

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103004/B/2018/36086129770259460

**POROVNANIE PRESNOSTI VÝPOČTU OBDĹŽNIKOVEJ
A SIMPSONOVEJ NUMERICKEJ INTEGRAČNEJ
METÓDY PRE VYBRANÉ POLYNOMICKÉ FUNKCIE
V PROGRAME VYTVORENOM V JAZYKU C.**

Bakalárska práca

2018

Filip Kuba

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

**POROVNANIE PRESNOSTI VÝPOČTU OBDĹŽNIKOVEJ
A SIMPSONOVEJ NUMERICKEJ INTEGRAČNEJ
METÓDY PRE VYBRANÉ POLYNOMICKÉ FUNKCIE
V PROGRAME VYTVORENOM V JAZYKU C.**

Bakalárska práca

Študijný program:	Hospodárska informatika
Študijný odbor:	Hospodárska informatika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej informatiky
Vedúci práce :	Ing. Igor Košťál PhD.

Bratislava, 2018

Filip Kuba



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Filip Kuba
Študijný program: hospodárska informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.10 Hospodárska informatika
Typ záverečnej práce: Bakalárska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Porovnanie presnosti výpočtu obdĺžnikovej a Simpsonovej numerickej integračnej metódy pre vybrané polynomicke funkcie v programe vytvorenom v jazyku C

Anotácia: Práca analyzuje rôzne aproximačné metódy výpočtu určitých integrálov polynomických funkcií, ich princípy, matematickú podstatu, použitie a ich implementáciu v programe vytvorenom v jazyku C so zameraním na odľžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika a Simpsonovu metódu. V rámci bakalárskej práce bude vytvorený program v jazyku C, ktorý pomocou implementácie týchto dvoch aproximačných metód dokáže vypočítať viacero hodnôt určitých integrálov vybraných polynomických funkcií pre viacero integračných subintervalov. Pomocou výstupov programu bude vykonané porovnanie presnosti odľžnikovej aproximačnej metódy so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika a Simpsonovej metódy a analýza tohto porovnania.

Vedúci: Ing. Igor Košťál, PhD.
Oponent: RNDr. Eva Rakovská, PhD.
Katedra: KAI FHI - Katedra aplikovanej informatiky FHI
Vedúci katedry: Ing. Mgr. Peter Schmidt, PhD.
Dátum zadania: 07.04.2016
Dátum schválenia: 08.04.2016

doc. Ing. Gabriela Kristová, CSc.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Bratislava, 23.05.2018

vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Chcel by som sa poďakovať svojmu školiteľovi Ing. Igorovi Košťálovi, PhD za ochotu a odbornú pomoc a usmerňovanie pri písaní mojej práce.

Abstrakt

KUBA, Filip: Porovnanie presnosti výpočtu obdĺžnikovej a Simpsonovej numerickej integračnej metódy pre vybrané polynomicke funkcie v programe vytvorenom v jazyku C – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; katedra aplikovanej informatiky. – Vedúci záverečnej práce: Ing. Igor Košťál PhD. – Bratislava; FHI, 2018, počet strán (45)

Cieľom záverečnej práce je porovnať rôzne numerické integračné metódy pre rôzne polynomicke funkcie so zameraním sa na Simpsonovu metódu a obdĺžnikovú metódu so vzťahným bodom v ľavom bode základne obdĺžnika ich stručný opis, matematická definícia, implementácia do nami vytvoreného programu napísaného v jazyku C. Práca je rozdelená do 3 kapitol ktoré sa delia na podkapitoly. Obsahuje 14 obrázkov, 10 tabuliek a 7 príloh. Prvá kapitola je venovaná definíciám určitého integrálu a definíciám numerických integračných metód.

V ďalšej časti sa práca zaoberá implementáciou jednotlivých metód numerického integrovania do programu vytvoreného v jazyku C a opisuje nami vytvorený program.

Záverečná kapitola sa zaoberá porovnaním výsledkov Simpsonovej a obdĺžnikovej metódy a ich presnosti pre jednotlivé polynomicke funkcie a analýzou tohto porovnania.

