

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/D/2022/36122163471746052

**KVANTIFIKÁCIA A AGREGÁCIA RIZÍK
INTERNÉHO MODELU KOMERČNEJ POISŤOVNE
PRE POTREBY URČENIA MIERY SOLVENTNOSTI**

Dizertačná práca

Bratislava 2022

Ing. Ivana Faybíková

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

KVANTIFIKÁCIA A AGREGÁCIA RIZÍK
INTERNÉHO MODELU KOMERČNEJ POISŤOVNE
PRE POTREBY URČENIA MIERY SOLVENTNOSTI

Dizertačná práca

Študijný program: 3.2 Kvantitatívne metódy v ekonómii

Študijný odbor: 8. Ekonómia a manažment

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva

Vedúci záverečnej práce: doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD.

Bratislava 2022

Ing. Ivana Faybíková

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

- Meno a priezvisko študenta:** Ing. Ivana Faybíková
Študijný program: kvantitatívne metódy v ekonómii (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)
Študijný odbor: ekonómia a manažment
Typ záverečnej práce: Dizertačná záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický
- Názov:** Kvantifikácia a agregácia rizík interného modelu komerčnej poisťovne pre potreby určenia miery solventnosti.
- Literatúra:**
1. AUER, M.: Hands-On Value-at-Risk and Expected Shortfall. A Practical Primer. Springer, 2018. ISBN 978-3319723198.
 2. CHANG, J.: R Graphics Cookbook. Practical Recipes for Visualizing Data. O'Reilly, 2019. ISBN 9781491978603.
 3. GROLEMUND, G. – WICKHAM, H.: R for Data Science. Import, Tidy, Transform, Visualize, and Model Data. O'Reilly, 2016. ISBN 9781491910399.
 4. HOFERT, M. – KOJADINOVIC, I. – MÄCHLER, M. – YAN, J.: Elements of Copula Modeling with R. Springer, 2018. ISBN 9783319896342.
 5. JOE, H.: Dependence Modeling with Copulas. CRC Press, 2015. ISBN 978-1466583221.
 6. KAAS, R. – GOOVAERTS, M. – DHAENE, J. – DENUIT, M.: Modern Actuarial Risk Theory. Using R. Springer, 2008. ISBN 9783540709923.
 7. LAM, J.: Enterprise Risk Management. From Incentives to Controls. Wiley, 2014. ISBN 9781118413616.
 8. SMERNICA EURÓPSKEHO PARLAMENTU A RADY 2009/138/ES z 25. novembra 2009 o začatí a vykonávaní poistenia a zaistenia (Solventnosť II). Prepracované znenie. URL: < <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=SK> >
 9. WICKHAM, H.: Mastering Shiny [online]. URL < <https://mastering-shiny.org/action-workflow.html> >
- Cieľ:** Cieľom dizertačnej práce je prezentovať kvantifikáciu a agregáciu rôznych typov rizík v internom modeli komerčnej poisťovne pre potrebu určenia miery solventnosti so softvérovou podporou jazyka R.
- Anotácia:** Súčasná situácia v riadení rizík poukazuje na potrebu kvalitného modelovania rizík komerčných poisťovní, pričom medzi analyzované riziká sú štandardne zaradované trhové, kreditné, operačné a katastrofické riziko, či aj riziká spojené so životným poistením. Moderný nástroj pri modelovaní rizík v rámci interných modelov predstavujú Monte Carlo simulácie. Tie dokážu s použitím mier rizika vhodne riziko kvantifikovať. Okrem samotnej kvantifikácie rizík je pre odhad miery solventnosti potrebné venovať pozornosť ich agregácii. V tejto problematike sa aktuálne využíva sofistikovaný prístup, ktorý je reprezentovaný kopula funkciami. Uvedená téma bude v rámci jej riešenia softvérovo podporená prostredníctvom programovacieho jazyka R, ktorý má kvalitne vyvinuté prostredie pre štatistické analýzy a grafické zobrazenia. Je



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

teda vhodným nástrojom na realizáciu predstavených riešiteľských techník
v uvedenej oblasti riadenia rizík.

Školiteľ: doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD.
Katedra: KMA FHI - Katedra matematiky a aktuárstva FHI
Vedúci katedry: doc. Ing. Michal Páleš, PhD.

Dátum zadania: 10.05.2019

Dátum schválenia: 13.05.2019

doc. RNDr. Mária Bilíková, PhD.
predseda odborovej komisie

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracovala samostatne a uviedla som všetku použitú literatúru.

Dátum:

.....

(podpis študenta)

PodĎakovanie

Moje podĎakovanie v prvom rade patrí vedúcemu dizertačnej práce doc. Mgr. Vladimírovi Muchovi, PhD., za podporu, množstvo vedomostí a cenné rady, ktoré mi v priebehu celého obdobia poskytoval. Ďakujem mojim úžasným rodičom a starým rodičom, ktorí celý čas stáli pri mne a podporovali ma a v neposlednom rade ďakujem Milošovi a Tomášovi, ktorí to celé prežívali so mnou a poskytovali mi odborné rady.

My special thank you goes to Janusz Milek, maestro in risk aggregation using copulas in insurance sector for showing me the magic of copulas.

Abstrakt

FAYBÍKOVÁ, Ivana: Kvantifikácia a agregácia rizík interného modelu komerčnej poisťovne pre potreby určenia miery solventnosti. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva. – Vedúci záverečnej práce: doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2022, 132 strán

Cieľom diplomovej práce je kvantifikácia a agregácia rizík poisťovacej spoločnosti pre účely určenia miery solventnosti. Práca je rozdelená na štyri hlavné kapitoly. V rámci prvej kapitoly sa sústreďujeme na teoretické objasnenie rizík, ktorým poisťovacie spoločnosti čelia, legislatívnym reguláciám a princípom agregácie rizík v internom modeli. Druhá kapitola objasňuje cieľ práce a čiastkové ciele, ktoré je nutné v rámci práce splniť. Tretia kapitola obsahuje metodiky ku čiastkovým cieľom diplomovej práce, ako aj matematický postup pre dosiahnutie hlavného cieľa. Posledná, štvrtá kapitola sa venuje výsledkom práce a diskusii. V kapitole analyzujeme marginálne rozdelenia troch rizík, pre ktoré následne generujeme kopulové variácie pomocou viacrozmernej MB11 kopuly a získavame združené marginálne rozdelenie rizík, ktoré slúži na vyčíslenie výšky rizikového kapitálu a miery solventnosti. Výsledky interpretujeme a predstavujeme grafický nástroj na prezentovanie výsledkov. Dizertačná práca si kladie za cieľ oboznámiť čitateľa s inovatívnymi metódami využívanými na agregáciu rizík a odhad miery solventnosti medzinárodných poisťovacích spoločností s internými modelmi.

Kľúčové slová:

miera solventnosti, rizikový kapitál, riziko, kopula, závislosti, interný model

Abstract

FAYBÍKOVÁ, Ivana: Quantification and aggregation of risks of the internal model of a commercial insurance company for the needs of solvency ratio estimation. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Mathematics and Actuarial Science. – Thesis Supervisor: doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2022, 132 pages

The aim of the thesis is quantification and aggregation of risks of an insurance company for the purpose of determining the solvency ratio. The thesis is divided into four main chapters. The first chapter focuses on the theoretical explanation of the risks faced by insurance companies, the legislative regulations and the principles of risk aggregation in the internal model. The second chapter clarifies the aim of the thesis and the sub-objectives to be achieved within the thesis. The third chapter contains the methodologies to the sub-objectives of the thesis as well as the mathematical procedure for reaching the main objective. The last, fourth chapter is devoted to the thesis results and discussion. In the chapter, we analyze the marginal distributions of the three risks, for which we then generate copula variations using the multivariate MB11 copula and obtain the pooled marginal distribution of the risks, which is used to quantify the amount of risk capital and the solvency ratio. We interpret the results and present a graphical tool to present the results. The dissertation aims to familiarize the reader with innovative methods used to aggregate risks and estimate solvency ratios of international insurance companies with internal models.

Keywords:

solvency ratio, risk capital, risk, copula, dependencies, internal model

Obsah

Úvod.....	10
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí.....	12
1.1 Riziká vplývajúce na poisťovaciu spoločnosť.....	16
1.1.1 Trhové riziko.....	18
1.1.2 Kreditné riziko	19
1.1.3 Životné riziká.....	20
1.1.4 Neživotné riziká.....	22
1.1.5 Katastrofické riziká.....	22
1.2 Agregácia rizík a rizikový kapitál	23
1.3 Metodológie odhadu požadovaného kapitálu	26
1.3.1 Direktíva Solventnosť II	27
1.3.2 Švajčiarsky test solventnosti.....	30
1.3.3 Štandardný vzorec SCR.....	32
2 Cieľ práce.....	35
3 Metodika práce a metódy skúmania	36
3.1 Agregácia rizík	40
3.1.1 Miery rizika VaR, ES a očakávaná strata	40
3.1.2 Miera solventnosti.....	43
3.2 Miery asociácie.....	43
3.2.1 Pearsonov lineárny korelačný koeficient.....	45
3.2.2 Poradové korelačné miery	45
3.2.3 Chvostová závislosť	47
3.3 Kopuly	48
3.3.1 Eliptické kopuly	55
3.3.2 Vybrané Archimedianové kopuly	58
3.3.3 Kopula prežitia.....	62

3.3.4	Význam simulácií pri agregácii rizík.....	64
3.3.5	Význam kopúl pri agregácii rizík	69
3.4	Viacrozmerná MB11 kopula	72
3.4.1	Generátor viacrozmernej kopule MB11	80
3.4.2	Validácia modelu	83
3.5	Programovací jazyk R	84
3.5.1	Využitie programovacieho jazyka R pri tvorbe modelu agregácie.....	85
3.5.2	Aplikácia Shiny.....	87
4	Praktická časť.....	89
4.1	Model: Vstupné údaje.....	90
4.1.1	Marginálne rozdelenia rizík	91
4.1.2	Chvostové závislosti rozdelení rizík	97
4.2	Model: Kopula.....	99
4.3	Model: Agregácia rizík a odhad miery solventnosti.....	104
4.4	Validácia kvality modelu.....	112
4.5	Interpretácia výsledkov	114
4.6	Grafické zobrazenie výsledkov aplikáciou Shiny	117
	Záver	126
	Zoznam použitej literatúry	129

Úvod

Insolventnosť – stav, v ktorom sa nechce ocitnúť žiadna finančná spoločnosť, či už ide o oblasť bankovníctva alebo poisťovníctva. Stav, kedy poisťovacia spoločnosť nie je schopná pokryť výšku svojich záväzkov vplýva hneď na niekoľko skupín subjektov prepojených s danou poisťovacou jednotkou. Prvou skupinou sú poistené osoby, ktoré v čase nastania insolventnosti sú v procese úhrady poistného plnenia za škodu, pričom sa môže stať, že poisťovacia spoločnosť nebude schopná čiastočne pokryť výšku poistného plnenia alebo dokonca môže dôjsť k úplnému výpadku výplaty poistného plnenia. V prípade, že poistená osoba požiada o vrátenie poistného, na ktoré má do určitej miery nárok, nemusí byť jeho/jej požiadavka naplnená. Insolventnosť poisťovacej spoločnosti má vplyv aj na ostatných poisťovateľov na poistnom trhu, pretože u nich môže dôjsť ku škode v prípade obchodného prepojenia s insolventnou poisťovacou spoločnosťou, napríklad, ak insolventná poisťovacia spoločnosť slúžila ako zaistovateľ. Taktiež vzrastá nedôvera ľudí v poistenie a na poistnom trhu môže byť citelný pokles záujmu o poistenie vo forme poklesu prijatého poistného alebo hromadného rušenia poistných zmlúv. Po nastaní takejto situácie zvyčajne sprísni regulácie aj dozorný orgán, ktorý môže nariadiť zvýšenie hodnoty požadovaného kapitálu celoplošne, čiže aj pre spoločnosti, ktoré sú kapitalizované v očakávanej miere. Dopad insolventnosti cítiť aj v rámci poisťovacej spoločnosti. Zamestnanci môžu prísť o svoj príjem, prácu a kvôli zlej vizitke ich zamestnávateľ a môžu mať problém nájsť si novú prácu v poistnej oblasti. Veritelia, akcionári a investori prichádzajú o svoj kapitál. Situácia, kedy sa hoci len jedna poisťovacia spoločnosť stane insolventnou, môže mať vplyv na obyčajných ľudí, podniky, celé odvetvie či krajinu, vrátane sily ekonomiky štátu. Práve preto by poisťovacie spoločnosti mali dbať na kvalitné modely, ktoré im pomôžu odhaliť slabé miesta a neistoty, veriť reguláciám a postupovať podľa určených pravidiel.

Oblasť, ktorej záujmom sú riziká poisťovacej spoločnosti sa nazýva manažment rizík, medzinárodne známy pod pojmom *Enterprise Risk Management*. Tento systém pre riadenie rizík sa venuje rizikám, ktorým poisťovacia spoločnosť podlieha, pričom najčastejšie sú to riziká trhové, kreditné, životné, neživotné, katastrofické a operačné. Manažment rizík sa okrem iného zaoberá aj spôsobmi či stratégiami, ako rizikám predchádzať alebo ako sa správať v prípade existencie výrazne materiálnych rizík. Súčasťou manažmentu rizík je význam, znalosť a potreba príslušných regulácií, ktoré slúžia ako metodologické usmernenie, ktorých naplnenie sledujú vybraný dozorný orgán. Poisťovne sú

v súčasnosti povinné dodržiavať viaceré právne a regulačné ustanovenia. Regulácia poisťovacieho sektora neslúži iba na kontrolu poisťovacích spoločností a určovanie podmienok podnikania, no je tiež východiskom pre vytváranie konkurencieschopného prostredia na poistnom trhu, čo môžu privítať aj samotní poistení. Opatrenia vydávané regulátormi sú často vo forme odporúčaní, limitov, akceptovateľných postupov. Všetko, čo poisťovňa nakoniec po schválení regulátorom aplikuje do obchodnej praxe, je kombinácia toho, čo musí dodržať a vlastného know-how. Typickým príkladom pre oblasť riadenia rizík sú interné modely, ktoré využívajú najmä veľké medzinárodné spoločnosti. Interný model je nástroj schválený príslušným dozerajúcim regulátorom, ktorý slúži k presnejšiemu odhadu rizika a kapitálu a to najmä pre spoločnosti, veľké spoločnosti, ktorým by využívanie štandardného vzorca alebo parciálneho interného modelu mohlo potenciálne kvôli prekapitalizácii ublížiť.

Nakoľko problémy s insolventnosťou poisťovne neprepadnú zo dňa na deň, je dôležité sledovať aj jej obchodné vystupovanie. Medzi faktory, ktoré môžu dostať poisťovnu do ťažkostí, boli zo skúseností z minulosti identifikované nedostatočné rezervy, rýchly obchodný rast na úkor nedostatočného poistného, rôzne podvody, nadhodnotené aktíva poisťovacej spoločnosti, katastrofické udalosti s nedostatočnou pripravenosťou na situáciu s extrémnymi škodami, výrazná zmena podnikateľskej stratégie, zlyhanie zaistenia a komplikácie po združení spoločností, pričom pridružená spoločnosť vykazuje značné finančné ťažkosti.

V dizertačnej práci sa venujeme základným pojmom z oblasti manažmentu rizík, jednotlivým rizikám, ktorým podliehajú medzinárodné komerčné poisťovne a ktorých veľkosť štandardne odhadujú. Čitateľovi objasníme princípy najznámejších metodológií využívaných pre odhad miery solventnosti, direktívu Solventnosť II a Švajčiarsky test solventnosti, ktorým podliehajú aj niektoré poisťovacie spoločnosti pôsobiace a podnikajúce na území Slovenskej republiky. V rámci metodológií predstavíme aj pojem interného modelu. Najdôležitejšou a hlavnou časťou našej práce je vytvorenie a predstavenie modelu na odhad miery solventnosti, zahŕňajúceho agregáciu rizík za pomoci moderných metód, akými sú kopule v spojení s Monte Carlo simuláciami. Kvalitná agregácia zabezpečuje primeranú mieru kapitalizácie, ktorá by nemala spôsobiť insolventnosť poisťovne v priebehu sledovaného obdobia. Konečným cieľom našej práce je odhad agregovaného rizikového kapitálu pre tri riziká a určenie miery solventnosti. Výsledky práce predstavíme aj za pomoci dynamického a veľmi moderného dashboardu v aplikácii Shiny.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V súčasnosti je téma o manažovaní rizík vrátane odhadu ekonomického kapitálu v poisťovacích spoločnostiach veľmi aktuálna a nie iba kvôli pretrvávajúcej pandémie či nešťastnej vojne na Ukrajine. Medzinárodné spoločnosti podnikajúce celosvetovo sú povinné vykazovať zodpovedným dozorným orgánom stav kapitálu a voľných finančných prostriedkov, vrátane miery solventnosti. Poisťovacie spoločnosti sú vo všeobecnosti povinné viesť svoje podnikanie tak, aby nemohla nastať situácia, kedy budú neschopné výplaty záväzkov voči svojim klientom. V rámci manažmentu rizík bol preto vytvorený systém pre riadenie rizík, nazývaný podnikové riadenie rizika ERM – *Enterprise Risk Management*. Proces ERM je uskutočňovaný predstavenstvom, riadiacimi orgánmi a ostatným personálom spoločnosti, ktorý sa uplatňuje pri stanovovaní stratégií a je určený na identifikáciu potenciálnych udalostí, ktoré môžu mať vplyv na spoločnosť a tiež slúži na riadenie rizika tak, aby zodpovedalo jeho povahe. Efektívne riadenie rizika slúži pre vzniknuté riziká, popisuje metódy, akými riziko možno diverzifikovať, no tiež spôsoby, akými je možné doposiaľ nevzniknutým rizikám predchádzať. V prípade nastania situácie, kedy by dostupný kapitál spoločnosti bol nižší než požadovaný kapitál, pocit znepokojenia zo strany klientov či investorov by bol na mieste. Zodpovedný regulátor by v takomto prípade mohol vyžadovať od poisťovacej spoločnosti, aby prijala opatrenia pre získanie opätovnej primeranej kapitalizácie. Zodpovedný regulátor má právomoci napríklad požiadať poisťovateľa, aby znížil svoje riziká alebo aby previedol portfólio do inej poisťovacej spoločnosti. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že metodológie na odhad kapitálových požiadaviek prispievajú k včasnej identifikácii rizík a ochrane záujmov poistených.

Jedným z najznámejších autorov, ktorí sa venovali oblasti ERM je J. Lam (*Enterprise Risk Management: From Incentives to Controls*, 2014), ktorý veľmi detailne popísal riadiacu aj výkonnú stranu manažmentu rizík v rámci poisťovacích spoločností. Vo svojom diele sa venuje kvalifikácii a kvantifikácii rizík, reguláciám a agregácii rizík, ktorá úzko súvisí s témou našej práce. Dielo Jamesa Lama nám slúži ako podklad najmä pre teoretickú časť dizertačnej práce. Medzi publikácie, ktoré tiež veľmi kvalitne popisujú moderné metódy agregácie rizík, patrí publikácia *Correlations and Dependencies in Economic Capital Models* (2009), od autorov Richard Shawn a Grigory Spivak, ktorí sa venovali koreláciám a závislostiam pri určovaní ekonomického kapitálu poisťovacej spoločnosti, pričom popísali rôzne metódy agregácie rizík, akými sú napríklad VCV, metóda kopúl, diverzifikácia rizík za pomoci fixných korelačných koeficientov a mnohých ďalších.

Naším záujmom sú predovšetkým metódy agregovania využitím funkcie kopúl. Čo sa týka samotnej histórie vzniku kopúl, za ich stvoriteľa považujeme matematika menom A. Sklar, ktorý v roku 1959 zaviedol pojem kopule a dokázal základnú teóriu, od ktorej sa dodnes odvíjajú všetky moderné teórie. Na tento fakt upozornil Prof. Berthold Schweizer, emeritný profesor matematiky a štatistiky na Massachusettskej univerzite v meste Amherst. Podľa jeho slov, dlhé roky po Sklarovej teórii boli nové poznatky z teórie kopúl získané iba v súvislosti s problémami vyplývajúcimi z teórie pravdepodobnostných metrických priestorov (Schweizer, 2007). Veci sa pohli, až keď B. Schweizer po preštudovaní publikácie *On Measures of Dependence* (Rényi, 1974) pochopil, že tieto miery vie jednoducho zostrojiť za pomoci kopule. Profesor B. Schweizer v spolupráci s matematikom E. F. Wolffom následne publikovali dielo *On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables* (1981) v zbierke *Annals of Statistics*. Publikácia, ktorá spojila viaceré osobnosti z rôznych oblastí, vďaka výraznému záujmu o štatistické závislosti, vyšla v roku 1983 s názvom *Probabilistic Metric Spaces*, ktorú profesor napísal s tvorcom základnej teórie kopule A. Sklarom. Dielo, ktoré pritiahlo výraznú pozornosť smerom k oblasti kopúl, pochádza od autorov Ch. Genest a J. MacKay (*The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals*, 1983). V publikácii sa autori venujú už priamo kopuliám, popisovaniu triedy dvojrozmerných rozdelení, ktorých marginálne hodnoty sú uniformované na intervale $[0,1]$. Významné pojmy, ktoré v publikácii rozoberajú, sú Archimedianove kopuly a Fréchetove obmedzenia. Po roku 1980 záujem o kopule ako aj ich výskum a vývoj významne vzrástol.

Autori a diela, ktoré nás osobne pri práci najviac ovplyvnili, sú P. Sweeting s dielom *Financial Enterprise Management* (2011), H. Joe s dielom *Multivariate Models and Dependence Concepts* (1997), nakoľko sa venujeme viacrozmernému modelu odhadu rizík a M. Hofert et al. s dielom *Elements of Copula Modeling with R*, ktoré veľmi prehľadne aplikuje konkrétne kopuly vrátane transformácií, modelov, testov či závislostí do prostredia programovacieho jazyka R. Pri publikáciách, ktoré nás ovplyvnili pri písaní práce, nesmieme zabudnúť na R. B. Nelsena, autora publikácie *An Introduction to Copulas* (1999, 2006), ktorý s myšlienkou vytvorenia publikácie o kopuliach prišiel, podľa jeho slov, v novembri 1995 na Massachusettskej univerzite v meste Amherst, kde absolvoval sympóziu pri príležitosti oslavy odchodu do dôchodku práve profesora B. Schweizera. Monografia R. B. Nelsena *An Introduction to Copulas* (2006) sa zaoberá úvodom do teórie kopúl. V publikácii autor čitateľovi odovzdáva informácie o základných vlastnostiach kopúl, o spôsoboch transformácií, o roli kopúl pri modelovaní a o závislostiach. Druhé vydanie z roku 2006 je oproti prvému doplnené o teóriu maximálnej hodnoty či chvostovú závislosť, ktorá je pri

odhadovaní rizík v poisťovacích spoločnostiach kľúčová. Hoci je publikácia primárne zameraná na dvojrozmerné kopuly, pomerne často sa v nej nachádzajú príklady a informácie aj k viacrozmerným kopuliam. Ako uvádza Roger B. Nelsen (2006) vo svojom diele – „*kopuly a ich aplikácie v štatistike sú moderným fenoménom*“. V štatistických publikáciách sa pojem kopuly nie tak dávno nenachádzal vôbec alebo veľmi zriedka, pričom medzi prvé publikácie, kedy pojem kopuly môžeme zachytiť, sú práve vyššie spomenuté publikácie B. Schweizera a E. F. Wolffa (1981). Za zvýšenie záujmu o kopuly a ich aplikáciu v štatistických modeloch podľa R. B. Nelsena (2006) môže tiež päť medzinárodných konferencií venovaných tejto problematike a ich následné publikácie:

- *Symposium on Distributions with Given Marginals (Fréchet Classes)* (Rím, 1990);
- *Distributions with Fixed Marginals, Doubly Stochastic Measures, and Markov Operator* (Seattle, 1993);
- *Distributions with Given Marginals and Moment Problems* (Praha, 1996);
- *Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling* (Barcelona, 2000);
- *Dependence Modelling: Statistical Theory and Applications in Finance and Insurance* (Québec, 2004).

Publikácie z prvých štyroch konferencií autorov G. Dall’Aglia, S. L. Kotz a G. Salinetti (*Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas*, 1991), L. Rüschendorf a L. Uckelmann (*On optimal multivariate couplings*, 1997), V. Beneš a J. Štěpán (*Distributions with given marginals and moment problems*, 1997) a C. M. Cuadras et al. (*On the Covariance between Functions*, 2002) patrili k najdôležitejším publikáciám pri rozbiehajúcej sa ére kopúl. Za najmodernejšie publikácie v novodobej ére kopúl považujeme dielo *Dependence Modeling with Copulas* (Joe, 2015) a publikácie autora J. Mileka, ktorého osobne považujem za *maestra* v oblasti aplikovania kopúl na agregáciu rizík poisťovní a s ktorým mi bolo nesmiernou čťou osobne poznatky z danej oblasti konzultovať. Publikácie J. Mileka, ktoré nás pri práci s kopulami ovplyvnili, boli *Multivariate B11 copula family for risk capital aggregation* (2014) a *Quantum Implementation of Risk Analysis-relevant Copulas* (2020), v ktorých predstavil kopulu B11, jej viacrozmerný tvar MB11 vrátane aplikácie na agregáciu rizík. V publikáciách sa venuje aj chvostovej závislosti a jej význame pri modelovaní rizikového kapitálu a tiež kvantovej implementácii generátora kopúl. Autor J. Milek sa vo svojich publikáciách odvoláva na dielo *Multivariate Fréchet Copulas and Conditional Value-at-Risk* od autora W. Hurlimanna

(2002), ktorý prezentuje využitie viacrozmerných Fréchet kopúl a aplikáciu miery odhadu CvaR. Kopula, ktorej sa vo svojej publikácii W. Hurlimann (2002) venuje, sa nazýva *Multivariate Linear Spearman* kopula (MLS) a je ekvivalentom MB11 kopuly predstavenej J. Milekom (2014, 2020). Okrem samotnej kopuly je dôležité rozumieť aj jej vstupným parametrom, preto dielo *Bernoulli and Tail-Dependence Compatibility* od autorov P. Embrecht, M. Hofert a R. Wang (2016) je veľmi užitočné. V diele autori prezentujú aplikáciu na manažment rizík. V prípade agregácie viac než troch rizík, je veľmi užitočná teória maximálnej entropie v napojení na kopuly, ktorú popisuje autor E. T. Jaynes v publikácii *Probability Theory: The Logic of Science* (1995) a považujeme ju za najlepšiu metódu spomedzi všetkých, ktoré pre agregovanie rizík poznáme. Publikácia, ktorá je veľmi blízka našej práci, sa nazýva *Risk Aggregation by Using Copulas in Internal Models* od autorov T. Nguyen a R. D. Molinari (2011), publikovanej v zbierke *Journal of Mathematical Finance*. V diele sa autori zaoberajú agregáciou rizík v internom modeli pomocou kopúl, pričom predstavujú základné kopuly s prezentáciou funkcie hustoty na 3D grafoch, koeficienty závislosti, ich kritériá a aplikáciu pod direktívou Solventnosť II.

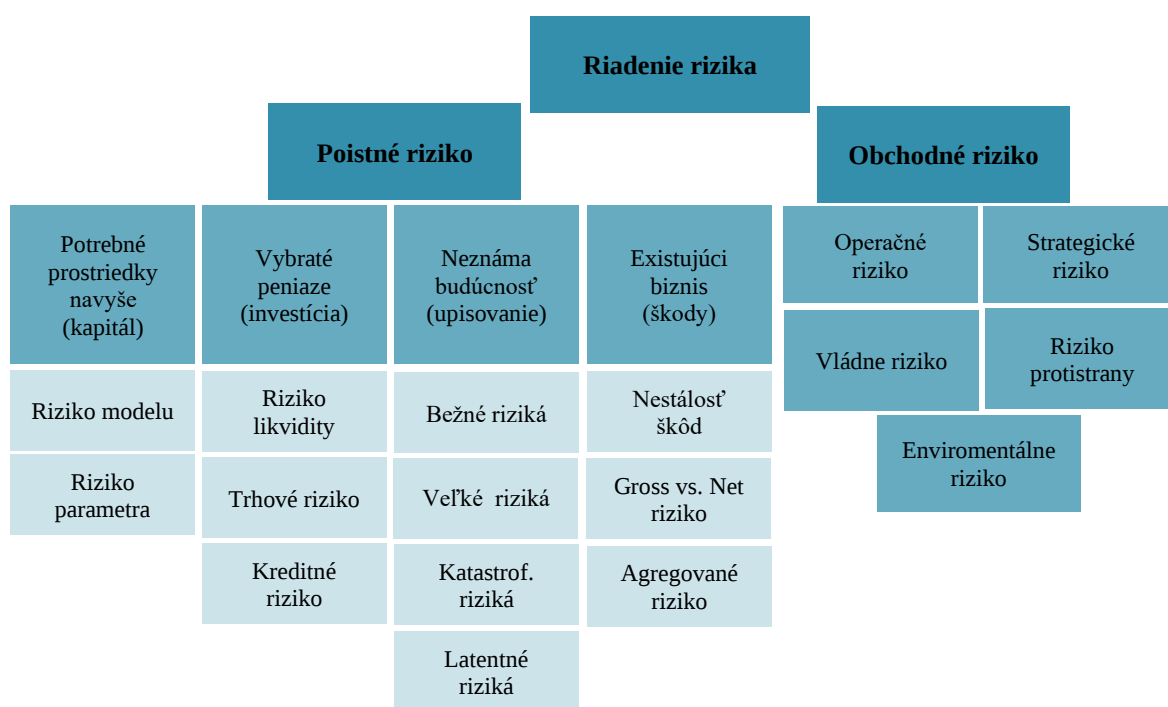
Publikácií obsahujúcich kopuly pribudlo od začiatku roka 2022 doposiaľ cez 400, no naša oblasť, s aplikáciou na agregáciu rizík je rovnako, ako v minulých rokoch, zastúpená veľmi slabo. Hlavným dôvodom je know-how poisťovní a ostatných finančných inštitúcií, ktorých utajená metodológia agregácie obsahujúca kopulu, prípadne iné metódy, prináša istú konkurenčnú výhodu. Poisťovacia spoločnosť je povinná publikovať výsledky a stav jej finančného zdravia, no metódy, akými dáta získala zostávajú interne medzi zamestnancami a príslušným dozorným orgánom.

Okrem publikácií z oblastí ERM, kopúl, závislostí a agregácie sme vyžívali diela z oblasti programovacieho jazyka R, ktoré nám pomohli pri príprave modelu kopúl a následnej grafickej prezentácii výsledkov. Užitočnou sa stala kniha s názvom *R Graphics Cookbook* (Chang, 2018), využívajúca primárne balík *ggplot2*, ktorá prináša nespočetné množstvo grafických zobrazení, vrátane 3D grafík. Kniha je súčasťou publikácií vydavateľstva O'REILLY, z ktorej sme využívali aj dielo *Data Science* od autorov H. Wickham a G. Grolemund (2017), dielo vysvetľuje princípy a metódy kvalitnej práce s dátami s orientáciou na data science. Užitočnou publikáciou je tiež *R in Action: Data analysis and graphics with R* (2015) od autora R. I. Kabacoffa, v ktorej veľmi jednoducho vysvetľuje základy práce v programovacom jazyku R.

Naším hlavným záujmom sú medzinárodné spoločnosti s internými modelmi, pričom inšpiráciou pri tvorbe dizertačnej práce nám sú zverejnené informácie o interných modeloch niektorých medzinárodných spoločností.

1.1 Riziká vplývajúce na poisťováciu spoločnosť

Riziko alebo neistota nastania neočakávaných udalostí je výzvou pre poisťovacie spoločnosti, ktoré sa snažia čo najpresnejšie takéto situácie vráťane ich hodnoty odhadnúť. Odborné literatúry uvádzajú rôzne delenia rizík, no vo všeobecnosti medzi najvýznamnejšie riziká, ktoré ovplyvňujú činnosť komerčnej poisťovne patria: trhové, kreditné, operačné, poisťné riziko a riziko likvidity; pričom riziko trhové spolu s poisťným majú najväčší podiel na rizikovom profile poisťovacích spoločností. V závislosti od metodológie využívanej pre kvantifikáciu kapitálu, definujú poisťovacie spoločnosti jednotlivé typy rizík a ich rizikové faktory, respektíve podriziká.



Obrázok 1.1.1: Rozdelenie riadenia rizík komerčnej poisťovne

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Zurich Insurance Group, Ltd.

Riziko môžeme zdefinovať ako premennú, ktorá môže spôsobiť odchýlku od očakávaného výsledku – stratu, nebezpečie či nepriaznivé následky v dôsledku vzniku škodovej udalosti. V poisťovníctve najčastejšie definujeme riziko ako nastanie možnej

udalosti, ktorá nepriaznivo ovplyvňuje chod poisťovne vrátane nenaplnenia stratégií. Pre porozumenie povahe rizika, je potrebné poznať nasledovné rizikové faktory (Lam, 2014):

- **Hierarchia** je stavebným prvkom biznisu štruktúry poisťovne. Popisuje vzťahy od najnižších biznis častí poisťovne až po najvyššiu, ktorá reprezentuje pohľad za celú poisťovaciu spoločnosť.
- **Exposure** vyjadruje vystavenie voči riziku a odhadujú ho zodpovední aktuari pre každé z rizík od najnižšej hierarchickej granularity. Exposure je vstupom pre modelovanie rozdelenia rizík.
- **Volatilita** vyjadruje neurčitosť budúcnosti, teda variabilitu potenciálnych výsledkov. Volatilita je dôležitým faktorom rizika z hľadiska možnej straty a platí, že čím je volatilita vyššia, tým vyššie je aj samotné riziko.
- **Pravdepodobnosť** hovorí o možnom výskyte škodovej udalosti a platí, že čím je pravdepodobnosť vyššia, tým vyššie je aj riziko. Pravdepodobnosť, rovnako ako ostatné koncepty rizika, potrebuje k zvýšeniu výpovednej hodnoty aj ostatné rizikové faktory. Totiž, pravdepodobnosť vzniku škodovej udalosti nemusí byť príliš vysoká, no hodnota škody môže byť pre poisťovaciu spoločnosť neúnosná. Typickým príkladom sú katastrofické riziká.
- **Časový horizont** – pred poznávaním rizika je potrebné porozumieť obdobiu, na ktoré sa pri modelovaní a odhade pozeráme. Jednotlivé vstupy do modelov, akými sú exposure či hodnoty záväzkov, vrátane ekonomických predpokladov majú rôzne časové intervaly a preto je potrebné časový horizont a prípadnú alikvotnú časť vstupu pri modelovaní rizika zobrať v úvahu.
- **Severita** je výška alebo závažnosť škody, ktorá bude pravdepodobne pri nastaní škodovej udalosti utrpená. Vedomosť o pravdepodobnosti nastania škodovej udalosti a výšky pravdepodobnej škody, ktorú v dôsledku danej udalosti utrpí poisťovacia spoločnosť, pomôže s predstavou o veľkosti rizika podstúpeného poistnou spoločnosťou.
- **Závislosť** vyjadruje vzájomný vzťah medzi jednotlivými rizikami a patrí ku kľúčovým vstupom pre agregáciu rizík, pričom platí, že čím vyššia je závislosť medzi jednotlivými ukazovateľmi, napríklad medzi rizikovými faktormi, tým vyššia je aj samotná hodnota rizika. Vysoko korelované exposure voči riziku zvyšuje úroveň koncentrácie rizika v rámci poisťovacej spoločnosti. Stupeň diverzifikácie rizika v poisťovni teda nepriamo súvisí s úrovňou korelácií.

- **Kapitál** je množstvo peňažných prostriedkov, ktorými poisťovacia spoločnosť potrebuje disponovať v prípade potreby krytia neočakávaných strát. Vo všeobecnosti existujú dva dôvody, prečo poisťovacie spoločnosti potrebujú držať kapitál. Prvým dôvodom je plnenie hotovostných požiadaviek, akými sú napríklad náklady spojené s investíciami či výdavky poisťovacej spoločnosti a druhým dôvodom je krytie neočakávaných strát vyplývajúcich z predpokladanej maximálnej výšky škody pri danom riziku. Úroveň kapitálu na pokrytie oboch vyššie spomenutých dôvodov je najčastejšie nazývaná pojmom ekonomický kapitál.

Medzi najbežnejšie riziká, ktorým podlieha poisťovacia spoločnosť a sú súčasťou rôznych metodológií pre odhad požadovaného kapitálu, môžeme zaradiť riziko trhové, kreditné, životné riziká, neživotné riziká, operačné a katastrofické riziko.

1.1.1 Trhové riziko

Trhové riziko (*Market Risk*) je charakterizované ako riziko straty zo zmien trhových cien komodít, akcií a podobne alebo trhových mier akými sú úrokové miery či menové kurzy. Všeobecne ide o riziko zmeny finančnej pozície v dôsledku meniacich sa hodnôt podkladových aktív, na ktorých táto pozícia závisí. Trhové riziko sa môže prejaviť v rámci finančného umiestnenia technických rezerv poisťovne a je náročné ho diverzifikovať. Zdroje trhového rizika môžu byť zmeny hospodárskeho cyklu, zmeny úrokových sadzieb, teroristické útoky, politické zmeny či prírodné katastrofy.

Trhové riziko vieme ďalej členiť na nasledujúce rizikové zložky (Faybíková, 2019):

- **úrokové riziko** (*Interest Rate Risk*) je riziko straty z cenových zmien nástrojov citlivých na úrokové miery. Okrem rizika zmien úrokových mier a ich volatility ide taktiež o riziko zmeny tvaru výnosovej krivky a riziko predčasného splatenia vypovedateľných dlhopisov.
- **akciové riziko** (*Equity Risk*) je riziko straty z cenových zmien nástrojov citlivých na ceny akcií. Okrem rizika zmien akciových cien a ich volatility sa jedná taktiež o riziko zmeny vzťahu medzi rôznymi akciovými indexmi, riziko dividendových zmien atď.
- **majetkové riziko** (*Property Risk*) je riziko straty predovšetkým z cenových zmien nehnuteľností alebo iného majetku vo finančnom umiestnení aktív poisťovne.

- **riziko kreditného rozpätia** (*Credit Spread Risk*) je riziko straty zo zmien rozpätia výnosových nástrojov rôzneho kreditného hodnotenia. Ide o riziko, kedy výnosové nástroje s rôznou kreditnou kvalitou, likviditou a splatnosťou nevykazujú rovnakú výnosnosť. Kreditné rozpätie je typické napríklad pre korporátne dlhopisy (*Corporate Bonds*), ktorých výnosnosť vzhľadom na vyššie riziko musí byť vyššia v porovnaní s bezrizikovým štátnymi dlhopismi (*Government Bonds*).
- **menové riziko** (*Currency Risk*) je riziko z cenových zmien nástrojov citlivých na menové kurzy, kedy zmena v relatívnom pomere meny zníži hodnotovú jednotkovú cenu aktív alebo zvýši jednotkovú cenu pasív denominovaných v zahraničných menách. Ide o riziko zmien spotových menových kurzov a ich volatility.
- **riziko koncentrácie** (*Concentration Risk*) je riziko vyplývajúce z kumulovania investičných aktivít do užšieho geografického regiónu alebo ekonomického sektoru.

Trhové riziko existuje z dôvodu zmien cien na finančných trhoch. Štandardná odchýlka zmien cien akcií, mien alebo komodít sa označuje ako volatilita cien (*Price Volatility*). Volatilita je hodnotená v ročnom vyjadrení a môže byť vyjadrená ako absolútne číslo alebo percento pôvodnej hodnoty.

1.1.2 Kreditné riziko

Kreditné riziko (*Credit Risk*) je rizikom finančnej straty poisťovne v dôsledku zmeny kreditnej kvality emitenta cenných papierov dlžníka alebo inej protistrany alebo dokonca v dôsledku platobnej neschopnosti a úpadku príslušnej protistrany. Najčastejšie kreditné riziko delíme na:

- **kreditné riziko zaistenia** (*Reinsurance Credit Risk*), ktoré vyplýva z predpokladu, že zaistná spoločnosť nevyplatí v plnej miere vymáhané zaistné prostriedky postupujúcemu poisťovateľovi z dôvodu zlyhania;
- **riziko úverového zlyhania** (*Credit Default Risk*) je riziko straty vyplývajúce z pravdepodobnosti nesplatenia pôžičkových záväzkov dlžníkom v plnej výške;
- **riziko zo zmeny kreditného hodnotenia** (*Migration Risk*) je riziko straty zo stiaženej možnosti získať finančné prostriedky v dôsledku zníženia oficiálneho ratingového¹ hodnotenia. Napríklad pre úroveň ratingu „Aa“ (Moody’s), poisťovne

¹rating – hodnotiaci systém na opísanie finančnej situácie poisťovní; medzi najvýznamnejšie hodnotiace agentúry patria spoločnosti Moody’s, FITCH a S&P

najčastejšie odhadujú ekonomický kapitál mierou rizika VaR pri pravdepodobnosti 99,95 %.

Tabuľka 1.1.1: Hodnotenie finančnej sily poisťovateľov podľa spoločnosti Moody's

Moody's	Hodnotenia finančnej sily poisťovateľov
Aaa	vynikajúce finančné zabezpečenie
Aa	výborné finančné zabezpečenie
A	dobré finančné zabezpečenie
Baa	slabé finančné zabezpečenie
Ba	spochybniteľné finančné zabezpečenie, potrebné zlepšenie
B	biedne finančné zabezpečenie

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Bonner (2020)

Finanční sprostredkovatelia a investori pomocou ratingov určujú, do ktorých finančných inštitúcií môžu investovať a poisťovacie spoločnosti využívajú ratingy pre výber zaistovacích spoločností.

1.1.3 Životné riziká

Životné riziká síce nepatria v zmiešaných poisťovacích spoločnostiach medzi najvýraznejšie, no aj tak je ich správne a kvalitné kvantifikovanie veľmi podstatné. Dôvodom je dlhá poistná doba, najmä pre životné poistné riziká. Životné riziká zvyčajne delíme na dva typy – životné poistné riziká a životné biznis riziko, pričom každé z nich má niekoľko rizikových faktorov.



Obrázok 1.1.2: Životné riziká s prislúchajúcimi podrizikami

Zdroj: vlastné spracovanie

Vo všeobecnosti môžeme životné poistné riziko (*Life Liability Risk*) definovať ako riziko plynúce z nepriaznivej zmeny dostupného kapitálu vyplývajúceho z neočakávaného a/alebo nepriaznivého vývoja v oblasti úmrtnosti, zdravotného postihnutia, chorobnosti či zodpovedajúcej zmeny predpokladov najlepšieho odhadu v horizonte jedného roka v porovnaní s očakávanými hodnotami na základe najlepšieho odhadu. K životnému poistnému riziku je tiež pridávaná zložka pandemického rizika, no zvyčajne nie je priamo modelovaná spolu s ostatnými zložkami životného poistného rizika. Samotné životné poistné riziko je zložené z rizikových faktorov, ktorými sú:

- **riziko úmrtnosti** (*Mortality Risk*) popisuje potenciálne zmeny v miere úmrtnosti, pričom zvýšená miera úmrtnosti obvykle znižuje dostupný kapitál poisťovne.
- **riziko chorobnosti** (*Morbidity Risk*) popisuje potenciálne nepriaznivé zmeny v miere incidencie, t.j. chorobnosti, invalidity a zotavení. V modeli sú samostatne kalibrované stresy na riziká incidencie a zotavenia, aj keď sú neskôr spoločne modelované v jednom faktore rizika chorobnosti.
- **riziko dlhovekosti** (*Longevity Risk*) popisuje potenciálne zmeny v dĺžke života poistených osôb.

Životné poistné riziko je obsiahnuté v biometrických predpokladoch prijatých pri určovaní dostupného kapitálu. Tieto predpoklady odrážajú aktuárske najlepšie odhady budúcich udalostí, ktoré pravdepodobne vyplynú z upísaného biznisu (upísané poistné zmluvy). Tieto predpoklady vytvárajú projekcie pravdepodobných tokov záväzkov a ziskov, ktoré sú dôležité pre výkonný manažment, akcionárov či investorov. Akékoľvek odchýlky alebo zmeny týchto predpokladov môžu ovplyvniť načasovanie a/alebo veľkosť zisku v porovnaní s očakávaniami. *Životné biznis riziko* je riziko nepriaznivého pohybu dostupného kapitálu v súvislosti s upísaným biznisom, vyplývajúceho z neočakávaných nepriaznivých zmien v nákladoch spojených s uzatvorenými poistnými zmluvami alebo v očakávaní perzistencie (výrazné rušenia a vypovedania zmlúv zo strany klientov, prípadne neočakávané nízke rušenia či vypovedania poistných zmlúv) a zodpovedajúcich zmien predpokladov najlepšieho odhadu v horizonte jedného roka vo vzťahu k súčasným očakávaniam. K životnému biznis riziku môžeme pripojiť aj riziko z neočakávaného poklesu nových zmlúv v nasledujúcom roku.

