimize costs for rebuilding of the production line. In order to find the right solution for this larger scale task the heuristic algorithm with the linear difficulty is used. The effectiveness of the heuristic algorithm is tested by comparing results obtained by method of explicit enumeration and heuristic method for the generated tasks. The optimization and heuristic method was programmed in Visual Basis under application MS Excel.

Kľúčové slová
optimalizácia, heuristika, výrobná linka, minimalizácia nákladov

Úvod

V príspevku je na základe poznatkov z oblasti matematického programovania rozobraný špeciálny model. V prvej časti je opísaný spôsob jeho zostrojenia ako aj možné metódy riešenia. Pre tento model je zostrojený heuristický algoritmus, ktorý prináša pre daný problém prijateľné suboptimálne riešenie. Overenie efektivity heuristického algoritmu je uskutočnené porovnaním riešení získaných pomocou metódy explicitnej enumerácie a heuristickej metódy na vygenerované úlohy.

1. Problém minimalizácie nákladov pri prestavovaní linky

Pri riešení úloh vo výrobnom podniku sa stretávame s problémom nastavenia zariadenia, ktorý možno charakterizovať nasledovným spôsobom.

Podnik má zariadenie na výrobu pásového materiálu (výroba látky, fólií, baliaceho papiera a pod.). Odberatelia stanovili parametre výrobku, t. j. šírku, hrúbku, množstvo. Pri realizovaní výroby má podnik dve možnosti výroby jednotlivých typov výrobkov:

1. Pri výrobe i-tého výrobku nastaví linku na požadovanú šírku, čím vzniknú dodatočné náklady na prestavenie linky.
2. Vyrába výrobok pri realizácii iného výrobku s väčšou šírkou a dodatočným prispôsobením šírky dosiahne dané parametre. Pri tomto spôsobe vznikajú dodatočné náklady spôsobené prispôsobením výrobku a odpadom materiálu.

Formulácia úlohy:

Podnik má vyrobiť n typov výrobkov s hrúbkou h, so šírkami $s_1, s_2, ..., s_n$ a požadovaným množstvom $b_1, b_2, ..., b_n$, pričom výrobky sú usporiadané podľa šírky vzostupne $\left(s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n\right)$. Náklady na prestavenie linky sú n_p, náklady na úpravu výrobku a odpadu pri produkcii i-tého výrobku prispôsobením z j-tého výrobku sú $f_{i,j}$. Úlohou je určiť, na aké parametre podnik nastaví výrobnú linku, aby náklady na realizáciu boli minimálne.

Prvotným cieľom bolo formulovať príslušný problém ako úlohu matematického programovania. Pri voľbe typu úlohy sme na základe vlastností problému dospeli k záveru, že ju treba sformulovať ako úlohu bivalentného programovania, pričom premenné budú označovať, či sa príslušný typ produktu bude realizovať úpravou z iného typu (hodnota premennej bude rovná 0), prípadne sa zariadenie prestaví na parametre výrobku (hodnota premennej bude rovná 1). Ďalším krokom bolo zostrojenie účelovej funkcie.

Pre premennú x_i, $i = 1,2,...,n$ musí platiť:

1. ak má hodnotu rovnú 1, tak sa hodnota účelovej funkcie zvýši o hodnotu n_p,
2. ak nadobúda hodnotu 0, tak musíme nájsť posledné nastavenie zariadenia (nájsť premennú $x_j = 1$, pričom *j* > *i*) a hodnotu účelovej funkcie zvýšiť o náklady na odpad a úpravu z *j*-tého výrobku na *i*-tý výrobok.

Keďže premenné nadobúdajú binárne hodnoty zápis účelovej funkcie pre *i*-tú zložku môžeme zapísať nasledovným vzťahom:

$$n_p \cdot x_i + (1 - x_i) \cdot [x_{i+1} \cdot f_{i,i+1} + \sum_{j=i+2}^{n} x_j \cdot f_{i,j} \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - x_k)] \qquad (1)$$

Uvedený problém možno zapísať nasledujúcou matematickou formuláciou:

$$n(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{l=1}^{n-1} \left(n_p \cdot x_l + (1 - x_l) \cdot [x_{l+1} \cdot f_{l,l+1} + \sum_{j=l+2}^{n} x_j \cdot f_{l,j} \cdot \prod_{k=l+1}^{j-1} (1 - x_k)] \right) + n_p \cdot x_n \to \min$$

$$x_n = 1$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \{0,1\}$$

(2)

Ohraničenie stanovuje podmienku nastavenia najväčšej šírky, t. j. vždy sa musí nastaviť zariadenie aspoň raz, na najväčší rozmer. Túto podmienku možno vynechať s tým, že zavedieme premennú $x_n = 1$. Potom možno formuláciu (2) upraviť na tvar:

$$n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = \sum_{l=1}^{n-1} \left(n_p \cdot x_l + (1 - x_l) \cdot [x_{l+1} \cdot f_{l,l+1} + \sum_{j=l+2}^{n} x_j \cdot f_{l,j} \cdot \prod_{k=l+1}^{j-1} (1 - x_k)] \right) + n_p \to \min$$

$$x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in \{0,1\}$$

(3)

Množina prípustných riešení obsahuje 2^{n-1} prípustných riešení. Pri riešení úlohy možno použiť metódu explicitnej enumerácie (Laščiak 1983). Problém je s riešiteľnosťou úlohy pri väčšom počte výrobkov, nakoľko zložitosť algoritmu je exponenciálna. Naprogramovali sme algoritmus, ktorý danú úlohu rieši. Avšak pri riešení úlohy s viac ako 30 premennými je doba riešenia už viac ako 10 minút a doba riešenia sa exponenciálne zväčšuje s počtom premenných.