Výsledkom tejto práce je funkčný program v jazyku C, ktorý aproximuje výsledky určitých integrálov pre rôzne polynomicke funkcie a analýza porovnania Simpsonovej a obdĺžnikovej integračnej metódy.

Kľúčové slová:

Určitý integrál, numerické integrovanie, Simpsonova metóda, obdĺžniková metóda.

Abstract

KUBA, Filip: A Comparison of an Accuracy of the Calculation of the Rectangular and the Simpson Numerical Integration Method for Selected Polynomial Functions in the C Program – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Applied Informatics. – Supervisor of bachelor thesis: Ing. Igor Košťál PhD. – Bratislava; FHI, 2018, pages (45)

The aim of the final thesis is to compare various numerical integration methods for different polynomial functions with focus on Simpson's rule and rectangle method with point of reference in the left point of the rectangle base, their brief description, the mathematical definition, the implementation in our program created in the C programming language. Thesis is divided into 3 chapters which are divided into subchapters. It contains 14 images, 10 tables and 7 attachments. In the first chapter we define Riemann integral, Newton-Leibniz theorem and various numerical quadrature methods.

In follow up chapter we describes implementation of various methods of numerical integration into a program created in programming language C and describes the program we have created.

In final chapter we compare results and precision of Simpson's rule and rectangular integration for various polynomial functions and analyse this comparison.

The result of this bachelor thesis is a program in C programming language that approximates the results of integrals for different polynomial functions and analysis of comparison between the Simpson and the rectangular integration method.

Keywords:

Definite integral, numerical integration, Simpson's rule, rectangular integration.

Obsah

Abstrakt.....	6
Abstract	7
Úvod.....	9
1.Určitý integrál a numerické integračné metódy	10
1.1 Určitý integrál.....	10
1.2 Obdĺžniková metóda	12
1.3 Lichobežníková metóda	15
1.4 Simpsonova metóda	16
2 Program a jeho funkcie	18
2.1 Main.c	18
2.2 Funkcie.c	22
2.3 Funkcie.h.....	27
2.4 Vstupy a výstupy programu	28
2.5 Porovnanie s existujúcimi programami.....	29
3 Výsledky práce.....	30
3.1 Výsledky pre jednotlivé funkcie	30
3.2 Porovnanie numerických integračných metód	34
Záver	36
Zdroje	37
Prílohy.....	39

Úvod

Určitý integrál slúži na výpočet plochy krivočiareho lichobežníka, ktorý je ohraničený grafom funkcie vodorovnou osou Karteziánskej sústavy súradníc x a kolmicami na os x v krajných bodoch intervalu, používa sa na riešenie viacerých úloh v matematike, fyzike, chémii ale aj v ekonómii. Štandardne sa na výpočet určitého integrálu používa takzvaná Newton-Leibnizova formula, avšak jej implementácia do počítačového programu je zložitá a nie vo všetkých prípadoch je možné túto formulu použiť. V takýchto prípadoch je vhodné použiť numerické integračné metódy.

V prvej kapitole záverečnej práce zdefinujeme pojem určitého integrálu a predstavíme rôzne metódy numerického integrovania.

V druhej kapitole popíšeme implementáciu jednotlivých metód numerického integrovania, ktoré implementujeme do nami vytvoreného programu v jazyku C, ktorý bude aproximovať výsledky určitého integrovania pre viacero nami zvolených funkcií na rôznych intervaloch integrovania a pre rôzne počty subintervalov integrovania.

V poslednej kapitole práce uvedieme výsledky numerického integrovania jednotlivými metódami pre rôzne polynomicke funkcie a výsledky jednotlivých metód numerického integrovania porovnáme.

Cieľom záverečnej práce je vytvorenie programu v jazyku C, ktorý vypočíta približné výsledky určitých integrálov pre viacero polynomických funkcií na rôznych intervaloch integrovania pomocou rôznych numerických integračných metód a na základe výsledkov tohto programu porovnať Simpsonovu a obdĺžnikovú integračnú metódu.