1.1.4 Neživotné riziká

Neživotné riziká alebo riziká vyplývajúce z poistného a rezerv spočívajú v neistote súvisiacej s upisovaním neživotných poistných zmlúv. Klienti poisťovne platia poistné a dostávajú poistnú ochranu podľa krytia, ktoré si zakúpia a to na dobu ustanovenú v zmluve. Sadzba poistného je v zásade nastavená na pokrytie očakávaných strát, výdavkov na budúce poistné plnenia a poplatkov kompenzujúcich poisťovateľovi riziko, ktoré upisuje. Sadzba je stanovená neživotnými aktuármi pomocou matematicko–štatistických techník a je náchylná k možnému nepriaznivému vývoju budúcich poistných škodových udalostí s nárokom na plnenie. Pri neživotnom poistení je nutné brať v úvahu príslušný podiel na poistných plneniach, pričom rozlišujeme udalosti už reportované a udalosti ktoré sa už vyskytli, no doposiaľ nie sú nahlásené. V neživotnom poistení môže trvať dlho, kým dôjde k úplnému vyplateniu poistnej škody. Poisťovacia spoločnosť teda musí vytvárať rezervy, ktoré zodpovedajú odhadu budúcich výplat škôd poistných udalostí. Neživotné riziko zvyčajne delíme na (ZIG, 2020):

- **riziko z poistného** (*Premium risk*), ktoré popisuje riziko z nárokov spojených s poistným dosiahnutým v danom roku v prípade, že sú vyššie alebo nižšie ako očakávané hodnoty na začiatku roka;
- **riziko z rezerv** (*Reserve risk*) popisuje riziko, kedy sa nároky z upísaných zmlúv získaných v minulých rokoch v ročnom horizonte nepriaznivo líšia od toho, čo sa predpokladá v rezervách na poistné plnenia.

1.1.5 Katastrofické riziká

Katastrofické riziká sú veľmi špecifické, nakoľko ide o riziká so škodami vo veľkom objeme, no pravdepodobnosť nastania je výrazne nižšia, než u iných typov rizík. Katastrofické riziká sú rôzne zadefinované naprieč metodológiami, pretože poisťovne môžu hodnotu rizika vykazovať aj pod životnými (pandemické riziko) či neživotnými rizikami. Najvýraznejším rizikom spomedzi katastrofických rizík je riziko prírodných katastrof, medzi ktoré zaradíme povodne, zemetrasenia či hurikány. Rizikom prírodnej katastrofy (*Natural Catastrophe Risk*) je riziko spôsobené prírodnými katastrofami v horizonte jedného roka presiahnu očakávanú výšku škôd. Medzi charakteristické vlastnosti prírodných katastrof patrí ich nízka frekvencia a vysoká závažnosť.

Detailná klasifikácia rizík je podstatou pre nastavenie procesu agregácie rizík a odhadu ekonomického kapitálu.

1.2 Agregácia rizík a rizikový kapitál

Agregácia rizík, najmä v rámci interných modelov je veľmi špecifickým procesom pre každú poisťovacu spoločnosť. Proces agregácie rizík je procesom združovania rizík poisťovacej spoločnosti a môže mať viaceré podoby. Najjednoduchším spôsobom je metóda agregácie metódou *simple sum* alebo sčítaním, kedy poisťovacia spoločnosť odhadne veľkosti rizík, ktorým čelí a jednotlivé hodnoty rizík sčíta. Metóda nie je najvhodnejšia, pretože ignoruje závislosti medzi rizikami, ktoré reálne existujú a nevyužíva simulácie ako náhodnú zložku. Druhá, stále o niečo menej kvalitnejšia metóda využíva fixné korelačné koeficienty. Pri predpoklade rovnakých rizík ako v prípade metódy *simple sum*, hodnota agregovaného rizika je rovná lineárnej kombinácii rizík za použitia korelačných koeficientov. Môžeme povedať, že pri druhej metóde riziká diverzifikujeme, no opäť ide iba o kombináciu piatich hodnôt a chýba náhodnosť, ktorú reprezentujú simulácie. Treťou, sofistikovanejšou metódou je VCV alebo *Variance-Covariance*, ktorá síce tiež súvisí s korelačnými koeficientami, no pri tejto metóde sa odhaduje výška agregovaného rizika vnorenými závislosťami a teda agreguje riziká, ktoré vznikli agregáciu rizikových faktorov rovnakým spôsobom. Najznámejším reprezentantom VCV metódy je štandardný vzorec výpočtu agregovaného kapitálu SCR, ktorý predstavíme v kapitole 1.3.3 *Štandardný vzorec SCR*. Štvrtou známou metódou je agregácia za pomoci kopúl, ktorá má oproti tým predchádzajúcim množstvo výhod. Forma agregácie za pomoci kopúl obsahuje náhodnú zložku, simulácie, ktoré dokážu omnoho detailnejšie popísať závislosti medzi rizikami než metódy dva a tri. Podľa typu kopule sa vieme orientovať na špecifické závislosti a výsledné agregované riziko by malo byť presnejšie a pri použití podobných závislostí dokonca nižšie, než napríklad VCV. Po agregácii rizík môžeme prejsť na určenie hodnoty rizikového kapitálu.

Pod rizikovým kapitálom rozumieme kapitál, ktorý poisťovňa potrebuje na krytie potenciálnych neočakávaných strát, agregovaných strát, ktorým môže poisťovňa čeliť. Rizikový kapitál v závislosti od metodológie nazývame *regulačný kapitál* (rizikový, požadovaný alebo cieľový) alebo *ekonomický kapitál*.

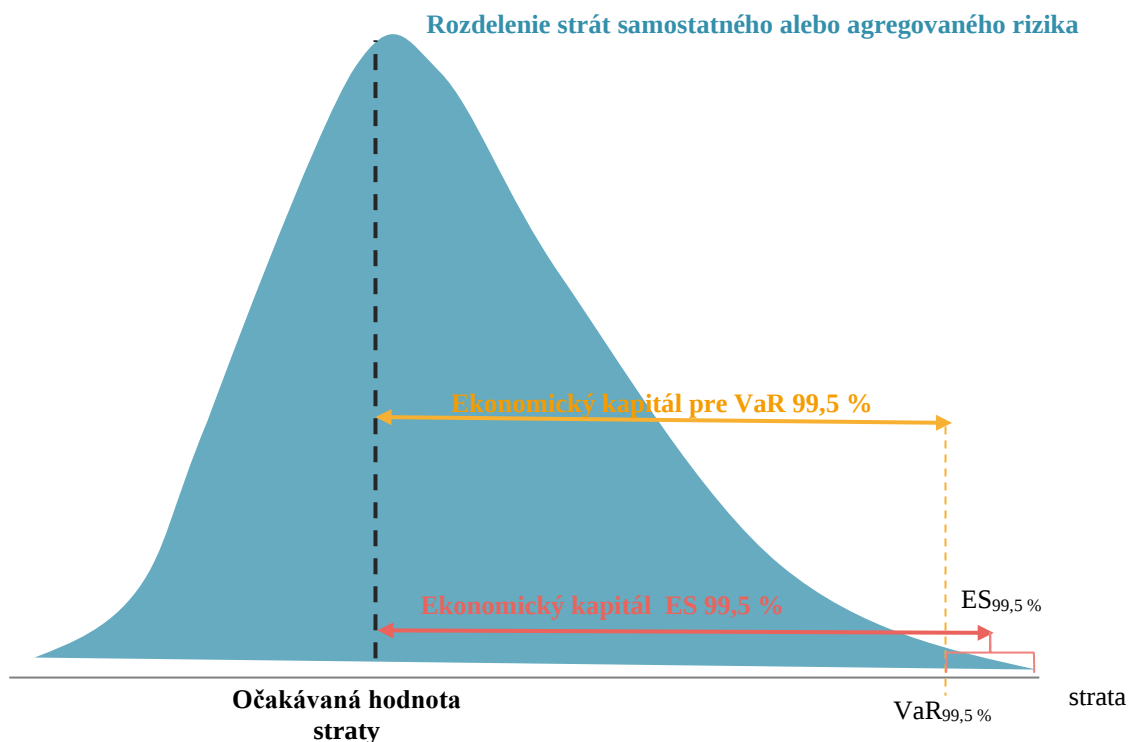
Ekonomický kapitál (*Economic Capital*) je množstvo kapitálu, ktorý vlastníci musia investovať do poisťovacej spoločnosti, aby udržali solventnosť vzhľadom na rizikový profil

spoločnosti a zaručili nepretržité fungovanie v určitom období s danou spoľahlivosťou. Takýto kapitál by mal garantovať, že nedôjde k zániku, respektíve poškodeniu poisťovacej spoločnosti v dôsledku možných rizík tak, aby sa poisťovacia spoločnosť mohla stať insolventnou iba v prípadoch náhodných katastrof a vysoko nepravdepodobných udalostí, obvykle so spoľahlivosťou menšou ako 1 %. Ekonomický kapitál by mal deklarovať skutočnosť, že riziko je merané prostredníctvom ekonomickej reality. Koncepcia ekonomického kapitálu sa líši od regulačného kapitálu v tom, že regulačný kapitál je povinným kapitálom, ktorý regulátori vyžadujú v inštitúcii zachovať, zatiaľ čo ekonomický kapitál je najlepší odhad požadovaného kapitálu, ktorý finančné inštitúcie používajú interne na riadenie vlastného rizika. Modelovanie ekonomického kapitálu možno chápať ako modelovanie dvoch kľúčových komponentov, marginálneho rozdelenia strát každého rizika a agregácie metódy, ktorá ich kombinuje do jedného rozdelenia a následne do finálnej hodnoty požadovaného kapitálu. Obom komponentom sa budeme bližšie venovať v kapitole 3. *Metodika a metódy riešenia*.

Regulačný kapitál (*Regulatory / Required / Target Capital*) poisťovacia spoločnosť vykazuje príslušnému regulátorovi, ktorému je povinná vykazovať výsledky obsahujúce mieru solventnosti, hodnotu rizík a veľkosť regulačného kapitálu. Tento kapitál je regulátorom v pravidelných určených periódach kontrolovaný a preverovaný a na rozdiel od ekonomického kapitálu jeho výpočet podlieha prísnyim pravidlám stanoveným daným regulátorom. Metodológiu výpočtu ekonomického kapitálu pre interné potreby si poisťovacia spoločnosť stanovuje sama a zvyčajne je prudentnejšia, než metodológia výpočtu regulačného kapitálu.

Veľké medzinárodné poisťovacie spoločnosti podliehajú viacerým regulačným opatreniam a sú povinné svoje výsledky vykazovať pre rôzne miery odhadu. V prípade poisťovacích spoločností pôsobiacich na území Európskej únie a Švajčiarska, poisťovne sú povinné vykazovať svoje výsledky pre rôzne miery odhadu, ktoré reprezentujú najhoršie scenáre, ktoré môžu nastať. Najčastejšie miery odhadu využívané na území Európy sú Value at Risk 99, 5 %, ktorá reprezentuje insolventnosť raz za 200 rokov (metodológia Solventnosť II) a miera Expected Shortfall 99 %, ktorá reprezentuje insolventnosť raz za 100 rokov (metodológia Švajčiarsky test solventnosti). V prípade, že z rozdelenia vieme určiť očakávanú hodnotu straty a hodnotu najhorších scenárov v závislosti od miery odhadu, rizikový kapitál vieme jednoducho určiť ako rozdiel medzi najhorším scenárom nastania neželaných negatívnych udalostí a očakávanou hodnotou straty.

Pre najlepšiu predstavu toho, čo jednotlivé (alebo agregované riziko) predstavuje, je funkcia hustoty alebo medzinárodne známy pojem *bell curve*, čiže krivka vyjadrujúca rozdelenie rizika.



Obrázok 1.2.1: Rozdelenie potenciálnych agregovaných strát a ekonomický kapitál pri mierach odhadu VaR a ES s pravdepodobnosťou 99,5 %

Zdroj: vlastné spracovanie

V dizertačnej práci budeme používať pojem riziko, ktorý je ekvivalentný pojmu strata a na Obrázku 1.2.1 ho vyjadruje hodnota pri 99,5 % – nom percentile pri miere odhadu Value at Risk ($VaR_{99,5 \%}$) alebo priemer hodnôt nachádzajúcich sa nad 99,5 % – ným percentilom pri miere odhadu Expected Shortfall ($ES_{99,5 \%}$). Stredná hodnota rozdelenia rizika (alebo agregovaného rizika) vyjadruje očakávanú hodnotu rizika a chvosty rozdelenia reprezentujú najvýznamnejšie straty (napravo), respektíve, negatívne straty (naľavo) vyjadrujúce výnosy. Rizikovým kapitál je potom rozdielom rizika pri danej pravdepodobnosti a očakávanej hodnoty straty. Z pohľadu manažmentu rizík ide o snahu optimalizovať riziko, teda optimalizovať tvar funkcie hustoty, ako vidíme na Obrázku 1.2.1. Snahou je implementovať stratégie, ktoré napomôžu k splošteniu krivky a teda k zníženiu výšky potenciálnych strát. (Lam, 2014)

V záverečnej práci uvažujeme rovnosť regulačného a ekonomického kapitálu.

1.3 Metodológie odhadu požadovaného kapitálu

Odhad veľkosti požadovaného kapitálu je proces vedúci jednak k poznaniu potrebnej veľkosti kapitálu pre prípad krízy (tzv. finančnú dostatočnosť), ale taktiež k odhadu miery solventnosti, ktorá hovorí o finančnom zdraví poisťovne. Solventnosť podľa T. Cipru (2015) môžeme popísať ako „*schopnosť poisťovateľa splniť v ľubovoľnej dobe svoje záväzky zo všetkých poistných zmlúv*“. Stav solventnosti je nesmierne dôležitým ukazovateľom a preto odhad miery solventnosti poisťovacej spoločnosti musí spĺňať určité kritériá. Naplnenie kritérií a výšku miery solventnosti sleduje vedenie spoločnosti, investori a dozorné orgány, akými sú napríklad štátni regulátori nad finančným trhom. Poisťovacie spoločnosti teda podliehajú rôznym nariadeniam a štátnym regulátorom, ktorí kontrolujú ich finančnú dostatočnosť, rizikový profil a mieru solventnosti podľa regulátorom určenej metodológie. Metodológie na odhad požadovaného kapitálu a miery solventnosti zvyčajne majú aplikáciu cez štandardný vzorec a tiež parciálny/úplný interný model.

Pojem interného modelu budeme v práci spomínať častejšie a môžeme ho zadefinovať ako model na odhad požadovaného kapitálu a miery solventnosti, ktorý si poisťovacia spoločnosť vytvára vlastnou cestou, s odsúhlasením príslušného dozorného orgánu. Dôvodom, prečo si niektoré poisťovacie spoločnosti vytvárajú nákladný a metodologicky náročný interný model je nedostatočnosť štandardných vzorcov. Nedostatočnosťou nemyslíme nekvalitu. Interné modely sú navrhované tak, aby dôkladne popisovali práve tie riziká, ktorým poisťovňa čelí a sú výrazne materiálne. Ako uvádza Cipra (2015), „*spoločnosť, ktorá sa rozhodne pre interný model (úplný alebo čiastočný), musí zaistiť, aby konštrukcia modelu bola v súlade s činnosťami spoločnosti*“ kedy:

- modelovacie prístupy odrážajú povahu, rozsah a zložitosť rizík spojených s činnosťami poisťovacej spoločnosti;
- výstupy interného modelu a obsah interných a externých oznámení spoločnosti sú konzistentné;
- interný model je schopný vytvárať výstupy, ktoré sú dostatočne rozčlenené, aby mohli byť použité pri prijímaní príslušných rozhodnutí vedenia spoločnosti;
- interný model je upravovaný v súlade so zmenami v rozsahu alebo povahe činností spoločnosti.

Vytváranie úplných interných modelov je primárne užitočné pre veľké poisťovacie spoločnosti. V prípade menších spoločností, je možné vytvoriť parciálny interný model,

napríklad pre najvýraznejšie riziko spomedzi tých, ktorým poisťovacia spoločnosť čelí. Ako sme už spomenuli, na rozdiel od štandardných vzorcov, interné modely nie sú striktné predpísané. Dozorné orgány vydávajú usmernenia, ktoré poisťovacie spoločnosti berú v úvahu pri tvorbe interného modelu. Celý proces vytvárania interných modelov je veľmi náročný, nákladný a je o úzkej spolupráci poisťovacej spoločnosti a dozorného orgánu, ktorý vytvorený model schváli a celý proces môže trvať roky. Medzi výhody interných modelov zaradujeme šetrenie kapitálu vďaka kvalitnejšiemu a presnejšiemu odhadu výšky rizika a jeho stálosť. Štandardný vzorec pod direktívou Solventnosť II (EIOPA) niekoľkokrát do roka aktualizuje svoju metodológiu. V prípade interných modelov sú zmeny veľmi minimálne, keďže každú jednu musí nanovo schváliť dozorný orgán. Našťastie, interné modely sú tvorené tak precízne a do najmenších detailov, takže akékoľvek opravy alebo aktualizácie zvyčajne nie sú potrebné.

Medzi najznámejšie metodológie využívané v Európe patrí direktíva Solventnosť II, pripravená Európskym parlamentom a Radou Európskej únie s účinnosťou od roku 2016 a Švajčiarsky test solventnosti, ktorému podliehajú všetky poisťovacie spoločnosti podnikajúce na území Švajčiarska s účinnosťou od roku 2011.

1.3.1 *Direktíva Solventnosť II*

Od začiatku roku 2016 musia všetky poisťovne a zaist'ovne na území Európskej únie dodržiavať pravidlá režimu Solventnosť II (*Solvency II*). Direktíva Solventnosť II určuje poisťovniam a zaist'ovniam princípy, ako solventnosť poisťovne sledovať a zavádza predovšetkým ekonomické požiadavky založené na riziku. Požiadavky solventnosti majú lepšie odrážať skutočné riziká, ktoré poisťovacím spoločnostiam hrozia a malo by to prispieť k vyššej ochrane osôb závislých na danom poistení (poistník, poistený a ďalší prípadní príjemcovia poistenia). Okrem toho, opatrenia prispievajú k optimalizácii nákladov poisťovní a zaist'ovní a k zamedzeniu prebytočnej kapitalizácii. Kapitálová požiadavka na solventnosť zohľadňuje rizikový profil každej poisťovne osobitne. V prípade, že poisťovateľ riadi svoje riziká efektívne a transparentne, je možné poskytnúť mu kompenzáciu vo forme povolenia na držanie menšieho množstva kapitálu. Ak poisťovateľ nedostatočne riadi svoje riziká alebo prijíma vyššie riziká, očakáva sa od neho držanie vyššieho množstva kapitálu z dôvodu zabezpečenia splnenia pohľadávok poistníkov v dobe ich splatnosti a taktiež pri neočakávaných situáciách. Direktíva Solventnosť II má prispieť k zjednoteniu poisťovacieho trhu v rámci Európskej únie a k jeho vyššej stabilite. V smernici ide

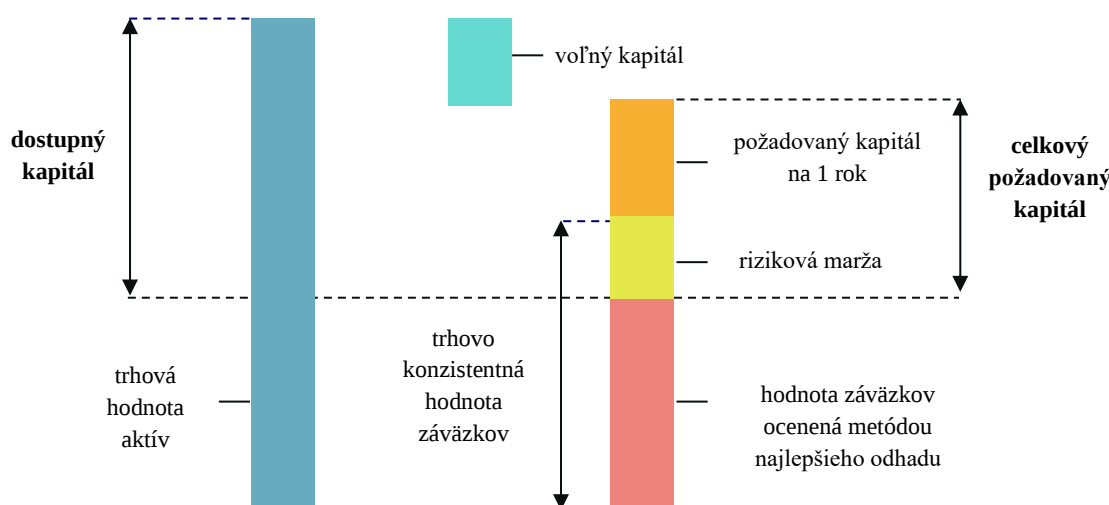
o systematický a komplexný prístup k riadeniu rizík, pričom solventnosť sa na účely tejto metodiky prezentuje ako schopnosť poisťovateľa uhradiť v ľubovoľnom čase záväzky a to výlučne z vlastných zdrojov.

SOLVENTNOSŤ II		
Pilier I	Pilier II	Pilier III
<i>Kvantitatívne požiadavky</i>	<i>Kvalitatívne požiadavky</i>	<i>Výkazníctvo</i>
Meranie rizika	Riadenie rizika	Reporting
Minimálna kapitálová požiadavka	Vlastné posúdenie rizika a solventnosti	Vykazovanie pre orgány dozoru a verejnosť
Kapitálová požiadavka na solventnosť	Systém správy a riadenia spoločnosti	Transparentnosť
Technické rezervy	Regulačný a dozorný proces	Pravidlá pre uzávierku
Vlastné zdroje		

Obrázok 1.3.1: Piliere systému Solventnosť II

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Faybíková (2017)

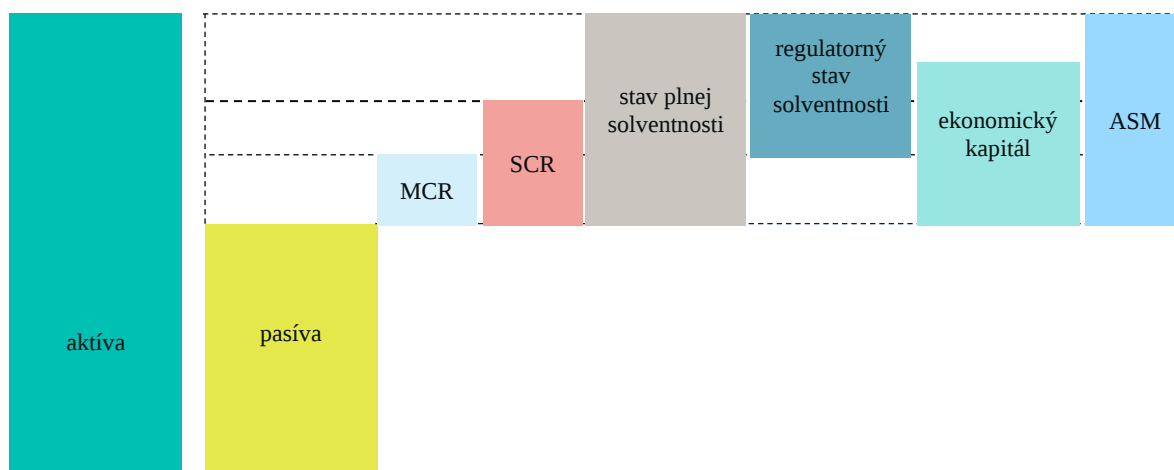
Solventnosť II vo svojich troch pilieroch zjednocuje kapitálové požiadavky poisťovní a zaistovní vzhľadom na riziko (Pilier I), požiadavky na riadenie rizík poisťovní a zaistovní (Pilier II) a popisuje výkazníctvo a zverejňovanie informácií (Pilier III). Keďže oblasť bankovníctva a poisťovníctva majú veľa spoločného, direktíva Solventnosť II má svoje základy v smernici Bazilej II (*Basel II*, v súčasnosti *Basel III*), ktorý usmerňuje práve bankový sektor.



Obrázok 1.3.2: Všeobecná ekonomická súvaha komerčnej poisťovne

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa ZIG (2020)

Direktíva Solventnosť II vo všeobecnosti rozlišuje riziko poistné, trhové, kreditné a operačné. Nariadenie Solventnosť II vyžaduje od poisťovacích spoločností tvorbu ekonomickej súvahy reprezentujúcej pohľad založený na riziku. Podľa direktívy Solventnosť II musia mať poisťovne a zaist'ovne v rámci Európskej únie v držbe použiteľný kapitál na krytie kapitálovej požiadavky na solventnosť (SCR – *Solvency Capital Requirement*). Kapitálová požiadavka na solventnosť je množstvo kapitálu, ktoré musí byť držané poisťovňou, aby splnila podmienky určené v prvom pilieri nariadenia Solventnosť II. Tento pilier sa zaoberá definovaním minimálnych požiadaviek na kapitál poisťovne s prihliadaním na spôsoby upisovania rizík a charaktery aktív a záväzkov v poisťovniach. Zmyslom kapitálovej požiadavky na solventnosť je okrem schopnosti pohltiť nečakané a veľké straty aj istá forma záruky pre osoby vo vzťahu k poisťovni a to, že poisťovňa bude schopná naplniť svoje záväzky v dohodnutej sume a včas. Okrem kapitálovej požiadavky na solventnosť, Pilier I definuje aj minimálnu kapitálovú požiadavku (MCR – *Minimum Capital Requirement*), ktorá určuje množstvo držaného kapitálu, pod ktorý nesmie poisťovňa klesnúť. SCR je stanovená na takej úrovni, ktorá zabezpečí, aby poisťovateľ mohol splniť svoje záväzky voči poistníkom a príjmom počas nasledujúcich 12 mesiacov s pravdepodobnosťou 99,5 %, čím sa v 200 prípadoch obmedzí šanca na finančné zničenie na menej ako jedenkrát.



Obrázok 1.3.3: Súvaha v rámci metodológie Solventnosť II

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Cipra (2015)

Okrem SCR a MCR je dôležité poznať skutočný stav prebytku aktív nad pasívami poisťovne, ktorý tiež nazývame disponibilný solventnostný kapitál (ASM – *Available Solvency Margin*). Dôležité je, aby platila nerovnosť

$$MCR < SCR \leq ASM. \quad (1.3.1)$$

Cieľom smernice je zosúladiť zákony a predpisy 27 členských štátov Európskej únie, pokiaľ ide o poisťovníctvo. Ak orgán dohľadu zistí, že požiadavka primerane neodráža riziko spojené s určitým typom poistenia, môže úpravou kapitálovú požiadavku zvýšiť. Vzorec na výpočet nadobudol modulárny prístup, čo znamená, že individuálna expozícia každej rizikovej kategórie sa vyhodnotí a spoločne agreguje. Túto požiadavku poisťovňa počíta podľa štandardného vzorca alebo prostredníctvom interného modelu za predpokladu, že poisťovňa bude naďalej pokračovať vo svojej činnosti.

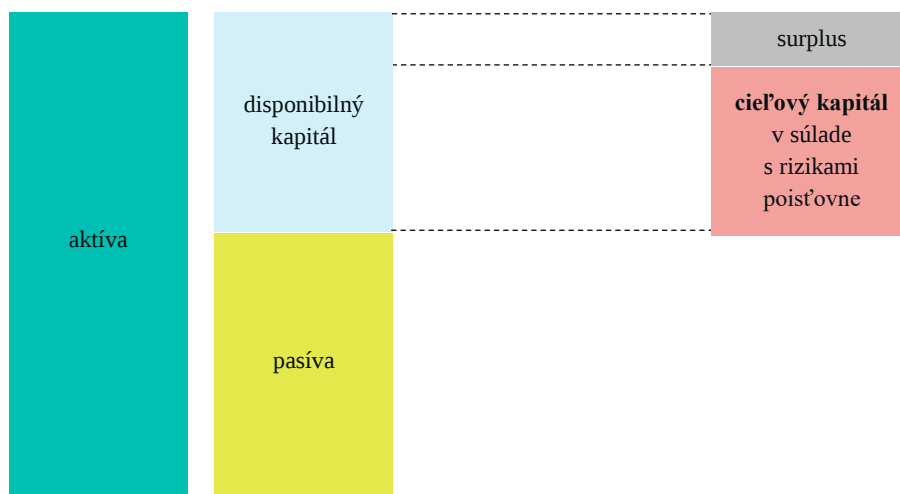
1.3.2 Švajčiarsky test solventnosti

Na posúdenie kapitálovej sily poisťovacej spoločnosti sa tiež používa Švajčiarsky test solventnosti (SST – *Swiss Solvency Test*). Požiadavka solventnosti je podľa metodológie SST splnená, ak hodnota disponibilného kapitálu presahuje hodnotu požadovaného kapitálu. Podľa Švajčiarskeho testu solventnosti je kapitalizácia poisťovne primeraná, ak je pravdepodobné, že poisťovacia spoločnosť bude schopná splniť všetky svoje záväzky voči poistencom, a to aj za nepriaznivých podmienok. Zásady, z ktorých vychádza Švajčiarsky test solventnosti sú rovnocenné so zásadami stanovenými v direktíve Solventnosť II. Švajčiarsky test solventnosti je v platnosti od 1. januára 2011 a stal sa nenahraditeľným nástrojom pre švajčiarskeho štátneho regulátora – FINMA², ktorý mu umožňuje včas identifikovať problémy so solventnosťou a prijímať nápravné opatrenia na základe vopred stanovených intervenčných prahov. Špecialisti FINMA každoročne kontrolujú správy SST predkladané poisťovacími spoločnosťami, ktoré sú v období pandemickej situácie požadované dokonca na mesačnej, prípadne štvrťročnej báze.

Švajčiarsky test solventnosti definuje minimálnu výšku požadovaného kapitálu, ktorým poisťovacia spoločnosť musí disponovať. Hodnota požadovaného kapitálu sa určuje na základe rizík, ktoré spoločnosť na seba preberá a všeobecne platí, že čím väčšie riziko je, tým vyššia bude hodnota požadovaného kapitálu. Prvým krokom poisťovne pri odhadovaní požadovaného kapitálu podľa metodológie SST je určenie hodnoty disponibilného kapitálu (*Risk-Bearing Capital*), pričom je potrebné oceniť položky v súvahe poisťovne – aktíva aj pasíva, a to na trhovo konzistentnom základe (*Market-Consistent Base*). Následne je určený disponibilný kapitál posudzovaný, či vyhovuje požiadavkám metodológie SST a či hodnota

² FINMA (*Eidgenössische Finanzmarktaufsicht*) je Švajčiarsky úrad pre dohľad nad finančným trhom

disponibilného kapitálu dostatočne pokrýva záväzky poisťovne aj v menej priaznivých obdobiach. V rámci metodológie SST sú zohľadňované všetky príslušné trhové, úverové a poisťné riziká. Hlavným zámerom regulátora FINMA určujúceho kapitálové požiadavky je, aby poisťovacia spoločnosť zostala finančne nepoškodená aj v prípade nastania výrazne negatívnej udalosti raz za storočie. Vypočítaný požadovaný kapitál sa v metodológii označuje tiež ako cieľový kapitál (*Target Capital*).



Obrázok 1.3.4: Súvaha v rámci metodológie SST

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa FINMA(2018)

Metodológia SST je založená na troch základných princípoch FINMA:

- **trhové ocenenie** – finančné nástroje majúce trhovú cenu, musia byť v súvahe vykázané v trhovej cene, aby sa zaistil súvaha poisťovacej spoločnosti odrážajúca ekonomickú realitu.
- **kapitálové požiadavky vychádzajú z rizika** – pri určovaní cieľového kapitálu je potrebné zohľadniť trhové, úverové a poisťné riziká.
- **súvaha** – v súvahe sa berie do úvahy vzájomná závislosť medzi rizikami na strane aktív a rizikami na strane pasív.

Metodológia SST umožňuje včasné rozpoznanie poisťovní, ktoré prežívajú finančné ťažkosti. Nakoľko sa disponibilný kapitál určuje v trhovej hodnote, akékoľvek zmeny úrokových sadzieb alebo cien akcií sa okamžite premietnu do disponibilného kapitálu, čo sme mohli spozorovať aj počas pandémie COVID-19. Metodológia SST umožňuje poisťovacím spoločnostiam riadiť ich príslušné riziká a pretože sa SST spolieha na trhovo

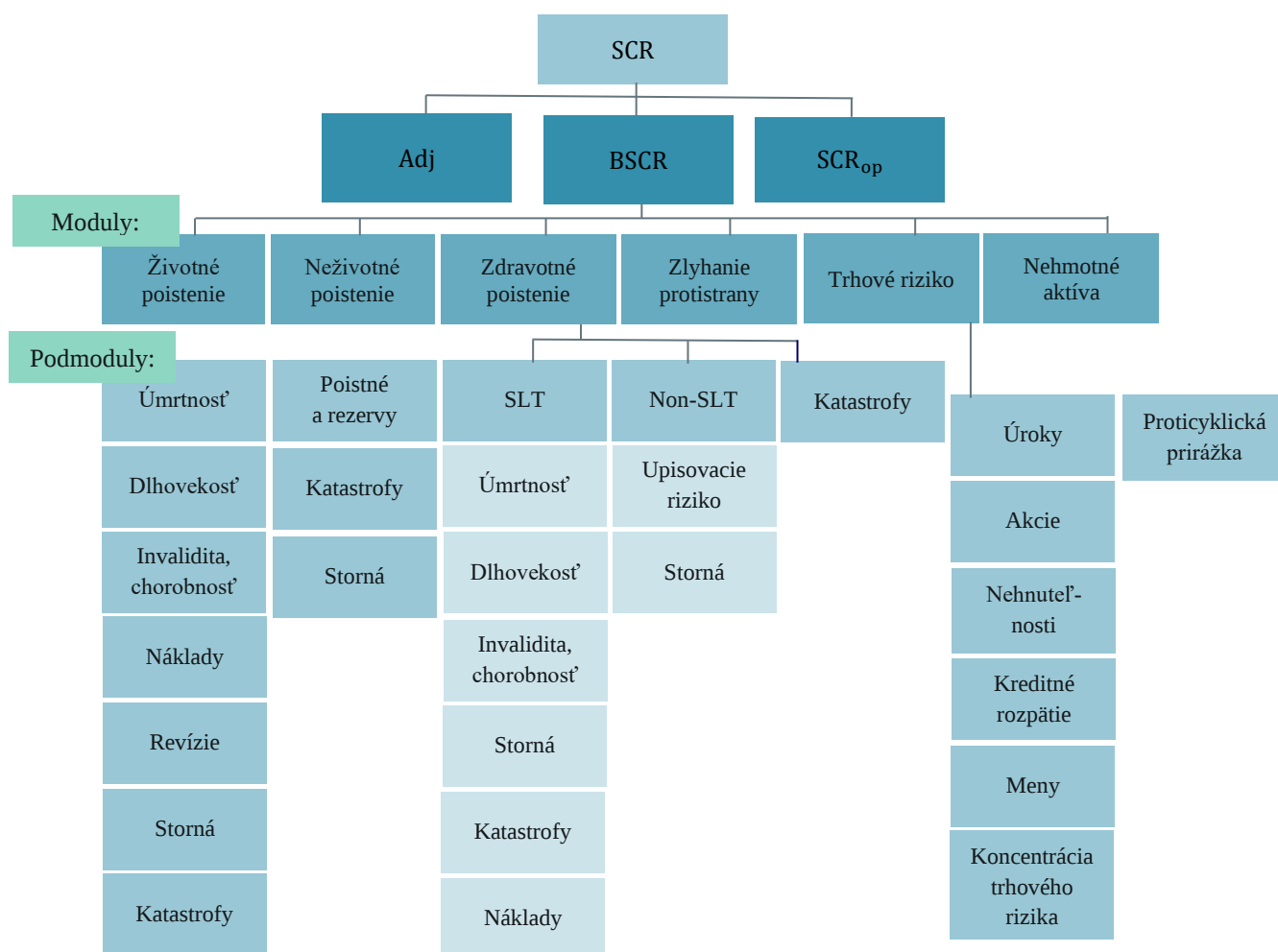
konzistentné zásady oceňovania a kapitálové požiadavky založené na riziku, poskytuje pomerne presný obraz o rizikovej situácii poisťovacích spoločností.

Jednotlivé metodológie potrebujú model, v ktorom budú odhadovať výšku cieľového kapitálu. Podľa metodológie SST poisťovacie spoločnosti používajú na hodnotenie svojich rizík štandardný model predpísaný agentúrou FINMA, no v prípade že sa riziková situácia poisťovacej spoločnosti nedá presne premietnuť do štandardného modelu, poisťovacia spoločnosť je vyzvaná k vytvoreniu vlastného interného modelu. Takéto interné modely musia vyhovovať požiadavkám metodológie SST a je možné ich použiť iba so súhlasom Švajčiarskeho úradu pre dohľad nad finančným trhom FINMA. (FINMA, 2018)

1.3.3 Štandardný vzorec SCR

Štandardný vzorec je podľa smernice Solventnosť II kalibrovaný tak, aby pokryl upisovacie, trhové, kreditné a operačné riziko so spoľahlivosťou 99,5 % v ročnom horizonte a je vhodný pre malé a stredné spoločnosti s nie príliš komplikovanou štruktúrou, preto musí pokryť potreby širokého spektra spoločností a to s dostatočnou presnosťou, transparentnosťou a jednoduchosťou. Medzinárodné poisťovne často využívajú oba prístupy pre odhad kapitálu, ako štandardný vzorec, tak aj interný model. Interný model používajú zvyčajne z globálneho pohľadu, ktorý je poisťovni šitý na mieru a štandardný vzorec iba pre časť biznisu, ktorý nie je tak rozsiahly alebo patrí pod dohľad iného regulátora (napríklad poisťovne sídliace vo Švajčiarsku s biznisom v EÚ). Z pohľadu lokálnych poisťovní, ktoré reportujú matke, je skôr bežný opačný prístup, kedy poisťovacia spoločnosť využíva na výpočet SCR štandardný vzorec a pre jedno dominantné riziko využíva interný model. V tomto prípade hovoríme o parciálnom internom modeli. Na rozdiel od interných modelov, ktoré majú tendenciu aplikácie komplikovanejších metód na kvantifikáciu rizík, agregáciu a odhad kapitálovej požiadavky, štandardné vzorce sú z veľkej časti založené na scenároch. Samozrejme, aj v rámci štandardného vzorca majú poisťovacie spoločnosti možnosti, ako upraviť metodológiu odhadu kapitálovej požiadavky, aby lepšie sedel na daný subjekt, no obnáša to omnoho viac obmedzení ako v prípade interných modelov. Ďalšou nevýhodou pri štandardnom vzorci vidíme v množstve zmien v metodológii, zatiaľ čo modelové zmeny pri kvalitne nastavených interných modeloch sa dejú veľmi zriedka.

Štruktúra rizík v rámci štandardného vzorca je prísne daná a riziká zadeľuje do modulov a podmodulov.



Obrázok 1.3.5: Štruktúra štandardného vzorca vrátane rozčlenenia na rizikové (pod)moduly

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Cipra (2015)

Kapitálová požiadavka na solventnosť SCR v direktíve Solventnosť II je počítaná podľa štandardného vzorca, ktorý sčítava niekoľko položiek (Cipra, 2015):

$$SCR = BSCR + SCR_{op} + Adj. \quad (1.3.2)$$

kde

SCR reprezentuje celkovú kapitálovú požiadavku podľa štandardného vzorca,

$BSCR$ reprezentuje základnú kapitálovú požiadavku,

SCR_{op} reprezentuje kapitálovú požiadavku k operačnému riziku,

Adj je úprava o schopnosť technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovať straty.

Symbolický zápis štandardného vzorca pre výpočet základnej solventnostnej požiadavky *BSCS* zahŕňa jednotlivé rizikové moduly a podmoduly, ktoré sú agregované na základe predpísanej korelačnej matice:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangible} \quad (1.3.3)$$

kde

$SCR_{neživotné}$	je SCR v module neživotného rizika,
$SCR_{životné}$	je SCR v module životného rizika,
$SCR_{zdravotné}$	je SCR v module zdravotného rizika,
$SCR_{trhové}$	je SCR v module trhového rizika,
$SCR_{zlyhanie}$	je SCR v module rizika zlyhania protistrany,
$SCR_{nehmotné}$	je SCR v module rizika nehmotných aktív,
$corr_{ij}$	sú korelačné koeficienty medzi SCR pre jednotlivé rizikové moduly.

Tabuľka 1.3.1: Korelačné koeficienty $corr_{ij}$ pre štandardný vzorec

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	Neživotné	Životné	Zdravotné	Trhové	Zlyhanie
Neživotné	1	0	0	0,25	0,50
Životné	0	1	0,25	0,25	0,25
Zdravotné	0	0,25	1	0,25	0,25
Trhové	0,25	0,25	0,25	1	0,25
Zlyhanie	0,50	0,25	0,25	0,25	1

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Cipra (2015)

Hodnoty SCR za jednotlivé moduly sú vypočítané zo solventnostných kapitálových požiadaviek podmodulov a agregované rovnakým spôsobom, použitím predpísanej korelačnej matice pre príslušný podmodul. Podobný štandardný model existuje aj pre švajčiarsky test solventnosti.

Podobným systémom funguje aj štandardný model pod metodológiou SST, teda agregovaním stresových scenárov za pomoci korelačných matíc. (FINMA, 2021)

2 Ciel' práce

Manažment rizík je jednou z kľúčových úloh v rámci riadenia poisťovacej spoločnosti. Upisovanie nových poisťných zmlúv, tvorba nových produktov či zmeny na finančných trhoch so sebou vždy prinášajú riziká, ktoré je potrebné kvantifikovať. Vhodná, kvalitná a presná kvantifikácia rizík spojená s vykazovaním výsledkov zodpovednému dozornému orgánu by mala zabezpečiť, aby v poisťovacej spoločnosti nenastala situácia, kedy sa stane finančne nestabilnou a insolventnou. Vďaka správnenému vykazovaniu dokážu regulátori včasne identifikovať možné finančné problémy a vďaka prísnejším reguláciám predísť neželaným situáciám.

Práca je koncipovaná tak, aby čitateľa previedla celým procesom určovania požadovaného kapitálu komerčnej poisťovne pre interný model podľa zadefinovanej metodológie. Hlavným cieľom práce je kvantifikácia a agregácia rizík interného modelu komerčnej poisťovne pre potreby určenia miery solventnosti.

Čiastkovými cieľmi práce sú:

- definovanie základných teoretických pojmov z oblasti manažmentu rizík, agregácie a metodológií pre odhad rizikového kapitálu a miery solventnosti,
- predstavenie a zostavenie modelu na agregáciu rizík pre účel určenia miery solventnosti použitím zjednodušenej viacrozmernej kopule MB11 vytvorenej programovacím jazykom R,
- kvantifikácia hodnoty jednotlivých rizík a agregácia rizík s následným určením rizikového kapitálu pre vybrané miery odhadu a stanovenú pravdepodobnosť,
- určenie miery solventnosti,
- grafická realizácia výsledkov prostredníctvom aplikácie Shiny.

3 Metodika práce a metódy skúmania

Odhad miery solventnosti poisťovacej spoločnosti je komplexný proces, pričom každý krok procesu musia poisťovacie spoločnosti dôkladne premyslieť a nechať schváliť príslušnému dozornému orgánu, resp. regulátorovi. Model odhadu miery solventnosti je potrebné nastaviť tak, aby výsledné hodnoty rizík a kapitálu na krytie daných rizík, boli čo najpresnejšie a zodpovedali potenciálnej realite, pretože iba v takomto prípade má miera solventnosti vysokú výpovednú hodnotu. V našom prípade uvažujeme interný model komerčnej poisťovacej spoločnosti, ktorá podlieha riziku trhovému, neživotnému a katastrofickému riziku. V kapitole si predstavíme základnú metodiku a metódy skúmania potrebné pre naplnenie čiastočných cieľov a hlavného cieľa záverečnej práce.

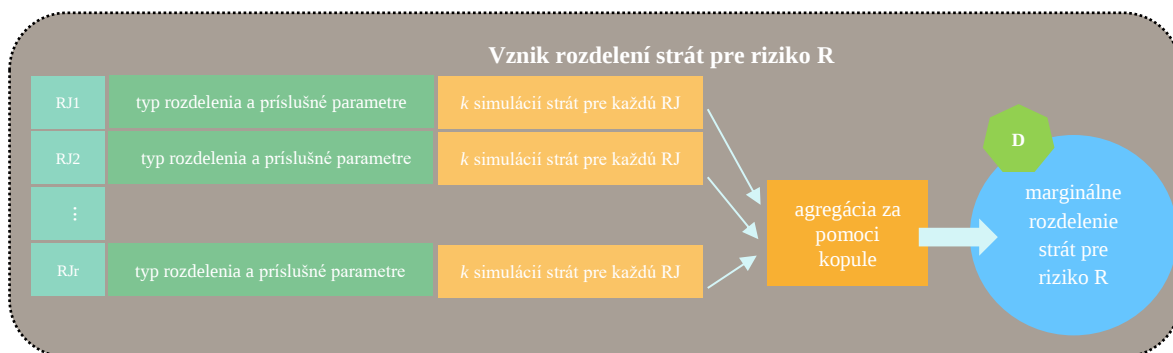
Ako sme už načrtli vyššie, pre odhad miery solventnosti sme zvolili interný model, ktorý je prispôsobený na riziká, ktorým naša teoretická poisťovacia spoločnosť čelí. Samozrejme, poisťovacia spoločnosť môže čeliť aj ďalším rizikám, akými sú napríklad operačné či kreditné riziko, no tieto riziká nemusí spoločnosť považovať za dostatočne veľké a/alebo špecifické, a preto je pre ich odhad dostačujúci štandardný model. V takomto prípade by sme hovorili o parciálnom internom modeli. Model odhadu miery solventnosti, pre ktorý sme sa rozhodli, popisujú obrázky Obrázok 3.0.1 a Obrázok 3.0.2.