Druhou možnosťou je použitie heuristického prístupu. Možno navrhnúť heuristickú metódu riešenia, ktorá nájde optimálne riešenie, prípadne riešenie blízke k optimálnemu. Očakáva sa od nej zníženie zložitosti algoritmu tak, aby bol riešiteľný pre ľubovoľný počet premenných.

2. Heuristická metóda riešenia problému minimalizácie nákladov pri prestavovaní linky

Rozhodovanie pri tvorbe metódy vychádzalo z formulácie danej úlohy. Ako sme uviedli, úlohou je minimalizovať výrobné náklady. Pri realizácii výroby máme dva druhy nákladov:

1. náklady na prestavenie zariadenia v prípade, ak pri výrobe výrobku s väčšou šírkou prechádzame na produkt s menšou šírkou,
2. náklady na odpad, keďže pri výrobe výrobku s väčšou šírkou prechádzame na produkt s menšou šírkou, zariadenie neprestavujeme.

Metóda na riešenie problému minimalizácie nákladov pozostáva z porovnávania týchto dvoch druhov protichodných nákladov. Pri zmene výroby vznikajú náklady na prestavenie zariadenia. Ak sa linka neprestavuje vznikajú náklady na odpad realizovaný pri výrobe. Princípom je vzájomné porovnávanie nákladov, t. j. hľadanie bodov, pri ktorých sa už oplatí prestaviť výrobnú linku.

Postup riešenia problému:

Prvá fáza:

I. Usporiadať požadované výrobky podľa šírky od najmenšej po najväčšiu. V prípade zhodnej šírky výrobku podľa času výroby od najmenšieho po najväčší.

II. Zostrojiť maticu nákladov pri neprestavení linky.

$$
\begin{array}{ccccc}
f_{1,2} & \ldots & f_{n-3,n-2}+f_{n-4,n-2}+\ldots+f_{1,n-2} & f_{n-2,n-1}+f_{n-3,n-1}+\ldots+f_{1,n-1} & f_{n-1,n}+f_{n-2,n}+\ldots+f_{1,n} \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & f_{n-3,n-2} & f_{n-2,n-1}+f_{n-3,n-1} & f_{n-1,n}+f_{n-2,n}+f_{n-3,n} \\
 & & & f_{n-2,n-1} & f_{n-1,n}+f_{n-2,n} \\
 & & & & f_{n-1,n}
\end{array}
$$

kde $f_{i,j}$ – náklady na úpravu výrobku a odpadu pri produkcii i-tého výrobku prispôsobením z j-tého výrobku.

Prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci vyjadruje náklady na výrobu výrobkov j–1 až i, ak sa posledné prestavenie linky realizovalo pri j-tom výrobku a nasledujúce prestavenie sa realizuje pri i-tom výrobku.

Výrobok	1. pokus		2. pokus		3. pokus		4. pokus		5. pokus		6. pokus		7. pokus		8. pokus		9. pokus		10. pokus	
	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E	H	E
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
13	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1			1	1
14	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1					1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
16	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0						
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
18			1	1	1	1	0	0			1	1	1	1						
19			1	1	1	1	1	1			0	0	0	0						
20			0	0	0	0					1	1	0	0						
21			0	0	0	0					1	1	1	1						
22			1	1	1	1														

H – riešenie heuristickým algoritmom
E – riešenie metódou explicitnej enumerácie
0 – neprestavovať zariadenie
1 – prestavovať zariadenie

Tabuľka 1

Druhá fáza (na základe matice nákladov):

1. nastavenie výroby na n-tý výrobok $l = n$;
2. uchováme posledné nastavenie ($x_l = 1$);
3. ak $l = 1$ tak prechod na krok 6, inak krok 4;
4. v stĺpci l nájdenie prvého prvku k, kde $f_{l-1,l} + f_{l-2,l} + ... + f_{k,l} > n_p$, ak neexistuje taký prvok, tak krok 6;
5. pri výrobe sa nastaví linka na k-tý spôsob, $l = k$ a prechod na krok 2;
6. všetky premenné okrem premenných určených v kroku 2 nadobúdajú hodnotu 0

V ďalšej časti je potrebné overiť aproximačné vlastnosti algoritmu, t. j. do akej miery sa výsledky získané pomocou heuristickej metódy zhodujú s optimálnym riešením, prípadne, aká je odchýlka od optimálneho riešenia.