1. Určitý integrál a numerické integračné metódy

V nasledujúcej kapitole popíšeme a zdefinujeme určitý integrál, priblížime, na čo sa používa, ozrejmime v čom spočívajú numerické integračné metódy pre približný výpočet určitého integrálu (takzvané Newton-Cotesove vzorce) a to konkrétne obdĺžniková, lichobežníková a Simpsonova integračná metóda.

1.1 Určitý integrál

Určitý integrál nachádza využitie najmä v matematike, ale aj vo fyzike či chémii, kde je množstvo veličín vyjadrený zákonmi formulovanými v integrálnom tvare no určitý integrál má svoje uplatnenie aj v ekonómii, napríklad pri výpočtoch celkových príjmov, či nákladov za určité obdobie alebo spojitého úročenia. V našej práci sa však budeme venovať určitému integrálu iba z geometrického hľadiska, keďže nám nepôjde o jeho využitie v jednotlivých vedných disciplínach ale o porovnanie rôznych aproximačných metód jeho výpočtu.

Na rozdiel od neurčitého integrálu ktorý je množinou primitívnych funkcií $F(x) + c$, líšiacich sa len konštantou c , určitý integrál je konkrétnym číslom I ktoré pridáme funkcii $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Hodnota daného určitého integrálu teda závisí od funkcie $f(x)$ a intervalu J . Poznáme viacero definícií určitého integrálu z pomedzi ktorých uvedieme Riemannovu definíciu určitého integrálu a Newtonovú definíciu určitého integrálu.

Riemannov integrál – Majme uzavretý interval $J = \langle a, b \rangle$. Rozdeľme interval na n podintervalov $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a deliacimi bodmi:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad [2]$$

Nech f je ohraničená funkcia definovaná na uzavretom intervale $J = \langle a, b \rangle$, pričom $J \subseteq D_f$, ktorá na tomto intervale nadobúda len kladne hodnoty $f(x) > 0$. Zvoľme v každom subintervale ľubovoľný bod ξ_i taký, že: $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Ak spočítame plošné obsahy n obdĺžnikov so šírkou Δx a výškou rovnou funkčným hodnotám $f(\xi_i)$ v bodoch ξ_i . Dostaneme Riemannov integrálny súčet:

$$R(f, n, \{\xi_i\}) = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x, \quad [2]$$

$R(f, n, \{\xi_i\})$ nadobúda odlišne hodnoty pre rôzne množiny bodov $\{\xi_i\}$, ale stále bude približne zodpovedať ploche pod krivkou $y = f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$. Je zrejmé, že s rastúcim počtom deliacich bodov ($n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0$) sa Riemannov integrálny súčet bude

približovať skutočnému plošnému obsahu P krivočiareho lichobežníka ohraničeného osou x , priamkami $x = a$, $x = b$ a krivkou $y = f(x)$ z toho vyplýva:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, n, \{\xi_i\}), \quad [2]$$

Ak postupnosť $\{R(f, n, \{\xi_i\})\}_{n=1}^{\infty}$ Riemannových integrálnych súčtov na intervale $\langle a, b \rangle$ je pre každý výber bodov $\{\xi_i\}$ konvergentná a má rovnakú limitu I , potom toto číslo I nazývame Riemannovým určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ a značíme ho:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, n, \{\xi_i\}) = \int_a^b f(x) dx, \quad [2]$$

Určitý integrál existuje v prípade že funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, alebo má na intervale $\langle a, b \rangle$ konečný počet bodov nespojitosti. Funkciu f potom nazývame integrovateľnou na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom číslo a nazývame dolnou hranicou a číslo b hornou hranicou integrálu.

Riemannova definícia určitého integrálu má jednoduchú geometrickú interpretáciu avšak riešenie limit integrálnych súčtov je vo všeobecnosti zložitá.

Newtonov integrál – Nech F je primitívna funkcia k funkcii f , $F'(x) = f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$ a je na intervale J spojitá potom platí vzťah:

$$I = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x) dx, \quad [1]$$

Ktorý sa nazýva Newton-Leibnizov vzorec.

Výpočet Newtonovho určitého integrálu je teda jednoduchý pokiaľ vieme vypočítať primitívnu funkciu F .

Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, potom platí že hodnota Riemannovho určitého integrálu a Newtonovho určitého integrálu sa rovná:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f, n, \{\xi_i\}) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = I, \quad [2]$$

Newton-Cotesove vzorce – Nie každá funkcia však musí mať na intervale $J = \langle a, b \rangle$ primitívnu funkciu F , prípadne primitívnu funkciu môže byť komplikované a zdĺhavé nájsť. Taktiež sa môžeme stretnúť so situáciou kedy integrand získame meraním a teda nepoznáme vzorec funkcie f , ale máme len množinu bodov grafu tejto funkcie ktoré potrebujeme integrovať. V takýchto prípadoch nemôžeme použiť Newton-Leibnizovu

formulu. Mohli by sme síce použiť Reimannov integrál, ten však nie je na výpočet veľmi praktický, keďže by nám jeho výpočet zabral veľa času. Preto použijeme numerické integračné metódy známe aj ako Newton-Cotesove kvadrátúrne vzorce. Na to využijeme fakt, že v prípade, ak integrovaná funkcia $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$ nadobúda len kladné hodnoty, dá sa reprezentovať ako plocha medzi grafom funkcie $f(x)$ a osou x , v prípade, že funkcia $f(x)$ nadobúda aj záporné hodnoty $\int_a^b f(x)$ sa dá reprezentovať ako rozdiel medzi plochou opísanou grafom funkcie $f(x)$ a osou x nad osou x a plochou opísanou grafom funkcie $f(x)$ a osou x pod osou x . Túto plochu budeme aproximovať tak, že interval $J = \langle a, b \rangle$ rozdelíme na n rovnako veľkých subintervalov, na každom z nich použijeme vybraný kvadrátúry vzorec a sčítame výsledky kvadratury pre všetky subintervaly intervalu J , tak dostaneme zložený kvadrátúry vzorec.

Použitím numerických integračných metód však dochádza k chybe, keďže sa nejedná o presný výpočet určitého integrálu, ale iba o jeho aproximáciu. Chybu výpočtu pritom môžeme rozdeliť na chybu metódy R a chybu, ktorá vznikne pri zaokrúhľovaní počítača. V ďalších kapitolách sa pozrieme aj na veľkosť tejto chyby a presnosť jednotlivých metód a to obdĺžnikovej, lichobežníkovej a Simpsonovej metóde, pričom sa zameriame najmä na obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika a Simpsonovu metódu.

1.2 Obdĺžniková metóda

Pri tejto metóde budeme plochu opísanú funkciou $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$ teda integrál $\int_a^b f(x)dx$, aproximovať obdĺžnikmi ktorých plošný obsah budeme počítať. Interval J rozdelíme na n rovnakých subintervalov čím získame $n + 1$ uzlových bodov $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Nech $h \in \mathbb{R}$ a platí: $h = \frac{(b-a)}{n}$. [1]

Potom vieme vyjadriť uzlové body pomocou h nasledovne: $x_{i+1} = x_i + h$ kde $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a $x_0 = a$, $x_n = b$. Na každom intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ aproximujeme funkciu f konštantnou funkciou $f_i : y = f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ pre obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v strede základne obdĺžnika, $f_i : y = f(x_i)$ pre obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika a $f_i : y = f(x_{i+1})$ pre obdĺžnikovú

metódu so vzťahným bodom v krajnom pravom bode základne obdĺžnika. Obsah obdĺžnika nad intervalom $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ sa dá vyjadriť vzťahom:

$$s_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot f_i, \quad [1]$$

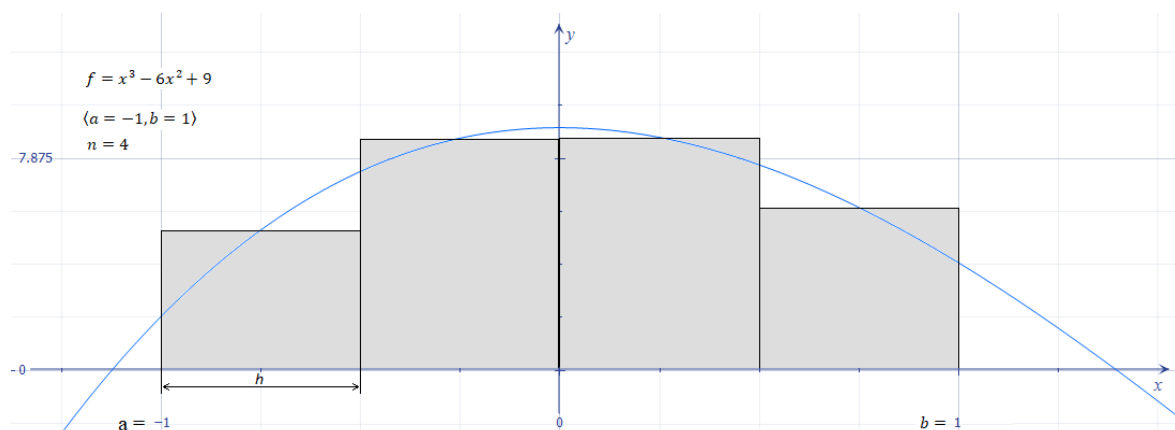
a pre súčet obsahov všetkých n obdĺžnikov platí:

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f_i. \quad [1]$$

Výsledný vzťah pre výpočet určitého integrálu obdĺžnikovou metódou sa teda dá zapísať nasledovne.

Pre obdĺžnikovú metódu so vzťahným bodom v strede základne obdĺžnika :

$$\int_a^b f(x) dx \approx s(n) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right), \quad [1]$$

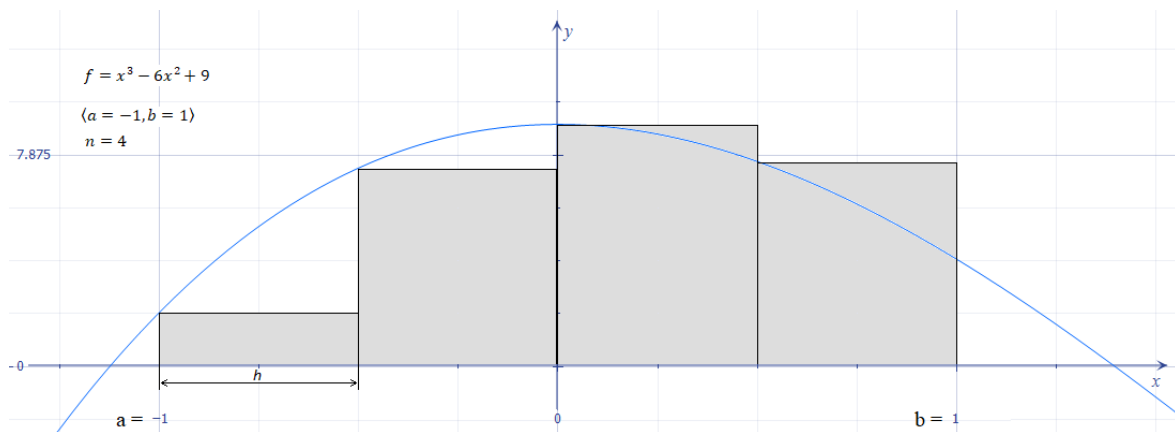


Obr. 1 Graf obdĺžnikovej metódy so vzťahným bodom v strede základne obdĺžnika.

Pre prehľadnejšiu ilustráciu sme v grafoch zvolili nízky počet subintervalov $n = 4$.

Pre obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika:

$$\int_a^b f(x)dx \approx s(n) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