Vstupom do modelu (viď Obrázok 3.0.2) sú dve hlavné oblasti – závislosti $\{A\}$ a straty $\{B\}$; výstupom z modelu sú oblasti kapitálu zahrňujúce mieru solventnosti $\{C1\}$ a oblasť odhadu veľkosti rizikového kapitálu $\{C2\}$. Model pracuje s dvoma hlavnými zdrojmi – marginálnymi rozdeleniami strát jednotlivých rizík $\{1\}$ s počtom simulácií k a chvostovými závislosťami $\{2\}$ jednotlivých rizík. Tieto dva zdroje sú vstupmi do kľúčového procesu odhadu miery solventnosti – agregácie rizík $\{3\}$, pričom hlavným nástrojom agregácie rizík v našom prípade je kopula. Agregácia rizík je veľmi náročný proces, pri ktorom spájame marginálne rozdelenia strát jednotlivých rizík $\{1\}$ spolu s pravdepodobnosťou nastania (konkrétnych strát), ktoré v modeli nazývame kopulové variácie $\{4\}$. Je dôležité poznamenať, že oba vstupy do modelu vznikajú nezávisle. Na tento fakt upriamujeme pozornosť hlavne z dôvodu známej aplikácie empirických kopúl, ktoré sa generujú v závislosti od vlastností rozdelení. Predtým, než detailnejšie prejdeme na procesy v rámci modelu, musíme si uvedomiť, čo vlastne modelom potrebujeme získať. Manažment rizík je oblasť poisťovníctva, ktorá je špecifická upriamovaním pozornosti na *zriedkavé, materiálne a naraz nastávajúce udalosti*, pričom práve tieto predpoklady rysujú črty

modelov pre odhad miery solventnosti. Udalosti, ktoré sa dejú pomerne často a sú pre poisťovňu z globálneho pohľadu nemateriálne, napríklad zlomenie končatiny na klzkom chodníku, má vplyv na poisteného, no pre poisťovňu nepredstavuje priame ohrozenie. Je to jednak pre nemateriálnosť škody a tiež nie je predpoklad, že desať tisíc zlomených končatín výrazne ovplyvní iné riziko vplývajúce na poisťovaciu spoločnosť. Môžeme teda povedať, že nemateriálne udalosti s malým, prípadne so žiadnym prepojením (koreláciou) na iné riziká, nie sú v záujme modelovania a sledovania miery solventnosti. Príklad udalosti, ktorá poisťovaciu spoločnosť zaujíma a na ktorej nastanie sa roky pripravuje, je pandémie COVID-19. Pandémia COVID-19 z pohľadu poisťovacej spoločnosti nie je iba o odškodneniach spojených so samotným ochorením poistených, ktoré nás už ale v takomto rozsiahlom množstve zaujíma, ale aj o všetkých prepojeniach pandémie na celkové dianie vo svete. Prepady a volatilita finančných trhov, meškajúce dodávky tovarov a výroby (čipová kríza), globálne klesajúci záujem o určité typy poistenia (napr. cestovné poistenie) a výrazný záujem o životné poistenia, ktoré poisťovňu nútia k veľkej tvorbe rezerv, prepojenie pandémie a amerických volieb prezidenta. K tomu sa vo svete pridali aj požiare v Austrálii, Amazonke, na Sibíri či hurikány. Všetky vymenované riziká vieme prideliť do kategórií trhové a kreditné riziko, katastrofické riziko, neživotné a životné riziko, ktorého súčasťou je aj pandemické riziko. Čo tieto riziká spája z pohľadu poisťovacej spoločnosti je výrazná materialita, nastali naraz alebo ako dôsledok vzniku iných rizík. Výraz „naraz“ môžeme zdefinovať ako *spolu s rovnakou pravdepodobnosťou nastania*, čo je práve pravdepodobnosť, ktorú nám vyjadrujú nagenované kopulové variácie {4}. Tie generujeme v rovnakom počte k , kde k reprezentuje počet simulácií existujúcich marginálnych rozdelení strát {1}. Hlavným vstupom pre generovanie kopulových variácií sú závislosti a parametre kopule {2}. Závislosťami v tomto prípade rozumieme ich vzájomné prepojenie, ako v prípade pandémie COVID-19, ktorá ovplyvnila záujem o kúpu poistenia a rovnováhu trhov. Podľa predpokladov nás zaujímajú aj riziká materiálne, a preto závislosť, ktorá vstupuje do modelu reprezentuje *chvostovú závislosť*. Kopulové variácie {4} sú teda kombinácie popísané pravdepodobnosťami nastania jednotlivých rizík súčasne. Kopulové variácie následne v modeli používame na preusporiadanie simulácií marginálnych rozdelení jednotlivých strát tak, aby sa agregovali marginálne simulácie rozdelenia strát s podobnou pravdepodobnosťou nastania a príslušnou materialitou. Agregovaná hodnota straty {5} reprezentuje súčet preusporiadaných marginálnych hodnôt po simuláciách, na ktoré sa aplikuje mieru odhadu v závislosti od zvolenej metodológie. Na získanie veľkosti požadovaného kapitálu {6} je potrebné od agregovanej hodnoty strát odpočítať očakávanú

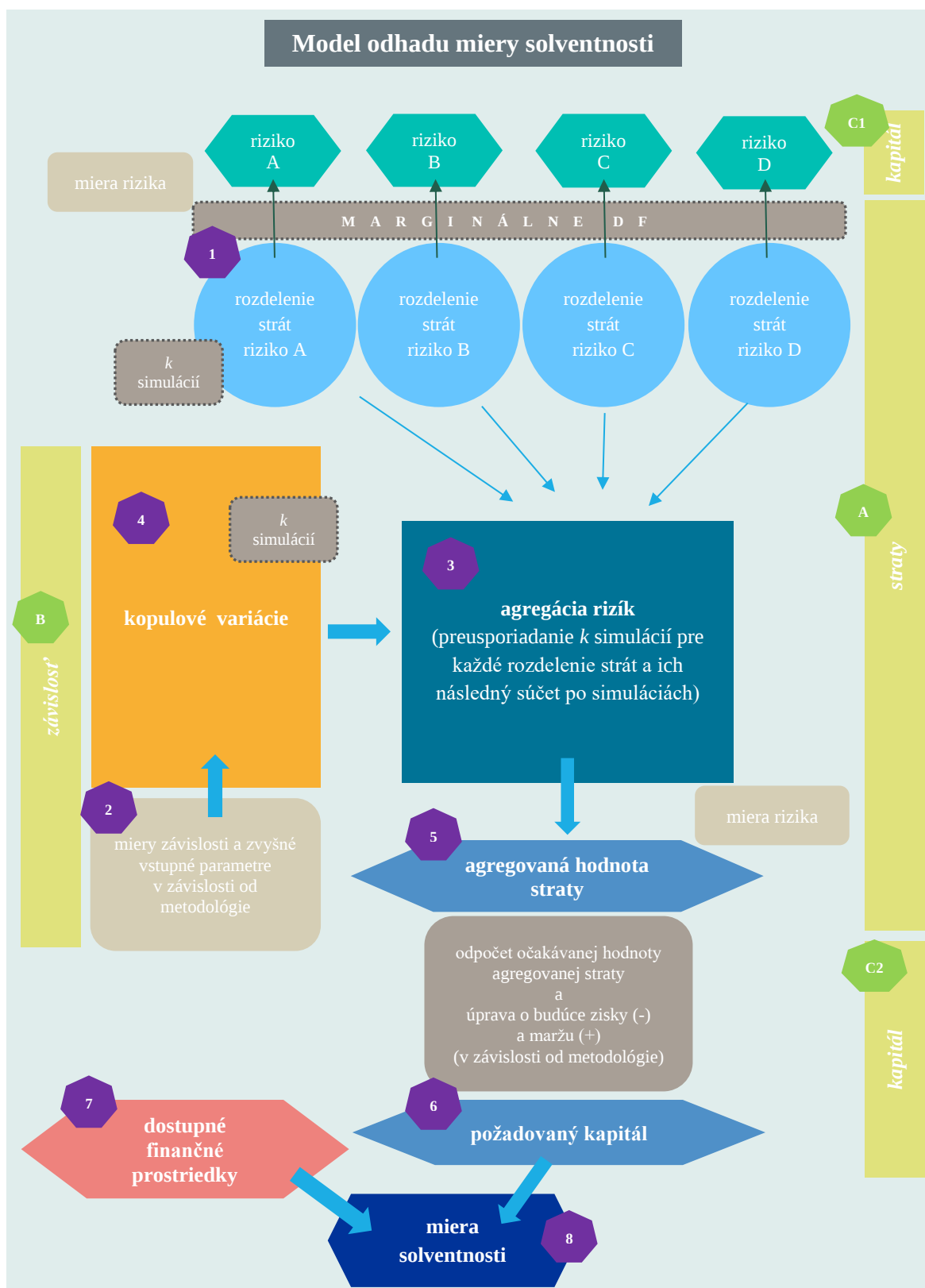
výšku agregovanej straty a v závislosti od metodológie, odpočítať budúci očakávaný zisk pre budúce obdobie (pretože ak by došlo k potrebe využitia rizikového kapitálu, najprv sa použije zisk, až následne sa siahne na kapitál) a pripočítať *market value margin*, ktorá reprezentuje potrebnú rezervu poisťovacej spoločnosti prípad, ak by došlo k prevzatíu poisťného portfólia inou spoločnosťou. Mieru solventnosti {8} následne určíme ako pomer voľných finančných prostriedkov {7} a požadovaného kapitálu {6}.

Samostatnou témou je vznik marginálnych rozdelení pre jednotlivé riziká {1}, ktoré sú jedným zo vstupov do nášho modelu (viď Obrázok 3.0.1). Samotnému generovaniu marginálnych rozdelení sa v práci venovať nebudeme, no považujeme za dôležité danému procesu rozumieť. Ako je naznačené v časti {D}, uvažujeme medzinárodnú poisťováciu spoločnosť, ktorá odhaduje mieru solventnosti globálne. Uvažujeme, že poisťovacia spoločnosť má r reportovacích jednotiek (RJ) a každá z nich reprezentuje určitý typ neživotného biznisu, napríklad maloobchodné poistenie (*retail*), oblasť cestovného poistenia a biznis sídli v Rakúsku. Tento konkrétny typ biznisu má svoje špecifiká, ktoré pri modelovaní vieme preniesť do tvaru rozdelenia pomocou konkrétného typu rozdelenia s určitými parametrami. Aby sme mohli pracovať s konkrétnymi hodnotami, je potrebné namodelovať marginálne rozdelenie pre spomenutý typ biznisu, zvyčajne s počtom simulácií k . Následne agregujeme jednotlivé biznisy pre všetky reportovacie jednotky, až dostaneme marginálne rozdelenie rizík pre neživotné riziká s počtom simulácií k . Takto sa modelujú marginálne rozdelenia pre takmer všetky typy rizík. Hodnotu konkrétného rizika vieme určiť aplikovaním miery odhadu na agregované rozdelenie marginálnych strát, v závislosti od využitej metodológie pre odhad rizikového kapitálu a výšku kapitálu pre jednotlivé riziká určíme následným odpočítaním očakávaných strát.



Obrázok 3.0.1: Proces vzniku marginálneho rozdelenia strát rizika R

Zdroj: vlastné spracovanie



Obrázok 3.0.2: Model odhadu miery solventnosti interným modelom poisťovacej spoločnosti

Zdroj: vlastné spracovanie

3.1 Agregácia rizík

Kľúčovým procesom pre odhad miery solventnosti je proces agregácie rizík, respektíve agregácie strát, pri ktorom sa jednotlivé riziká, ktorým daná poisťovacia spoločnosť podlieha, združujú do jednej konečnej hodnoty agregovanej straty. Agregovaná strata je diverzifikovaná hodnota rizika, ktorá je nižšia, než prípad, kedy by agregácia nebola nepoužitá. Pri manažmente rizík je potrebné si uvedomiť, že rovnako ako podkapitalizácia, aj prekapitalizovanie poisťovacej spoločnosti môže ublížiť. Pred samotnou aplikáciou vybranej agregáčnej metódy je poisťovňa povinná zhodnotiť riziká vybraného prístupu a prekonzultovať to so zodpovedným dozorným orgánom, ktorým sú regulátori. Medzi najvyužívanejšie metódy agregácie patrí simulovanie kopulových variácií za pomoci metódy Monte Carlo a výpočet agregovanej straty za pomoci VCV matice.

Predpokladajme spojitý náhodný vektor $L = (L_1, L_2, \dots, L_d)$, kde $L_j, j \in \{1, \dots, d\}$ reprezentuje straty v j -tej obchodnej línii finančnej spoločnosti za vopred stanovené časové obdobie, najčastejšie 1 rok dopredu. Pri agregácii rizík, najmä pri kvantitatívnom manažmente rizík je záujem upriamený na agregovanú stratu (Hofert et. al, 2017)

$$L^+ = L_1 + \dots + L_d \quad (3.1.1)$$

ktorej distribučnú funkciu F_{L^+} nazývame rozdelením strát. Z pohľadu manažéra rizík nie je až tak dôležité samotné rozdelenie strát, no miera rizika $\varrho_\alpha(L^+)$ pri úrovni spoľahlivosti $\alpha \in (0,1)$ a v závislosti od miery odhadu.

Medzi najvyužívanejšie miery odhadu, v závislosti od metodológie pre určenie miery solventnosti, patria hodnota v riziku *VaR* a *Expected Shortfall*.

3.1.1 Miery rizika *VaR*, *ES* a očakávaná strata

Hodnota v riziku *VaR* (*Value-at-Risk*) je odhadom maximálnej straty, ku ktorej môže dôjsť s predpokladanou spoľahlivosťou v stanovenom budúcom období. V poisťovniach sa jedná o jeden z najpoužívanějších prístupov v rámci interných modelov pre výpočet kapitálových požiadaviek. Pre poisťovnicu spoločnosť predstavuje maximálnu stratu počas určitého obdobia a pri určitej spoľahlivosti.

V prípade agregácie strát môžeme hodnotu v riziku VaR pre mieru spoľahlivosti $\alpha \in (0,1)$ definovať ako (Hofert et. al, 2017)

$$VaR_{\alpha}(L^+) = F_{L^+}^{-1}(\alpha), \quad (3.1.2)$$

ktorá reprezentuje $\alpha * 100$ percentný kvantil funkcie F_{L^+} . Miera rizika $VaR_{\alpha}(L^+)$ predstavuje najmenšiu úroveň straty, ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou najviac $1 - \alpha$ (Hofert et. al, 2017). Miera rizika VaR je pri odhadovaní rizík veľmi obľúbenou metrikou a využívaná je aj priamo v direktíve Solventnosť II, s pravdepodobnosťou 99,5 %. Znamená to, že poisťovacia spoločnosť musí držať dostatok kapitálu na to, aby v ročnom horizonte bola pravdepodobnosť prežitia poisťovacej spoločnosti 99,5 %, teda pravdepodobnosť platobnej neschopnosti za 12 mesiacov nie je viac ako 0,5 %.

Ďalšou z mier odhadu využívanou v poisťovníctve pri kvantifikácii rizík je miera rizika nazývaná *Expected Shortfall*.

Miera rizika *Expected Shortfall* (ES), niekedy označovaná aj ako očakávaný deficit alebo podmienená hodnota v riziku CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) sa podľa T. Cipru (2015) považuje za užitočnejšie opatrenie rizika ako hodnota v riziku VaR, pretože je koherentným a navyše spektrálnym meradlom rizika finančného portfólia. Mieru odhadu ES môžeme všeobecne zapísať ako (Barrailler & Dufour, 2015)

$$ES_{\alpha} = E(L^+ | L^+ > VaR_{\alpha}(L^+)) \quad (3.1.3)$$

a teda ako priemernú hodnotu straty prekračujúcu hodnotu v riziku VaR pri spoľahlivosti α .

Okrem mier odhadu, pre určenie veľkosti kapitálu na pokrytie rizika $\varrho_{\alpha}(L^+)$ potrebujeme poznať *očakávanú stratu*, ktorá predstavuje očakávanú priemernú hodnotu straty, ktorú by poisťovacia spoločnosť mala očakávať, že utrpí v priebehu času na svojom rizikovom portfóliu. Očakávanú stratu môžeme zapísať ako

$$L_{exp} = E(L^+). \quad (3.1.4)$$

Očakávaná hodnota straty je pri určovaní hodnoty rizika veľmi dôležitou veličinou, nakoľko sa od nej priamo odvodzuje hodnota rizikového kapitálu (viď Obrázok 1.2.1).

Pri agregácii rizík je dôležité si uvedomiť, že nie všetky riziká, ktorým poisťovacia spoločnosť čelí, utrpia rovnako veľké nepriaznivé straty súčasne. Niektoré oblasti poistenia môžu zaznamenať nepriaznivé finančné straty, iné priemerné straty alebo dokonca výnosy. Ak by sme sa pozerali na celkové, agregované riziká poisťovacej spoločnosti s ľubovoľnou mierou odhadu, výsledný kapitál by bol nižší ako súčet jednotlivých hodnôt rizík pre rovnakú mieru odhadu. Miera diverzifikácie medzi rizikami je hodnota, o ktorú sa agregovaný kapitál pri danej miere odhadu líši od priamej sumy jednotlivých rizík pri rovnakej miere odhadu. V metodológiách takýto rozdiel nazývame aj diverzifikačným benefitom. Diverzifikačný benefit (DB) môžeme zapísať ako (Shaw & Spivak, 2009)

$$DB = 1 - \frac{\text{rizikový kapitál}_{\text{agregovaný}}}{\sum \text{rizikový kapitál}_r} \quad (3.1.5)$$

pričom *rizikový kapitál_{agregovaný}* vyjadruje celkový agregovaný kapitál pre straty (riziká) poisťovacej spoločnosti pre všetky riziká dokopy a *rizikový kapitál_r* vyjadruje samostatnú hodnotu straty (rizika) jednotlivých typov rizík.

V poisťnej praxi sa diverzifikácia uvažuje už na nižších stupňoch hierarchie a proces agregácie sa uvažuje už pri rizikových faktoroch. V životnom poistení je to agregácia rizikových faktorov úmrtnosť, chorobnosť a dlhovekosť, ešte predtým na úrovni reportovacích jednotiek. Nakoľko medzinárodné spoločnosti často svojim podnikaním pokrývajú celé kontinenty, je potrebné možné prepojenie zohľadniť a tiež medzi typmi upisovaného biznisu, napríklad v neživotnom poistení línia biznisu poistenie motorových vozidiel a úrazové poistenie. Pri viacstupňových agregáciách rozlišujeme *intradiverzifikáciu* (diverzifikácia v rámci rizika/rizikového faktoru) a *interdiverzifikáciu* (diverzifikácia medzi rizikami/rizikovými faktormi). Ak by sme pri modelovaní rizika uvažovali diverzifikáciu iba medzi jednotlivými rizikami, kapitál poisťovacej spoločnosti by bol značne nadhodnotený.

Agregácia rizík je proces vedúci k odhadu miery solventnosti poisťovne. Predtým je ale potrebné určiť výšku rizikového kapitálu, ktorý je učený ako agregovaná hodnota strát, resp. rizika ponížená (v závislosti od metodológie) o očakávaný výnos, ktorý v prípade insolventnosti bude použitý skôr, ako odložený rizikový kapitál a zvykne sa pripočítavať MVM, teda maržu trhovej hodnoty poistného portfólia.

3.1.2 Miera solventnosti

Solventnosť je schopnosť poisťovne dlhodobo plniť svoje finančné záväzky voči klientom a veriteľom, pričom sa najčastejšie popisuje mierou solventnosti. Miera solventnosti je ukazovateľom výkonnosti hovoriacim o finančnom zdraví spoločnosti a je veľmi dôležitou metrikou pre veriteľov, potenciálnych investorov a akýkoľvek iný externý subjekt, ktorý by mal záujem o spoluprácu s poisťovacou spoločnosťou. Externí partneri uprednostňujú vyššiu mieru solventnosti, ktorá je dôkazom finančnej sily na rozdiel od nízkej, ktorá naznačuje potenciálne finančné prekážky v budúcnosti. (Corporate Finance Institute, 2022)

Mieru solventnosti m_{solv} určíme ako

$$m_{solv} = \frac{\text{voľné finančné prostriedky}}{\text{rizikový kapitál}} \quad (3.1.6)$$

kde

voľné finančné prostriedky (*Available Financial Resources*) reprezentujú prebytok trhovej hodnoty aktív nad trhovou hodnotou pasív k dátumu ocenenia;

rizikový kapitál reprezentuje kapitál odhadnutý poisťovacou spoločnosťou podľa danej metodológie a je potrebný na pokrytie možných neočakávaných strát.

Účelom agregácie je spojiť typy rizík do spoločného viacrozmerného rozdelenia, ktoré popisuje pravdepodobnosť súčasného vzniku strát (t.j. súčasne s najvyššou pravdepodobnosťou). Aby to bolo možné, je nutné definovať závislosti medzi jednotlivými agregovanými rizikami.

V prípade korelácií a závislostí sa zaužívané termíny niekedy nahrádzajú novším, tzv. mierou asociácie (Nelsen, 2006).

3.2 Miery asociácie

Pri manažmente rizík a určovaní rizikového kapitálu pre potreby určenia miery solventnosti je oblasť mier asociácie veľmi dôležitá a hlavne správny výber metódy pre popísanie závislostí medzi jednotlivými rizikami tak, aby následne agregované hodnoty rizík zodpovedali potenciálnej realite (Nguyen & Molinari, 2011). Ako uvádza Nelsen (2006),

„vzťahy závislosti medzi náhodnými veličinami sú jedným z najrozšírenejších objektov skúmania v pravdepodobnosti a štatistike. Povaha závislosti môže mať rôznu podobu a pokiaľ sa o závislosti neprijmú určité špecifické predpoklady, nemožno uvažovať o žiadnom zmysluplnom štatistickom modeli” (Jodgeo, 1982). Uvažovať o modeli agregácie za pomoci kopúl, VCV matice alebo o akomkoľvek modeli v štatistike bez závislostí je nebezpečné, ak vôbec možné. Je tiež nesmierne dôležité rozlišovať a správne chápať význam pojmov závislosť (*dependence*) a korelácia (*correlation*). Ak by sme uvažovali úplnú závislosť medzi premennými (v našom prípade medzi jednotlivými marginálnymi rozdeleniami rizík), nadhodnotili by sme hodnotu celkových strát a tým ponížili mieru solventnosti. V manažmente rizík existujú 3 hlavné prístupy využívajúce závislosti (Nguyen & Molinari, 2011):

- využívanie lineárneho korelačného koeficienta, známeho tiež pod pojmom **Pearsonov lineárny korelačný koeficient**, ktorý je v prípade viacrozmerných rozdelení zvyčajne popísaný korelačnou maticou a je využívaný v štandardných modeloch (VCV metóda odhadu kapitálu). Hlavným dôvodom jeho častej aplikácie je jednoduchosť a ľahká aplikácia. Medzi nevýhody prístupu korelačných matíc zaradíme podcenenú závislosť chvostov rozdelení rizík, ktoré sú pre oblasť poisťovníctva špecifické.
- Druhou možnosťou zobrazenia závislosti medzi premennými sú poradové korelačné miery, ktoré reprezentuje **Spearmanovo ρ** a **Kendallove τ** . Hoci tieto miery nie sú lineárne, ako Pearsonov korelačný koeficient, stále nedokážu popísať mieru závislosti vo všeobecnosti pre jednotlivé časti rozdelenia rizík, napríklad v oblasti chvostu rozdelenia.
- **Kopuly** sú tretia možnosť, ktorou vieme detailne popísať závislosti medzi jednotlivými rizikami. Tento prístup je veľmi inovatívny, no žiaľ kvôli metodologickej, softvérovej a finančnej náročnosti, využívaný najmä veľkými medzinárodnými spoločnosťami a ich internými modelmi a takmer v žiadnej miere v štandardných modeloch. Kopuliam sa budeme bližšie venovať v kapitole 3.3 Kopuly, kde si ukážeme prepojenie medzi generovaním kopulových variácií a poradovými koeficientmi.

Pojem závislosť hovorí o vzájomnom aktívnom vplyve premenných na iné premenné, korelácia hovorí o vzťahu medzi nimi.

3.2.1 Pearsonov lineárny korelačný koeficient

Využívanie Pearsonovho lineárneho korelačného koeficientu je veľmi jednoduché, no netreba zabúdať, že jeho aplikácia vracia jediné číslo, ktoré ale nemusí kvalitne popísať závislosť celého rozdelenia. Lineárny korelačný koeficient reálne ocenených nedegenerovaných náhodných premenných X_1, X_2 je definovaný vzťahom (Nguyen & Molinari, 2011)

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}} \quad (3.2.1)$$

kde

$\rho(X_1, X_2)$ je lineárny korelačný koeficient X_1, X_2 ,

$\text{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$ je kovariancia X_1, X_2 ,

$\text{Var}(X_1)$ a $\text{Var}(X_2)$ sú konečné odchýlky X_1, X_2 .

V prípade viacerých dimenzií, lineárne korelačné koeficienty zapisujeme do korelačnej matice. Symetrickú a semi-pozitívnu korelačnú maticu zapisujeme ako (Nguyen & Molinari, 2011)

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho(X_1, X_1) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \cdots & \rho(X_n, X_n) \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Lineárny korelačný koeficient meria iba lineárnu stochastickú závislosť vždy iba dvoch premenných, v našom prípade dvoch rizík. Hodnoty, ktoré korelačný koeficient vracia sú v intervale $[-1, 1]$. Problémom korelačného koeficienta je, že aj úplne korelované premenné, nemusia nadobúdať hodnotu korelačného koeficientu 1 (a naopak). Môže nastať situácia, kedy silne závislé riziká nadobúdajú hodnotu korelačného koeficientu rovnú 0.

Využitie Pearsonovho lineárneho korelačného koeficienta môže byť efektívne pri eliptických rozdeleniach rizík, ktorých základnou vlastnosťou je chýbajúca chvostová závislosť. Viac o Eliptických rozdeleniach si povieme v kapitole 3.3 Kopuly.

3.2.2 Poradové korelačné miery

Ďalšími mierami asociácie využívanými na určenie závislostí sú poradové korelačné miery (*Rank Correlation Measures*), ku ktorým patria Spearmanovo ρ_S a Kendallovo τ . V aplikácii na poisťovníctvo a oblasť manažmentu rizík, sú kvalitnejším zobrazením

závislosti medzi rizikami, no stále ich vyjadruje iba jedno číslo. Jedným číslom je náročné popísať rozdelenie tvorené z tisíciek simulácií, pričom to správanie v strede rozdelenia môže byť úplne odlišné od správania na dolnom a hornom konci.

Nech (X_1, X_2) je dvojrozmerný náhodný vektor so spojitými marginálnymi distribučnými funkciami F_1 a F_2 (Hofert et. al., 2017)

1. Populačná verzia Spearmanovho ρ je definovaná ako

$$\rho_S = \rho_S(X_1, X_2) = \text{Cor}(F_1(X_1), F_2(X_2)). \quad (3.2.3)$$

2. Nech (X'_1, X'_2) sú nezávislé kópie (X_1, X_2) . Populačná verzia Kendallovho τ je definovaná ako

$$\tau = \tau(X_1, X_2) = \mathbb{E} \left(\text{sign}((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2)) \right) \quad (3.2.4)$$

kde $\text{sign}(x)$ označuje znamienko x , ktoré je

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ak } x < 0, \\ 0, & \text{ak } x = 0, \\ 1, & \text{ak } x > 0. \end{cases}$$

Spearmanovo ρ_S je lineárny korelačný koeficient náhodného vektora $F_1(X_1), F_2(X_2)$, získaného z (X_1, X_2) použitím transformácie pravdepodobnosti.

Spearmanovo ρ_S aj Kendalovo τ sú mierami konkordancie. Miery asociácie hovoria o stave súhlasnosti (*Concordance*) vtedy, ak (x_1, x'_1) a (x_2, x'_2) označujú dve pozorovania vektoru (X, X') spojitej náhodnej premennej a hovoríme, že (x_1, x'_1) a (x_2, x'_2) sú súhlasné, ak $x_1 < x'_1$ a $x_2 < x'_2$ alebo ak $x_1 > x'_1$ a $x_2 > x'_2$. V prípade, ak platí $x_1 < x'_1$ a $x_2 > x'_2$ alebo $x_1 > x'_1$ a $x_2 < x'_2$, hovoríme, že miery asociácie sú nesúhlasné. (Nelsen, 2006). Môžeme tiež povedať, že Spearmanovo ρ_S a Kendalovo τ sú mierami súhlasnosti. Majme dva body (x_1, x'_1) a (x_2, x'_2) v $\mathbb{R}^2$, populačná verzia Kendallovho τ pre náhodné dvojice (X_1, X_2) a (X'_1, X'_2) spojitých náhodných premenných so združenou distribučnou funkciou H je definované ako pravdepodobnosť súhlasnosti mínus pravdepodobnosť nesúhlasnosti

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] - P[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0]. \quad (3.2.5)$$

Ak X_2 má tendenciu narásť spolu s X_1 , pravdepodobnosť súhlasnosti je vysoká. (Hofert et. al., 2017)

Závislosť, ktorá nás zaujíma z pohľadu manažmentu rizík je chvostová závislosť, pretože zámerom odhadujú rizikového kapitálu sú udalosti, ktoré nastanú s najvyššou pravdepodobnosťou naraz a sú výrazne materiálne.

3.2.3 Chvostová závislosť

Chvostová závislosť (*Tail Dependence*) je závislosť medzi premennými v hornom pravom a dolnom ľavom kvadrantne. Nech X_1 a X_2 predstavujú spojité náhodné premenné s distribučnými funkciami F_1 a F_2 . Horná chvostová závislosť λ_U (*Upper Tail Dependence*) je obmedzenie (ak existuje) podmienenej pravdepodobnosti také, že Y je väčšie než 100-tý percentil distribučnej funkcie F pre u nadobúdajúce 1 (Nelsen, 2006)

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)). \quad (3.2.6)$$

Podobne dolná chvostová závislosť λ_L (*Lower Tail Dependence*) je obmedzenie (ak existuje) podmienenej pravdepodobnosti také, že X_2 je menšie alebo rovné 100-tému percentil distribučnej funkcie F_1 pre u nadobúdajúce 0

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X_2 > F_2^{-1}(u) | X_1 > F_1^{-1}(u)). \quad (3.2.7)$$

Tieto parametre sú neparametrické a závisia iba na kopuliach X_1 a X_2 .

Chvostovú v závislosti od počtu rizík môžeme definovať pre viac dimenzií. V prípade dvoch rizík dvojrozmerná chvostová závislosť reprezentuje pravdepodobnosť, že riziko X_2 nadobudne extrémne hodnoty, ak aj riziko X_1 nadobudne extrémne hodnoty.

V dizertačnej práci sa venujeme agregácii rizík za pomoci kopule, miery asociácie a chvostové závislosti pre kopulu predstavíme v kapitole 3.3 *Kopuly*.

Tabuľka 3.2.1: Matica dvojrozmerných chvostových závislostí rizík A-C

2DTD	riziko A	riziko B	riziko C
riziko A	1	0,25	0,25
riziko B	0,25	1	0,25
riziko C	0,25	0,25	1

Zdroj: vlastné spracovanie

V prípade trojrozmernej chvostovej závislosti pri štyroch rizikách, chvostová závislosť (X_3, X_1, X_2) reprezentuje pravdepodobnosť, že riziko X_3 nadobudne extrémne hodnoty, tak aj riziká X_1 a X_2 nadobudnú extrémne hodnoty; respektíve trojrozmerná chvostová závislosť (X_3, X_1, X_4) reprezentuje pravdepodobnosť, že ak riziko X_3 nadobudne extrémne hodnoty, tak aj riziká X_1 a X_4 nadobudnú extrémne hodnoty. Takto by sme mohli pokračovať pre všetky kombinácie rizík.

Tabuľka 3.2.2: Matica trojrozmerných chvostových závislostí rizík A-C

riziko	3DTD
(A, B, C)	0,1383345

Zdroj: vlastné spracovanie

Pre kvalitné modelovanie závislostí na vysokej úrovni potrebujeme nástroj, ktorý dokáže popísať závislosti pre celé marginálne rozdelenie strát (rizík). Kopula je v tomto prípade veľmi efektívny matematický nástroj, ktorý to umožňuje a jedným zo vstupov pre niektoré z nich sú práve chvostové závislosti. Pred aplikáciou kopuly nemajú marginálne rozdelenia jednotlivých rizík medzi sebou modelovanú závislosť, vznikajú úplne separátne. Kopula umožňuje prepojenie jednotlivých simulácií marginálnych rozdelení jednotlivých strát (rizík) s novým simulačným scenárom, ktorý popisujú práve spomínané chvostové závislosti. Kopuly sa teda nastavujú spôsobom, aby sa po aplikácii kopuly splnili požadované štatistické vlastnosti odrážajúce závislosti. Vo všeobecnosti môžeme teda kopulu považovať za nástroj na preusporiadanie pozícií jednotlivých simulácií marginálnych rozdelení strát (rizík) tak, aby spĺňali zadané a očakávané predpoklady. V prípade nulovej závislosti medzi rizikami k preusporiadaniu strát absolútne nedochádza a v prípade úplnej závislosti môžeme pozorovať extrémne hodnoty strát pre viacero rizík v rámci jedného scenára, čo je takmer nereálne. Cieľom je nájsť usporiadanie medzi absolútnou nezávislosťou a úplnou závislosťou tak, aby k spoločným udalostiam dochádzalo s požadovanými frekvenciami vychádzajúcimi z parametrizácií zadaných zodpovednými aktuármi so skúsenosťami pre jednotlivé oblasti.

3.3 Kopuly

Kopuly sú moderným nástrojom v súčasnosti využívaným širokospektrálne, vrátane modelovania závislostí faktorov popisujúcich riziko. Kopula je vo všeobecnosti funkcia

mnohorozmerného rozdelenia, ktorého marginálne hodnoty sú rovnomerne rozdelené na $[0, 1]$, pričom musia byť splnené všetky matematické vlastnosti viacnásobného rozdelenia.

D – rozmerná kopula $C: [0,1]^d : \rightarrow [0,1]$ je kumulatívna distribučná funkcia s jednotnými marginálnymi veličinami. Kopulu zapisujeme $C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ pre všeobecnú kopulu a má nasledovné vlastnosti (Haugh, 2016):

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ je neklesajúca pre každý z komponentov u_i ;
2. i -ta marginálna distribúcia sa získava nastavením $u_i = 1$, pre $j \neq i$ a je rovnomerne rozložená $C(1, \dots, 1, u_i, \dots, 1) = u_i$.
3. d – rozmerná kopula $C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ je funkcia $[0,1]^d \rightarrow [0,1]$, ktorá je rovná 0 pre všetky $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0,1]^d$, pre ktoré aspoň jedna súradnica u_i je rovná 0 (Cipra, 2015);
4. d – rozmerná kopula $C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ je funkcia $[0,1]^d \rightarrow [0,1]$, ktorá je rovná súradnici u_i , ak všetky ostatné súradnice $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0,1]^d$ sú rovné 1 (Cipra, 2015);
5. pre $a_i \leq b_i$, $P(U_1 \in [a_i, b_i])$ musí byť nezáporná, čo implikuje nerovnosť obdĺžnika

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0 \quad (3.3.1)$$

kde $u_{j,1} = a_j$ a $u_{j,2} = b_j$.

Platí to aj naopak. Každá funkcia, ktorá spĺňa vlastnosti 1 až 3, je kopulou. Je tiež ľahké potvrdiť, že $C(1, u_1, \dots, u_d - 1)$ je $(d - 1)$ – dimenzionálna kopula, a platí všeobecne, že všetky k – rozmerné marginálne veličiny s $2 \leq k \leq d$ sú kopulami. Pre distribučnú funkciu F_x je zovšeobecnená inverzná funkcia F_x^{-1} definovaná ako

$$F_x^{-1}(p) := \inf\{x \in R: F_x(x) \geq p\}. \quad (3.3.2)$$

Potom, ak $U \sim U[0, 1]$ a F_x je distribučná funkcia, platí:

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = F_x(x). \quad (3.3.3)$$

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ je viacrozmerný náhodný vektor s distribučnou funkciou F_x a spojitými rastúcimi hodnotami, tak na základe predpokladu (3.3.3) vyplýva, že združené rozdelenie $F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_d}(X_d)$ je kopula C_x (Haugh, 2016):

$$\begin{aligned} C_x(u_1, \dots, u_d) &= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_d}(X_d) \leq u_d) \\ &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\ &= F_x(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

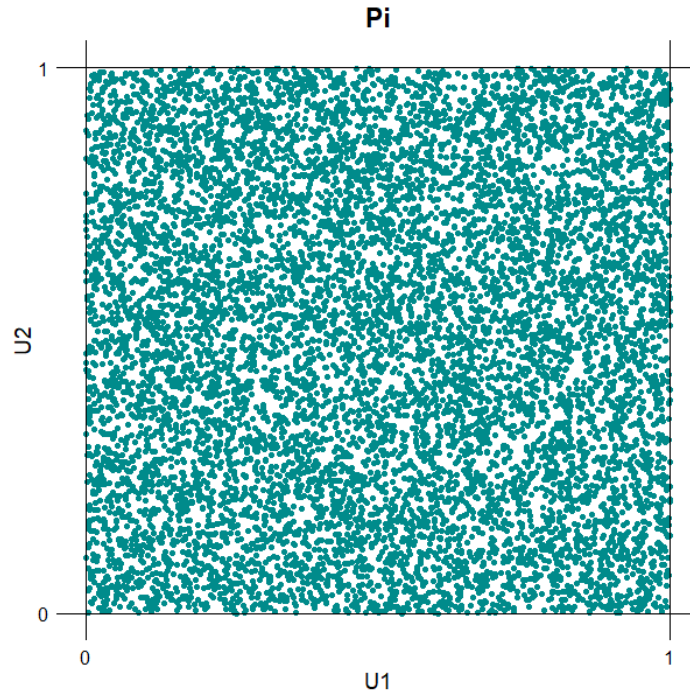
Chvostové závislosti pre kopulu môžeme definovať

Ako každý nástroj pri modelovaní hodnôt jednotlivých rizík, aj kopuly majú svoje pozitíva a negatíva. Medzi *výhody* zaraďujeme najmä ich flexibilitu v možnosti kombinovania rôzneho počtu marginálnych rozdelení strát s rôznym počtom rozdelení kopúl (kopulových variácií), pričom je možné zvoliť rôznorodé typy kopúl od požadovanej charakteristiky a štruktúry (špicatosť, šikmosť či závislosť chvostov). Kopule dokážu presnejšie odrážať štruktúru závislosti medzi rizikami v porovnaní s mierami asociácie a vyhýbajú sa nedostatkom korelácií, predovšetkým, vhodná kopula umožňuje modelovanie nenulovej závislosti na chvoste. Kopule umožňujú vyjadriť závislosti z hľadiska množstva rozdelenia strát a teda umožňujú odhad strát na akejkolvek požadovanej úrovni percentilu. Veľkou výhodou kopúl je tiež pomerne ľahká simulácia pomocou metódy Monte Carlo. Kopuly si čoraz viac získavajú uznanie rôznych medzinárodných poisťno-matematických a dozorných organizácií, ktoré by mali napomôcť pri schvaľovaní procese interného modelu. Medzi *nevýhody* kopúl zaraďujeme častý nedostatok údajov na vykonanie dôveryhodnej kalibrácie kopule a to najmä na chvoste rozdelenia. Proces modelovania rizikového kapitálu je veľmi náročný a pri využití kopúl sa stráca transparentnosť, výsledky sa sú ťažšie overiteľné (podobné ako pri *machine learningu*) a proces pre nematematickov a neaktuárov je ťažšie pochopiteľný. Predtým, než predstavíme Sklárovu vetu, predstavíme tri základné fundamentálne kopuly: nezávislú a Fréchet-Hoeffding ohraničenia.

Nezávislá kopula alebo produktová kopula je jedna z najjednoduchších kopúl a môžeme ju zapísať ako

$$\Pi(u) = \prod_{j=1}^d u_j \quad (3.3.5)$$

pre $u \in [0,1]^d$, ktorá je distribučnou funkciou náhodného vektora $U = (U_1, \dots, U_d)$ s $U_1, \dots, U_d \sim^{ind} U(0,1)$. V praxi nezávislá kopula vyjadruje stav, kedy straty agregovaných rizík nemajú medzi sebou žiadnu závislosť a teda nastanie jedného z rizík neovplyvňuje žiadne z ďalších.



Graf 3.3.1: Nezávislá kopula

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Fréchet – Hoeffding ohraničenie (F-H) je teoréma, ktorá je jedným zo základných pilierov kopulovej teórie. Podľa F–H teórie je každá kopula C bodovo ohraničená zdola hranicou W a zhora hranicou M , pričom W a M sú definované nasledovne

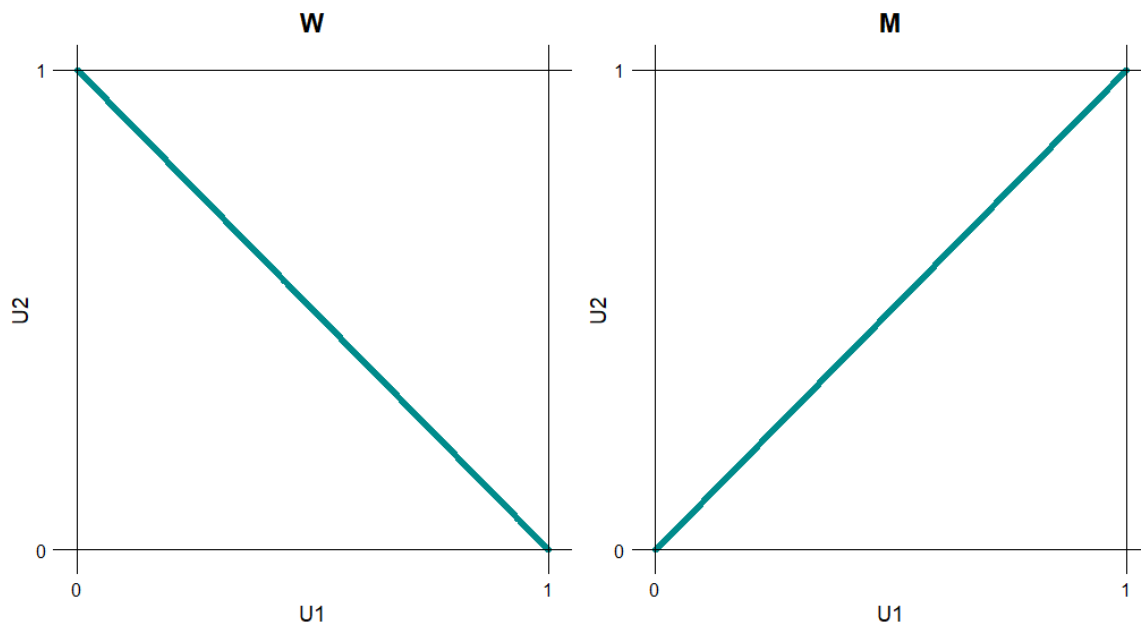
$$W(u) = \max \left\{ \sum_{j=1}^d u_j - d + 1, 0 \right\} \quad (3.3.6)$$

$$M(u) = \min_{1 \leq j \leq d} \{u_j\} \quad (3.3.7)$$

kde $u \in [0,1]^d$. Dôležité je poznamenať, že kopula W existuje iba pre dve dimenzie, pričom M je kopula existujúca pre dve a viac dimenzií. Všeobecne môžeme Fréchet – Hoeffding ohraničenie pre akúkoľvek d – rozmernú kopulu C

$$W(u) \leq C(u) \leq M(u) \quad (3.3.8)$$

pre $u \in [0,1]^d$. Dvojdimenziálnu kopulu W nazývame proti-monotónnou kopulou (*countermonocity*) a M komonotónnou kopulou (*comonotonicity*). Kopuly Π , W a M nazývame tiež fundamentálne kopule.



Graf 3.3.2: Grafy kopúl W a M pri 10 000 pozorovaniach

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ďalším dôležitým teoretickým východiskom pri teórii kopúl je **Sklárova veta**, ktorá vysvetľuje závislosť komponentov náhodného vektora a hovorí, že distribučná funkcia $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ definovaná vzťahom

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (3.3.9)$$

je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, F_2, \dots, F_d$, pričom $C(u_1, \dots, u_d)$ je d – rozmerná kopula a $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ sú jednorozmerné marginálne distribučné funkcie. Sklárova teoréma zvýšila záujem o využívanie kopúl v oblasti financií, manažmentu rizík, štatistiky, poisťovníctva a inžinierstva.

V predchádzajúcej kapitole sme definovali miery asociácie a chvostové závislosti. Pre kopulu ich definujeme nasledovne:

Ak (X_1, X_2) je dvojrozmerný náhodný vektor so spojitou marginálnou distribučnou funkciou a kopulou C , potom

$$\rho_S = \rho_S(C) = 12 \int_{[0,1]^2} C(u) du - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} u_1 u_2 dC(u) - 3 \quad (3.3.10)$$

$$\tau = \tau(C) = 4 \int_{[0,1]^2} C(u) dC(u) - 1. \quad (3.3.11)$$

Spearmanovo ρ_S a Kendallove τ závisia na kopule C a možno ich považovať za momenty kopule W a M .