Na overenie správnosti sme vytvorili generátor uvedených úloh, ktoré sme riešili pomocou heuristickej metódy, ako aj metódou explicitnej enumerácie. Použitý heuristický algoritmus v prevažnej väčšine prípadov našiel optimálne riešenie. V tabuľke 1 sú vybrané generované úlohy riešené heuristickým algoritmom, ako aj algoritmom explicitnej enumerácie. Pri porovnaní výsledkov možno pozorovať zhodnosť výsledkov vo všetkých prípadoch okrem 5. pokusu, čo je vysvetlené ďalej.

V prípade 5. pokusu (tabuľka 2) nastala zmena oproti optimálnemu riešeniu, pri realizovaní 7. a 8. výrobku. Heuristický algoritmus porovnal náklady na stratu z odpadu pri prechode z 9. na 8. výrobok (tabuľka 3 – zvýraznená bunka), ktoré sú nižšie ako náklady na prestavenie $\left(n_p = 770 \text{ Sk}\right)$. Na základe tejto skutočnosti určil, že netreba prestavovať linku. Avšak pri určovaní ďalšej stratégie boli náklady na prestavenie linky nižšie ako odpad zo 7. a 8. výrobku, t. j. rozhodol sa prestaviť linky na 7. výrobok.

Výrobok	Šírka	Hrúbka	Počet hodín	Výroba za hodinu	Plán výroby pri riešení heuristikou	Optimálny plán výroby
1.	1050	0,06	14,73914	154,6496	1	1
2.	1070	0,06	24,96653	157,48696	0	0
3.	1070	0,06	30,98244	157,48696	1	1
4.	1110	0,06	20,39761	163,16168	1	1
5.	1130	0,06	18,50077	165,99904	1	1
6.	1190	0,06	2,369475	174,51112	0	0
7.	1190	0,06	5,813246	174,51112	1	0
8.	1200	0,06	12,46032	175,9298	0	1
9.	1210	0,06	29,45713	177,34848	1	1
10.	1280	0,06	13,383	187,27924	1	1
11.	1400	0,06	4,001567	204,3034	0	0
12.	1440	0,06	7,226834	209,97812	1	1
13.	1470	0,06	1,471117	214,23416	0	0
14.	1490	0,06	10,78619	217,07152	1	1
15.	1540	0,06	12,36708	224,16492	1	1
16.	1630	0,06	8,841048	236,93304	1	1
17.	1680	0,06	13,04123	244,02644	1	1

Tabuľka 2

Heuristický algoritmus sa nevracia k už stanoveným hodnotám riešenia. V prípade porovnania rozdielu medzi nákladmi z odpadu medzi 8. a 7. výrobkom je hodnota rovná 270, pričom pri poslednom nastavení zariadenia na 9. výrobok vznikajú dodatočné náklady na úrovni 1119 – 579 = 540. Tento fakt spôsobuje odchýlku od optimálneho riešenia. Problémom pri aplikovaní tohto javu do vytvoreného algoritmu by bolo zvýšenie časovej náročnosti algoritmu, ako aj spôsobu jeho zavedenia.

1369	1369	14502	22964	53504	53504	58974	65023	116942	213406	246304	271985	289242	334890	422225	472798
	0	10395	17487	43920	43920	48705	54069	101197	189445	219605	243232	259120	301344	382519	429669
		5756	10529	30004	30004	33630	37834	76844	151177	176699	196847	210415	246842	317579	358931
			1895	12735	12735	14922	17688	46624	103689	123453	139284	149975	179206	236992	271148
				5156	5156	6395	8213	30518	76213	92189	105177	113973	138467	187726	217145
					0	380	1339	17628	53012	65550	75960	83037	103235	144760	169883
						270	1119	16638	50701	62798	72879	79736	99383	139918	164490
							579	14208	45030	56048	65318	71635	89932	128037	151260
								9577	33455	42158	49692	54851	70255	103151	123479
									7459	10689	14119	16542	25104	45686	59173
										743	2308	3488	8942	23930	34309
											1007	1815	6340	19655	29105
												137	2983	13277	21049
													2505	12184	19614
														5170	10095
															2053

Tabuľka 3 (náklady pri neprestavení linky v Sk)

Záver

Na záver však možno konštatovať, že vytvorený heuristický algoritmus poskytuje riešenie optimálne, prípadne veľmi blízke optimálnemu. Použitím príslušného algoritmu však prekonáme hlavný problém, ktorým je časová zdĺhavosť štandardnej metódy vedúca pri úlohách väčších rozmerov k neriešiteľnosti v reálnom čase.

Literatúra

1. Dantzig, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, 11. vydanie, 1998.
2. Ivaničová, Z., Brezina, I., Pekár, J.: Operačný výskum. IURA Edition, Bratislava 2002.
3. Janáček, J.: Matematické programování. EDIS, Žilina 1999.
4. Laščiak, A. a kol.: Optimálne programovanie. ALFA, Bratislava 1983.

Kontakt

Mgr. Juraj Pekár
FHI EU
Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Dolnozenská 1
Bratislava
tel.: 67295 828
e-mail: pekar@euba.sk