V prípade chvostových závislostí nech $X_1, X_2, F_1, F_2, \lambda_U$ a λ_L definujeme ako v kapitole 3.2.3 *Chvostová závislosť* (viď str. 46) a nech C je kopula pre X_1 a X_2 , s diagonálou δ_C . Ak limity 3.2.8 a 3.2.9 existujú, tak koeficienty chvostovej závislosti pre kopulu C majú tvar (Nelsen, 2007)

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} = 2 - \delta'_C(1^-) \quad (3.3.12)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \delta'_C(0^+). \quad (3.3.13)$$

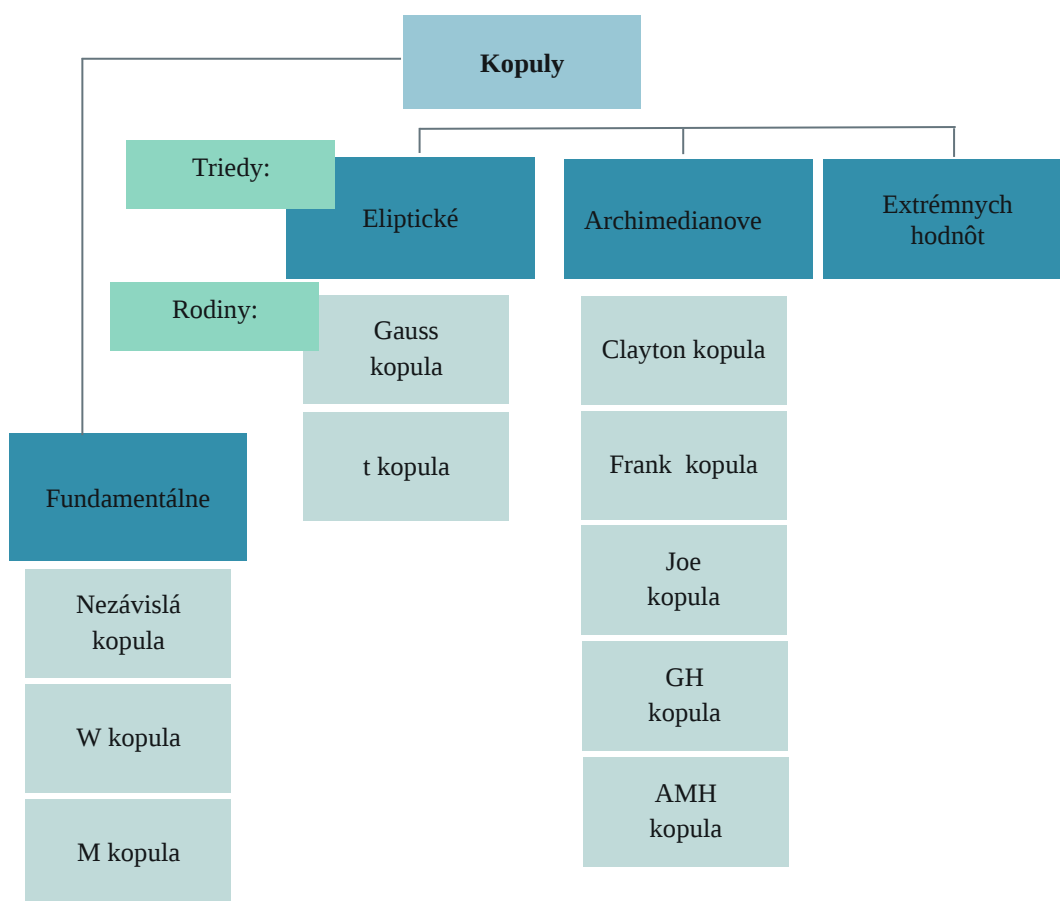
Ak $\lambda_U \in (0, 1]$ hovoríme, že kopula C má hornú chvostovú závislosť, ak $\lambda_U = 0$, kopula C nemá hornú chvostovú závislosť (obdobne pre λ_L).

Kopule, podobne ako iné štatistické nástroje majú svoje členenie a v závislosti od vlastností či konštrukcie, sa delia do tried (*copula class*), ktoré obsahujú kopulové rodiny (*copula family*). Medzi najznámejšie triedy patria (Hofert et. al., 2017):

- **Eliptické kopuly** – v praxi (aj mimo poisťovníctvo) najpoužívannejšie kopuly, za pomoci Sklárovej vety popisujúce závislosť viacrozmerného normálneho rozdelenia v prípade normálnej, resp. Gaussovej kopuly a popisujúce závislosť viacrozmerného rozdelenia v prípade Studentovej, resp. t kopuly. Eliptické kopuly získavajú vlastnosti priamo z eliptického rozdelenia, ktoré ich formuje.
- **Archimedianové kopuly** – využívané v praxi pomerne širokospektrálne z dôvodu ich jednoduchej konštrukcie za pomoci generátorov; trieda je významne zastúpená širokou škálou kopulových rodín s veľmi príjemnými vlastnosťami. Ich pôvod viac,

ako v štatistike pridelujeme oblasti skúmajúcej pravdepodobnostný metrický priestor. Medzi najznámejších reprezentantov triedy Archimedianových kopúl zaraďujeme Claytonovu, Frankovu, Joeovu, Gumbel-Hougaard a Ali-Mikhail-Haq rodinu. Archimedianové kopuly sú parametrické kopuly s pomerne ľahkým procesom rozšírenia na viacrozmerný tvar.

- **Kopuly extrémnych hodnôt** - kopuly náhodných vektorov prerozdelených podľa viacrozmerných rozdelení extrémnych hodnôt. Kopuliam extrémnych hodnôt sa pre potreby dizertačnej práce venovať nebudeme.
- Špeciálnym typom sú **Fundamentálne kopuly**, ktoré reprezentujú nezávislá kopula (viď Graf 3.3.1) a kopuly Fréchet – Hoeffding ohraničení W a M (viď Graf 3.3.2). Tieto kopuly prezentujú tvary kopúl iných tried pre parametre na hraniciach intervalov.



Obrázok 3.3.1: Delenie najznámejších tried kopulý

Zdroj: vlastné spracovanie

3.3.1 Eliptické kopuly

Normálna kopula alebo **Gaussova kopula** je kopula d – rozmerného normálneho rozdelenia $N_d(0, P)$ s lineárnou korelačnou maticou R , ktorá ma na diagonále hodnoty 1 a mimo diagonály hodnoty ρ . Gaussova kopula má tvar (Hofert et. al, 2017)

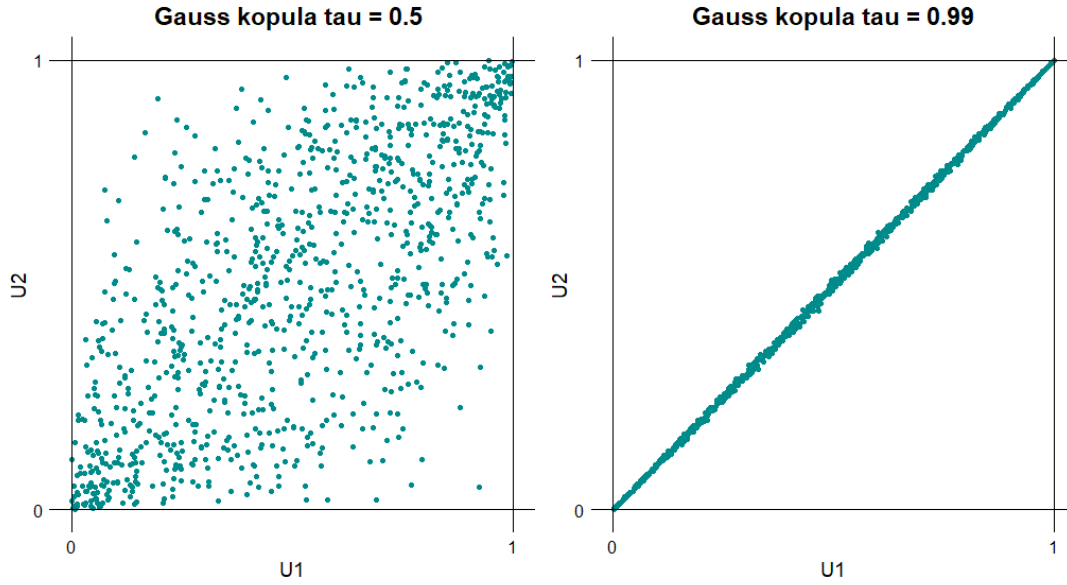
$$C_{Gauss}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) =$$

$$F = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x'P^{-1}x\right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det P}} dx_1 \dots dx_d \quad (3.3.14)$$

kde Φ^{-1} popisuje kvantilovú funkciu $N(0,1)$.

Pre dvojrozmernú normálnu kopulu s korelačnou maticou obsahujúcou $\rho = -1$ mimo diagonály, je kopula identická s dolným Fréchet-Hoeffding ohraničením W . Pre dvojrozmernú a viacrozmernú normálnu kopulu s korelačnou maticou obsahujúcou prvky $\rho = 1$ mimo diagonály, kopula je identická s horným Fréchet-Hoeffding ohraničením M (tieto vlastnosti využijeme neskôr pri aplikácii MB11 kopuly). Korelačná matica R ako jediný vstup pre kopulu by mala byť symetrická s 1 – tkovou diagonálou, všetky párové hodnoty musia byť v rozmedzí od -1 po 1 a tiež musí byť pozitívne semidefinitná³. Gaussova kopula môže byť v poisťovníctve využitá v prípade, ak korelačné koeficienty nadobúdajú hodnoty 1, no konkrétne pri tejto kopule je veľmi náročné zobrazenie správania agregovaného rozdelenia rizík graficky a preto nikdy nevieme presne správanie namodelovaných závislostí popísať a zhodnotiť, či spĺňa naše očakávanie. Na základe pozorovaní je pri Gaussovej kopule viditeľné ukladanie hodnôt rozdelenia po líniách hyperkocky v blízkosti vrcholu, no neakumulujú sa v rohu $(1,1,1)$, kde by sme si to v nádväznosti na modelovanie agregovanej straty v poisťovníctve priali (Milek, 2014).

³ Symetrická matica $M_{n \times n}$ je pozitívne semi-definitná alebo nezáporne-definitná, ak $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ pre všetky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$



Graf 3.3.3: Gauss kopula pri 1 000 pozorovaniach

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

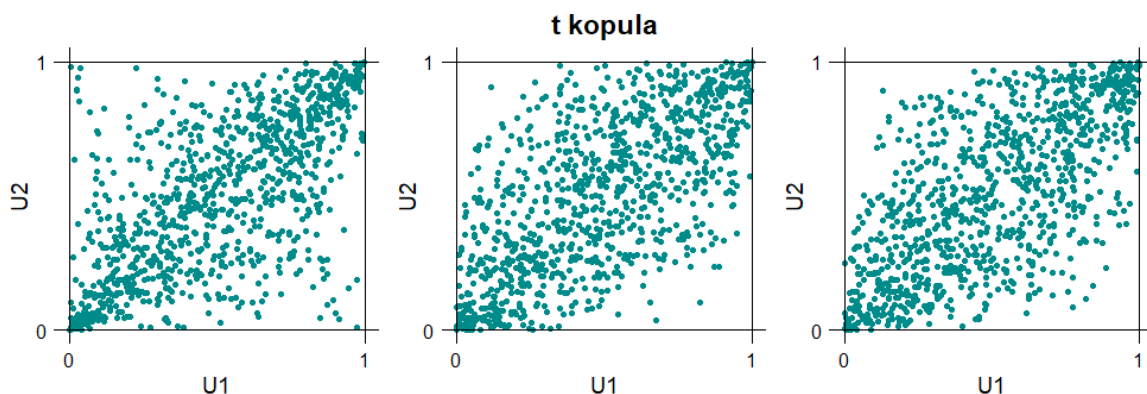
Závislosť chvostov pri Gaussovej kopule je rovná nule a teda použitie tejto kopule nie je vhodné pre rozdelenia rizík s ťažšími chvostmi, ktoré je, žiaľ, typické pre takmer celú škálu modelovaných rizík v poisťovníctve. Nevhodné použitie Gaussovej kopule je často spájané s finančnou krízou v roku 2008, kedy boli pri predikciách zanedbané podhodnotené chvostové závislosti tejto kopule (MacKenzie & Spears, 2014).

Studentova kopula alebo tiež t kopula je skonštruovaná z viacrozmerného t rozdelenia rovnakým spôsobom, ako je Gaussova kopula odvodená z viacrozmerného normálneho rozdelenia. Podobne ako Gaussová kopula, má zvonovitý tvar a dá sa ľahko rozšíriť na viacrozmerný prípad, na rozdiel od niektorých iných kopúl, ktoré sú obmedzené iba na dve riziká. t kopula je podobne ako Gaussova kopula ľahko simulovateľná. Pre všeobecný rozmer d má t kopula tvar (Hofert et. al, 2017)

$$C_{Student}(u_1, \dots, u_d) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(\pi v)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det P}} \left(1 + \frac{x' P^{-1} x}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_d \quad (3.3.15)$$

kde t_v^{-1} popisuje kvantilovú funkciu distribučnej funkcie t_v jednorozmerného Studentovho t rozdelenia s v stupňami voľnosti.



Graf 3.3.4: t kopula pri 1000 pozorovaniach a stupňoch voľnosti $v = \{2, 40, 80\}$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

V prípade veľkosti stupňov voľnosti v intervale 50 – nekonečno sa Studentova t kopula správa ako Gaussova a stráca závislosť na chvostoch, pri stupňoch voľnosti v intervale od 10 do 50 má malú chvostovú závislosť a pri stupňoch voľnosti 0 – 10 vyjadruje „anti“závislosť, ktorá je nebezpečná, pretože podhodnocuje hodnotu kapitálu. Studentova t kopula na rozdiel od Gaussovej kopule nepotrebuje pre vstup iba korelačnú maticu R , no tiež parameter stupňov veľkosti $v > 0$, ktorý určuje silu závislosti chvosta. T kopula je symetrická a jej závislosť medzi horným a dolným chvostom je rovnaká.

Do praxe t kopula nie je úplne vhodná pre agregáciu celkových rizík pre odhad rizikového kapitálu, pretože modelovanie kapitálu sa zaoberá prevažne iba jednou stranou distribúcie (horný pravý roh v kocke). Ďalším obmedzením t kopuly je pri modelovaní viac ako dvoch rizík. Okrem samotného párového korelačného koeficientu existuje iba jedna premenná, ktorá riadi štruktúru závislosti na chvoste, čo znamená, že všetky páry rizík majú rovnakú závislosť od chvosta, čo nie je reálne. Toto obmedzenie je možné prekonať zovšeobecnením t kopule, ktorá je známa ako IT kopula. Dvojrozmerná t kopula s v stupňami voľnosti a koreláciou ρ má symetrické koeficienty chvostovej závislosti (Hofert et. al., 2017)

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{v+1}\left(-\sqrt{(v+1)(1-\rho)/(1+\rho)}\right). \quad (3.3.16)$$

V poisťovníctve je známe využitie Studentovej t kopule pre agregovanie neživotných rizík.

3.3.2 Vybrané Archimedianové kopuly

Do triedy Archimedianových kopúl zaraďujeme rodiny Frank, Clayton, Gumbel alebo Gumbel-Hougaard, Joe a Ali-Mikhail-Haq. Kopuly sú parametrické a schopné rozšírenia na viacrozmerné tvary, no pri niektorých z nich pri rozšírení môžeme naraziť na nedostatočný počet parametrov. Archimedianovu kopulu môžeme zapísať ako (Hofert et. al., 2017)

$$C(u) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)). \quad (3.3.17)$$

kde $u \in [0,1]^d$ pre generátor ψ . Archimedianový generátor je spojitá, klesajúca funkcia $\psi: [0, \infty] \rightarrow [0,1]$, ktorá spĺňa $\psi(0) = 1, \psi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ a ktorá je striktne klesajúca na intervale $[0, \inf\{t : \psi(t) = 0\}]$. Jej preuso-inverzná funkcia $\psi^{-1}: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ spĺňa $\psi^{-1}(0) = \inf\{t : \psi(t) = 0\}$.

Tabuľka 3.3.1: Generátory pre Archimedianové kopuly

Rodina	Parameter	$\psi(t)$
Frank	$\theta \in (0, \infty)$	$-\log(1 - (1 - e^{-\theta})\exp(-t))/\theta$
Clayton	$\theta \in (0, \infty)$	$(1 + t)^{-1/\theta}$
Gumbel-Hougaard	$\theta \in [1, \infty)$	$\exp(-t^{1/\theta})$
Joe	$\theta \in [0,1)$	$1 - (1 - \exp(-t))^{1/\theta}$

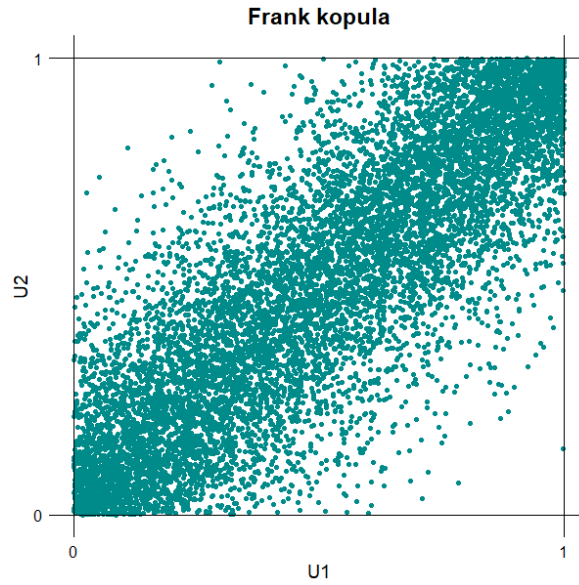
Zdroj: vlastné spracovanie, podľa Hofert et. al. (2017)

V záverečnej práci si predstavíme rodiny Frankovu, Claytonovu, Gumbelovu a Joeovu.

Frankova kopula je zástupcom parametrických kopúl s parametrom $\theta \in \mathbb{R} - \{0\}$ a pre $u \in [0,1]^2$ má tvar

$$C_{Frank}(u) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right) \quad (3.3.18)$$

pričom pre $\theta \rightarrow 0$ konverguje k Π . Chvostová závislosť pre oba prípady nadobúda hodnoty $\lambda_L = 0$ a $\lambda_U = 0$. (Krouthén, 2015)



Graf 3.3.5: Frankova kopula

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Claytonova kopula je parametrická kopula je vhodná na modelovanie dvojrozmerných rozdelení a môžeme ju pre daný prípad zapísať ako (Hofert et. al., 2017)

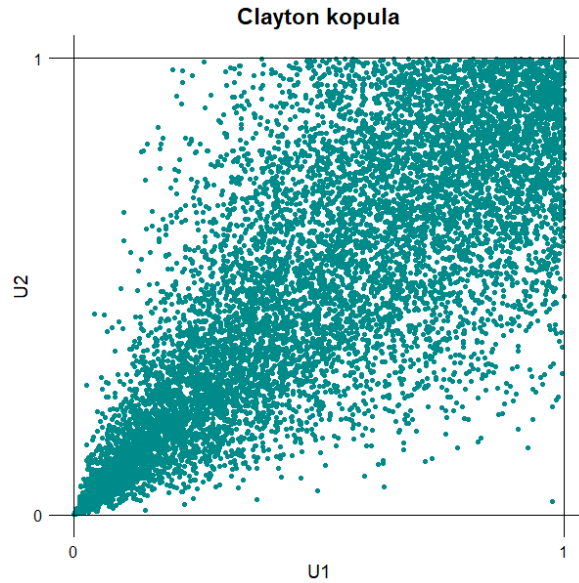
$$C_{clayton}(u_1, u_2) = \max\{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0\}^{-1/\theta} \quad (3.3.19)$$

pre $\theta \in [-1, \infty) - \{0\}$ a $u \in [0,1]^2$. Pri 3 a viac rozmerných kopuliach uvažujeme $\theta \in (0, \infty)$ a zapisujeme (Hofert et. al., 2017)

$$C_{clayton}(u) = \left(1 - d + \sum_{j=1}^d u_j^{-\theta}\right)^{-1/\theta} \quad (3.3.20)$$

pre $u \in [0,1]^d$. Ak $\theta \rightarrow 0$, kopula prechádza na nezávislú kopulu Π a pre $\theta \rightarrow \infty$ na komonotónnu kopulu M . Pre dve dimenzie kopula z Claytonovej rodiny interpoluje medzi dokonale negatívnou a dokonale pozitívnou závislosťou, zatiaľ čo pri troch a viac dimenziách medzi nezávislosťou a dokonale pozitívnou závislosťou. V poisťovníctve je táto kopula použiteľná najmä pre poisťné riziká.

Chvostová závislosť nadobúda hodnoty $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$ pre $\theta > 0$ a $\lambda_U = 0$. (Krouthén, 2015)



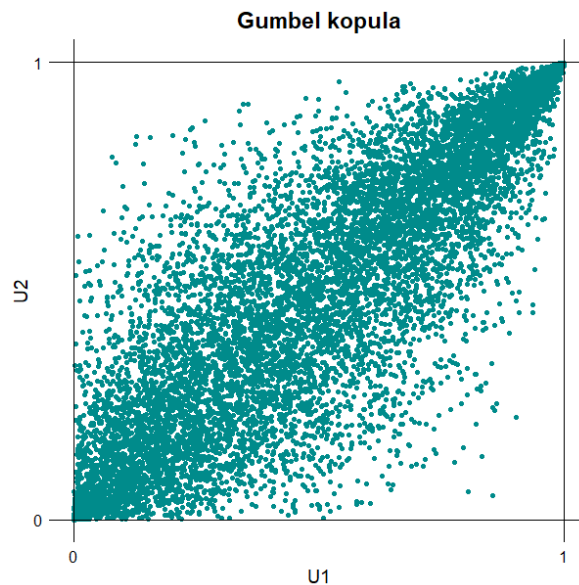
Graf 3.3.6: Clayton kopula pri 10 000 pozorovaniach a $\theta = 3$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Gumbelova kopula je parametrická kopula, ktorá so zvyšujúcim sa parametrom θ nadobúda tvar horného Hoeffding-Fréchet ohraničenia M . Kopulu môžeme zapísať nasledovne

$$C_{Gumbel} = \exp \left(- \left[(-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right) \quad (3.3.21)$$

pre $\theta \in [1, \infty)$ a $u \in [0,1]^2$. Chvostová závislosť nadobúda hodnoty $\lambda_L = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ a $\lambda_U = 0$. (Krouthén, 2015)



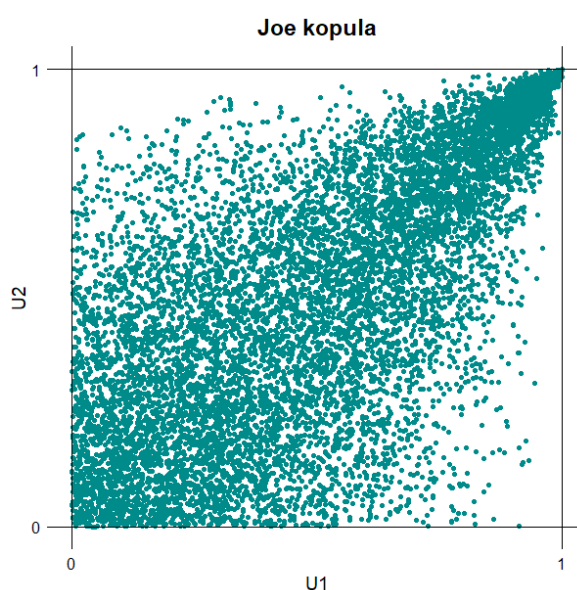
Graf 3.3.7: Gumbel kopula pri 10 000 pozorovaniach a $\theta = 3$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Joeova kopula sa na naše prekvapenie v literatúre nevyskytuje až tak často, no pre našu prácu je veľmi prínosná. Joeova kopula má ako jedna z mála Archimedianových kopúl silnú závislosť v pravom hornom rohu a preto pre potreby modelovania rizík nepotrebuje úpravu cez funkciu prežitia. Parametrickú Joe kopulu pre združovanie dvojrozmerného rozdelenia môžeme zapísať nasledovne

$$C_{Joe} = 1 - \left((1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)(1 - u_2)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (3.3.22)$$

pre $\theta \in [1, \infty)$ a $u \in [0, 1]^2$. Joeova kopula je základom kopúl MLS a MB11, ktorej sa budeme bližšie venovať v kapitole 3.4 *Viacrozmerná MB11 kopula*.



Graf 3.3.8: Clayton kopula pri 10 000 pozorovaniach a $\theta = 3$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Chvostová závislosť nadobúda hodnoty $\lambda_L = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ a $\lambda_U = 0$. (Krouthén, 2015)

Pri prezentovaní základných a známych kopúl si čitateľ mohol všimnúť, že okrem Joe, Gumbel a z časti Student t kopuly, majú silnú závislosť sústredenú v dolnej časti rozdelenia, ktorá vyjadruje časté a nemateriálne straty. Nakoľko sú v našom spektre záujmu straty materiálne s menším výskytom, je možné niektoré zo spomenutých kopúl previesť na tvar prežitia, cez funkciu prežitia a tým závislosti „otočiť“.

3.3.3 Kopula prežitia

Kopula prežitia (*Survival copula*) je forma kopuly, ktorá je, ako už bolo spomenuté, dôležitá práve pre oblasť poisťovníctva. Väčšina kopúl sa orientuje na vysokú závislosť “malých” nemateriálnych udalostí, no pre poisťovníctvo je charakteristický záujem o menej časté materiálne udalosti. Práve preto je potrebné kopuly preniesť do požadovaného tvaru použitím funkcie prežitia. Funkcia prežitia $\bar{F}$ (Nelsen, 2006) zodpovedajúca jednorozmernej distribučnej funkcii $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná ako $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$, $x \in \mathbb{R}$ a teda platí $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Predpokladajme, že C je kopulou dvojice rizík X_1 a X_2 . Analogicky podľa Sklárovej vety distribučná funkcia prežitia $\bar{H}$ je definovaná ako (Nelsen, 2006)

$$\begin{aligned}\bar{H} &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + H(x_1, x_2) \\ &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &= \bar{F}_1(x_1) + \bar{F}_2(x_2) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x_1), 1 - \bar{F}_2(x_2)).\end{aligned}\quad (3.3.23)$$

Funkciu kopule prežitia $\hat{C}$ z I^2 do I definujeme ako (Nelsen, 2006)

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (3.3.24)$$

a dostaneme

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)). \quad (3.3.25)$$

Je dôležité si uvedomiť, že $\hat{C}$ je kopulou prežitia X_1 a X_2 , ktorá združuje združenú funkciu prežitia do jednorozmerného marginálneho rozdelenia a tiež rozdiel medzi kopulou prežitia $\hat{C}$ a združenou funkciou prežitia $\bar{C}$ pre dve uniformované náhodné premenné na $(0,1)$, ktorých združená distribučná funkcia je C . Vzťah medzi $\hat{C}$ a $\bar{C}$ môžeme vyjadriť nasledovne

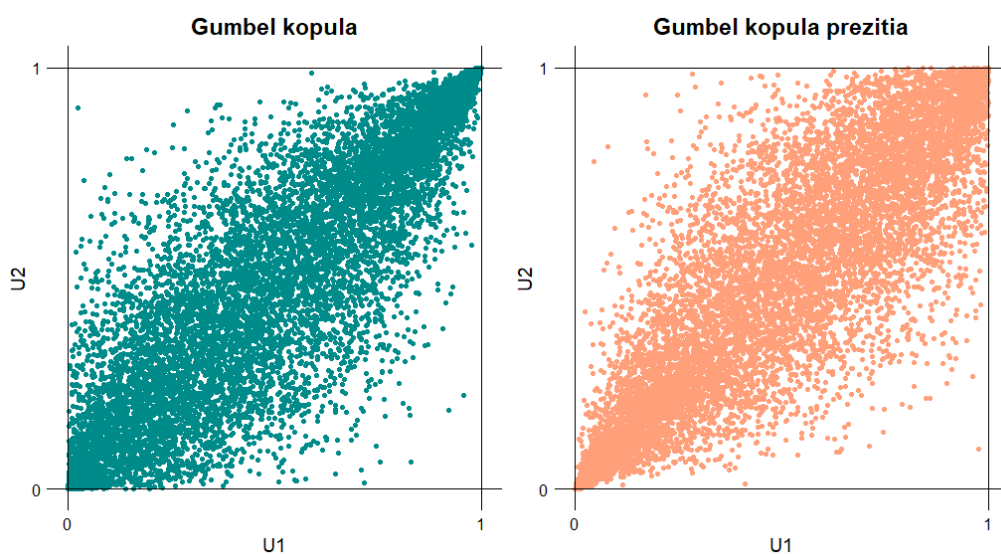
$$\bar{C}(u, v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v). \quad (3.3.26)$$

Funkciu prežitia je pre modelovanie združeného marginálneho rozdelenia vhodné aplikovať na kopuly charakteristické silnou závislosťou na dolnom chvoste, akými sú napríklad Gumbel a Clayton kopuly. V prípade **Gumbel kopuly** v tvare:

$$C_{G_\theta}(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)e^{-\theta \ln(1-u)\ln(1-v)} \quad (3.3.27)$$

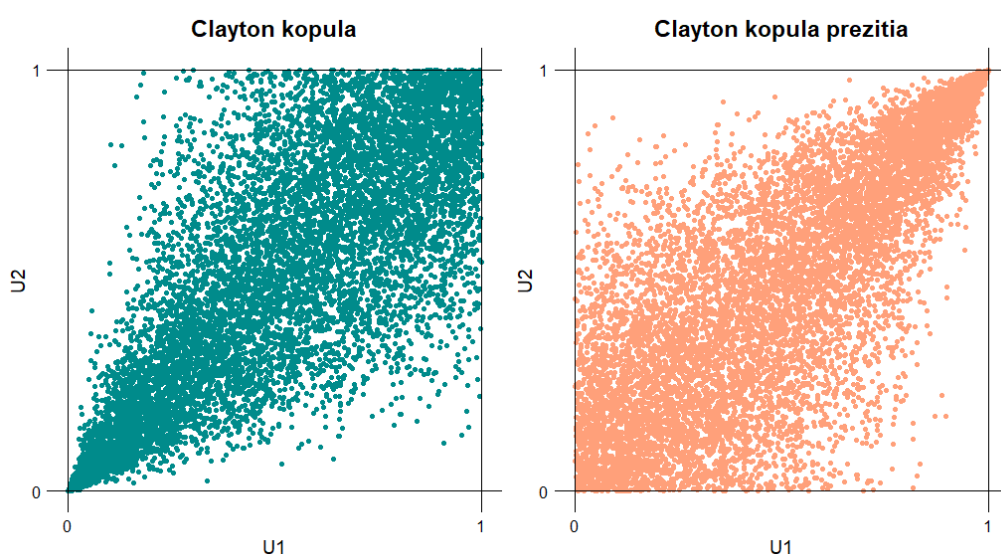
by transformácia podľa (3.3.21) na bola nasledovná:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{G_\theta}(u, v) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \\
&= u + v - 1 \\
&\quad + \left((1 - u) + (1 - v) - 1 \right. \\
&\quad \left. + (1 - (1 - u))(1 - (1 - v))e^{-\theta \ln(1 - (1 - u)) \ln(1 - (1 - v))} \right) \\
&= u + v - 1 + (1 - u - v + uve^{-\theta \ln(u) \ln(v)}) \\
&= uve^{-\theta \ln(u) \ln(v)}
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$



Graf 3.3.9: C_{G_θ} (vľavo) a $\hat{C}_{G_\theta}$ (vpravo) pri 10 000 pozorovaniach a $\theta = 3$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio



Graf 3.3.10: C_{C_θ} (vľavo) a $\hat{C}_{C_\theta}$ (vpravo) pri 10 000 pozorovaniach a $\theta = 3$

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Podobne, aj viacrozmerná funkcia prežitia $\bar{H}$ korešpondujúc d – rozmernej distribučnej funkcii $H(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ je definovaná ako $\bar{H}(x) = \mathbb{P}(X > x), x \in \mathbb{R}^d$ a nazývame ju marginálnou distribučnou funkciou (Hofert et. al., 2017). Rovnako, ako pri neupravenej forme kopúl, vieme zadefinovať funkciu kopule cez Sklárovu vetu pre funkciu prežitia. Pre akúkoľvek d – rozmernú funkciu prežitia $\bar{H}$ s marginálnymi distribučnými funkciami $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$ existuje kopula $\bar{C}$ taká, že

$$\bar{H}(x) = \bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)), x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.3.29)$$

Kopula $\bar{C}$ je jednoznačne definovaná na $\prod_{j=1}^d \text{ran } \bar{F}_j$ a daná vzťahom (Hoeffding, 2017)

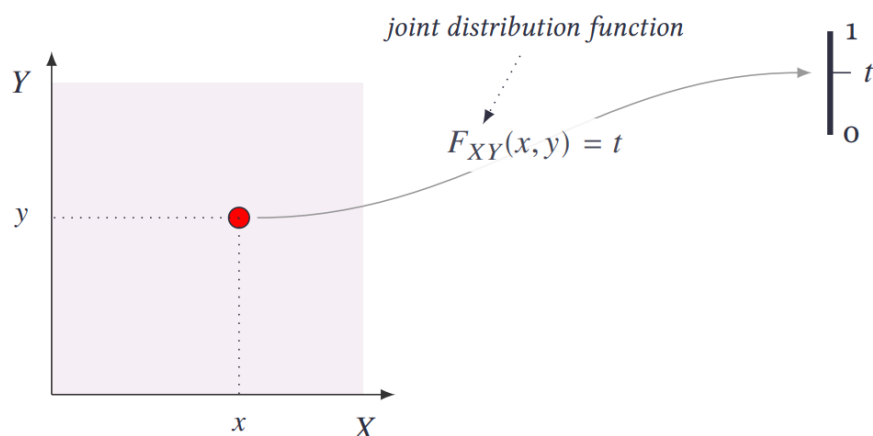
$$\bar{C}(u) = \bar{H}\left(F_1^{-1}(1 - u_1), \dots, F_d^{-1}(1 - u_d)\right), \quad u \in \prod_{j=1}^d \text{ran } \bar{F}_j. \quad (3.3.30)$$

Nech $X \sim H$ s kopulou C a marginálnymi distribučnými funkciami $F_1, \dots, F_d$. Nakoľko kopula združuje jednorozmerné marginálne funkcie prežitia $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$ do združenej funkcie prežitia $\bar{H}$, kopula $\bar{C}$ sa nazýva kopulou prežitia X , respektíve H . Medzi rodiny kopúl, ktoré je možné prerobiť na funkciu prežitia sú Claytonová, Frankova, Gumbel – Hougaard a všeobecne kopule patriaca do triedy Archimedianových kopúl (Hofert et. al., 2017).

3.3.4 Význam simulácií pri agregácii rizík

V prípade vytvárania kopulových variácií a združených rozdelení vo všeobecnosti, simulovanie je nevyhnutná súčasť týchto procesov. Vo väčšine prípadov majú špecifické kopuly svoje vlastné generátory, ktoré je ale možné odvodiť zo všeobecného generátora pre dvoj a viacrozmerné kopule. Ako sme už načrtli, simulovanie je aj súčasťou vytvárania kopulových variácií.

Pre lepšiu predstavu procesu generovania simulácií, uvažujeme združenú marginálnu distribučnú funkciu $F_{XY}(x, y) = t$, ktorá reprezentuje pravdepodobnosť $X < x$ a $Y < y$. Obrázok 3.3.1 popisuje vzťah medzi premennými X a Y , ktoré by v poistnej praxi reprezentovali jednotlivé marginálne rozdelenia strát X a Y .



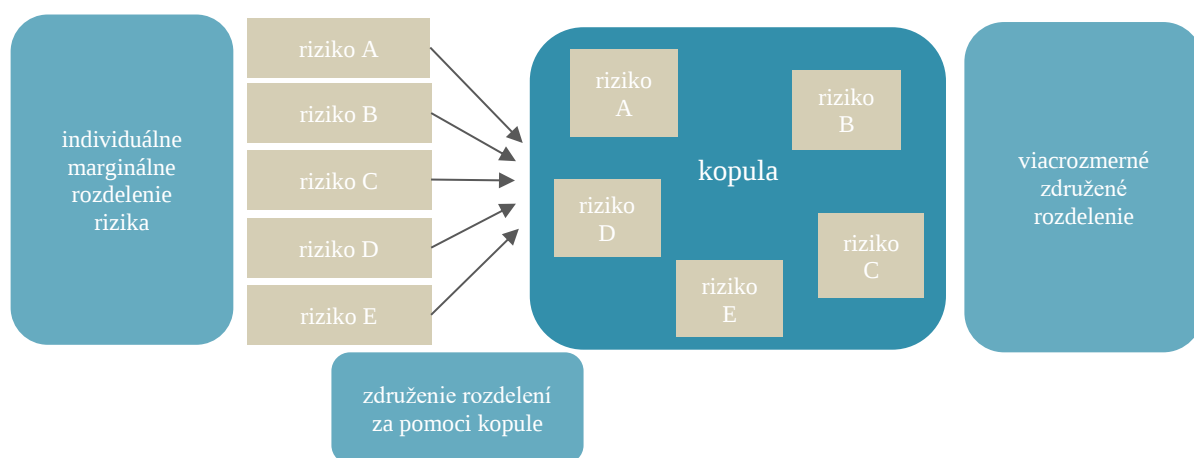
Obrázok 3.3.2: Združená marginálna distribučná funkcia $F_{XY}(x, y)$ premenných X a Y

Zdroj: Masrden (n.a.)

Existujú rôzne prístupy, vzhľadom k požiadavkám, ku generovaniu združeného rozdelenia. Samotné spôsoby generovania združených rozdelení by sme mohli rozdeliť na dve hlavné kategórie:

1. generovanie kopulových variácií (u, v) na základe marginálnych rozdelení rizík (x, y) ;
2. generovanie združeného rozdelenia rizík na základe nagerovaných kopulových variácií (u, v) , nezávisle od vlastností marginálnych rozdelení.

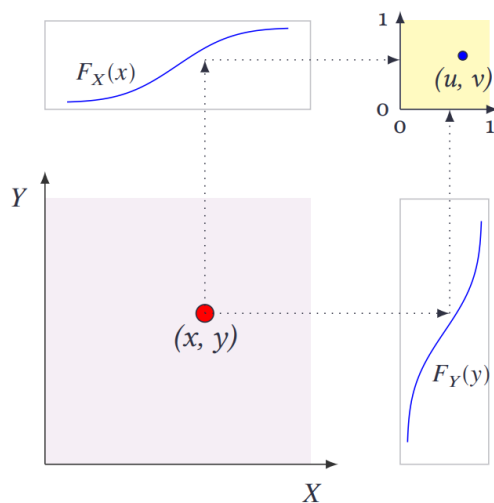
Generovanie kopulových variácií (u, v) na základe marginálnych rozdelení rizík (x, y) je veľmi známa metóda, využívaná najmä pre štatistické účely.



Obrázok 3.3.3: Význam kopule pri generovaní rozdelení rizík

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa (Shaw & Spivak, 2009)

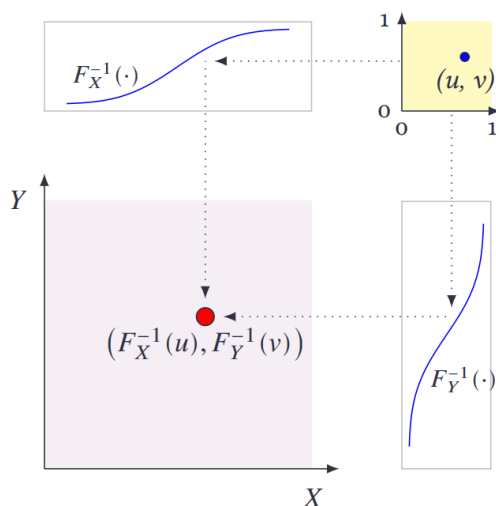
V tomto prípade (viď Obrázok 3.3.3) môžeme zvoliť typ kopule podľa preferencie alebo môžeme typ kopule zvoliť na základe vlastností rozdelení, čo nazývame empirická kopula.



Obrázok 3.3.4: Proces generovania kopulových variácií (u, v) prostredníctvom marginálnych rozdelení strát (x, y)

Zdroj: Masrden (n.a.)

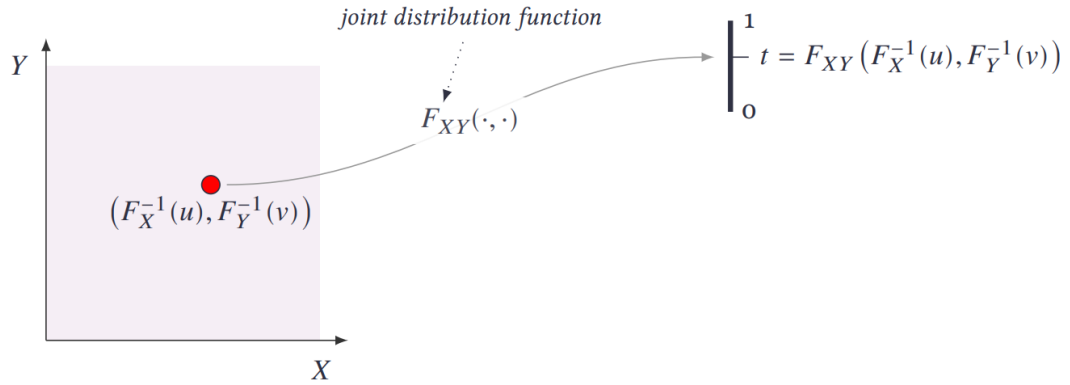
Druhým spôsobom je generovanie združeného rozdelenia rizík na základe nagerovaných kopulových variácií, ktoré v praxi nie je až také bežné, no je veľmi užitočné, práve v prípade, ak nechceme využiť kopulu na základe vlastností rozdelení, ale vytvoriť rozdeleniam vlastnosti na základe nagerovaných kopulových variácií.



Obrázok 3.3.5: Proces generovania združeného rozdelenia rizík prostredníctvom kopulových variácií (u, v)

Zdroj: Masrden (n.a.)

Následne jednoducho mapujeme z $(F_x^{-1}(u), F_y^{-1}(v))$ na intervale $[0, 1]$ prostredníctvom združenej distribučnej funkcie $F_{XY}(x, y)$.



Obrázok 3.3.6: Združená marginálna distribučná funkcia $F_{XY}(x, y)$ premenných X a Y

Zdroj: Masrden (n.a.)

Všeobecný algoritmus na generovanie pozorovaní (x, y) z dvojice náhodných premenných (X, Y) s marginálnymi hodnotami F_X , F_Y , združenou funkciou F_{XY} a dvojdimenzionálnou kopulou C je nasledovný: podľa Sklarovej teóremy stačí vygenerovať dvojicu (u, v) z pozorovaní náhodných premenných (U, V) , uniformovaných na $\mathbb{I}$ a majúcich dvojdimenzionálnu kopulu C . Využitím inverznej transformačnej metódy (*Probability Integral Transform*) transformujeme (u, v) na (x, y) :

$$\begin{cases} x = F_x^{-1}(u) \\ y = F_y^{-1}(v) \end{cases}.$$

Pre generovanie dvojice (u, v) , využitím podmienenej hustoty pravdepodobnosti $C_u(v)$:

- vygenerujeme náhodné premenné u_1, v_1 , ktoré sú nezávislé a rovnomerne rozdelené;
- zadáme $u = u_1$;
- premennú v vypočítame podľa vzťahu

$$\begin{aligned} C_u(v) &= P(V \leq v | U = u) \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} \\ &= \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

Generovať združené rozdelenia vieme tiež pomocou všeobecného generátora, ktorý je vhodný pre viacrozmerné rozdelenia.

Nech F je viacrozmerné rozdelenie so spojitými marginálnymi hodnotami $F_1, \dots, F_d$ a predpokladajme, že F možno vyjadriť jedinečným spôsobom prostredníctvom d dimenzionálnej kopuly C na základe Sklarovej vety. Na simuláciu vektora $(X_1, \dots, X_d) \sim F$ stačí simulovať vektor $(U_1, \dots, U_d) \sim C$, kde náhodné premenné U_i sú uniformované na $\mathbb{I}$. Pomocou Sklarovej vety a inverznej transformačnej metódy zapisujeme:

$$U_i = F_i(X_i) \Leftrightarrow X_i = F_i^{-1}(U_i) \quad (3.3.32)$$

kde $i = 1, \dots, d$, kde náhodné premenné X_i majú marginálne rozdelenia F_i a združené rozdelenie F . Predpokladajme, že C absolútne spojitá, simulovanie združeného rozdelenia je nasledovné:

1. Na simulovanie prvej premennej U_1 , stačí zobrať vzorku z náhodných premenných U'_i uniformovaných na $\mathbb{I}$. Simulovanú vzorku nazývame u_1 .
2. Získanie vzorky u_2 z premennej U_2 , v súlade s predchádzajúcou vzorkou u_1 , potrebujeme poznať rozdelenie U_2 podmienené udalosťou $\{U_1 = u_1\}$. Označíme to ako $G_2(\cdot | u_1)$, dané vzťahom:

$$\begin{aligned} G_2(u_2 | u_1) &= P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) \\ &= \frac{\partial_{u_1} C(u_1, u_2, 1, \dots, 1)}{\partial_{u_1} C(u_1, 1, \dots, 1)} \\ &= \partial_{u_1} C(u_1, u_2, 1, \dots, 1) \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Následne vezmeme $u_2 = G_2^{-1}(u'_2 | u_1)$, kde u'_2 je realizáciou náhodnej premennej U'_2 uniformovanej na $\mathbb{I}$, ktoré sú nezávislé od U'_1 .

3. Vo všeobecnosti, na generovanie vzorky u_k z U_k , v súlade so vzorkami $u_1, \dots, u_{k-1}$, potrebujeme poznať rozdelenie U_k podmienené udalosťami $\{U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}\}$. Označíme to ako $G_k(\cdot | u_1, \dots, u_{k-1})$, dané vzťahom:

$$\begin{aligned} G_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= \mathbb{P}\{U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}\} \\ &= \frac{\partial_{u_1, \dots, u_{k-1}} C(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)}{\partial_{u_1, \dots, u_{k-1}} C(u_1, \dots, u_{k-1}, 1, \dots, 1)} \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Následne vezmeme $u_k = G_2^{-1}(u'_k | u_1, \dots, u_{k-1})$, kde u'_k je realizáciou náhodnej premennej U'_k uniformovanej na $\mathbb{I}$, nezávislej od $U'_1, \dots, U'_{k-1}$.

Využívaním inverznej transformačnej metódy je pomerne jednoduché vygenerovať vzorku $(x_1, \dots, x_d)$, získanej z viacrozmerného rozdelenia F :

$$(x_1, \dots, x_d) = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)). \quad (3.3.35)$$

Generátor využívaný pre viacrozmernú MB11 kopulu, ktorej sa venujeme v praktickej časti, vysvetľujeme v kapitole 3.4 *Viacrozmerná MB11 kopula*.

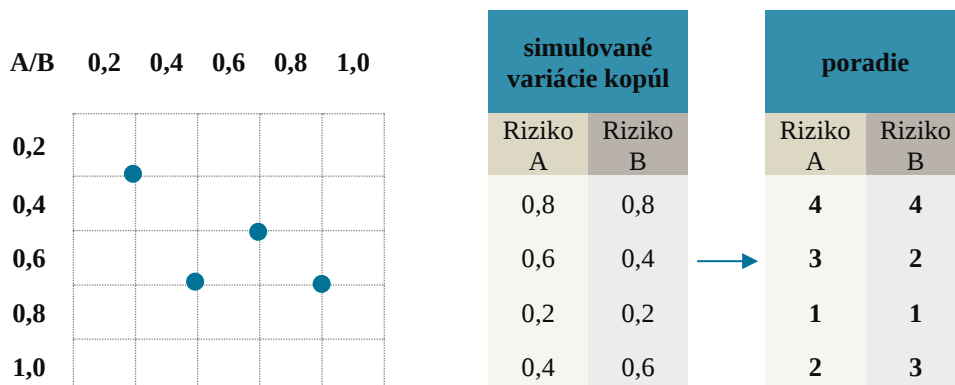
3.3.5 Význam kopúl pri agregácii rizík

Modelovanie agregovaného kapitálu v manažmente rizík pozostáva z dvoch krokov. *Prvým krokom* je určenie marginálneho rozdelenia jednotlivých rizík a *druhým krokom* je následne určenie štruktúry závislostí medzi jednotlivými rizikami, ktoré vieme popísať funkciou kopule. Pri moderných kopuliach sa oba kroky dejú nezávisle a ich produkty sa stretávajú až v procese agregácie.

Aby mohol začať proces agregácie rizík, je potrebné najprv vybrať kopulu, ktorú na generovanie závislostí použijeme a určiť jej vstupné parametre. Pri výbere vhodnej kopuly nesmieme zabudnúť na fakt, že pri interných modeloch zvyčajne združujeme niekoľko rizík, zvyčajne 6 – 8 a nie všetky kopuly sú pre takto veľký model stavané. Najčastejšie využívanými kopulami v poisťovacích spoločnostiach sú interne upravené verzie známych kopúl: Gaussova kopula, t kopula alebo Joeova kopula. Špeciálne klasická Gaussova kopula je často považovaná za pomerne nebezpečnú kvôli podhodnocovaniu závislostí na hornom chvoste rozdelenia, no nakoľko je proces modelovania kopúl pri agregácií veľmi náročný, časovo aj softvérovo, poisťovne využívajú tieto kopule kvôli ich jednoduchosti aj s rizikom nie úplne kvalitného výsledku. Každá poisťovacia spoločnosť môže mať všeobecne známu kopulu, vlastnú verziu známej kopuly alebo vlastnú kopulu, pričom ich metodológia je pre udržanie know-how zvyčajne utajená. Alternatívnou metódou odhadu agregovaných strát je VCV metóda využívajúca korelačné koeficienty, no neskôr si ukážeme, prečo nie je pre interný model, ani štandardný, úplne vhodná. Využitie kopúl v poisťovníctve ilustrujeme na jednoduchom príklade dvoch rizík, rizika A a rizika B pre dve reportovacie jednotky RJ_1 a RJ_2. Rozdelenie strát oboch rizík obsahuje 4 simulácie.

Generátor agregovaných strát pre dve reportovacie jednotky je nasledovný:

1. simulovanie variácií kopule podľa zvoleného typu kopuly a štruktúry závislostí rizika s následným ohodnotením variácií kopule od najnižšieho po najvyššie;



Obrázok 3.3.7: Ohodnocovanie nasimulovaných variácií kopúl rizík A a B

Zdroj: vlastné spracovanie (ZIG, 2020)

2. preusporiadanie poradia rozdelenia strát rizika pre obe reportovacie jednotky podľa príslušného ohodnotenia;

	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>spolu</th></tr><tr><td>7,8</td></tr><tr><td>5,9</td></tr><tr><td>14,1</td></tr><tr><td>22,4</td></tr></table>	Riziko A	spolu	7,8	5,9	14,1	22,4	=	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>RJ_1</th></tr><tr><td>6,8</td></tr><tr><td>2,2</td></tr><tr><td>14,0</td></tr><tr><td>10,3</td></tr></table>	Riziko A	RJ_1	6,8	2,2	14,0	10,3	+	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>RJ_2</th></tr><tr><td>1,0</td></tr><tr><td>3,7</td></tr><tr><td>0,1</td></tr><tr><td>12,1</td></tr></table>	Riziko A	RJ_2	1,0	3,7	0,1	12,1		<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>RJ_1</th></tr><tr><td>0,2</td></tr><tr><td>2,0</td></tr><tr><td>4,9</td></tr><tr><td>1,2</td></tr></table>	Riziko B	RJ_1	0,2	2,0	4,9	1,2	+	<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>RJ_2</th></tr><tr><td>1,2</td></tr><tr><td>1,0</td></tr><tr><td>0,3</td></tr><tr><td>5,0</td></tr></table>	Riziko B	RJ_2	1,2	1,0	0,3	5,0	=	<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>spolu</th></tr><tr><td>1,4</td></tr><tr><td>3,0</td></tr><tr><td>5,2</td></tr><tr><td>6,2</td></tr></table>	Riziko B	spolu	1,4	3,0	5,2	6,2	
Riziko A																																																
spolu																																																
7,8																																																
5,9																																																
14,1																																																
22,4																																																
Riziko A																																																
RJ_1																																																
6,8																																																
2,2																																																
14,0																																																
10,3																																																
Riziko A																																																
RJ_2																																																
1,0																																																
3,7																																																
0,1																																																
12,1																																																
Riziko B																																																
RJ_1																																																
0,2																																																
2,0																																																
4,9																																																
1,2																																																
Riziko B																																																
RJ_2																																																
1,2																																																
1,0																																																
0,3																																																
5,0																																																
Riziko B																																																
spolu																																																
1,4																																																
3,0																																																
5,2																																																
6,2																																																
	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>spolu</th></tr><tr><td>22,4</td></tr><tr><td>14,1</td></tr><tr><td>5,9</td></tr><tr><td>7,8</td></tr></table>	Riziko A	spolu	22,4	14,1	5,9	7,8	=	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>RJ_1</th></tr><tr><td>10,3</td></tr><tr><td>14,0</td></tr><tr><td>2,2</td></tr><tr><td>6,8</td></tr></table>	Riziko A	RJ_1	10,3	14,0	2,2	6,8	+	<table><tr><th>Riziko A</th></tr><tr><th>RJ_2</th></tr><tr><td>12,1</td></tr><tr><td>0,1</td></tr><tr><td>3,7</td></tr><tr><td>1,0</td></tr></table>	Riziko A	RJ_2	12,1	0,1	3,7	1,0		<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>RJ_1</th></tr><tr><td>1,2</td></tr><tr><td>2,0</td></tr><tr><td>0,2</td></tr><tr><td>4,9</td></tr></table>	Riziko B	RJ_1	1,2	2,0	0,2	4,9	+	<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>RJ_2</th></tr><tr><td>5,0</td></tr><tr><td>1,0</td></tr><tr><td>1,2</td></tr><tr><td>0,3</td></tr></table>	Riziko B	RJ_2	5,0	1,0	1,2	0,3	=	<table><tr><th>Riziko B</th></tr><tr><th>spolu</th></tr><tr><td>6,2</td></tr><tr><td>3,0</td></tr><tr><td>1,4</td></tr><tr><td>5,2</td></tr></table>	Riziko B	spolu	6,2	3,0	1,4	5,2	
Riziko A																																																
spolu																																																
22,4																																																
14,1																																																
5,9																																																
7,8																																																
Riziko A																																																
RJ_1																																																
10,3																																																
14,0																																																
2,2																																																
6,8																																																
Riziko A																																																
RJ_2																																																
12,1																																																
0,1																																																
3,7																																																
1,0																																																
Riziko B																																																
RJ_1																																																
1,2																																																
2,0																																																
0,2																																																
4,9																																																
Riziko B																																																
RJ_2																																																
5,0																																																
1,0																																																
1,2																																																
0,3																																																
Riziko B																																																
spolu																																																
6,2																																																
3,0																																																
1,4																																																
5,2																																																
poradie																																																
4																																																
3																																																
1																																																
2																																																

Obrázok 3.3.8: Kvantifikácia strát rizík A a B po preusporiadaní simulácií

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa ZIG (2020)

3. preusporiadané simulácie strát pre riziko môžeme po jednotlivých simuláciách sčítať, aby sme dostali finálnu hodnotu agregovaného (diverzifikovaného) rizika;

Agregované riziko		Agregované riziko		Agregované riziko		Agregované riziko		Agregované riziko
Riziko A		Riziko B		RJ_1		RJ_2		Spolu
22,4		6,2		11,5		17,1		28,6
14,1	+	3,0	=	16,0	+	1,1	=	17,1
5,9		1,4		2,4		4,9		7,3
7,8		5,2		11,7		1,3		13,0

Obrázok 3.3.9: Agregovaná hodnota strát pre obe reportovacie jednotky

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa ZIG (2020)

V prípade medzinárodných poisťovacích spoločností je proces agregácie spojený s komplikáciami so zložitou internou štruktúrou. Existujú dva pohľady na internú štruktúru. Prvá reprezentuje interne vytvorenú hierarchiu, ktorá opisuje vzťahy od najmenších jednotiek v spoločnosti, akými sú reportovacie jednotky, cez ich línie biznisu, krajiny, regióny až po globálnu úroveň reprezentujúcu celú spoločnosť. Takúto štruktúru využívajú najmä veľké poisťovacie skupiny, ktoré sa skladajú z rôznych dcérskych spoločností, obchodných jednotiek (BU – *Business Units*) podnikajúcich v rôznych segmentoch poisťného trhu alebo z podobných. V druhom prípade ide o zobrazenie štruktúry napríklad finančných a právnych organizácií v rámci jednej poisťovacej spoločnosti, kedy je postup zdola nahor zobrazovaný cez podielovú maticu.

Existujú dva dôležité rozmery klasifikácie rizík: ekonomická povaha rizika (napríklad poisťné, trhové, úverové, operačné riziko) a organizačná štruktúra (obchodné línie alebo právne subjekty). Ekonomická povaha rizika zohľadňuje agregáciu rizík do skupín podľa typu rizika v rámci celej skupiny, napríklad trhové riziko, zohľadnením súhrnného rizika na úrovni súvahy skupiny. Naproti tomu, pri organizačnom zoskupení rizík sa zvažuje organizačná sila, ktorá reprezentuje zastúpenie danej obchodnej línie alebo právneho subjektu v celkovom kapitáli skupiny. Tento prístup sa zaoberá vzájomnými rizikovými vzťahmi na začiatku procesu a využíva výhody známych podnikových štruktúr. Organizačná klasifikácia predstavuje oveľa menšie ťažkosti, nakoľko je možné ľahko vytvoriť organizačný strom, naproti klasifikácii podľa rizika, kde definície rizika môžu byť výrazne ovplyvnené metodológiami regulátorov.

3.4 Viacrozmerná MB11 kopula

Moderný manažment rizík sa spolieha na adekvátne modelovanie chvostovej závislosti a určovanie rizikových mier. Adekvátne modelovanie chvostových závislostí umožňuje modelom odhadu rizikového kapitálu modelovať aj extrémne udalosti, ktoré sú záujmom manažmentu rizík v poisťovníctve. Jednou z takýchto kopúl je viacrozmerná B11 kopula (MB11 – *Multivariate B11*), ktorá je upravená z pôvodnej B11 kopuly klasifikovanej H. Joeom v publikácii v roku 1997. Upravená bola J. Milekom na viacrozmerný tvar, no existujú aj skoršie podobné aplikácie od autorov W. Hurlimann (2002) pre MLS – *Multivariate Linear Spearman* kopulu a T. Yang (2009) pre viacrozmerné Fréchet kopuly.

Kopula MB11 bola predstavená J. Milekom v roku 2014 pri príležitosti tvorby kopuly pre interný model medzinárodnej poisťovacej spoločnosti Zurich Insurance Group, Ltd., ktorej metodológia bola prehodnocovaná v rámci schvaľovania metodológie celkového interného modelu poisťovne pre Švajčiarsky test solventnosti, švajčiarskym regulátorom FINMA. Pre predstavu, proces vývoja metodológie a jej nástrojov pre takýto obrovský proces môže trvať niekoľko rokov, v prípade poisťovacej spoločnosti Zurich Insurance Group, Ltd. to trvalo viac ako 5 rokov. Vo všeobecnosti, kopula MB11 môže byť vnímaná ako konvexná kombinácia niekoľkých Gaussových kopúl s korelačnými maticami obsahujúcimi extrémne hodnoty, iba nuly a jednotky, no existuje veľa možností, ako môžeme MB11 kopulu flexibilne upravovať, aby reprodukovala dvojrozmernú a trojrozmernú chvostovú závislosť podľa potreby. Kopula zobrazujúca Gaussové kopuly, pričom každá zobrazuje prípad pre jednu extrémnu korelačnú maticu, nazývame kanonické kopuly. Ako sme už spomínali v predchádzajúcej kapitole, pri interných modeloch potrebujeme agregovať viacero rizík, pričom v závislosti od metodológie je to zvyčajne 6 až 8 rizík. Pri takomto počte je veľmi náročné nájsť nástroj, ktorý bude kvalitne odhadovať kopulové variácie bez zníženia kvality iných vlastností. V našom prípade MB11 vyjadrujú kanonické kopuly, ktorých počet určuje Dobinski formula a Bellove číslo (Milek, 2014)

$$Bell(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (3.4.1)$$

pričom n reprezentuje počet agregovaných rizík a Bellove číslo $Bell(n)$ reprezentuje scenárov/kombinácií n prvkov spĺňajúcich podmienku pozitívnej semi-definitnosti.

Tabuľka 3.4.1: Počet kanonických kopúl v závislosti od počtu agregovaných rizík

Počet rizík (n)	Bellovo číslo
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147

Zdroj: vlastné spracovanie

V prípade MB11 kopuly pre dve riziká X_1 a X_2 , množinu $\{X_1, X_2\}$ možno rozdeliť na neprázdne podmnožiny len dvoma rôznymi spôsobmi, $\{\{1,2\}\}$ a $\{\{1\},\{2\}\}$. Kopulové variácie X_1 a X_2 možno generovať výberom vzoriek zo zmesi kopúl – varianty M_2 pozostávajú z replikovaných nezávislých rovnomerne rozdelených náhodných premenných na $[0,1]$, zatiaľ čo varianty Π_2 pozostávajú z dvoch nezávislých rovnomerne rozdelených náhodných premenných na $[0,1]$. Distribučnú funkciu kopule B11 môžeme zapísať ako konvexnú kombináciu

$$C_{B11} = wM_2 + (1 - w)\Pi_2, \quad (3.4.2)$$

kde w reprezentuje nezápornú váhu kopule M_2 a $(1 - w)$ nezápornú váhu kopule Π_2 . Kopula má nasledovné vlastnosti chvostovej závislosti (Milek, 2020):

- Spearmanove poradové korelačné koeficienty ρ_S sa rovnajú váhe w ;
- chvostové závislostné koeficienty sa tiež rovnajú váhe w ;
- podmienená pravdepodobnosť prekročenia kvantilu (*Conditional Quantile Exceedance Probability*) je lineárnou funkciou pravdepodobnosti q , klesajúcej na $[0, 1]$ od 1 do w :

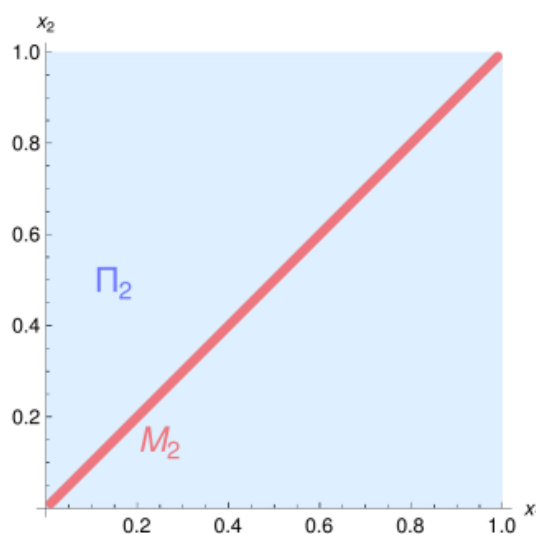
$$cqep(q) = 1 - q(1 - w). \quad (3.4.3)$$

Ako sme naznačili, v prípade MB11 kopuly pre dve dimenzie je Spearmanov poradový koeficient rovný chvostovej závislosti, čo je veľký rozdiel oproti štandardnej Gaussovej kopule mimo extrémnych prípadov (M_2 a Π_2).

Horná podmienená pravdepodobnosť prekročenia kvantilu (*Upper Conditional Quantile Exceedance Probability*) medzi dvomi združenými rozdeleniami náhodných premenných X a Y , ktoré reprezentujú modelované ekonomické straty je definovaná ako (Milek, 2014, 2020)

$$cqp_{12}(q) = P\left(X_1 \geq F_{X_1}^{-1}(q) \mid X_2 \geq F_{X_2}^{-1}(q)\right), \quad (3.4.4)$$

kde $F_X^{-1}(q)$ označuje kvantilovú funkciu náhodnej premennej X . Funkciu hustoty kopule B11 zobrazujeme na Obrázku 3.4.1.



Obrázok 3.4.1: Funkcia hustoty pravdepodobnosti kopule B11

Zdroj: Milek (2020)

V prípade MB11 kopuly pre tri riziká $\{X_1, X_2, X_3\}$, môžeme kanonické kopuly pod podmienkou pozitívnej semidefinitnosti a Bellovho čísla, vyjadriť pomocou piatich scenárov závislostí:

1. $\{\{1,2,3\}\}$, ktorý reprezentuje úplnú závislosť všetkých troch rizík X_1, X_2, X_3 ;
2. $\{\{1,2\},3\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1 a X_2 , pričom X_3 sa správa nezávisle od rizík X_1 a X_2 ;
3. $\{\{1,3\},2\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1 a X_3 , pričom X_2 sa správa nezávisle od rizík X_1 a X_3 ;
4. $\{\{2,3\},1\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_2 a X_3 , pričom X_1 sa správa nezávisle od rizík X_2 a X_3 ;

5. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, ktorý reprezentuje nezávislé správanie všetkých troch rizík X_1 , X_2 a X_3 .

Kopulu MB11 môžeme teda zapísať ako konvexnú kombináciu piatich kanonických kopúl (Milek, 2020)

$$C_{MB11} = \alpha C_{111} + \beta C_{112} + \delta C_{121} + \gamma C_{122} + \varepsilon C_{123} \quad (3.4.5)$$

kde C_{111} , C_{112} , C_{121} , C_{122} , C_{123} sú kanonické kopuly korešpondujúce vyššie spomenutým závislostiam a w reprezentuje nenulové pozitívne váhy pre jednotlivé kanonické kopuly. Ak sa pozrieme na jednotlivé kopuly bližšie, môžeme si všimnúť, že kopula C_{111} reprezentuje komonotónnu kopulu M_3 , kopula C_{123} reprezentuje nezávislú kopulu Π_3 a zvyšné tri kopuly C_{112} , C_{121} a C_{122} reprezentujú „falošnú“ nezávislú kopulu Π_2 s jedným faktorom ovplyvňujúcim naraz dve riziká.

Tabuľka 3.4.2: Prehľad vlastností trojrozmernej MB11 kopuly

typ závislosti rizík	faktory			kanonická kopula	distribučná funkcia kopuly	hustota pravdepodobnosti kopule	váha	
	x_1	x_2	x_3					
$\{\{1,2,3\}\}$	f_1	f_1	f_1	C_{111}	$\min(x_1, x_2, x_3)$	$\delta(x_1 - x_2, x_1 - x_3)$	α	M
$\{\{1,2\}, 3\}$	f_1	f_1	f_2	C_{112}	$\min(x_1, x_2) \cdot x_3$	$\delta(x_1 - x_2)$	β	$M\Pi$
$\{\{1,3\}, 2\}$	f_1	f_2	f_1	C_{121}	$\min(x_1, x_3) \cdot x_2$	$\delta(x_1 - x_3)$	δ	$M\Pi$
$\{\{2,3\}, 1\}$	f_1	f_2	f_2	C_{122}	$x_1 \cdot \min(x_2, x_3)$	$\delta(x_2 - x_3)$	γ	$M\Pi$
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	f_1	f_2	f_3	C_{123}	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	1	ε	Π

Zdroj: vlastné spracovanie

Dvojrozmerné chvostové závislosti, ktoré sú vstupným parametrom MB11 kopuly majú nasledovné tvary:

$$\Lambda_{111} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_3$$

$$\Lambda_{112} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda_{121} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda_{122} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{123} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Pi_3$$

Matice, ktoré nie sú v našom záujme kvôli nesplneniu podmienky pozitívnej semidefinity sú:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Následne, aplikovaním nenulových váh (v súčte musia nadobúdať 1) na päť matíc spĺňajúcich pozitívnu semidefinitu, dostaneme dvojrozmernú chvostovú maticu závislostí troch rizík trojrozmernej matice MB11 (2DTD – *Two Dimensional Tail Dependence*, niekedy je označovaná aj BiTD).

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$2DTD = \begin{bmatrix} 1 & \beta + \alpha & \gamma + \alpha \\ \beta + \alpha & 1 & \delta + \alpha \\ \gamma + \alpha & \delta + \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

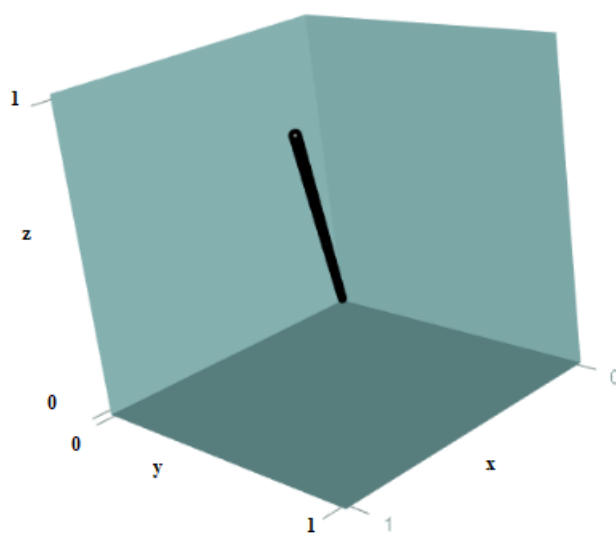
Dvojrozmerná chvostová závislostná matica kopule MB11, pri troch rizikách, je tiež identická Spearmanovmu poradovému koeficientu ρ_S :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \beta + \alpha & \gamma + \alpha \\ \beta + \alpha & 1 & \delta + \alpha \\ \gamma + \alpha & \delta + \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

čo vyplýva zo skutočnosti, že B11 je marginálnou dvojrozmernou kopulou MB11 kopuly, pre ľubovoľný počet rizík. Hornú trojrozmernú chvostovú závislosť rizík X_1, X_2 a X_3 následne určíme ako (Milek, 2014)

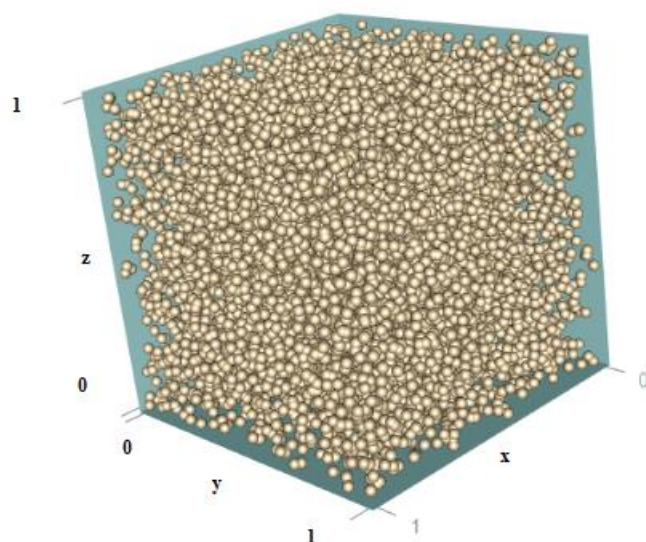
$$\lambda_{123}^u = \lim_{q \rightarrow 1^-} P \left(X_1 \geq F_{X_1}^{-1}(q) \wedge X_2 \geq F_{X_2}^{-1}(q) \middle| X_3 \geq F_{X_3}^{-1}(q) \right). \quad (3.4.8)$$

Je dôležité poznamenať, že pre modelovanie rizika a výsledný rizikový kapitál MB11 kopula v závislosti od vstupných váh zabezpečuje nenulovú trojrozmernú chvostovú závislosť, ktorá sa do určitej miery môže upravovať nezávisle od ostatných koeficientov a je rovná α . Podobná vlastnosť je viditeľná iba pri Studentovej t kopule, ktorá má možnosť hýbať so stupňami voľnosti, no na rozdiel od MB11 to ovplyvňuje ďalšie vlastnosti. (Milek, 2020)



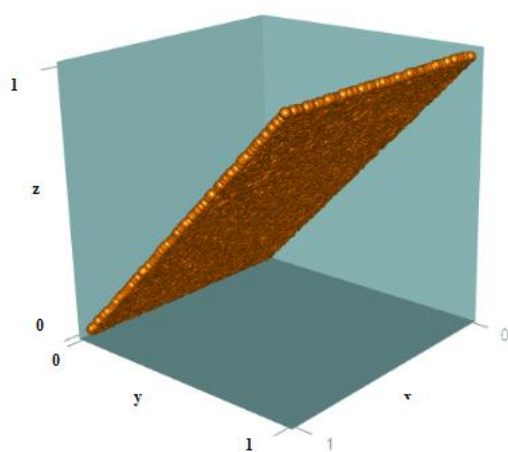
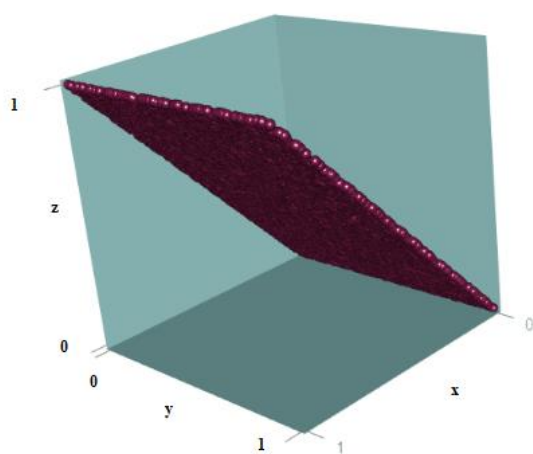
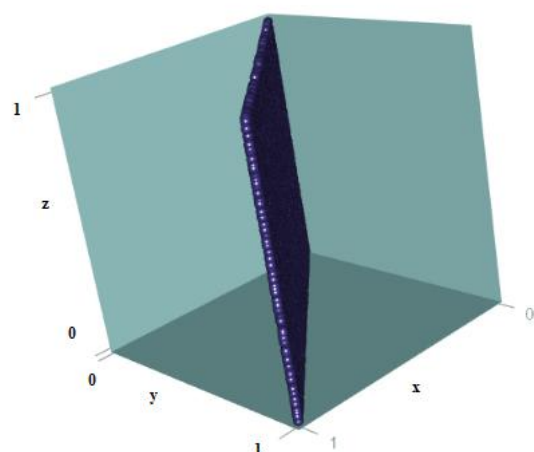
Obrázok 3.4.2: Kanonická kopula $M_{\{\{1,2,3\}\}}$

Zdroj: vlastné spracovanie



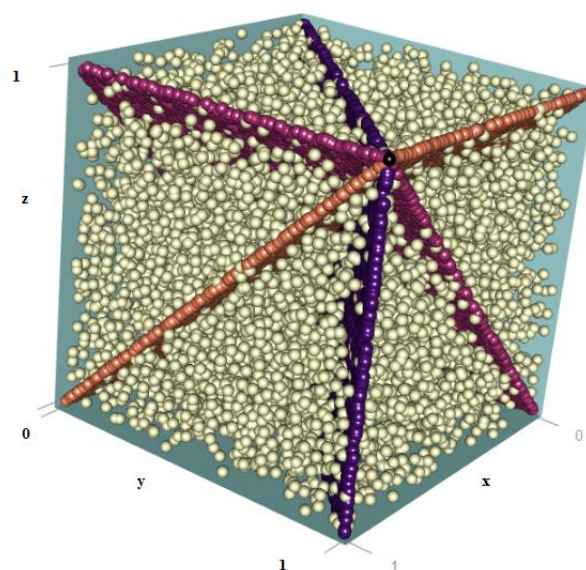
Obrázok 3.4.3: Kanonická kopula $\Pi_{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}$

Zdroj: vlastné spracovanie



Obrázok 3.4.4: Kanonická kopula $M_{\{\{1,2\}\}}\Pi_{\{\{3\}\}}$ (hore), $M_{\{\{1,3\}\}}\Pi_{\{\{2\}\}}$ (stred) a $M_{\{\{2,3\}\}}\Pi_{\{\{1\}\}}$ (dole)

Zdroj: vlastné spracovanie



Obrázok 3.4.5: Viacrozmerná kopula MB11 s rovnomernými váhami s hodnotou 20

Zdroj: vlastné spracovanie

V prípade viacrozmernej MB11 kopuly pre štyri riziká $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, môžeme kanonické kopuly pod podmienkou pozitívnej semidefinitnosti a Bellovho čísla (viď Tabuľka 3.4.1), vyjadriť pomocou pätnástich scenárov:

1. $\{\{1,2,3,4\}\}$, ktorý reprezentuje úplnú závislosť všetkých troch rizík X_1, X_2, X_3, X_4 ;
2. $\{\{1,2\}, 3, 4\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1 a X_2 , pričom X_3 a X_4 sa správa nezávisle od rizík X_1 a X_2 ;
3. $\{\{1,3\}, 2, 4\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1 a X_3 , pričom X_2 a X_4 sa správa nezávisle od rizík X_1 a X_3 ;
4. $\{\{1,4\}, 2, 3\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1 a X_4 , pričom X_2 a X_3 sa správa nezávisle od rizík X_1 a X_4 ;
5. $\{\{2,3\}, 1, 4\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_2 a X_3 , pričom X_1 a X_4 sa správa nezávisle od rizík X_2 a X_3 ;
6. $\{\{2,4\}, 1, 3\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_2 a X_4 , pričom X_1 a X_3 sa správa nezávisle od rizík X_2 a X_4 ;
7. $\{\{3,4\}, 1, 2\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_3 a X_4 , pričom X_1 a X_2 sa správa nezávisle od rizík X_3 a X_4 ;

8. $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$, ktorý reprezentuje závislosť dvojice rizík X_1 a X_2 a dvojice rizík X_3 a X_4 , dvojice sú navzájom nezávislé;
9. $\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$, ktorý reprezentuje závislosť dvojice rizík X_1 a X_3 a dvojice rizík X_2 a X_4 , dvojice sú navzájom nezávislé;
10. $\{\{1,4\}, \{2,3\}\}$, ktorý reprezentuje závislosť dvojice rizík X_1 a X_4 a dvojice rizík X_2 a X_3 , dvojice sú navzájom nezávislé;
11. $\{\{1,2,3\}, 4\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1, X_2, X_3 , pričom X_4 sa správa nezávisle;
12. $\{\{1,2,4\}, 3\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1, X_2, X_4 , pričom X_3 sa správa nezávisle;
13. $\{\{1,3,4\}, 2\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_1, X_3, X_4 , pričom X_2 sa správa nezávisle;
14. $\{\{2,3,4\}, 1\}$, ktorý reprezentuje závislosť rizík X_2, X_3, X_4 , pričom X_1 sa správa nezávisle;
15. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, ktorý reprezentuje nezávislé správanie všetkých štyroch rizík X_1, X_2, X_3 a X_4 .

3.4.1 Generátor viacrozmernej kopule MB11

Samotný proces generovania kopulových variácií viacrozmernej kopuly MB11 pozostáva z dvoch častí: z (1) prípravy chvostových závislostí ako vstupu pre modelovanie kopulových variácií prostredníctvom kanonických kopúl a (2) simulácii podkladu pre kanonické kopule a následne faktorov popísaných v Tabuľke 3.4.2. Vznik chvostových závislostí sme už popísali a v prípade simulácií, využívame Monte Carlo metódu. Modelovať je potrebné pre počet simulácií marginálneho rozdelenia strát k a to v dvoch prípadoch:

1. Simulovanie k nezávislých premenných z intervalu $[0,1]$, nazývame *sels*, ktoré slúžia ako podklad pre výber kanonickej kopuly v závislosti od kumulatívnej pravdepodobnosti; na základe inverznej transformačnej metódy pre diskretnú náhodnú premennú (viď 3.3.4 Význam simulácií pri agregácii rizík). Predpokladajme, že generujeme hodnotu náhodnej premennej X s pravdepodobnostnou funkciou (Viadinugroho, 2022)

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, \dots. \quad (3.4.9)$$

Na generovanie hodnoty X generujeme náhodnú premennú U , ktorá je rovnomerne rozdelená na $(0,1)$ a daná

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{ak } U \leq p_1 \\ x_k, & \text{ak } \sum_{i=1}^{k-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^k p_i \end{cases} \quad (3.4.10)$$

2. Generovanie faktorov *vars*, ktoré sú opäť Monte Carlo simuláciami, pričom je generovanie realizované nezávisle pre každý faktor a každú simuláciu, čo je pri 200 tisíc simuláciách 600 tisíc nasimulovaných hodnôt faktorov.

Následne podľa typu kanonickej kopuly (viď Tabuľka 3.4.2), sú pre danú simuláciu vybrané adekvátne nasimulované hodnoty faktorov, ktoré reprezentujú kopulové variácie.

Aplikácia kopulových variácií je následne založená na princípe ohodnocovania veľkosti kopulových variácií a spájania s marginálnymi rozdeleniami strát jednotlivých samostatných rizík.

1. Agregované kopulové variácie ohodnotíme od najvyššej po najnižšiu, poradie simulácií kopulových variácií zostáva nezmenené.

simulované variácie kopúl			poradie		
Riziko X_1	Riziko X_2	Riziko X_3	Riziko X_1	Riziko X_2	Riziko X_3
0,8	0,8	0,2	4	4	1
0,6	0,4	0,5	3	2	2
0,2	0,2	0,8	1	1	4
0,4	0,6	0,6	2	3	3

Obrázok 3.4.6: Určenie poradia simulácií kopulových variácií

Zdroj: vlastné spracovanie

2. Nasleduje preusporiadanie marginálnych rozdelení strát všetkých troch rizík podľa poradia nasimulovaných kopulových variácií. V procese spájame najvyššie riziká

s najvyššími hodnotami kopulových simulácií pre dané riziká, preto je potrebné určiť vzostupné poradie simulácií marginálnych strát jednotlivých rizík, označme ich R^* .

Riziko X_1	Riziko X_1^*	Riziko X_2	Riziko X_2^*	Riziko X_3	Riziko X_3^*
6,8	2,2	1,0	0,1	0,2	0,2
2,2	6,8	3,7	1,0	2,0	1,2
14,0	10,3	0,1	3,7	4,9	2,0
10,3	14,0	12,1	12,1	1,2	4,9

Obrázok 3.4.7: Určenie poradia simulácií kopulových variácií

Zdroj: vlastné spracovanie

- Po preusporiadaní marginálnych simulácií strát od najnižšej po najvyššiu, nasleduje spájanie simulácií marginálnych strát v závislosti od kopulových variácií, pričom spájame najvyššie hodnoty kopulových variácií s najvyššími hodnotami marginálnych strát. Následne môžeme jednotlivé simulácie marginálnych strát sčítať, čím získame hodnotu agregovaných strát pre tri riziká zobrazené v združenom rozdelení marginálnych strát *Agregované riziko*.

Agregované straty		Riziko X_1		Riziko X_2		Riziko X_3
26,3		14,0		12,1		0,2
12,5	=	10,3	+	1,0	+	1,2
7,2		2,2		0,1		4,9
12,5		6,8		3,7		2,0

Obrázok 3.4.8: Určenie hodnôt agregovaných strát po simuláciách na základe preusporiadaných marginálnych rozdelení strát v závislosti od kopulových variácií.

Zdroj: vlastné spracovanie

S pribúdajúcim počtom modelovaných rizík je dôležité zvoliť metodológiu, ktorá dovoľí vývoj kopule stále nejakým spôsobom kontrolovať. Metódy, ktoré sa zvyknú využívať pri viacrozmernej MB11 kopule, sú kalibrácia kopule fitovaním k VCV kapitálu, *Sparse Parametrization* alebo moderná metóda nazvaná maximálna entropia (*Maximum Entropy Method*). (Milek, 2021).

3.4.2 Validácia modelu

Pre kontrolu správnosti nastavenia a implementácie modelu je potrebné praktizovať testovanie, ktoré ukáže, či výstupy modelu spĺňajú požadované kritériá. V našom prípade ide o testovanie modelu produkujúceho kopulové variácie kanonickými kopulami viacrozmernej kopuly MB11. Testovať kvalitu modelu budeme dvoma testami:

1. Kontrola vzdialenosti požadovaných chvostových závislostí zadaných prostredníctvom vstupných váh ako parametru kopuly MB11, ku realizovanej závislosti marginálnych rozdelení strát troch rizík. Vzdialenosť sme kontrolovali použitím funkcie `cor()` balíčka “stats” R Core Team (2021) v programovacom jazyku R. Metóda Spearmanovej korelácie počíta koreláciu medzi poradím premennej x a poradím premennej y nasledovne (STDHA, n.a.):

$$rho = \frac{\sum (x' - m_{x'}) (y' - m_{y'})}{\sqrt{(x' - m_{x'})^2 \sum (y' - m_{y'})^2}} \quad (3.4.11)$$

kde x' je poradie premennej x a y' je poradie premennej y .

2. Kontrola vzdialenosti hodnoty rizikového kapitálu získaného generovaním kopulových variácií a kapitálom odhadnutým metódou VCV. Odhad rizikového kapitálu pomocou VCV (*Variance-Covariance*) metódy alebo tiež nazývanej metóda rozptylu a kovariancie, je populárny a založený na korelačných koeficientoch. VCV metóda umožňuje získať prehľad o hodnote rizikového kapitálu, pričom úroveň diverzifikácie medzi rizikami závisí od úrovne korelácií umiestnených v korelačnej matici. Vo všeobecnosti platí, že čím jemnejšia je úroveň klasifikácie rizika, teda rozčlenenie na rizikové faktory v rámci matice VCV, tým nižšia je intradiverzifikácia a vyššia interdiverzifikácia. Veľmi rozšíreným a známym príkladom využitia VCV metódy je štandardný vzorec na odhad požadovaného kapitálu SCR pod direktívou Solventnosť II. Dôvody, prečo túto metódu poisťovne využívajú sú jednoduchosť, intuitívnosť, transparentnosť, pomerne kvalitné výsledky a nenáročná implementácia oproti metóde kopúl. Použitie kaskády korelačných matíc umožňuje jednoduché pridanie ďalších rizík alebo rizikových faktorov. Metóda je vhodná aj na komunikáciu so stranou biznisu, pretože je ľahko pochopiteľná a predstaviteľná.

Nevýhody metódy vidíme najmä v jej statickosti, nakoľko závislosť dvoch rizík je vyjadrená jedným číslom a do odhadu vôbec nevstupujú simulácie, čím sa znemožňuje zobrazenie nelinearity na chvostoch. (Shaw & Spivak, 2009)

Vo všeobecnosti sa predpokladá malý rozdiel medzi VCV kapitálom a kopula kapitálom. Kvalitnejší a presnejší odhad kapitálu získame agregáciou pomocou kopúl, nakoľko sa využíva 200 tisíc simulácií a chvostová závislosť popisujúca každú dvojicu rizík pre každú simuláciu. Ak by nastala situácia, kedy VCV kapitál je príliš vzdialený od toho kopulového, mohla nastať situácia, kedy kopula pri vytváraní kopulových variácií “uletela“, čo mohlo byť spôsobené chybou v implementácii alebo v zlých parametroch. V našom prípade považujeme za dostatočné, ak rozdiel medzi kapitálmi určenými metódou VCV a kopulou bude nižší ako 1 %. Kapitál metódou VCV vypočítame ako (Dhaene et. al., 2005):

$$VCV = \sqrt{V^T \cdot k \cdot V} \quad (3.4.12)$$

kde

- k reprezentuje korelačnú maticu pre n agregovaných rizík;
- V reprezentuje stĺpcovú maticu s n hodnotami kapitálu na pokrytie neočakávaných strát jednotlivých samostatných rizík;
- V^T reprezentuje transformovanú maticu V .

Ďalším testom, ktorý môže byť v prípade agregácie viacerých rizík aplikovaný, je maximálna alebo Shanonova entropia. Pre účely tejto práce sa danou metódou nebudeme zaoberať.

3.5 Programovací jazyk R

Pre dizertačnú prácu sme zvolili programovací jazyk R, pretože je flexibilný, objektovo orientovaný a poskytuje bezplatné softvérové prostredie pre štatistické výpočty, analýzy a ich kvalitné grafické prevedenie. Jazyk kombinuje dostatočne veľkú moc s veľmi jasnou syntaxou tak pre štatistické výpočty, ako aj pre grafické zobrazenia a to vďaka efektívnemu spôsobu manipulácie aj so zložitými dátovými štruktúrami. Prostredie obsahuje množstvo základných a prídavných balíkov (a knižníc), ktoré obsahujú funkcie napomáhajúce dosahovaniu požadovaných analýz a výsledkov. Najpoužívanějšími balíkmi pre

oblasť aktuársku a modelovanie kopúl sú *actuar* a *copula*, no v našom prípade ich nevyužívame, využívame iba aditívne balíky pre grafické zobrazenie výsledkov a aplikáciu Shiny.

3.5.1 Využitie programovacieho jazyka R pri tvorbe modelu agregácie

Pre prácu s programovacím jazykom R sme využívali verziu 4.1.2 a aplikáciu RStudio vo verzii 1.2.5019.

Tabuľka 3.5.1: Základné informácie o využívanom softvéri R

```
R version 4.1.2 (2021-11-01) -- "Bird Hippie"
Copyright (C) 2021 The R Foundation for Statistical Computing
Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Na zbehnutie výpočtov je nutné nainštalovanie softvéru R a RStudio, ktoré už obsahujú základné balíky, akými sú napríklad *utils*, *base* a *stats*, doinštalovanie niekoľkých aditívnych balíčkov, ktoré obsahujú najmä grafické funkcie.

Tabuľka 3.5.2: Aditívne balíčky v softvéri R

```
#nainštalované balíčky
#install.packages('rgl', 'ggplot2', 'dplyr', 'ggextra', 'patchwork', 'copula',
                  'plot3d'
                  )
#privolané knižnice
library(copula)           # využitie pri generovaní združených rozdelení za pomoci
                          # kopúl pre názorné ukážky v kapitole 3.3 Kopule
library(ggplot2)          # využitie pri väčšine grafických interpretácií
                          # v dizertačnej práci
library(patchwork)        # využitie pri združovaní grafických zobrazení do jednej
                          # roviny
library(ggExtra)
library(dplyr)            # úprava data.framu
library(rgl)              # 3d plot pre zobrazenie kopulových variácií
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Základné funkcie, ktoré sme využili z ponuky softvéru R sú (RDocumentation, version 3.6.2):

1. *cor()* {stats}: Zabezpečuje výpočet korelačnej matice pre dva numerické vektory, matice alebo *data.frame*. Využívali sme metódu Spearman, pre výpočet realizovaných chvostových závislostí.
2. *crossprod()* {base}: vracia skalárny súčin matic, funkcia bola využitá pri VCV metóde výpočtu kapitálu.
3. *data.frame()* {base}: vytvára dátové rámce, združujúce úzko prepojené kolekcie premenných, ktoré majú mnoho spoločných vlastností s maticami a zoznamami, využívajú sa ako základná dátová štruktúra v softvéri R.
4. *ecdf()* {stats}: zabezpečuje empirický výpočet distribučnej funkcie objektu *ecdf* s rôznymi metódami vykresľovania. Funkciu sme využili pri zobrazení distribučnej funkcie marginálnych rozdelení jednotlivých rizík.
5. *function()* {base}: funkcie poskytujú základné mechanizmy na definovanie nových funkcií v jazyku R
6. *ggplot()* {ggplot2}: inicializuje objekt *ggplot* a môže sa použiť na deklarovanie vstupného dátového rámca pre graf a na špecifikáciu súboru estetických prvkov grafu, ktoré majú sú spoločné pre všetky nasledujúce dodatky grafu. Funkcia *ggplot* je v našom prípade pri grafickom zobrazovaní dominujúca, oproti klasickým grafickým zobrazeniam.
7. *matrix()* {base}: vytvára maticu zo súboru údajov, využívali sme pri zadávaní chvostových závislostí a výpočte VCV.
8. *plot()* {graphics}: je všeobecnou funkciou na vykresľovanie objektov R, jej využívanie je jednoduchšie oproti *ggplot2* knižnici, no má výrazne zastaralejšie prevedenie grafov oproti funkcii pre vykresľovanie grafov cez *ggplot*.
9. *plot3d()* {plot3d}: vracia 3D grafy buď cez webové rozhranie alebo *rgl* objekt, nastavenie grafu patrí k náročnejším, no výsledkom je 3D graf, ktorým možno manipulovať. Funkciu sme využili na zobrazenie kanonických kopúl a kopule MB11 v kapitole 3.4 *Viacrozmerná MB11 kopula* a v praktickej časti práce.
10. *quantile()* {stats}: funkcia vráti hodnoty objektu zodpovedajúce daným pravdepodobnostiam. Najmenšie pozorovanie zodpovedá pravdepodobnosti 0 a najväčšie pravdepodobnosti 1.
11. *read.csv()* {utils}: číta súbor a vracia jeho údaje do dátového regiónu *data.frame*. Je dôležité pred čítaním *.csv súboru skontrolovať, aký separátor súbor využíva a či sa v súbore nachádza hlavička. Typ separátora je najlepšie kontrolovať cez otváranie prostredníctvom textových súborov.

12. *rank()* *{base}*: vracia poradie hodnôt vo vektore podľa zadaného princípu. Funkcionalitu využívame pri kopulových variáciách, kedy ohodnocujeme jednotlivé simulácie kopulových variácií pred linkovaním na marginálne rozdelenie strát. Rovnaké hodnoty a chýbajúce hodnoty možno spracovať niekoľkými spôsobmi.
13. *runif()* *{stats}*: funkcia reprezentuje generovanie náhodných premenných, ktoré využívame hneď niekoľkými spôsobmi pri generovaní kopulových simulácií.
14. *sort()* *{base}*: funkcia zoraduje vektor hodnôt zostupne alebo vzostupne, funkciu sme využili pri zoradovaní marginálnych rozdelení strát jednotlivých rizík, pred spájaním s kopulovými variáciami.
15. *summary()* *{stats}*: produkuje sumár výsledkov modelov, využili sme pri popísaní základných štatistických vlastností jednotlivých samostatných marginálnych rozdelení strát.
16. *sqrt()* *{stats}*: vracia druhú odmocninu zadanej hodnoty, využívame pri výpočte VCV kapitálu.

V rámci programovacieho jazyka R sme pri príprave grafických interpretácií pracovali aj s aplikáciou softvérového prostredia jazyka R Shiny.

3.5.2 Aplikácia Shiny

Moderná aplikácia Shiny dostupná v rámci programovacieho jazyka R, je jednoduchým adresárom obsahujúcim *script* s názvom *app.R*, ktorý je tvorený objektom používateľského rozhrania *ui.R* a funkciou servera *server.R*. Aplikáciu Shiny môžeme v súčasnosti porovnávať s komplexnejším softvérom PowerBI, no v prospech aplikácie Shiny hovorí jej jednoduchosť, transparentnosť, dostupnosť a napojenie na prostredie jazyka R, ktoré je pravidelne aktualizované o nové balíčky a funkcionality. V aplikáciách Shiny a PowerBI je možné vytvárať rôzne *reporty* a *dashboards*, vďaka ktorým používateľ ľahko a dynamicky manipuluje s dátami, vytvára prepracovaný dizajn, ktorý je pre užívateľa nápomocný pri analyzovaní a prezentovaní dát. Autor *dashboardu* si dizajn definuje sám, vrátane funkcionalít, pričom vie veľmi jednoducho napojiť aplikáciu na ktorýkoľvek *script* s kódom, ktorý vytvoril. Pre používanie aplikácie Shiny nainštalovať balíčky *shiny*, *shinythemes* a aktivovať rovnomenné knižnice.

Tabuľka 3.5.3: Balíčky potrebné pre zbehnutie aplikácie Shiny

```
install.packages(c('shiny', 'shinythemes'))
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Základná skladba aplikácie Shiny pozostáva z používateľského rozhrania *ui.R*, serverovej časti, ktorú môžeme nazvať výpočtovou alebo vykonávajúcou *server.R* a z príkazu pre zbehnutie aplikácie *shinyApp()*:

Tabuľka 3.5.4: Časti aplikácie Shiny

```
#Rshiny App
library(shiny)
library(shinythemes)
#ui.R
ui <- fluidPage()
#server.R
server <- function(input, output) {}
#aplikacia
shinyApp(ui = ui, server = server)
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Aplikáciu Shiny v dizertačnej práci využívame na prezentáciu výsledkov.

4 Praktická časť

V dizertačnej práci sa venujeme kvantifikácii a agregácii rizík pre účel odhadu miery solventnosti teoretickej medzinárodnej poisťovacej spoločnosti využívajúcej interný model. Interný model je veľmi špecifická forma modelu pre odhad rizikového kapitálu, pričom je dôležité si uvedomovať hranicu, za ktorou je jeho absencia v procese odhadu miery solventnosti škodlivá. Medzinárodné poisťovacie spoločnosti môžu mať hneď niekoľko interných modelov, v závislosti od metodológií, ktorým podliehajú a od príslušných regulátorov v mieste vykonávania obchodnej činnosti. Veľké poisťovacie spoločnosti zvyknú mať vytvorený vlastný interný model na základe vlastnej metodológie a to najmä pre interné účely, akými sú prudentnejší pohľad na riziko alebo ako podklad pre obchodné stratégie spoločnosti. V praxi sú interné modely veľmi obľúbené, pretože dokážu dôkladnejšie a presnejšie opísať správanie jednotlivých rizík, ktorým poisťovacia spoločnosť podlieha, čo neskôr procesu agregácie rizík pridáva na kvalite. Veľkou výhodou interných modelov v súvislosti s presnejším odhadom agregovanej hodnoty straty je nižšia pravdepodobnosť prekapitalizácie oproti štandardným modelom. Je známe, že rovnako, ako podkapitalizácia, aj prekapitalizovanie môže poisťovacej spoločnosti spôsobiť vážne finančné problémy.

V dizertačnej práci sme vytvorili model odhadu miery solventnosti v programovacom jazyku R, obsahujúci kvantifikáciu a agregáciu troch. Vytvorený model odhadu miery solventnosti pozostáva zo štyroch hlavných častí:

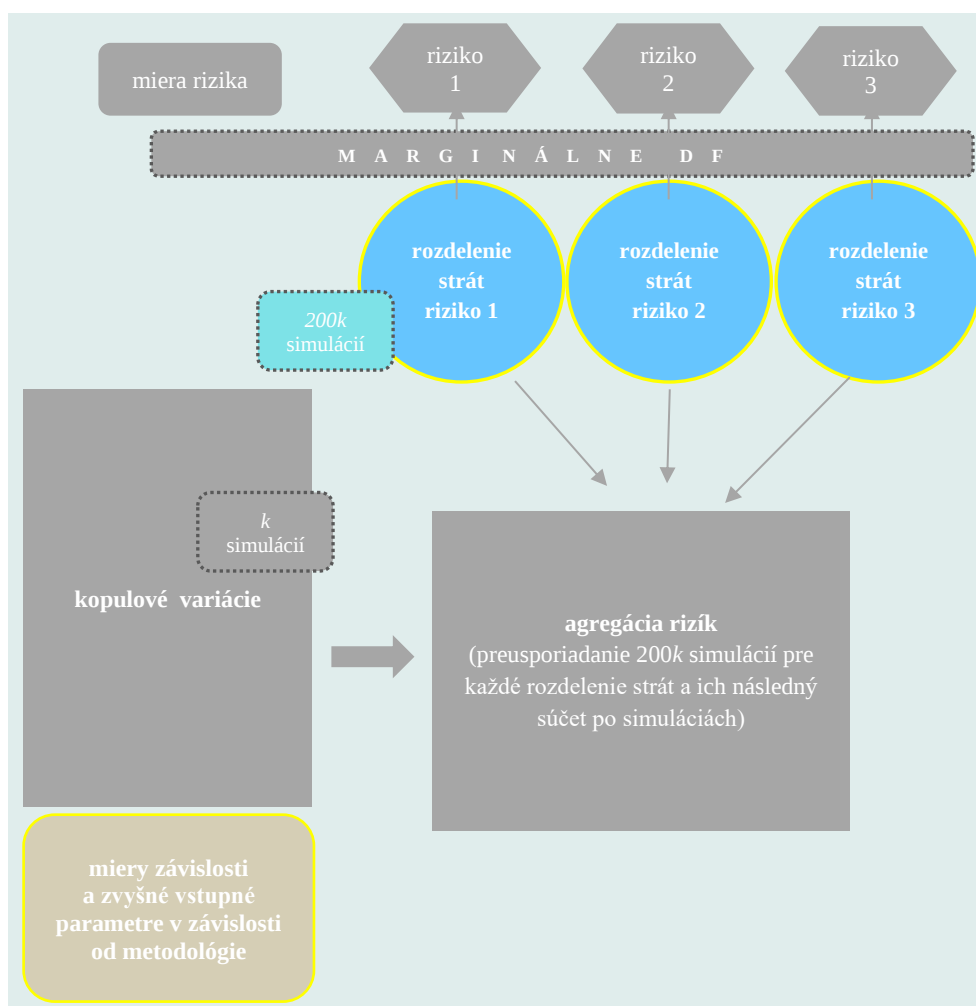
1. vstupné údaje pre model reprezentujúce:
 - a. marginálne rozdelenia strát jednotlivých rizík – vstupujú do procesu agregácie a procesu kvantifikácie rizík;
 - b. chvostové závislosti medzi rizikami – vstup pre výpočet kopulových variácií;
2. viacrozmerná kopula MB11, ktorá produkuje kopulové variácie – kopulové variácie vstupujú do procesu agregácie rizík;
3. samotný proces agregácie rizík, ktorý združuje marginálne rozdelenia strát a kopulové variácie;
4. kvantifikácia samostatných rizík, agregovaného rizika a odhad miery solventnosti.

Model bol navrhnutý tak, aby používateľ modelu bol schopný svojpomocne agregovať tri riziká, pričom do modelu vloží vlastné nasimulované rozdelenia škôd jednotlivých rizík, zvolí parametre pre odhad finálneho agregovaného rizikového kapitálu a model následne

vypočíta výšky jednotlivých rizík, rizikového kapitálu a mieru solventnosti. Parametrami pre odhad agregovaného kapitálu rozumieme maticu chvostových závislostí jednotlivých rizík, mieru rizika, počet simulácií a hodnotu voľných finančných prostriedkov. Model za pomoci zjednodušenej MB11 kopuly jednotlivé riziká agreguje a v dynamickom reporte používateľ transparentne vidí, ako vznikla finálna hodnota agregovaného rizikového kapitálu, vrátane miery solventnosti. Model je vytvorený pomocou programovacieho jazyka R a dynamický report prezentujeme prostredníctvom aplikácie Shiny, rovnako vytvorenej prostredníctvom programovacieho jazyka R.

4.1 Model: Vstupné údaje

Prvou časťou modelu sú vstupné údaje. Zaraďujeme medzi ne marginálne rozdelenia pre jednotlivé tri riziká a chvostové závislosti medzi jednotlivými rizikami.



Obrázok 4.1.1: Vstupné údaje modelu odhadu miery solventnosti z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

4.1.1 Marginálne rozdelenia rizík

Pri modelovaní rizikového kapitálu potrebujeme ako jeden zo vstupov do modelu marginálne rozdelenia jednotlivých rizík (respektíve strát), ktorých vznik sme bližšie popísali v kapitole 3. *Metodika práce a metódy skúmania* (viď Obrázok 3.0.1). Marginálne rozdelenia strát nemajú v našom modeli priamy vplyv na kopulu a kopulové variácie, ako sme už vysvetlili v predchádzajúcich kapitolách, no sú jedným z dvoch hlavných vstupov do procesu agregácie. V našom prípade agregujeme tri riziká, no veľké poisťovacie spoločnosti vo svojich modeloch agregujú aj 6 až 8 rizík. Marginálne rozdelenia strát v modeli agregácie rizík reprezentujú jednotlivé samostatné riziká:

- *trhové riziko*, budeme označovať TRH alebo R1;
- *neživotné riziko*, budeme označovať NEZ alebo R2;
- *katastrofické riziko*, budeme označovať KAT alebo R3;

pre bližšiu špecifikáciu jednotlivých rizík, viď. kapitolu 1.1 *Riziká vplývajúce na poisťovaciu spoločnosť*. Riziká a marginálne rozdelenia strát jednotlivých rizík pred procesom agregácie nazývame *samostatné*, po agregácii ich nazývame *agregované* alebo *združené*.

Rozhodli sme sa pre kombináciu rizík trhové, neživotné a katastrofické, pretože každé z nich je veľmi špecifické a ich spojenie v procese agregácie môže byť veľmi zaujímavé. Do modelu pre odhad miery solventnosti vchádzajú jednotlivé marginálne rozdelenia strát prostredníctvom *.csv súboru, obsahujúceho marginálne rozdelenia strát s 200 tisíc simuláciami pre každé z rizík, v miliónoch EUR. Marginálne rozdelenia strát pochádzajú z reálneho prostredia poisťovacej spoločnosti a sú pre potrebu ochrany údajov upravené (základné vlastnosti rizík zostali zachované). Kladné hodnoty veličín marginálnych rozdelení strát reprezentujú straty v miliónoch EUR a implicitne, záporné hodnoty reprezentujú zisky v miliónoch EUR. Modelovanie kladných alebo záporných strát závisí výhradne od rozhodnutia poisťovne.

Tabuľka 4.1.1: Vzorka samostatných marginálnych rozdelení rizík R_1, R_2, R_3 v miliónoch EUR načítaných do softvérového prostredia R.

```
> RTsims_200k
```

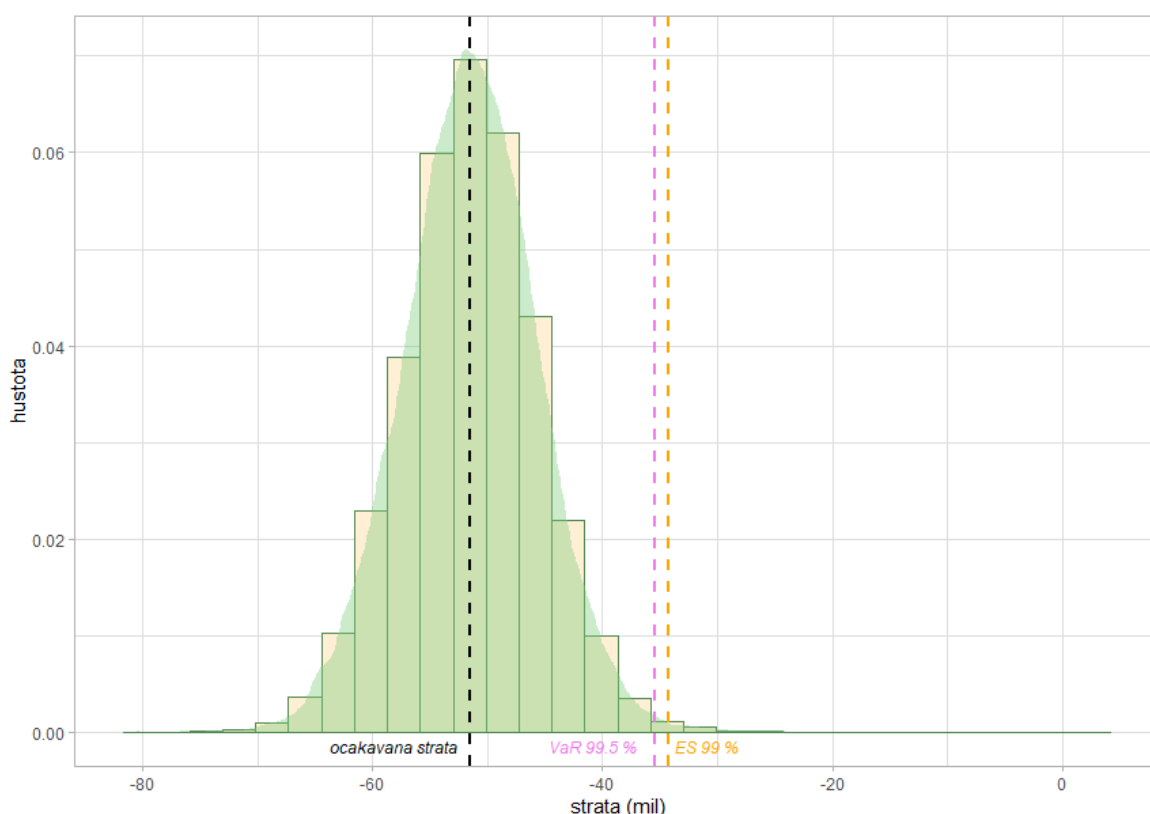
	TRH	NEZ	KAT
1	-5540.969	293.445065	53.60237
2	-5633.490	-78.857745	27.02926

3	-4707.637	247.998800	63.23476
4	-4488.086	85.470216	63.05635
5	-5503.321	278.187029	29.51253
...			
200000	-4921.049	-24.2029334	52.46574

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Marginálne rozdelenia rizík boli do modelu načítané cez funkciu `read.csv()` balíčka “*utils*” R Core Team (2021). Pre hlbšie pochopenie vlastností jednotlivých marginálnych rozdelení strát, je najvhodnejšie zobrazenie rozdelení cez funkciu hustoty, prípadne histogram.

Ak sa pozrieme na správanie prvého z marginálnych rozdelení rizík na Grafe 4.1.1, zobrazujúceho trhovú riziko, môžeme si všimnúť umiestnenie v II. kvadrante. Hlavným dôvodom, prečo sa trhovú riziko nachádza v ľavo od 0, teda v záporných stratách reprezentujúcich výnos, je povaha rizika.



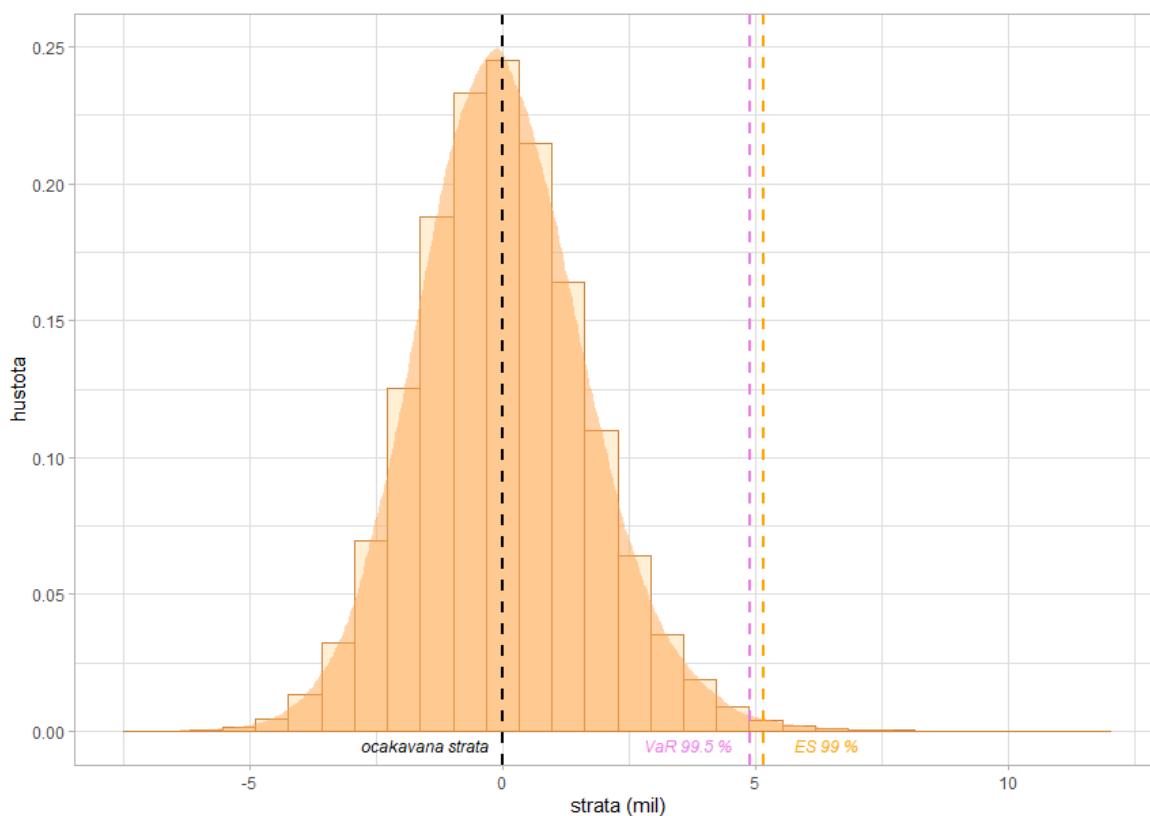
Graf 4.1.1: Funkcia hustoty marginálneho rozdelenia samostatného trhového rizika

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Hodnota trhového rizika predstavuje stratu v prípade, ak výnosy z obchodovania s finančným majetkom budú nižšie, než je ich očakávaná hodnota. Pohľad na stratu pri trhovom riziku je voči ostatným rizikám odlišný, no v procese kvantifikácie nie je medzi

trhovými stratami a neživotnými či katastrofickými stratami žiaden rozdiel. Trhové riziko je v životných a zmiešaných poisťovacích spoločnostiach považované za najvýznamnejšie spomedzi všetkých tých, ktorým poisťovacie spoločnosti čelia.

Druhým rizikom vstupujúcim do procesu agregácie je neživotné riziko. Na rozdiel od trhového rizika, neživotné riziko rovnomernejšie osciluje v okolí nuly a tiež si môžeme na Grafe 4.1.2 všimnúť hodnotu očakávanej straty (viď vzorec 3.1.4), ktorá je pre neživotné riziko špecifická a zvyčajne rovná nule. Dôvodom je modelovanie rozdelenia neživotného rizika už na najnižších stupňoch hierarchie (reportovacia jednotka $\times$ segment $\times$ línia biznisu), kedy je lognormálnemu alebo normálnemu rozdeleniu zadávaný parameter *mean* rovný nule. Rozdelenia strát v prípade rizikového faktoru rezerv je ovládané prostredníctvom exposure a štandardnej odchýlky, pri rozdeleniach rizikového faktoru poisťné, sú zvyčajne zadávané parametre aj pre šikmosť a špicatosť.

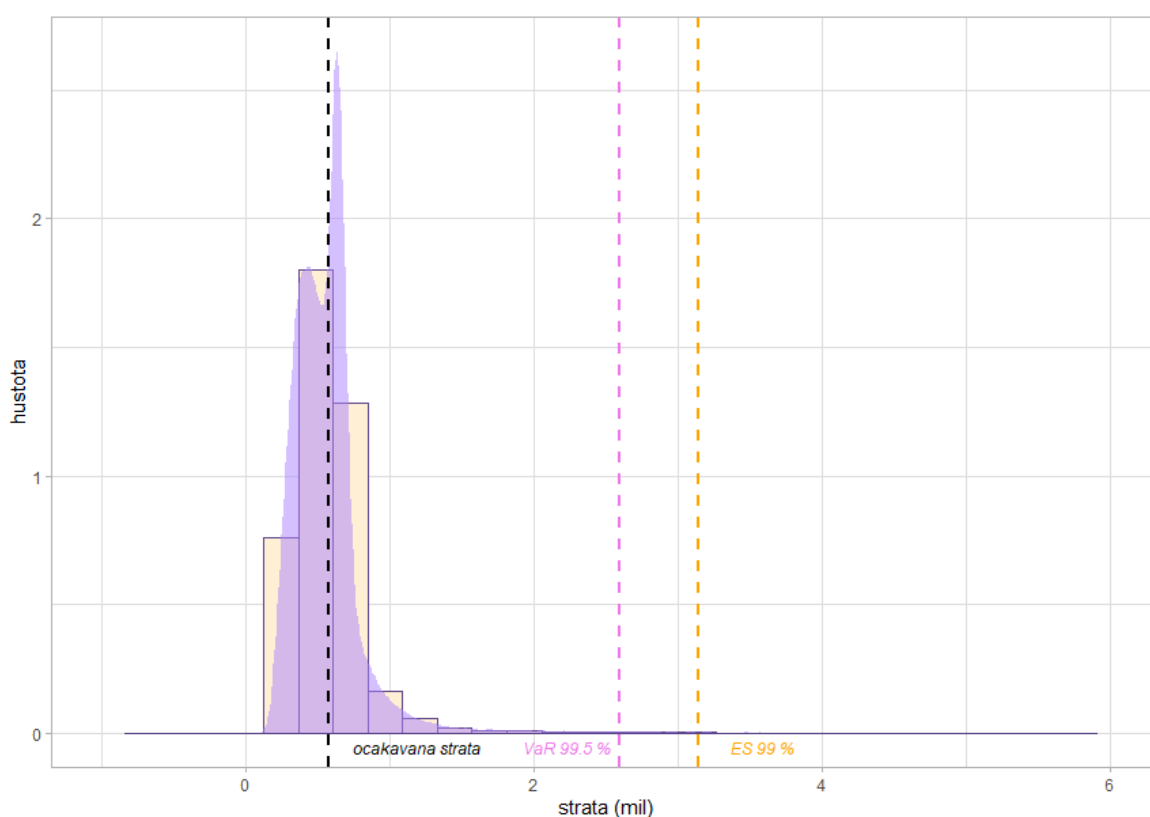


Graf 4.1.2: Funkcia hustoty marginálneho rozdelenia samostatného neživotného rizika

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Tretím z rizík, ktoré vstúpi do procesu agregácie, je riziko katastrofické, pre ktoré sú špecifické nízke frekvencie strát s veľmi výraznou materialitou. Ako môžeme na Grafe 4.1.3 vidieť, riziko nadobúda extrémne vysoké početnosti pre straty s nižšou materialitou. Na vysoké početnosti potenciálne materiálnych strát sa poisťovacia spoločnosť vie pripraviť,

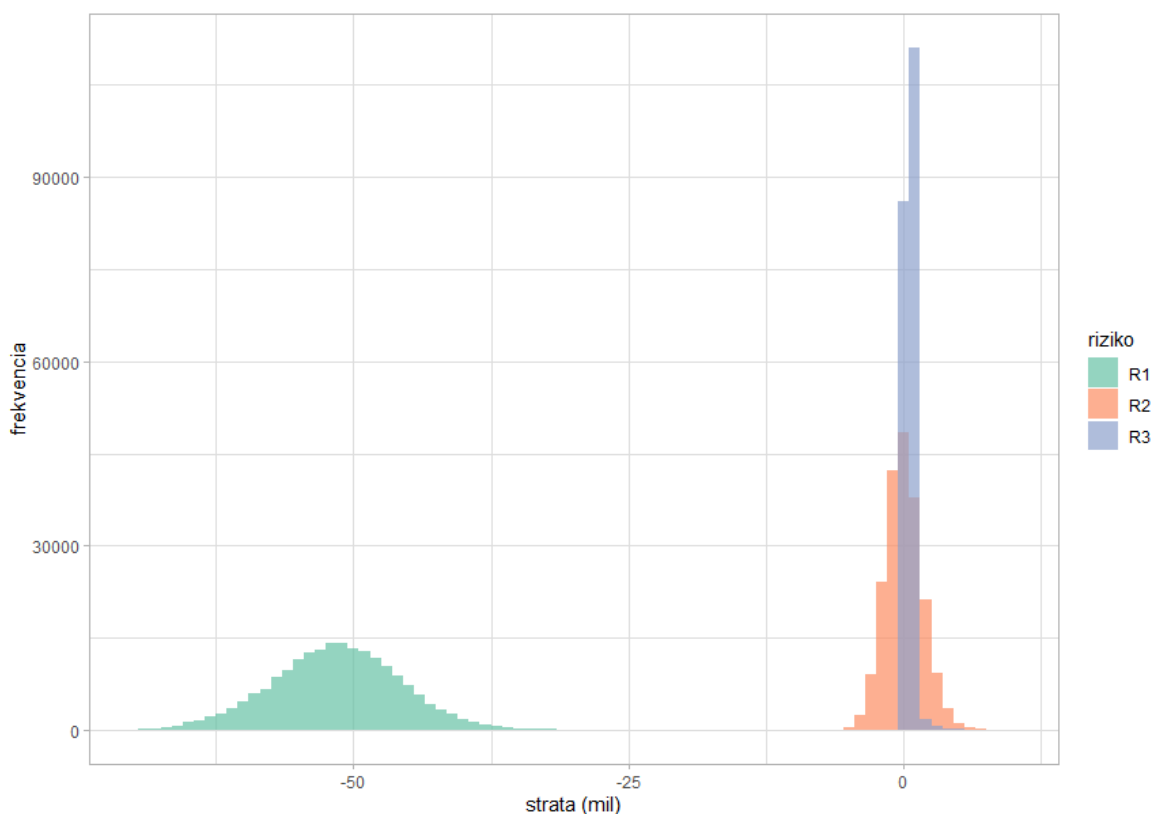
keďže hodnotu dostatočne popisuje očakávaná strata (viď 3.1.4) a je úlohou neživotných aktuárov, aby zabezpečili rezervy pre škodové katastrofické udalosti práve na základe očakávaných strát. Na čo sa poisťovňa pripraviť nevie, je horný chvost rozdelenia, ktorý môže prekvapiť či už jednou alebo viacerými výraznejšími katastrofickými udalosťami v krátkej dobe. V tomto prípade je modelovanie chvostových závislostí nesmierne dôležité, pretože katastrofické riziko môže mať priame napojenie na neživotné aj trhové riziká. Čo si na Grafe 4.1.3 môžeme tiež všimnúť, je minimálna časť rozdelenia nachádzajúca sa v II. kvadrante. Pri katastrofických rizikách nie je predpoklad vysokých výnosov z poistenia a to najmä v posledných rokoch, kedy katastrofických udalostí vo svete výrazne pribudlo.



Graf 4.1.3: Funkcia hustoty marginálneho rozdelenia samostatného katastrofického rizika

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Zoznámenie sa s dátami je veľmi dôležitá úloha, najmä pre nastavovanie chvostových závislostí pre viacrozmernú MB11 kopulu a neskoršiu interpretáciu výsledkov agregácie marginálnych rozdelení rizík. V našom prípade je trhové riziko (R_1) na pozícii v II. kvadrante s vysokými výnosmi, preto môžeme predpokladať negatívnu hodnotu agregovanej straty; umiestnenie jednotlivých rizík na jednom grafe zobrazuje Graf 4.1.4.



Graf 4.1.4: Početnosť a výška strát pre všetky samostatné riziká TRH, NEZ a KAT

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Pre všetky tri riziká sme pomocou funkcie *summary()* z balíka “base” (R Code Team 2021) v programovacom jazyku R zobrazili základné štatistické vlastnosti marginálnych rozdelení rizík, viď Tabuľka 4.1.2.

Tabuľka 4.1.2: Základné štatistické vlastnosti samostatných rizík R_1 , R_2 , R_3

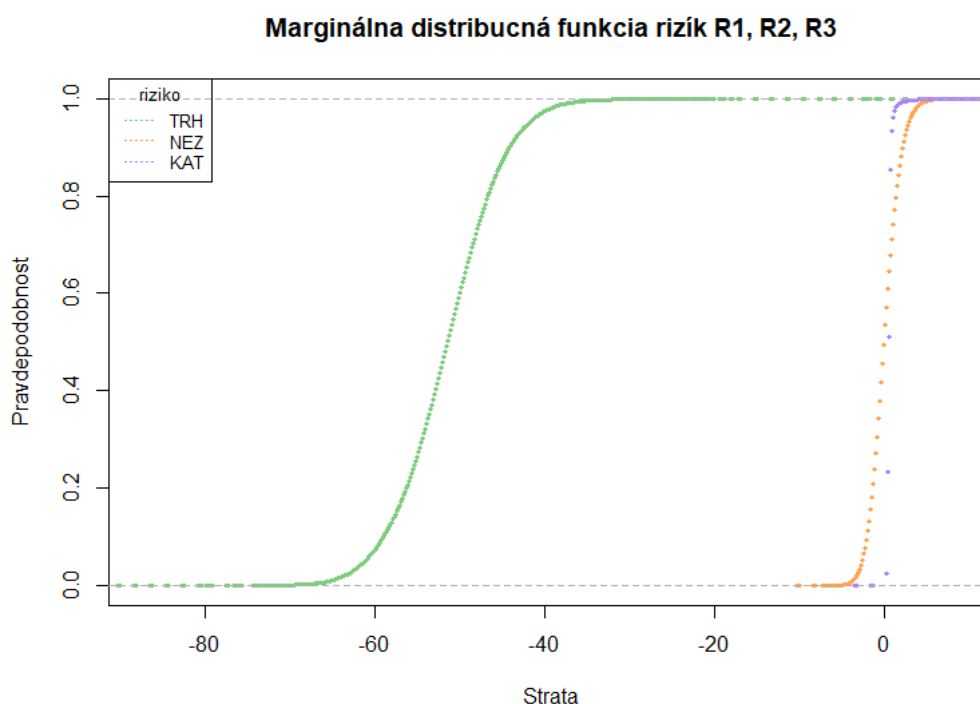
```
> summary(R1)
      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-80.814 -55.311 -51.463 -51.487 -47.639   2.279

> summary(R2)
      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-7.4228 -1.1302 -0.0624  0.0000  1.0614 11.4393

> summary(R3)
      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.09893  0.39889  0.54207  0.57121  0.65263 23.28353
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ako už grafické zobrazenia rozdelení v Grafoch 4.1.1 – 4.1.3 napovedalo, rovnako aj z Tabuľky 4.1.2 vidíme, že trhové riziko má najvýraznejšiu zápornú hodnotu očakávanej straty a teda je predpoklad, že združené rozdelenie bude ťahané týmto smerom. Na Grafe 4.1.5 môžeme vidieť marginálne rozdelenia všetkých troch rizík naraz vo forme distribučnej funkcie marginálnych strát.



Graf 4.1.5: Marginálne distribučné funkcie samostatných rizík R_1, R_2, R_3

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Pre nasledujúce procesy s marginálnymi rozdeleniami strát jednotlivých rizík R_1, R_2 a R_3 je vhodné ich upraviť tak, aby boli jednotlivé straty pre každé z rizík v poradí od najnižšej po najvyššiu, poradie sme upravili funkciou *order* z balíka “base” (R Code Team 2021). Pôvodné poradie simulácií marginálnych strát, ako aj ich kombinácia naprieč rizikami po riadkoch nie je nepodstatná. Pre bližšie informácie k dôvodom zoradenia, viď kapitolu 3.4.1 *Generátor viacrozmernej MB11 kopuly*.

Tabuľka 4.1.3: Vzorka pretriedených marginálnych rozdelení strát samostatných rizík R_1, R_2, R_3 od najmenšieho (najvyšší výnos) po najväčšie (najvyššia strata).

```
> Rsort
      R1sort  R2sort  R3sort
1 -80.81386 -7.422788 0.09892720
2 -80.80116 -7.220338 0.09937029
```

```

3    -80.77994 -6.890189 0.10944807
4    -80.77805 -6.782144 0.11403290
5    -80.75970 -6.699587 0.11484040
...
199999 0.627916    11.17486 19.76363
200000 2.279223    11.4393  23.28353

```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

4.1.2 Chvostové závislosti rozdelení rizík

V modeli odhadu miery solventnosti agregujeme tri riziká: trhové, neživotné a katastrofické, s 200 tisíc simuláciami marginálnych rozdelení strát pre každé z rizík. Pre proces agregácie je nutné poznať závislosti jednotlivých rizík, ktoré v procese výpočtu upravujú kopulové variácie takým spôsobom, aby agregované rozdelenie strát obsahovalo kombinácie jednotlivých rizík, ktoré reálne opisujú možnú potenciálnu stratu. Závislostná matica, v našom prípade reprezentujúca chvostové závislosti, je buď výsledkom nariadenia regulátora, ako v prípade direktívy Solventnosť II a štandardného vzorca alebo je zostavená na základe expertného odhadu zodpovedných manažérov rizík, zvyčajne v prípade interných modelov. My sme pre proces agregácie zvolili závislosti na základe korelačnej matice definovanej IAIS (*International Association of Insurance Supervisors*), ktorá sa využíva v cvičení *ICS Data Collection Exercise*, slúžiace pre IAIS na porovnávanie finančného zdravia naprieč poisťovacími spoločnosťami podnikajúcimi na území Európy. Štandardy ICS (*International Capital Standards*) reprezentujú pravidlá pre určovanie kapitálu podľa asociácie IAIS. Cvičenia sa zúčastňujú rôzne veľké poisťovacie spoločnosti, pričom prezentujú výsledky podľa striktných pravidiel IAIS a teda niektoré zo zúčastnených poisťovacích spoločností sú častokrát nútené pracovať s iným typom agregácie, závislosťami či štruktúrovaním dát (hlavne to platí pre poisťovne s internými modelmi). Niektoré poisťovacie spoločnosti sa cvičenia zúčastňujú dobrovoľne, iné na príkaz dozorného orgánu. Výsledky cvičenia sú následne analyzované asociáciou IAIS, ktorá vytvára reporty obsahujúce výsledky všetkých zúčastnených poisťovacích spoločností, pričom výsledky za jednotlivé participujúce spoločnosti sú prísne anonymné.

Korelačná matica definovaná asociáciou IAIS obsahuje riziká životné, neživotné, katastrofické, trhové a kreditné. Nakoľko sa v práci nevenujeme životnému a kreditnému riziku, z matice zobrazenej v Tabuľke 4.1.4 vyberáme iba riziká neživotné (*Non-life*), katastrofické (*Catastrophe*) a trhové (*Market*). Môžeme si všimnúť, že pre všetky typy rizík

IAIS používa rovnako veľké závislosti, čo osobne považujeme za nadhodnotené. Nakoľko závislosti podobne ako spôsob agregácie patria pod know-how poisťovní, rozhodli sme sa použiť práve túto neutrálnu závislostnú maticu. Alternatívou môže byť korelačná matica direktívy Solventnosť II a jej štandardného vzorca, no v našom prípade by chýbala závislosť pre katastrofické riziko.

Tabuľka 4.1.4: Požadovaná korelačná matica pre agregáciu rizík pod definíciou IAIS 2021 ICS Data Collection

	Life	Non-life	Catastrophe	Market	Credit
Life	100%	0%	25%	25%	25%
Non-life	0%	100%	25%	25%	25%
Catastrophe	25%	25%	100%	25%	25%
Market	25%	25%	25%	100%	25%
Credit	25%	25%	25%	25%	100%

Zdroj: IAIS, Public 2021 ICS Data Collection Template

Závislosti do modelu odhadu miery solventnosti vstupujú prostredníctvom normalizovaných váh w_1, w_2, w_3, w_4 a w_5 pre kanonické kopuly (viď Obrázky 3.4.2 – 3.4.4) a reprezentujú nezáporné váhy $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \varepsilon$ (viď Tabuľka 3.4.2). Váhy pre kanonické kopuly viacrozmernej MB11 kopuly popisujú dvojrozmerné chvostové závislosti (hodnoty vkladáme v percentách, teda 0 – 100) troch agregovaných rizík R_1, R_2 a R_3 a jednotlivé veľkosti sme získali využitím funkcie *Solver* v programe *MS Excel*. Výsledné váhy, ktoré sú parametrom pre viacrozmernú MB11 kopulu sú zobrazené v Tabuľke 4.1.5.

Tabuľka 4.1.5: Vstupné váhy pre viacrozmernú MB11 kopulu

```
#váhy w1 = alfa, w2 = beta, w3 = delta, w4 = gamma, w5 = epsilon

w1 <- 13.8334199223892
w2 <- 11.1665800776108
w3 <- 11.1665800776108
w4 <- 11.1665800776108
w5 <- 52.6666398447784
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Výslednú dvojrozmernú maticu chvostových závislostí troch agregovaných rizík (R_1, R_2, R_3) zobrazuje matica BiTD, resp. 2DTD (viď vzťah 3.4.6) v Tabuľke 4.1.6.

Tabuľka 4.1.6: Matica chvostových závislostí dvojíc rizík R_1, R_2, R_3

```
> BiTD
      R1      R2      R3
R1  1.000000 0.250005 0.250005
R2  0.250005 1.000000 0.250005
R3  0.250005 0.250005 1.000000
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Následne veľmi jednoducho určíme trojrozmernú chvostovú závislosť, ktorá je na základe vlastností MB11 kopule, rovná vstupnej váhe $w_1 = \alpha$, popisujúcej pravdepodobnosť nastania horného Fréchet-Hoeffding ohraničenia.

Tabuľka 4.1.7: Chvostová závislosť trojice rizík $\{R_1, R_2, R_3\}$

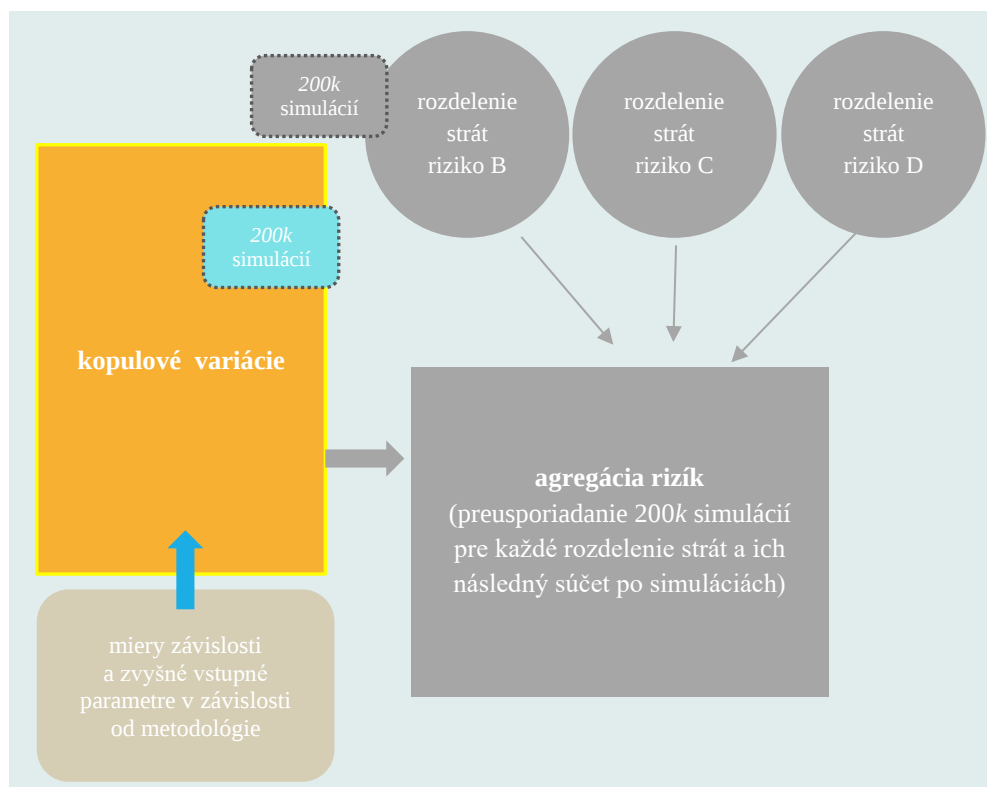
```
> TriTD
[1] 0.1383345
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ako môžeme vidieť v Tabuľke 4.1.7, trojrozmerná chvostová závislosť TriTD nadobúda hodnotu 0,1383345, ktorú radíme k slabšej závislosti. V niektorých prípadoch v praxi sme videli aj cieľenú nulovú chvostovú závislosť n-tice rizík.

4.2 Model: Kopula

V predchádzajúcej kapitole sme predstavili vstupné údaje pre model odhadu miery solventnosti. Marginálne rozdelenia jednotlivých rizík, na rozdiel od chvostových závislostí, do kopuly v našom prípade nevstupujú. Hlavným dôvodom je fakt, že viacrozmerná MB11 kopula, ktorú v dizertačnej práci využívame, nie je empirickou kopulou a teda nezávisí od marginálnych distribučných rozdelení jednotlivých rizík a ich správania či materialite. Kopula MB11 je zložená z kanonických kopúl, ktorých pravdepodobnosť nastania formujú chvostové závislosti. Ak poznáme miery závislostí jednotlivých rizík, typy kanonických kopúl pre modelovaný počet rizík a počet simulácií, môžeme začať s výpočtom kopulových variácií. Tento proces je pomerne náročný a jeho náročnosť (matematická aj softvérová) rastie ako s počtom simulácií, tak aj s počtom rizík.



Obrázok 4.2.1: Kopula časť Modelu odhadu miery solventnosti z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

Po určení váh a popísaní chvostových závislostí, vytvárame faktorovú tabuľku, ktorá je vstupom pre simulačnú časť generátora kopulových variácií (Tabuľka 3.4.2). Faktorová tabuľka po zadaní váh pre jednotlivé kanonické kopuly *id* (Tabuľka 4.2.1) viacrozmernej MB11 kopuly popisuje hodnoty pravdepodobnosti *prob* a kumulatívnej pravdepodobnosti *cumsum*. Faktorová tabuľka tiež popisuje prostredníctvom parametrov *factor 1 – 3*, kombinácie faktorov (scenáre) jednotlivých typov kanonických kopúl *id*.

Tabuľka 4.2.1: Faktorová tabuľka popisujúca využitie faktorov 1 – 3 pre zvolené pravdepodobnosti

> factorstable						
	id	factor1	factor2	factor3	prob	cumsum
1	1	1	1	1	0.1383345	0.1383345
2	2	1	1	2	0.1116660	0.2500005
3	3	1	2	1	0.1116660	0.3616665
4	4	1	2	2	0.1116660	0.4733325
5	5	1	2	3	0.5266675	1.0000000

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Následne, na základe krokov generátora pre viacrozmernú MB11 kopulu s troma rizikami, (viď 3.4.1 *Generátor viacrozmernej MB11 kopuly*), bolo vygenerovaných 200 tisíc náhodných hodnôt *sels* v intervale $[0,1]$, za pomoci funkcie v programovacom jazyku R *runif()* z balíčka “*stats*“ (R Core Team, 2021). V závislosti od hodnoty nasimulovanej náhodnej premennej je vybratá vhodná kanonická kopula, ktorej typ závisí od hodnoty kumulovanej pravdepodobnosti *cumsum*, zobrazenej v Tabuľke 4.2.1.

Tabuľka 4.2.2: Vzorka generovaných náhodných hodnôt s príslušnou kanonickou kopulou

```
> sim_tab
```

	sels	cc1_col	cc2_col	cc3_col	cc4_col	cc5_col	final_cc
1	0.2875775201	0	0	3	0	0	3
2	0.7883051354	0	0	0	0	5	5
3	0.4089769218	0	0	0	4	0	4
4	0.8830174040	0	0	0	0	5	5
5	0.9404672843	0	0	0	0	5	5
6	0.0455564994	1	0	0	0	0	1
7	0.5281054880	0	0	0	0	5	5
8	0.8924190444	0	0	0	0	5	5
9	0.5514350145	0	0	0	0	5	5
10	0.4566147353	0	0	0	4	0	4

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Pre riadok 1 vidíme, že hodnota náhodnej premennej *sels* je 0,2875775201, čo reprezentuje pravdepodobnosť spadajúcu pod kanonickú kopulu s *id* 3, pretože vygenerovaná hodnota je v intervale $[0,250005; 0,3616665]$ (viď Tabuľka 4.2.1). Typ kanonickej kopuly pre danú hodnotu premennej *sels* je zobrazený v stĺpci *final_cc*.

Po určení typu kanonickej kopule pre všetky simulácie hodnôt náhodných premenných *sels*, prechádzame ku generovaniu samotných kopulových variácií. Kopulové variácie sa generujú pre tri riziká a 200 tisíc simulácií. Prvým krokom je generovanie hodnôt vektorov náhodných premenných *var1*, *var2* a *var3* pomocou funkcie softvéru R *runif()* z balíčka “*stats*“ (R Core Team, 2021) v intervale $[0,1]$. Spolu pre 200 tisíc simulácií bolo vygenerovaných 600 tisíc hodnôt týchto náhodných nezávislých premenných, ktoré reprezentujú podklad k výberu kopulových variácií.

Tabuľka 4.2.3: Vzorka z 200 tisíc generovaných náhodných premenných pre kopulové variácie

```
> vars
```

	var1	var2	var3
1	0.604492735	0.613739965	0.4708851278
2	0.519737205	0.422357269	0.8977669666
3	0.966430877	0.206639488	0.7615471634
4	0.803974756	0.539207718	0.6478515242
5	0.476325413	0.063845182	0.5329255809
6	0.890385071	0.954054326	0.8526255053
7	0.478782543	0.334003760	0.1317477960
8	0.246796212	0.195076247	0.6753562700
9	0.669272130	0.187447798	0.0940522936
10	0.232574045	0.844243085	0.0220237931

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Kopulové variácie vznikajú po simuláciách kombináciou hodnôt nagenovaných premenných *vars* zobrazených v Tabuľke 4.2.3 a kombináciou vybraných faktorov zobrazených v Tabuľke 4.2.1. V tabuľke 4.2.2 pre prvý riadok hodnota *sels* predstavuje 0,2875775201, čo spadá pod kanonickú kopulu s *id* 3. Kanonická kopula s *id* 3 má podľa vlastností MB11 kopule faktory v kombinácii {1, 2, 1}. Riadok 1 kopulových variácií bude obsahovať hodnoty vo všeobecnom vyjadrení {[1,var1]; [1,var2]; [1,var1]}, v numerickom vyjadrení {0,604492735; 0,613739965; 0,604492735}. Rovnakým spôsobom pokračujeme pre všetkých 200 tisíc *sels* a *vars*. Vzorka výsledných kopulových variácií viacrozmernou kopulou MB11 pre agregované riziká R_1, R_2, R_3 je zobrazená v Tabuľke 4.2.4.

Tabuľka 4.2.4: Vzorka kopulových variácií U_1, U_2, U_3

> U			
	U1	U2	U3
1	0.604492735	0.613739965	0.6044927354
2	0.519737205	0.422357269	0.8977669666
3	0.966430877	0.206639488	0.2066394875
4	0.803974756	0.539207718	0.6478515242
5	0.476325413	0.063845182	0.5329255809
6	0.890385071	0.890385071	0.8903850706
7	0.478782543	0.334003760	0.1317477960
8	0.246796212	0.195076247	0.6753562700
9	0.669272130	0.187447798	0.0940522936
10	0.232574045	0.844243085	0.8442430850

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Z kopulových variácií zobrazených v Tabuľke 4.2.4 je jednoduché, na základe pozorovania ekvivalentných hodnôt v jednotlivých riadkoch reprezentujúcich simuláciu *sel*, určiť typ kanonickej kopule. Pred samotnou agregáciou potrebujeme jednotlivé kopulové variácie U_1, U_2, U_3 ohodnotiť od 1 po 200 000, v poradí od najmenej po najväčšiu; na ohodnocovanie sme využili funkciu softvéru R *rank()* balíčka “base“ (R Code Team 2021). Ohodnotením vznikne *Urank*:

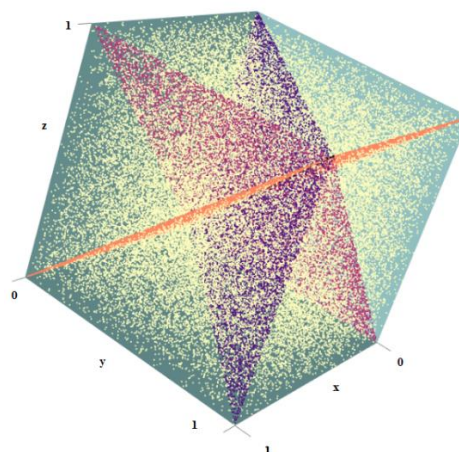
Tabuľka 4.2.5: Vzorka kopulových variácií U_1, U_2, U_3 s ohodnotením poradia od najmenej po najväčšiu

```
> Urank
```

	U.U1	U1rank	U.U2	U2rank	U.U3	U3rank
1	0.604492735	120795	0.613739965	122979	0.604492735	120901
2	0.519737205	103798	0.422357269	84538	0.897766967	179469
3	0.966430877	193255	0.206639488	41520	0.206639488	41558
4	0.803974756	160538	0.539207718	107913	0.647851524	129526
5	0.476325413	95157	0.063845182	12831	0.532925581	106599
6	0.890385071	177799	0.890385071	178218	0.890385071	177951
7	0.478782543	95693	0.334003760	66815	0.131747796	26479
8	0.246796212	49362	0.195076247	39176	0.675356270	134903
9	0.669272130	133695	0.187447798	37641	0.094052294	18896
10	0.232574045	46559	0.844243085	168997	0.844243085	168754

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Výsledná viacrozmerná MB11 kopula je zobrazená na Grafe 4.2.1.



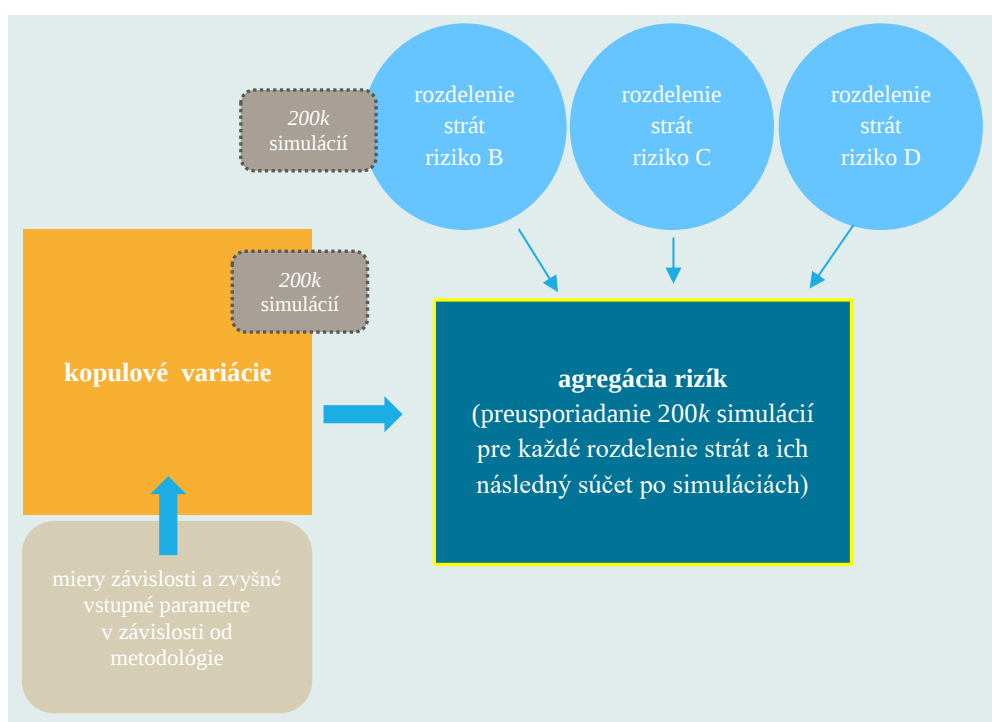
Graf 4.2.1: Viacrozmerná MB11 kopula s váhami w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 pre 10 000 simulácií (pre zachovanie viditeľnosti prieniku jednotlivých kanonických kopúl)

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Po ohodnotení kopulových variácií nasleduje proces agregácie a kvantifikácie rizík za pomoci marginálnych rozdelení a následne budeme mať všetko pre finálny odhad miery solventnosti.

4.3 Model: Agregácia rizík a odhad miery solventnosti

Nagenerované kopulové variácie cez viacrozmernú MB11 kopulu (Tabuľka 4.2.5) aplikujeme na marginálne rozdelenia strát jednotlivých samostatných rizík R1, R2 a R3. Pre bližšie informácie o spôsobe prepojenia kopulových variácií s jednotlivými marginálnymi rozdeleniami strát, viď 3.4.1 *Generátor viacrozmernej MB11 kopuly*.



Obrázok 4.3.1: Agregáčná časť modelu odhadu miery solventnosti z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

Marginálne rozdelenia strát jednotlivých samostatných rizík R1, R2 a R3, ktoré už sú zoradené od najmenšej po najväčšiu (viď Tabuľka 4.1.3), prepojíme s generovanými kopulovými variáciami U_{1rank} , U_{2rank} , U_{3rank} po simuláciách. Dôležité pri procese agregácie je zachovať práve poradie a kombinácie simulácií pravdepodobností v riadkoch (po simuláciách) v dátovom regióne U_{rank} . Hodnoty $\{[1, U.U1]; [1, U.U2]; [1, U.U3]\}$ v dátovom regióne U_{rank} tvoria jednu kopulovú variáciu z 200 tisíc.

Pre prvý riadok U_{rank} (viď Tabuľku 4.2.5) hľadáme marginálne hodnoty rizík z Tabuľky 4.1.3 R_{sort} :

- pre $U.U1$ marginálnu hodnotu rizika $R1$, ktorá je 120795-ta najvyššia;
- pre $U.U2$ marginálnu hodnotu rizika $R2$, ktorá je 122979-ta najvyššia;
- pre $U.U3$ marginálnu hodnotu rizika $R3$, ktorá je 120901-ta najvyššia.

Združené marginálne rozdelenie troch agregovaných rizík $R1$, $R2$ a $R3$ je potom súčtom priradených jednotlivých marginálnych hodnôt rizík po simuláciách. Pre prvý riadok (simulácia) je marginálna agregovaná hodnota $-48,94744$, ktorá vznikla súčtom hodnôt $\{-49,96041; 0,415349746; 0,5976156\}$.

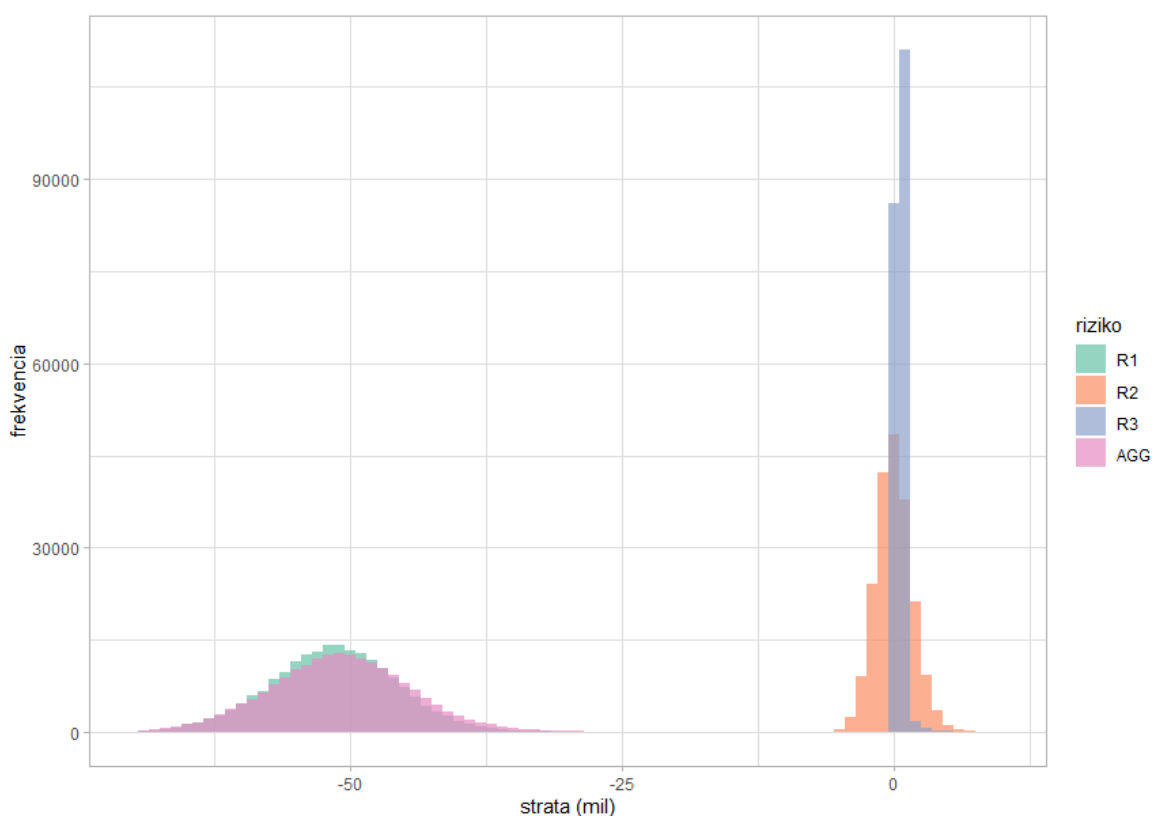
Tabuľka 4.3.1: Vzorka preusporiadaných marginálnych rozdelení strát R_1, R_2, R_3 podľa poradia kopulových variácií a agregovaná hodnota strát $U_{rank.aggR_1R_2R_3}$

	> aggR1R2R3sim						
	U.U1	Urank.R1	U.U2	Urank.R2	U.U3	Urank.R3	Urank.aggR1R2R3
1	0.604492735	-49.96041	0.61373997	0.415349746	0.604492735	0.5976156	-48.94744
2	0.519737205	-51.19574	0.42235727	-0.372547577	0.897766967	0.7587459	-50.80954
3	0.966430877	-40.73877	0.20663949	-1.349588795	0.206639488	0.3757252	-41.71263
4	0.803974756	-46.65468	0.53920772	0.095941974	0.647851524	0.6147575	-45.94398
5	0.476325413	-51.81610	0.06384518	-2.453752778	0.532925581	0.5620096	-53.70784
6	0.890385071	-44.51863	0.89038507	2.053837487	0.890385071	0.7451384	-41.71966
7	0.478782543	-51.77837	0.33400376	-0.745629049	0.131747796	0.3306235	-52.19338
8	0.246796212	-55.37225	0.19507625	-1.414514646	0.675356270	0.6246000	-56.16216
9	0.669272130	-48.98451	0.18744780	-1.458076737	0.094052294	0.3040758	-50.13851
10	0.232574045	-55.64417	0.84424309	1.662359792	0.844243085	0.6979955	-53.28381
11	0.909461949	-43.87929	0.42814582	-0.349167023	0.777126483	0.6631729	-43.56528
12	0.235401748	-55.59335	0.59849182	0.346276624	0.598491817	0.5951060	-54.65197
13	0.530564659	-51.04427	0.64298012	0.545493276	0.816892868	0.6817469	-49.81703
14	0.430662443	-52.44337	0.40347558	-0.449756039	0.390914495	0.4779649	-52.41516
15	0.675471677	-48.89633	0.67547168	0.692581219	0.675471677	0.6246401	-47.57911
16	0.121315617	-58.31006	0.10586126	-2.016910700	0.303601973	0.4297192	-59.89725
17	0.808905711	-46.55146	0.80890571	1.413854651	0.485439919	0.5335901	-44.60401
18	0.190348246	-56.53166	0.19034825	-1.441387024	0.190348246	0.3664079	-57.60664
19	0.006150215	-66.16594	0.95674091	2.997305161	0.006150215	0.1916093	-62.97703
20	0.874367252	-45.00114	0.34265111	-0.709405977	0.360822410	0.4607828	-45.24976
...							
199999	0.7798402	-47.1202	0.8360545	1.598353	0.4300797	0.5002372	-45.02161
200000	0.3833044	-53.1531	0.792725	1.310179	0.2098063	0.3773223	-51.4656

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Aplikácia kopulových variácií v našom prípade je oproti poistnej praxi zjednodušená, a to najmä z dôvodu nízkeho počtu agregovaných rizík. V prípade agregácie väčšieho počtu rizík, ako je v poistnej praxi bežné, počet kanonických kopúl výrazne rastie v závislosti od Bellovho čísla (viď Tabuľka 3.4.1), pričom je potrebné pridať dodatočné vstupy pre fitovanie kopulových variácií na marginálne rozdelenia strát. Dodatočnými vstupmi môžu byť hodnota VCV rizikového kapitálu alebo metóda maximálnej entropie (Milek, 2020). V poistnej praxi je tiež zaužívané simulovanie kopulových variácií niekoľko tisíckrát, pričom set výsledných kopulových variácií je vyberaný v závislosti od rôznych parametrov, napríklad set generujúci výšku kapitálu najbližší k priemernej výške kapitálu cez jednotlivé simulácie.

Porovnanie početnosti a výšky strát jednotlivých samostatných rizík spolu s agregovaným rizikom zobrazuje Graf 4.3.1.

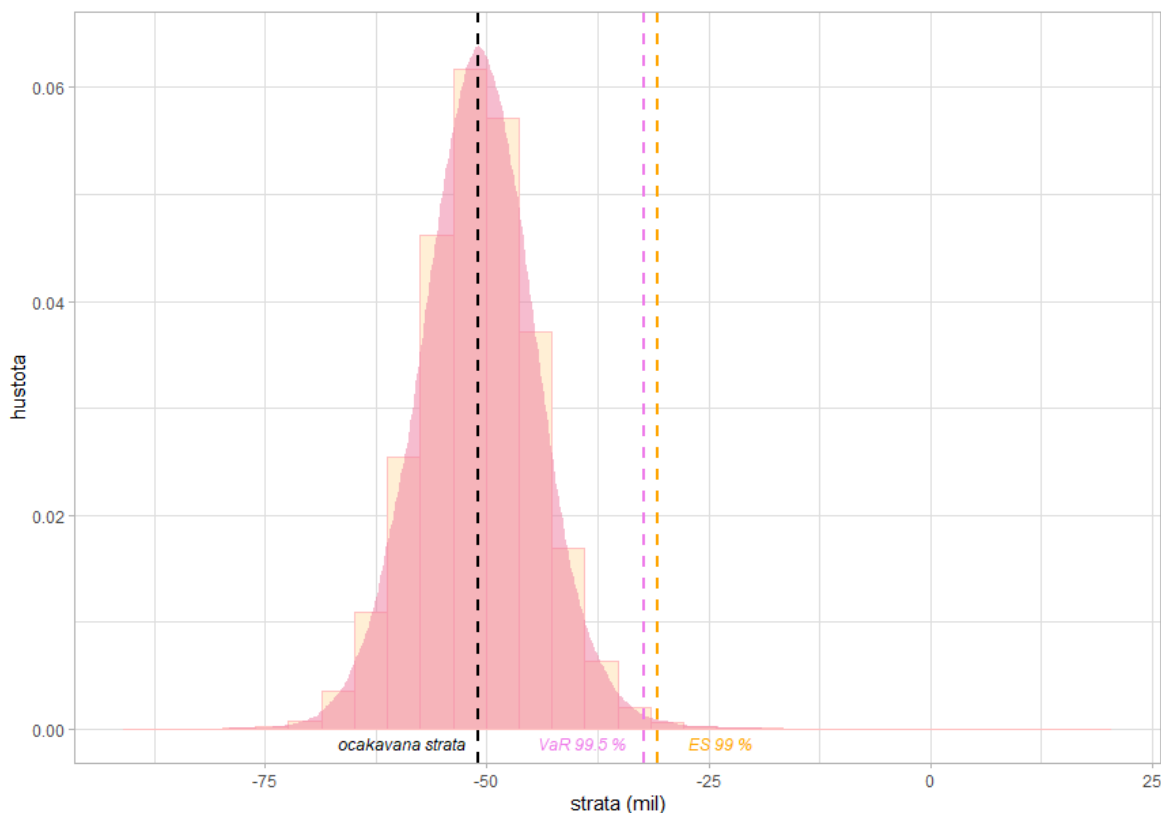


Graf 4.3.1: Početnosť a výška strát samostatných rizík a agregovaného rizika (AGG)

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ako môžeme na Grafe 4.3.1 vidieť, agregované riziko sa nachádza v II. kvadrante grafu, čo je dôsledkom materiálnosti trhového rizika R1. Vidíme, že výsledkom agregácie strát rizík R1, R2 a R3 je negatívna očakávaná strata, niekde na úrovni -51 miliónov EUR, ktorá

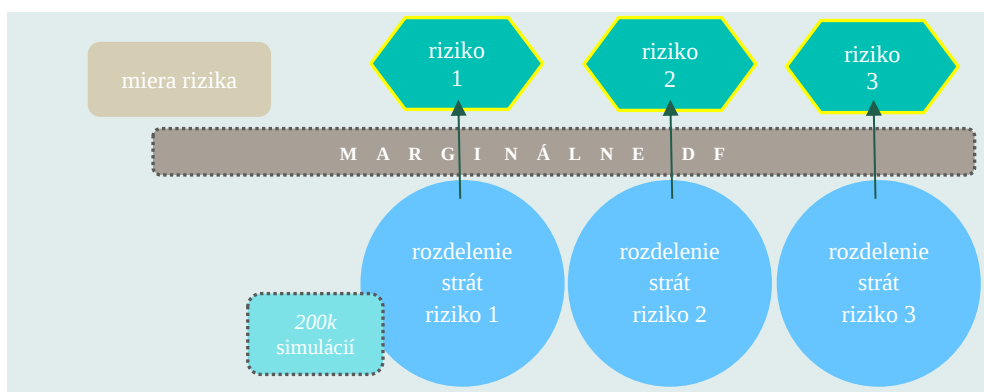
reprezentuje očakávaný zisk. Na rozdiel od trhového rizika (Graf 4.1.1), na ktoré sa agregované rozdelenie straty najviac podobá, agregované rozdelenie straty sploštenejší tvar a dlhší horný chvost rozdelenia, ktorý získalo z katastrofického rizika (viď Graf 4.1.3).



Graf 4.3.2: Funkcia hustoty agregovaného marginálneho rozdelenia rizík

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ďalším krokom v modeli je odhad hodnoty strát jednotlivých samostatných rizík, ktorý dosiahneme aplikovaním mier rizika (viď 3.1.2 a 3.1.3), zobrazených v Tabuľke 4.1.3.



Obrázok 4.3.2: Kvantifikácia hodnoty straty rizík z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

Pri určovaní hodnoty strát jednotlivých rizík, sme aplikovali miery rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %. Hodnoty jednotlivých rizík pri daných mierach rizika sú zobrazené v Tabuľke 4.3.2.

Tabuľka 4.3.2: Hodnoty strát jednotlivých rizík R1, R2, R3 s mierami rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %

```
> print(c(R1=standR1VaRr, R2=standR2VaRr, R3=standR3VaRr))
      R1      R2      R3
-35.450746  4.889142  2.594060

> print(c(R1=standR1ESr, R2=standR2ESr, R3=standR3ESr))
      R1      R2      R3
-34.225982  5.155175  3.141233
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Hodnotu kapitálu na krytie jednotlivých strát rizík R1, R2 a R3 dosiahneme odčítaním hodnoty očakávaných strát (viď 3.1.4). Hodnoty očakávanej straty pre jednotlivé riziká je zobrazená v Tabuľke 4.1.2 pod metrikou *Mean*.

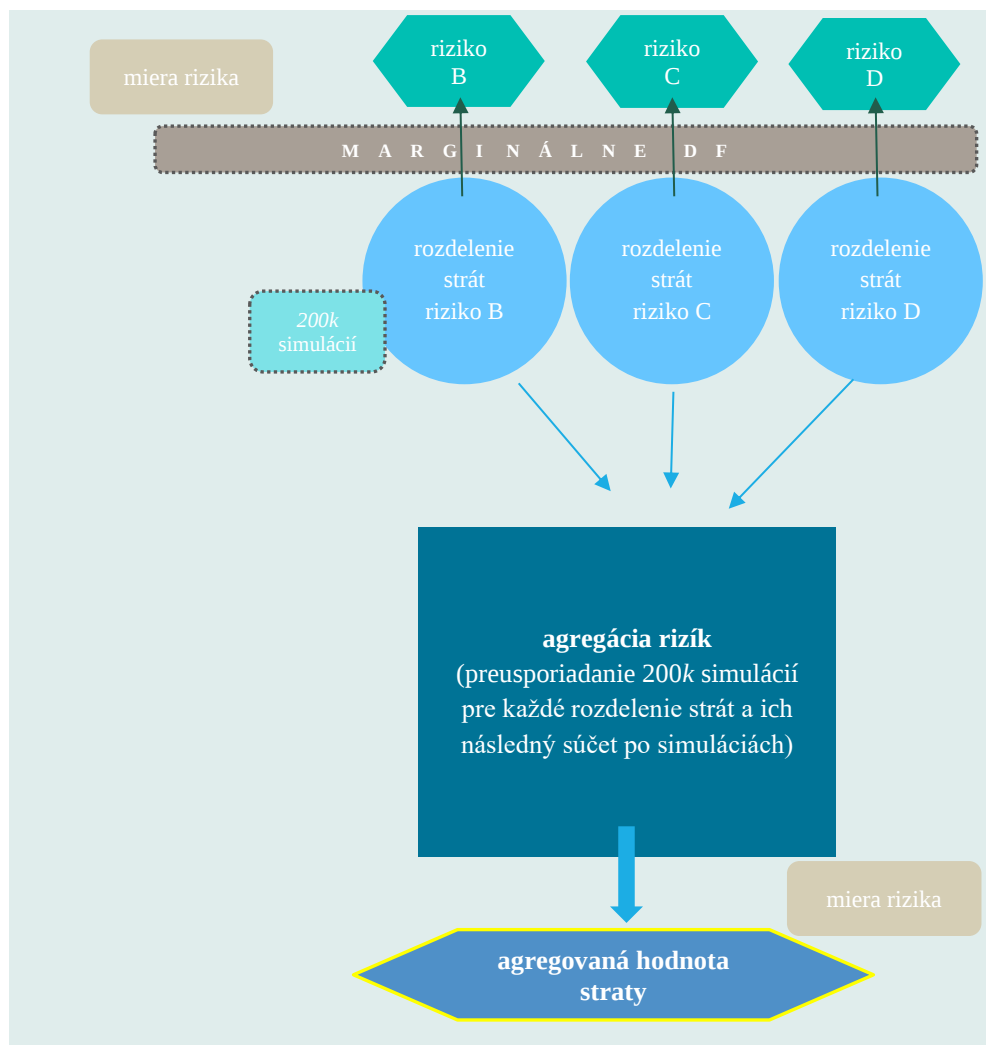
Tabuľka 4.3.3: Hodnoty kapitálu na pokrytie neočakávaných strát jednotlivých rizík R1, R2, R3 s mierami rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %

```
> print(c(R1=standR1VaRk, R2=standR2VaRk, R3=standR3VaRk))
      R1      R2      R3
16.036438  4.889142  2.022851

> print(c(R1=standR1ESk, R2=standR2ESk, R3=standR3ESk))
      R1      R2      R3
17.261202  5.155175  2.570024
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Kvantifikácia hodnoty agregovaných strát a kapitálu je úplne rovnaká, ako pri samostatných rizikách. Agregované rozdelenie strát vzniklo súčtom po simuláciách preusporiadaných marginálnych hodnôt rizík R1, R2 a R3 a je znázornené v Tabuľke 4.3.1 pod metrikou *Uránk.aggR1R2R3*. Rovnako, ako pri samostatných rizikách, na určenie hodnoty agregovanej straty aplikujeme mieru rizika a pre výpočet kapitálu odčítavame výšku očakávanej výšky straty.



Obrázok 4.3.3: Kvantifikácia hodnoty agregovanej straty rizík z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

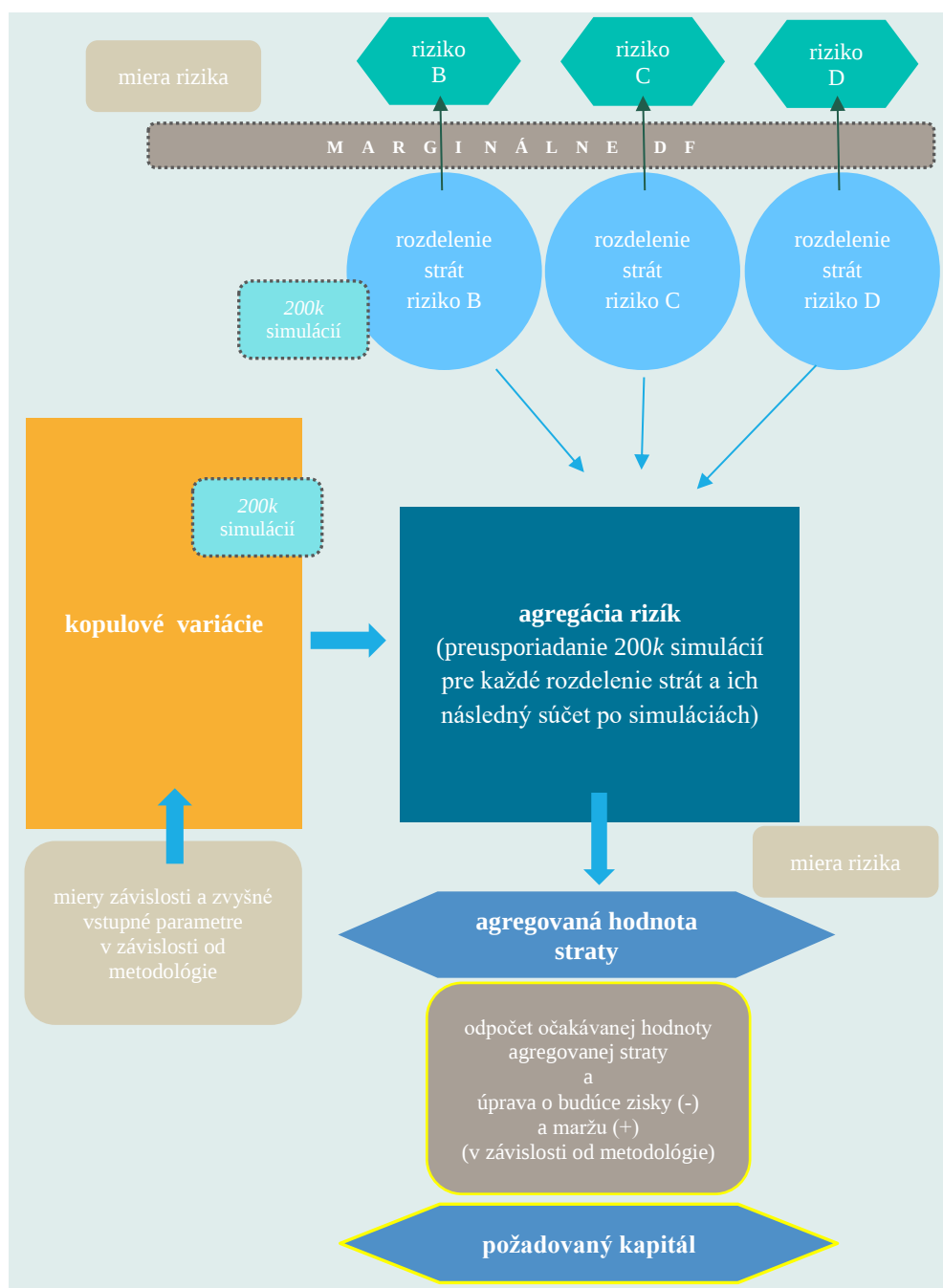
Tabuľka 4.3.4: Hodnota agregovanej straty a kapitálu s mierami rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %

```
> print(c(AGGstrata=aggR1R2R3VaRr, AGGkapital=aggR1R2R3VaRk))
AGGstrata    AGGkapital
-32.23360     18.68237

> print(c(AGGstrata=aggR1R2R3ESr, AGGkapital=aggR1R2R3ESk))
AGGstrata AGGkapital
-30.76975    20.14622
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Ako sme spomínali v kapitole 1.2 *Agregácia rizík a rizikový kapitál*, agregovaný kapitál sa môže líšiť od kapitálu označovaného pojmom *požadovaný* dodatočnými úpravami.



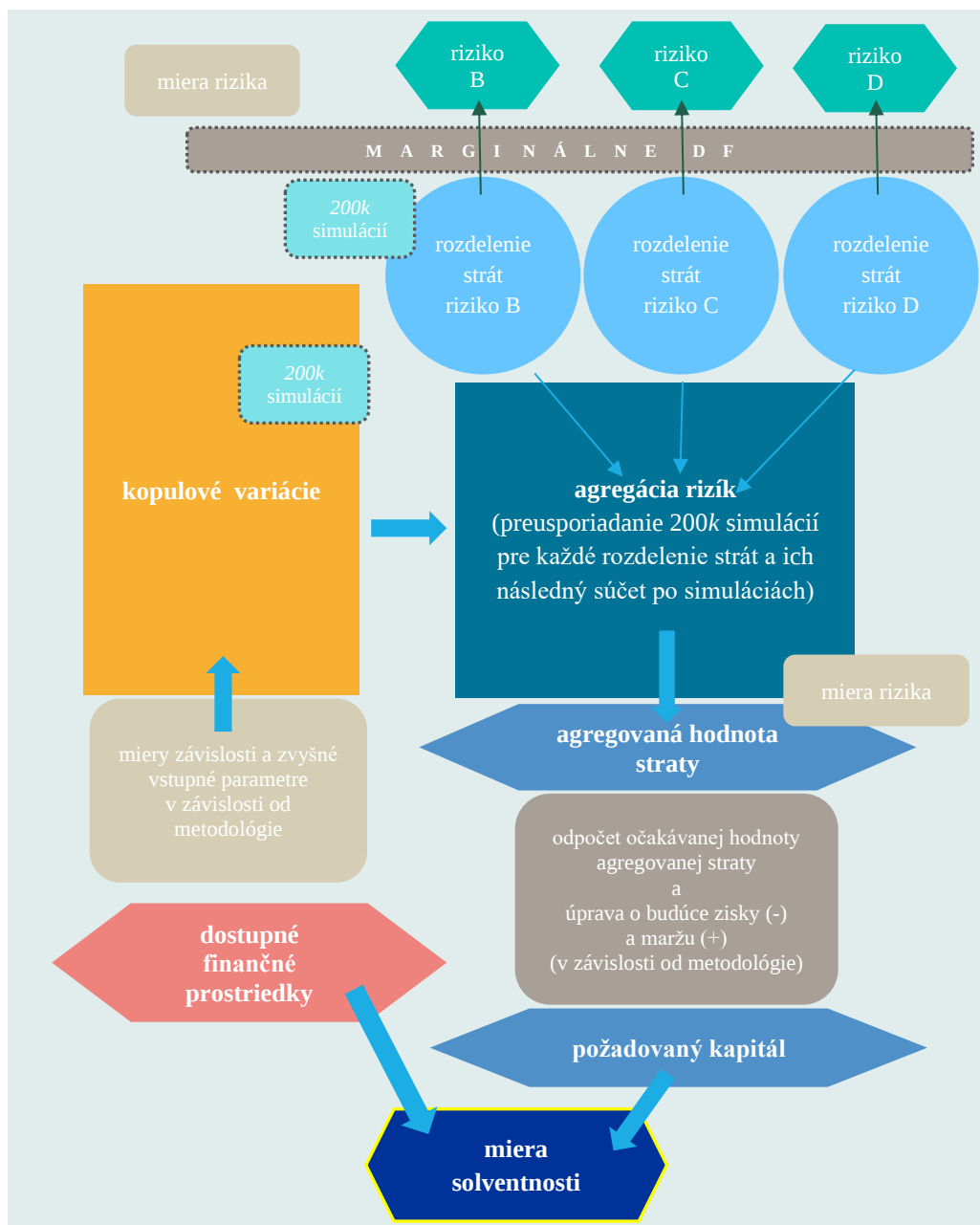
Obrázok 4.3.4: Určenie hodnoty požadovaného kapitálu z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

V našom prípade je výška agregovaného kapitálu a požadovaného kapitálu totožná, nakoľko neuvažujeme nad úpravami o očakávané budúce zisky a maržu. Hodnota agregovaného

kapitálu troch rizík R1, R2 a R3, s mierami rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 % je zobrazená v Tabuľke 4.3.4.

Poslednou časťou modelu je odhad miery solventnosti, ku ktorej potrebujeme hodnotu požadovaného kapitálu a voľných finančných prostriedkov (viď vzorec 3.1.6).



Obrázok 4.3.5: Odhad miery solventnosti z Obrázku 3.0.2

Zdroj: vlastné spracovanie

Hodnotu voľných finančných prostriedkov sme zvolili vo výške 25 miliónov EUR a výsledné miery solventnosti pre miery rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 % sú zobrazené v Tabuľke 4.3.5.

Tabuľka 4.3.5: AFR a miera solventnosti pri mierach rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %

```
> print(c(AFR = AFR, Msolv_VaR = msolv_VaR, Msolv_ES = msolv_ES))
```

AFR	Msolv_VaR	Msolv_ES
25.000000	1.338160	1.240928

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

4.4 Validácia kvality modelu

Ako pri väčšine štatistických a matematických modelov, je potrebné overiť, nakoľko kvalitné výstupy model priniesol. Výsledky modelu generovania kopulových variácií overujeme dvoma testami (viď 3.4.2 *Validácia modelu*):

1. porovnanie zadávaných a realizovaných chvostových závislostí;
2. porovnanie hodnoty agregovaného kapitálu metódou viacrozmernej MB11 kopule s kapitálom odhadnutým metódou VCV.

V prípade prvého testu očakávame podobné hodnoty agregovaného kapitálu pomocou kopuly a VCV. V prípade väčšieho rozdielu medzi VCV a kopulovým kapitálom by bolo nutné preskúmať implementáciu kopuly.

Tabuľka 4.4.1: Hodnota VCV rizikového kapitálu pri miere odhadu VaR 99,5 %

```
> BiTdmatica
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1.0000000	0.2500005	0.2500005
[2,]	0.2500005	1.0000000	0.2500005
[3,]	0.2500005	0.2500005	1.0000000

```
> StandmVaR
```

	[,1]
[1,]	16.036438
[2,]	48.89142
[3,]	20.22851

```
> VCV_VaR
```

	[,1]
[1,]	18.58844

```
> aggR1R2R3VaRk
```

99.5%
18.68237

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Tabuľka 4.4.2: Hodnota VCV rizikového kapitálu pri miere odhadu ES 99,0 %

```
> BiTDmatica
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.2500005 0.2500005
[2,] 0.2500005 1.0000000 0.2500005
[3,] 0.2500005 0.2500005 1.0000000

> StandmES
      [,1]
[1,] 17.261202
[2,]  5.155175
[3,]  2.570024

> VCV_ES
      [,1]
[1,] 20.11039

> aggR1R2R3ESk
[1] 20.14622
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

V našom prípade je kapitál získaný metódou VCV o niečo nižší, než kopulový kapitál. Rozdiel značí iba 0,09 milióna EUR pre VaR 99,5 % (kopulový kapitál nad VCV kapitálom), čo je v relatívnom vyjadrení iba 0,5 % a 0,04 mil EUR pre ES 99,0 %, čo je v relatívnom vyjadrení 0 %. V prípade agregácie cez viaceré stupne hierarchie očakávame nižší kopulový kapitál oproti VCV, aj napriek vysokým závislostným faktorom. V praxi existuje metóda s požiadavkou, kedy sa pri veľkom počte agregovaných rizík (8 – 9) fitujú kopulové variácie spôsobom, aby výsledná hodnota kapitálu bola vyššia ako VCV kapitál (prudentný pohľad), s najviac 1 % - ným rozdielom a zanedbateľným rozdielom požadovaných a realizovaných chvostových závislostí, ktoré reprezentuje druhý test kvality modelu.

Test požadovaných a realizovaných chvostových závislostí kontroluje, či vstupné parametre chvostových závislostí boli v rozdelení udržané aj počas generovania kopulových

variácií a napájania marginálny rozdelení strát. V prípade výraznejších rozdielov by sme predpokladali chybu v modeli technickú alebo dátovú.

Tabuľka 4.4.3: Požadované a realizované chvostové závislosti rizík R_1, R_2, R_3

```
> #2DTD tail dependence
> ExpectedBiTD
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.2500005 0.2500005
[2,] 0.2500005 1.0000000 0.2500005
[3,] 0.2500005 0.2500005 1.0000000

> RealisedBiTD
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.2470639 0.2505113
[2,] 0.2470639 1.0000000 0.2504984
[3,] 0.2505113 0.2504984 1.0000000

> diffBiTD
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.0000000000 0.0029366208 -0.0005107955
[2,] 0.0029366208 0.0000000000 -0.0004979178
[3,] -0.0005107955 -0.0004979178 0.0000000000
```

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

V našom prípade je rozdiel minimálny a teda môžeme zhodnotiť, že oba testy vykazujú uspokojivé výsledky a teda hodnotíme kopulové variácie za zodpovedajúce požiadavkám a model za užitočný.

4.5 Interpretácia výsledkov

V predchádzajúcich kapitolách sme predstavili model odhadu miery solventnosti internému modelu teoretickej komerčnej poisťovne využívajúcej na agregáciu rizík MB11 kopulu. Validáciou sme v kapitole 4.4 *Validácia kvality modelu* dokázali, že vytvorený model agreguje riziká v súlade s očakávaniami. V praxi sa percentá v závislosti od mier rizika, typov biznisu a metodológií nachádzajú v rozmedzí 120 % do 250 %, pričom je vždy potrebné pri interpretácii miery rizika brať v úvahu aj ďalšie parametre, akými sú scenár, metodológia, typy rizík, miera rizika, proces agregácie, spôsob odhadu výšky AFR a mnohé ďalšie.

Hodnoty samostaných a agregovaných rizík a kapitálu pre miery rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 % sú zobrazené v Tabuľkách 4.5.1 a 4.5.2.

Tabuľka 4.5.1: Hodnoty rizík a rizikového kapitálu pri miere rizika VaR 99,5 %

mil EUR	Samostatné		Agregované	
	riziko	kapitál	riziko	kapitál
R1 = TRH	-35,451	16,036	-32,234	18,682
R2 = NEZ	4,889	4,889		
R3 = KAT	2,594	2,023		

Zdroj: vlastné spracovanie

V Tabuľke 4.5.1 si môžeme všimnúť, že pre riziko R2 = NEZ (reprezentujúce neživotné riziká (viď 1.1.4 *Neživotné riziká*), je hodnota rizika a kapitálu rovnaká a to vo výške 4,889 miliónov EUR. Dôvodom ekvivalencie je modelovanie marginálnych rozdelení neživotných rizík so strednou hodnotou (*mean*) rovnou 0. V prípade rizika R1 = TRH, reprezentujúceho trhové riziko, je hodnota očakávanej straty záporná, čo interpretujeme ako očakávaný zisk. Kapitál potrebný na pokrytie neočakávanej straty v situácii, keď zisk 35,451 mil EUR je nižší oproti očakávanému zisku 51,487 mil EUR (viď Tabuľka 4.1.2), je 16,036 mil EUR. V prípade katastrofického rizika R3 = KAT s očakávanou stratou 0,571 mil EUR (viď Tabuľka 4.1.2), potrebujeme na krytie neočakávaných strát 2,023 mil EUR.

Tabuľka 4.5.2: Hodnoty rizík a rizikového kapitálu pri miere rizika ES 99,0 %

mil EUR	Samostatné		Agregované	
	riziko	kapitál	riziko	kapitál
R1 = TRH	-34,226	17,261	-30,770	20,146
R2 = NEZ	5,155	5,155		
R3 = KAT	3,141	2,570		
Σ	-25,930	24,986		

Zdroj: vlastné spracovanie

V Tabuľke 4.5.2 nám oproti Tabuľke 4.5.1 pribudol sčítavací riadok, čo nám umožňuje vlastnosť miery rizika ES (viď kapitolu 3.1.1 *Miery rizika VaR, ES a očakávaná strata*). Hodnoty samostatných rizík a kapitálu môžeme sčítavať a v našom prípade predstavujú

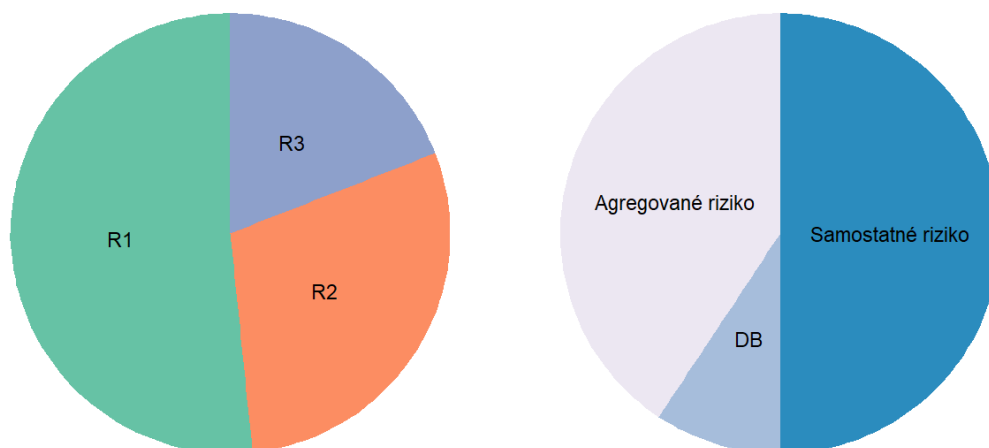
neočakávané straty v prípade insolventnosti raz za 100 rokov, respektíve najväčšiu možnú stratu s pravdepodobnosťou väčšou ako 0,99.

Hodnoty kapitálu sú odlišné od mier rizika VaR 99,5 %, jednak kvôli odlišnej pravdepodobnosti odhadu, nakoľko ES 99,0 % predstavuje očakávaná hodnota z marginálnych hodnôt, ktoré prekročili VaR 99,0 %.

Diverzifikačný benefit (3.1.5) pri miere odhadu ES 99,0 % nadobúda hodnotu

$$DB_{ES99,0\%} = 1 - \frac{20,146}{24,986} = 0.1937$$

a teda agregáciou sme ušetrili 19,37 % kapitálu.



Graf 4.5.1: Zľava pomer zobrazujúci veľkosť kapitálu samostatných rizík pri ES 99,0 %, v pravo pomer veľkostí samostatného kapitálu, agregovaného kapitálu a diverzifikačného benefitu

Zdroj: vlastné spracovanie, RStudio

Pre odhad miery solventnosti bola využitá hodnota agregovaného rizikového kapitálu (Tabuľky 4.5.1 a 4.5.2), pričom v nami prezentovanom zjednodušenom modeli neuvažujeme ďalšie úpravy agregovaného kapitálu o očakávaný budúci zisk alebo MVM. Dôležitým komponentom pri odhade miery solventnosti sú voľné, respektíve disponibilné finančné prostriedky poisťovacej spoločnosti “AFR“, ktoré sme zvolili na úrovni 25 miliónov EUR. Miera solventnosti závisí na okrem agregovaného rizikového kapitálu tiež od voľných peňažných prostriedkov popísaných cez AFR. Za výpočet výšky AFR zvyčajne

v poisťovni zodpovedá oddelenie *Group Treasury* a nakoľko sme v prostredí teoretickej poisťovacej spoločnosti, hodnota AFR má len reprezentatívnu úlohu.

Tabuľka 4.5.3: Miera solventnosti pri miere odhadu VaR 99,5 %

Agregovaný rizikový kapitál	18,682 mil EUR
AFR	25 mil EUR
Miera solventnosti	134 %

Zdroj: vlastné spracovanie

V našom prípade, s teoretickou hodnotou AFR, mieru solventnosti vo výške 134 % pre prípad insolventnosti raz za 200 rokov (VaR 99,5 %) považujeme za dostatočnú a uspokojujúcu, pričom odporúčame jej výpočet realizovať aj pre rôzne scenáre obsahujúce výrazné prepady na finančných trhoch, zmeny menových kurzov, zníženie úrokových sadzieb či pandemický scenár. Scenáre do modelu odhadu miery solventnosti vchádzajú cez marginálne rozdelenia rizík (proces agregácie kapitálu je nemenný), pričom je nutné aktualizovať aj hodnotu AFR.

Tabuľka 4.5.4: Miera solventnosti pri miere odhadu ES 99,0 %

Agregovaný rizikový kapitál	20,146 mil EUR
AFR	25 mil EUR
Miera solventnosti	124 %

Zdroj: vlastné spracovanie

V prípade miery solventnosti pre kapitál odhadnutý mierou rizika ES 99 % je miera solventnosti 124 %, ktorú rovnako ako pri VaR 99,5 % hodnotíme pozitívne a považuje.

4.6 Grafické zobrazenie výsledkov aplikáciou Shiny

V dizertačnej práci sa venujeme téme, ktorá je veľmi zaujímavá a každá z častí prezentovaného modelu odhadu miery solventnosti je v určitej miere dynamická. Rozhodli sme sa vytvoriť *Dashboard* v aplikácii Shiny naprogramovanej v jazyku R (viď 3.5.2 *Aplikácia Shiny*). Aplikácia je priamo napojená na vytvorený model odhadu miery solventnosti a tak užívatelia môžu nastavovať parametre procesu agregácie vrátane simulácií,

zvoliť miery rizika a pravdepodobnosť odhadu, vložiť vlastné rozdelenia marginálnych strát. Všetky vymenované úkony sa dejú v aplikácii Shiny, ktorá je napojená na *script*.

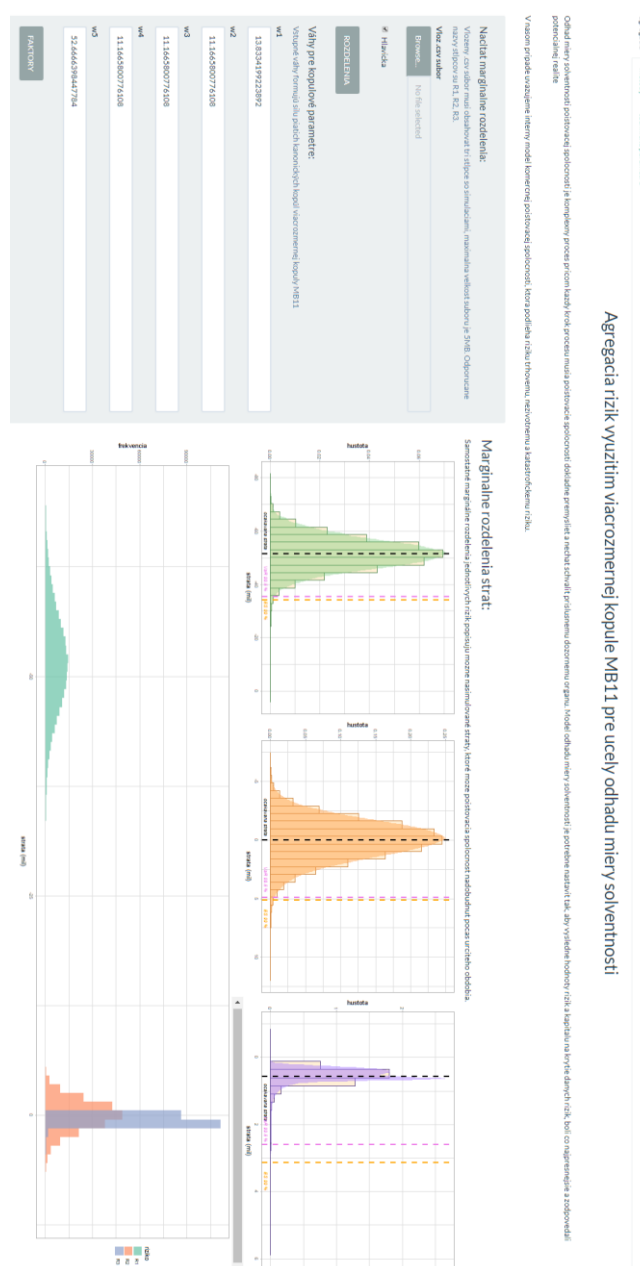
Vytvorený dashboard *Agregácia rizík využitím viacrozmernej kopuly MB11 pre účely odhadu miery solventnosti* môžeme rozdeliť na štyri hlavné časti:

1. **Úvodná časť**, kde užívateľ a oboznamujeme s významom odhadu miery solventnosti;
2. **Nastavenia**, v tejto časti užívateľ:
 - a. vkladá *.csv súbor s marginálnymi rozdeleniami jednotlivých samostatných rizík, aplikácia má veľkostné obmedzenie na nahrávané dáta do veľkosti 5MB (200 tisíc simulácií prekračuje danú veľkosť a dáta je potrebné nahrávať priamo prostredníctvom kódu), v prípade absencie súboru vyskočí okno upozorňujúce na chýbajúce vstupné dáta;
 - b. nastavuje parametre kopule reprezentujúce váhy $w_1 - w_5$, normované váhy predstavujúce pravdepodobnosť sa vkladajú vo formáte percent (bez znaku percenta) a v súčte musia nadobúdať hodnotu 100, v opačnom prípade vyskočí okno s upozornením;
 - c. nastavuje počet požadovaných simulácií kopulových variácií a *seed*, počet simulácií by mal byť ekvivalentný s počtom simulácií vložených marginálnych rozdelení; v prípade *seed* nastavenia, ak užívateľ požaduje *random.seed*, okno nechá prázdne;
 - d. nastavuje parametre pre odhad rizika, akými sú miera rizika a pravdepodobnosť; k dispozícii sú v aplikácii obe miery rizika – VaR a ES, pravdepodobnosť je ľubovoľné číslo v rozmedzí [0,1];
 - e. Nastavuje parametre miery solventnosti – hodnotu voľných finančných prostriedkov „AFR“, zvyšné vstupy pre mieru odhadu solventnosti počíta priamo kód, pre správnosť výpočtov a interpretáciu je potrebné vložiť AFR v rovnakých jednotkách, ako marginálne rozdelenia strát.
3. Dynamická časť *Marginálne rozdelenia strát*, ktorá v závislosti od nastavení generuje grafické zobrazenie funkcie hustoty jednotlivých samostatných marginálnych rozdelení strát;
4. Dynamická časť *Modelovanie kopule, agregácia a určenie miery solventnosti*, ktorá zobrazuje nagenеровané:
 - a. Faktory, v závislosti od vstupných váh;

- b. Kopulové variácie, v závislosti od vstupných váh a simulácie;
- c. Kapitálovú tabuľku, v závislosti od mier rizika, pravdepodobnosti a AFR.

Dashboard v aplikácii Shiny je stavaný pre agregáciu a odhad miery solventnosti pre tri riziká, prostredníctvom viacrozmernej kopuly MB11.

Okrem vyššie spomenutých častí dashboard obsahuje aj taby *metódy* a *technické parametre*, kde je užívateľovi predstavená metodológia odhadu miery solventnosti vytvoreným modelom a samotný proces bežania aplikácie.

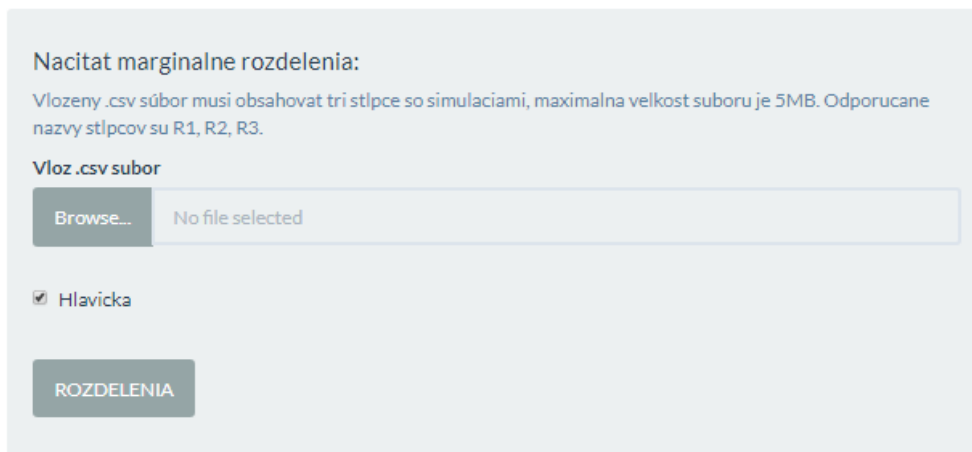


Obrázok 4.6.1: Výrez dashboardu aplikácie Shiny

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Najdôležitejšou časťou pre správne zbehnutie kódu sú Nastavenia, ktoré majú niekoľko častí:

1. Načítanie marginálnych rozdelení prostredníctvom *.csv súboru s veľkostným rozdelením 5MB. Užívateľ musí pre správne zbehnutie kódu nastaviť políčko *Hlavička*, ak rozdelenie hlavičku obsahuje. Užívateľovi odporúčame, aby nastavil hlavičky troch stĺpcov marginálnych rozdelení strát $R1$, $R2$ a $R3$.



Nacitat marginalne rozdelenia:

Vlozeny .csv súbor musí obsahovať tri stĺpce so simuláciami, maximalna veľkost suboru je 5MB. Odporucane nazvy stĺpcov su R1, R2, R3.

Vloz .csv subor

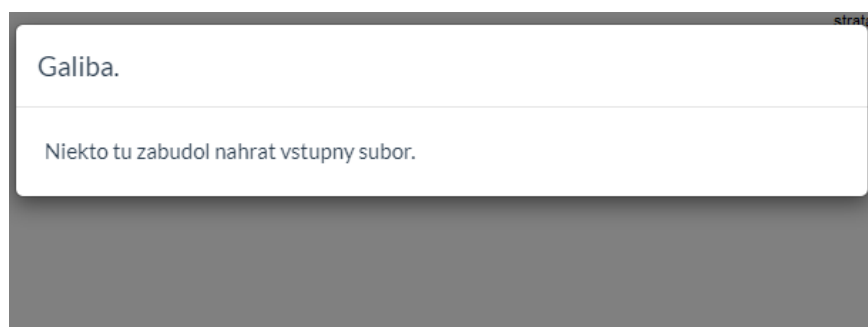
No file selected

☒ Hlavička

Obrázok 4.6.2: Nastavenie pre načítanie marginálnych rozdelení

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Stlačením tlačidla *ROZDELENIA* kód načíta dáta a vytvorí v dynamickej časti *Marginálne rozdelenia strát* grafy hustoty jednotlivých marginálnych rozdelení. V prípade, že používateľ zabudne vložiť dátový súbor, na obrazovke sa zobrazí nasledovné okno:

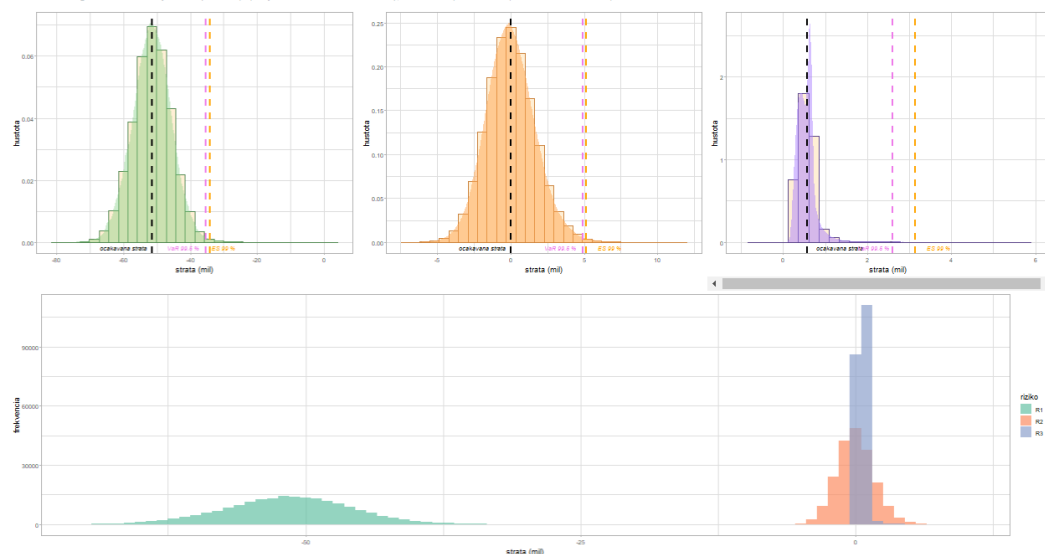


Obrázok 4.6.3: Okno ohlasujúce chýbajúci vstupný súbor

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Marginalne rozdelenia strat:

Samostatné marginálne rozdelenia jednotlivých rizík popisujú možné nasimulované straty, ktoré môže poisťovacia spoločnosť nadobudnúť počas určitého obdobia.



Obrázok 4.6.4: Grafy hustoty v dynamickej časti *dashboardu*

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

2. Nastavenie váh $w_1 - w_5$ (pravdepodobností) pre kopulové variácie dosiahneme v časti *Váhy pre kopulové parametre*. Váhy musia v súčte dávať hodnotu 100, inak používateľovi vyskočí upozorňovacie okno.

Váhy pre kopulové parametre:

Vstupné váhy formujú silu piatich kanonických kopúl viacrozmernej kopuly MB11

w1

w2

w3

w4

w5

FAKTORY

Obrázok 4.6.5: Nastavenie váh kanonických kopúl

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Stlačením tlačidla *FAKTORY* sa vstupné váhy načítajú do kódu a v dynamickej časti *Modelovanie kopule, agregácia a určenie miery solventnosti* – *Faktory* kód zobrazí faktorovú tabuľku rozšírenú o dvojdimenzionálne chvostové závislosti (BiTD) a trojdimenzionálnu chvostovú závislosť (TriTD) pre tri riziká R1, R2, R3 a navolené váhy. Pre zbiehanie danej časti kódu nie je potrebné načítanie marginálnych dát.

Modelovanie kopule, agregácia a určenie miery solventnosti:

Faktory Kopulové variácie Kapitál

Faktorová tabuľka:

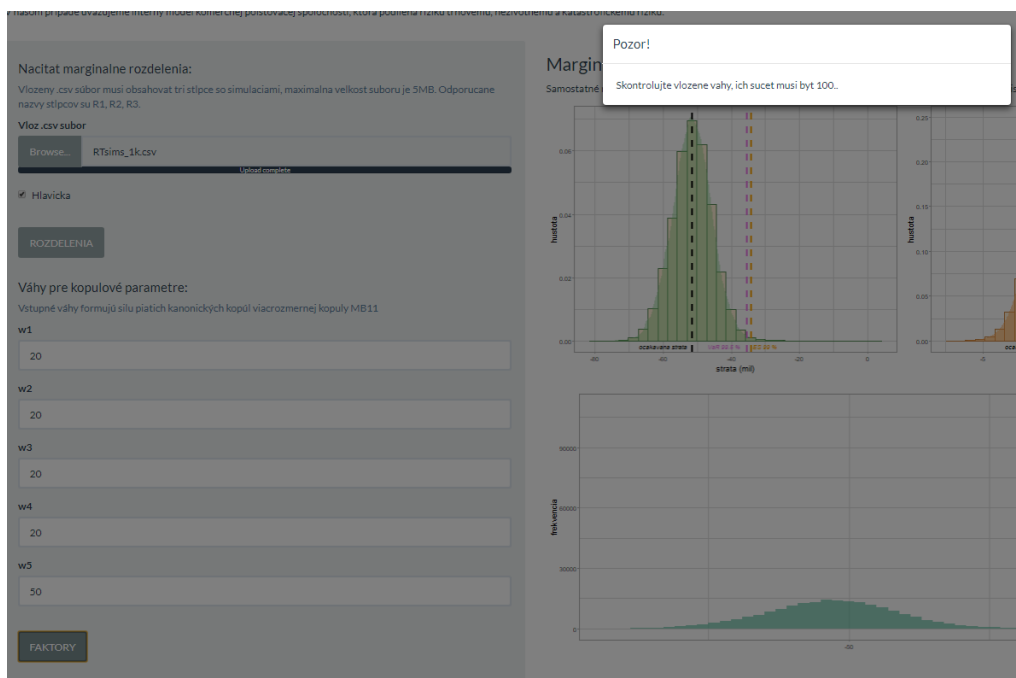
Po zadání váh w1-w5, faktorová tabuľka popisuje hodnoty pravdepodobnosti „prob„ a kumulatívnej pravdepodobnosti „cumsum„. Prostredníctvom parametrov factor 1 – 3, kopúl definujeme tvorbu kopulových variácií.

id	factor1	factor2	factor3	probability	cumsum	BiTD	R1	R2	R3	TriTD
1.00	1.00	1.00	1.00	0.14	0.14	R1	1	0.250000500001	0.250000500001	0.138334475892844
2.00	1.00	1.00	2.00	0.11	0.25	R2	0.250000500001	1	0.250000500001	
3.00	1.00	2.00	1.00	0.11	0.36	R3	0.250000500001	0.250000500001	1	
4.00	1.00	2.00	2.00	0.11	0.47					
5.00	1.00	2.00	3.00	0.53	1.00					

Obrázok 4.6.6: Rozšírená faktorová tabuľka v dynamickej časti *dashboardu*

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

V prípade, že vložené váhy nenadobúdajú v súčte hodnotu 100, na obrazovke sa objaví okno s upozornením.



Obrázok 4.6.7: Okno ohlasujúce nesprávne vložené váhy pre kopulové variácie

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

3. Nastavenie simulácií potrebných pre generovanie kopulových variácií. Počet simulácií by mal byť totožný s počtom simulácií marginálnych rozdelení strát jednotlivých samostatných rizík.

Simulácie:

Zadajte počet požadovaných simulácií kopulových variácií a seed. Ak necháte pole prázdne, bude použitý náhodný seed.

Pocet simulácií:

Zadajte seed:

AGREGÁCIA

Obrázok 4.6.8: Nastavenie simulácií pre generovanie kopulových variácií

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Okrem simulácií je vhodné nastaviť aj *seed* – v prípade, že užívateľ chce sledovať vplyv váh na odhad kopulových variácií bez zmeny generovania hodnôt náhodných premenných *sels* a *vars*.

Modelovanie kopule, agregacia a urcenie miery solventnosti:

Faktory Kopulove variacie Kapitál

Kopulove variacie:

Kopulove variacie su matematicky nástroj vyuzivany na modelovanie

U1	U1rank	U2	U2rank	U3	U3rank	R1	R2	R3	aggR1R2R3
0.27	271.00	0.16	146.00	0.27	284.00	-4659.37	-214.26	78.48	-4795.15
0.59	603.00	0.14	135.00	0.94	950.00	-4245.78	-222.16	170.83	-4297.10
0.16	164.00	0.15	137.00	0.15	157.00	-4850.50	-221.33	67.32	-5004.51
0.85	868.00	0.51	498.00	0.63	639.00	-3845.40	-3.50	113.52	-3735.38
0.85	859.00	0.49	480.00	0.18	195.00	-3865.81	-15.75	70.25	-3811.31
0.48	480.00	0.48	468.00	0.48	483.00	-4385.61	-22.29	99.21	-4308.69
0.77	777.00	0.45	420.00	0.73	752.00	-4002.22	-51.11	121.70	-3931.63
0.30	294.00	0.06	60.00	0.50	504.00	-4620.71	-318.76	101.01	-4838.46
0.07	69.00	0.01	4.00	0.87	887.00	-5129.36	-516.96	135.67	-5510.65
0.44	434.00	0.22	206.00	0.22	236.00	-4435.72	-168.80	73.81	-4530.71

Obrázok 4.6.9: Vygenerovaný dátový objekt *Urank*

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Zaujímavým pozorovaním môže byť aj sledovanie vplyvu *seed-u* na generovanie kopulových variácií a vplyv na veľkosť kapitálu. V prípade, že užívateľ chce využiť náhodné generovanie nezávislé od konkrétneho *seed-u*, okno sa nechá prázdne. Stlačením tlačidla *AGREGÁCIA* sa načítajú váhy, rozdelenia a v závislosti od počtu navolených simulácií a *seed-u* sa v dynamickej časti *Modelovanie kopule, agregácia a určenie miery solventnosti – Kopulové variácie* zobrazi tabuľka *Urank*.

4. Poslednou časťou je nastavenie parametrov pre odhad rizika, kapitálu a miery solventnosti. Užívateľ si môže zvoliť medzi mierami rizika Value-at-Risk (VaR) a Expected Shortfall (ES), pravdepodobnosť miery rizika je ľubovoľné číslo z intervalu $[0,1]$.

The screenshot shows a web form with the following elements:

- Parametre pre odhad rizika:**
 - Instruction: "Vyberte mieru rizika a pravdepodobnosť odhadu."
 - Miera rizika:** A dropdown menu with "VaR" selected.
 - Pravdepodobnosť miery rizika:** A text input field containing "0.995".
- Parametre miery solventnosti:**
 - Instruction: "Vložte hodnotu voľných finančných prostriedkov v rovnakej mene a jednotkách, ako vložene marginálne rozdelenie"
 - Volné finančné prostriedky**: A text input field containing "2500".
 - KAPITÁL**: A button at the bottom left of the section.

Obrázok 4.6.10: Nastavenie parametrov pre odhad rizika, kapitálu a miery solventnosti

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Stlačením tlačidla *KAPITÁL* sa v kóde vypočítajú hodnoty jednotlivých samostatných rizík, kapitálu, agregovanej straty a kapitálu, vrátane miery solventnosti. Výpočty sú realizované na základe zvolených parametrov a zobrazené v časti *Modelovanie kopule, agregácia a určenie miery solventnosti – Kapitál*.

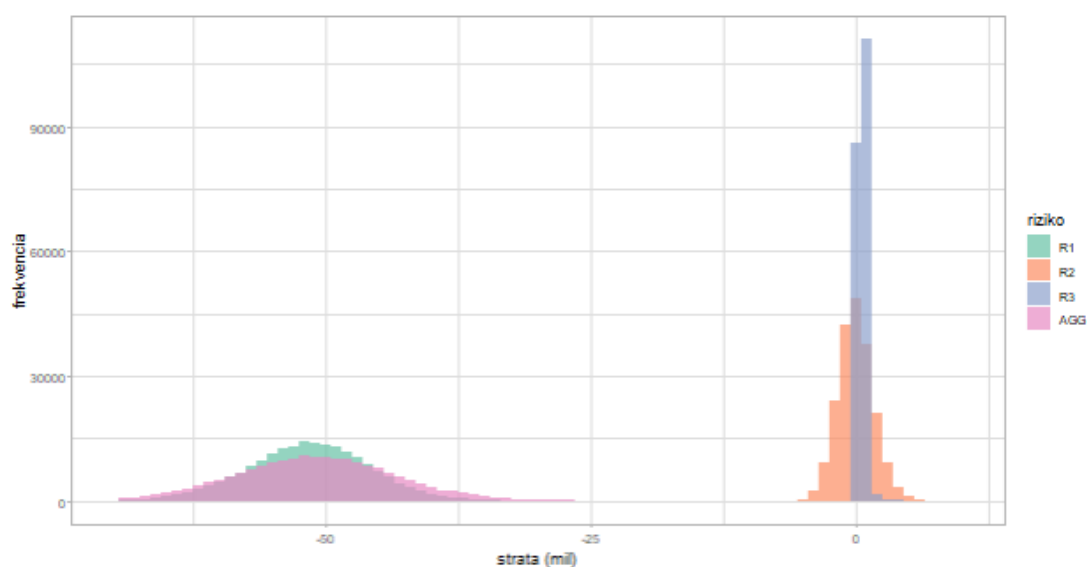
Modelovanie kopule, agregacia a urcenie miery solventnosti:

Faktory Kopulove variacie **Kapital**

Kapitalova tabulka:

Kapitalova tabulka zobrazuje hodnoty samostatnych rizik, kapitalu a agregovaneho kapitalu. Volne financne prostriedky.

tabulka	Stand_riziko	Stand_kapital	Agreg_riziko	Agreg_kapital	AFR	Miera_solv_pct
R1	-3170.42	1206.1	-2655.21	1613.66	2500	155
R2	604.14	604.05				
R3	496.17	388.6				



Obrázok 4.6.11: Kapitálová tabuľka a graf popisujúci samostatné riziká vrátane agregovaného rizika

Zdroj: vlastné spracovanie, Shiny

Práca s aplikáciou Shiny bola veľmi intuitívna a náučná. Veríme, že téma záverečnej práce so zobrazením prostredníctvom aplikácie Shiny bola pre čitateľa prínosná a inšpiratívna.

Záver

Insolventnosť je stav, do ktorého nechce spadnúť žiadna poisťovacia spoločnosť. Neschopnosť splniť svoje zmluvné záväzky voči klientom porušuje základný pilier dôvery medzi poisťovacou spoločnosťou a poisteným. Našťastie, v súčasnosti existuje mnoho regulácií, ktoré upravujú spôsoby tvorby kapitálu tak, aby boli poisťovacie spoločnosti aj v prípade materiálnych neočakávaných strát pripravené a dostatočne kapitalizované. V priebehu posledných rokov sme mohli pozorovať zmenu v spôsobe kontroly finančného zdravia poisťovacích spoločností príslušným dozorným orgánom. Najvýraznejšia zmena nastala v období začínajúcej pandémie COVID-19, kedy boli poisťovacie spoločnosti nútené zvýšiť frekvenciu výpočtov a reportov z ročných a kvartálnych na dodatočné mesačné a týždenné. Pandémia COVID-19 poisťovacími spoločnosťami zahýbala najmä kvôli volatilitě trhov, no dokonale potvrdila vážnosť a nevyhnutnosť kvalitnej metódy prípravy práve na takéto neočakávané situácie.

Dizertačná práca je zameraná na odhad miery solventnosti teoretickej medzinárodnej poisťovacej spoločnosti s interným modelom, ktorá na agregáciu rizík využíva metódu kopúl, čím prináša pohľad na problematiku priamo z poisťovnej praxe. V práci sme vysvetlili pojem rizika, objasnili typy rizík, ktorým poisťovacia spoločnosť čelí a predstavili dve najzákladnejšie metodológie odhadu požadovaného kapitálu – direktívu Solventnosť II a Švajčiarsky test solventnosti. Obe metodológie sú zapracované v modeloch poisťovní podnikajúcich na území Európy a Európskej únie, či už vo forme štandardného vzorca, parciálneho interného modelu alebo úplného interného modelu. Objasnili sme rozdiely medzi pojmami ekonomický a regulačný kapitál, ktoré sú pomerne často obmieňané a vysvetlili princípy rôznych foriem agregácie rizík od najjednoduchších, akou je napríklad *simple sum* až po náročnejšie, akými je metóda agregácie za pomoci kopúl. Hlavným cieľom dizertačnej práce je kvantifikácia a agregácia rizík interného modelu komerčnej poisťovne pre potreby určenia miery solventnosti. Aby sme mohli hlavný cieľ práce naplniť, potrebovali sme vytvoriť model na odhad miery solventnosti teoretickej poisťovacej spoločnosti s interným modelom, ktorý obsahuje agregáciu rizík za pomoci kopule. Aby čitateľ modelu rozumel, v kapitole 3. Metodika práce a metódy skúmania sme popísali metodiku nášho modelu a metódy, ktoré v rámci modelu využívame. Venovali sme sa mieram rizika očakávanej strate, ktoré sú podstatné pre kvantifikáciu hodnoty rizík, miere solventnosti, mieram asociácie a následne sme predstavili kopule. V kapitole prvýkrát predstavujeme kopulu využitú v praktickej časti, viacrozmernú kopulu MB11 pre tri riziká

od tvorcu Janusza Mileka, ktorý danú kopulu pre viac rizík (6 – 9) vytvoril pre poisťováciu spoločnosť Zurich Insurance Group, Ltd. Kopula je veľmi špecifická, je zložená z niekoľkých kanonických kopúl reprezentovaných Gaussovou kopulou s hraničnými koreláciami bez vplyvu marginálnych rozdelení na tvar kopule, čo vyvracia viaceré zaužívané metódy vytvárania združených rozdelení, napríklad známy empirický prístup. V práci sme predstavili generátor MB11 kopule a testy kvality modelu, ktoré sú potrebné pre potvrdenie alebo vyvrátenie užitočnosti modelu. Celý model sme vytvárali v programovacom jazyku R, ktorý sme zvolili pre jeho jednoduchosť, praktickosť, intuitívnosť a veľmi kvalitné grafické zobrazenia. Predstavili sme tiež aplikáciu Shiny dostupnú v softvérovom prostredí programovacieho jazyka R, ktorá vytvára rôzne reporty, dashboardy a je grafickým nástrojom na prezentovanie výsledkov práce.

V praktickej časti dizertačnej práce sme čitateľa previedli celým procesom miery odhadu solventnosti teoretickej poisťovacej spoločnosti vo vytvorenom modeli. Venovali sme sa vstupným dátam, ktoré reprezentujú (1) tri riziká: trhové, neživotné a katastrofické riziko a (2) chvostové závislosti. Riziká sme zvolili na základe ich špecifickosti a keďže každé z rizík má odlišné vlastnosti, bolo zaujímavé sledovať správanie agregovaného rozdelenia strát za všetky tri riziká. Chvostové závislosti sme zvolili na základe metodických usmernení cvičenia Insurance Capital Standards, ktorej sa zúčastňujú mnohé poisťovne a svojou formou predstavuje korelačnú maticu štandardného modelu pod direktívou Solventnosť II. Poisťovacie spoločnosti disponujú vlastnými závislosťami, založených na dlhodobom pozorovaní správania ich namodelovaných rizík a očakávaní manažmentu rizík. Takéto závislosti sú know-how poisťovne a externe sú zdieľané len pre potreby dozorného orgánu. Ďalej sme sa venovali procesu vytvárania kopulových variácií pre 200 tisíc simulácií a agregácii kapitálu. Na základe predstavenia modelu v kapitolách tri a štyri, by čitateľ mal byť schopný modelu porozumieť a v prípade záujmu vytvoriť aj vlastnú verziu. V kapitole sme v dvoch testoch dokázali užitočnosť modelu. V závere praktickej časti prezentujeme a interpretujeme hodnoty rizík a kapitálu jednotlivých samostatných rizík, ako aj hodnotu rizika a kapitálu agregovaného rozdelenia, pre miery rizika VaR 99,5 % a ES 99,0 %. Prezentujeme mieru solventnosti a pre dané miery rizika a predstavujeme dynamický dashboard aplikácie Shiny, v ktorej užívateľ môže agregovať svoje vlastné riziká na základne vlastných preferovaných nastavení.

Veríme, že téma odhadu miery solventnosti a proces agregácie rizík s kvantifikáciou rizikového kapitálu čitateľa vtiahla a obohatila jeho vedomosti o inovatívny prístup využí-

vaný medzinárodnými poisťovacími spoločnosťami s internými modelmi rovnako tak, ako nás. Kvalitný proces odhadu miery solventnosti s dôkladným kvantifikovaním rizikového kapitálu v oblasti poisťovníctva, ale aj v iných finančných inštitúciách, môže zachrániť inštitúciu od stavu insolventnosti a tým zachrániť bežných klientov, spoločnosti ba až celé hospodárske odvetvia a ekonomiky štátov. Najlepším zlým príkladom je hospodárska kríza z roku 2008, kedy veľkú rolu zahrala práve zle nastavená Gaussova kopula a s ňou výrazné podhodnotenie rizika...

Zoznam použitej literatúry

1. Barrailler, M. a Dufour, T. (2015). *Value at Risk and Expected Shortfall*. PFE IMAFA 2014/2015 .Polytech . Nice-Sophia. Dostupné na: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwji7eLGnvj2AhWWraQKHeghDAwQFnoECACQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.thibautdufour.com%2Ffiles%2FPFE_ES_Report.pdf&usg=AOvVaw2absomQ3qUL0jduS3lL3OI
2. Brit, S. – Krvavych, Y. *Reinsurance credit risk modelling: DFA approach*. In: International Actuarial Association. [online]. Dostupné na: https://www.actuaries.org/astin/colloquia/helsinki/papers/s5_16_britt_krvavych.pdf
3. Corporate Finance Institute. (2022, February 8). *Solvency Ratio*. Retrieved May 23, 2022, Dostupné na: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/finance/solvency-ratio/>
4. *Covariance Matrix*. (n.d.). Stat Trek. Retrieved April 3, 2022, Dostupné na: <https://stattrek.com/matrix-algebra/covariance-matrix.aspx>
5. Cipra, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovníctví*. Ekopress.
6. *ICS data collection*. (2021). International Association of Insurance Supervisors. Retrieved April 3, 2022, from <https://www.iaisweb.org/ics-data-collection/>
7. Dhaene J. Et. al. (2005). *Aggregating Economic Capital*. Dostupné na: <https://feb.kuleuven.be/public/u0014274/2005-Dhaene-Goovaerts-Lundin-Vanduffel.pdf>
8. *Insurer Ratings: What Do They Mean?* (2020, January 15). The Balance Small Business. Retrieved January 20, 2021. Dostupné na: <https://www.thebalancesmb.com/insurance-company-ratings-462502>
9. Embrechts, P. (2016). *Bernoulli and tail-dependence compatibility*. Project Euclid. Retrieved April 3, 2022, dostupné na <https://projecteuclid.org/journals/annals-of-applied-probability/volume-26/issue-3/Bernoulli-and-tail-dependence-compatibility/10.1214/15-AAP1128.full>
10. Faybíková, I. (2019). *Odhad kapitálovej požiadavky na solventnosť pre trhové riziko využitím replikácie portfólia*: diplomová práca. Bratislava, 2019, 61 s. Fakulta hospodárskej informatiky EU. Školiteľ: Michal Páleš.

11. Faybíková, I. (2017) *Vybraná finančná analýza komerčnej poisťovne*: bakalárska práca. Bratislava, 2017, 47 s. Fakulta hospodárskej informatiky EU. Školiteľ: Jitka Meluchová.
12. FINMA. (2018). Swiss Solvency test (SST). [online]. Dostupné na: <https://www.finma.ch/en/supervision/insurers/cross-sectoral-tools/swiss-solvency-test-sst/>
13. FINMA. (2021). Standard Model Insurance: Technical description of the SST standard model for reinsurance captive. Dostupné na: https://www.finma.ch/~media/finma/dokumente/dokumentencenter/myfinma/2ueberwachung/sst/technical-description-of-the-sst-standard-model-captive.pdf?sc_lang=en&hash=B71F50C4089DE2B8D107E611A897E276
14. Genest, C., & MacKay, J. (1986). The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *The American Statistician*, 40(4), 280. <https://doi.org/10.2307/2684602>
15. Haugh. M. (2016). An Introduction to Copulas. IEOR E4602: Quantitative Risk Management (Columbia University, Spring 2016)
16. Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., & Yan, J. (2019). *Elements of Copula Modeling with R (Use R!)* (1st ed. 2018 ed.). Springer.
17. Horáková, G. – Páleš, M. – Slaninka, F. (2015) *Teória rizika v poistení*. Wolters Kluwer.
18. Hürlimann, W., (2002). Multivariate Fréchet Copulas and Conditional Value at Risk. *Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2004:7, pp. 345–364, © Hindawi Publishing Corp.
19. Chang, W. (2018). *R Graphics Cookbook: Practical Recipes for Visualizing Data* (2nd ed.). O'Reilly Media.
20. Joubert, P. – Langdell, S. (2013) Modelling: Mastering the correlation matrix. In: *The Actuary*. [online]. Retrieved January, 2021, Dostupné na: <https://www.theactuary.com/features/2013/09/2013/09/09/modelling-mastering-correlation-matrix>
21. Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Taylor & Francis.
22. Kabacoff, R. (2015). *R in Action: Data Analysis and Graphics with R* (2nd ed.). Manning.

23. Koutoumanou, E., Wade, A., & Cortina-Borja, M. (2017). Local dependence in bivariate copulae with Beta marginals. *Revista Colombiana de Estadística*, 40(2), 281–296. <https://doi.org/10.15446/rce.v40n2.59404>
24. Lam, J. (2014). *Enterprise Risk Management: From Incentives to Controls* (2nd ed.). Wiley.
25. Marsden, E. (n.a.). *Copula and multivariate dependencies*. Risk Engineering. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi5us6Wnvj2AhXKxqQKHUv8ASsQFnoECAoQAQ&url=https%3A%2F%2Frisk-engineering.org%2Fstatic%2FPDF%2Fslides-copula.pdf&usg=AOvVaw3mQA7YzQ0OvOuunjf-Ci_o
26. Milek, J. (2021). Súkromná komunikácia.
27. Milek, J. (2020). Multivariate B11 copula family for risk capital aggregation. Talks in *Financial and Insurance Mathematics, Department of Mathematics*, ETH Zurich. Dostupné na: <https://www2.math.ethz.ch/t3/fileadmin/math/ndb//00014/04970/ETH.March.6.2014.Zurich.Milek.v.3.pdf>
28. Milek, J. (2020). Quantum Implementation of Risk Analysis-relevant Copulas. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/339350691_Quantum_Implementation_of_Risk_Analysis-relevant_Copulas
29. N.A. (n.a.) Appendix A: Simulation of copulas. Dostupné na: <https://link.springer.com/content/pdf/bbm%3A978-1-4020-4415-1%2F1.pdf>
30. Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (Springer Series in Statistics) (2nd ed.). Springer. ISBN 978-0387-28659-4
31. Nguyen, T., & Molinari, R. D. (2011). Risk Aggregation by Using Copulas in Internal Models. *Journal of Mathematical Finance*, 01(03), 50–57. <https://doi.org/10.4236/jmf.2011.13007>
32. Shaw, R. – Spivak, G. (2009). Correlations and Dependencies in Economic Capital Models. In: Institute and Faculty of Actuaries: Modelling Correlations and Dependencies in Economic Capital Models. [online]. Dostupné <https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/c05shaw.pdf>
33. R Core Team (2021). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>

34. RDocumentation. (2022). *RDocumentation*. Retrieved April 3, 2022, from <https://rdocumentation.org/>
35. Shiny. (n.d.). Shiny from R Studio. <https://shiny.rstudio.com/>
36. Schweizer, B. (2007). Introduction to Copulas. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 346. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1084-0699\(2007\)12:4\(346\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0699(2007)12:4(346))
37. STDHA. Correlation Test Between Two Variables in R - Easy Guides - Wiki - STHDA. (n.d.). STDHA. Retrieved May 23, 2022, Dostupné na: <http://www.sthda.com/english/wiki/correlation-test-between-two-variables-in-r>
38. Sweeting, P. (2011). *Financial Enterprise Risk Management (International Series on Actuarial Science)* (1st ed.). Cambridge University Press.
39. Šoltésová, T. Aktuárske modelovanie v životnom poistení. Bratislava : Letra Edu, 2019. 146 s., ISBN 978-80-89962-36-5
40. Viadinugroho, R. A. A. (2022, January 7). Generate Random Variable Using Inverse Transform Method in Python. Medium. Retrieved May 23, 2022, Dostupné na: <https://towardsdatascience.com/generate-random-variable-using-inverse-transform-method-in-python-8e5392f170a3>
41. Wickham, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York, 2016
42. Wickham, H., & Golemund, G. (2017). *R for Data Science: Import, Tidy, Transform, Visualize, and Model Data* (1st ed.). O'Reilly Media.
43. Corporate Finance Institute. (2022, February 8). *Solvency Ratio*. <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/finance/solvency-ratio/>
44. Zurich Insurance Group. (2021) Strong results, executing on strategic priorities: Annual results 2020. In: Financial results and reports. [online] 2021 – [cit. 14.02.2021]. Dostupné na: <https://www.zurich.com/-/media/project/zurich/dotcom/investor-relations/docs/results/2021/investor-presentation-including-commentary-annual-results-2020.pdf?la=en&rev=003db98b080d4bcd9a23cf94a2038333&hash=034928ED882AEAB9F20532A6C5D00910>
45. ZIG. Zurich Insurance Group (2020). *Zurich for business users: Risk Aggregation*. Interné.