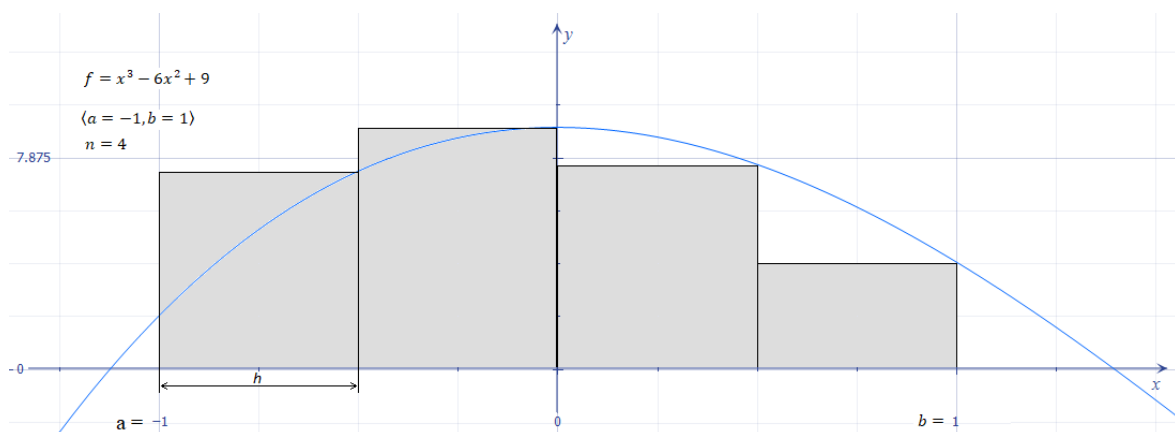


Obr. 2 Graf obdĺžnikovej metódy so vzťažným bodom v ľavom bode základne obdĺžnika.

Tento vzťah v ďalších kapitolách implementujeme do nášho programu.

A pre obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom pravom bode základne obdĺžnika:

$$\int_a^b f(x)dx \approx s(n) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h)$$



Obr. 3 Graf obdĺžnikovej metódy so vzťažným bodom v pravom bode základne obdĺžnika.

Pre odhad chyby obdĺžnikovej metódy platí vzťah:

$$\left| s(n) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1. \quad [1]$$

Kde $M_1 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$.

Obdĺžniková metóda je z pomedzi nami uvedených numerických integračných metód najjednoduchšia na implementáciu avšak predpokladáme, že bude aj najmenej presnou.

1.3 Lichobežníková metóda

Pri tejto metóde budeme plochu opísanú funkciou $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$, teda integrál $\int_a^b f(x) dx$, aproximovať lichobežníkmi, ktorých plošný obsah budeme počítať. Interval J rozdelíme na n rovnakých subintervalov čím získame $n + 1$ uzlových bodov $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Nech $h \in \mathbb{R}$ a platí: $h = \frac{(b-a)}{n}$ a dĺžka každého subintervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ sa rovná číslu h , čiže platí vzťah $x_{i+1} = x_i + h$.

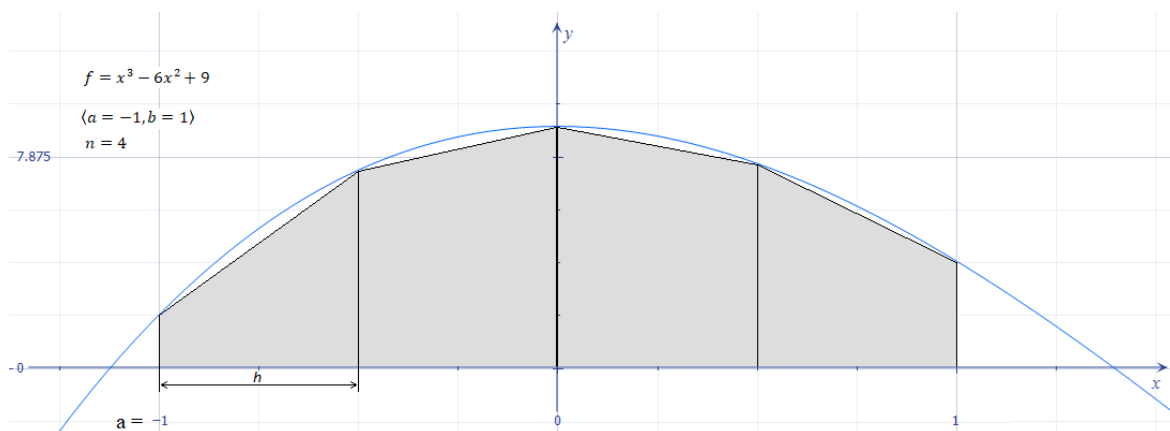
Kde $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a $x_0 = a$, $x_n = b$. Na každom intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ aproximujeme funkciu f lineárnou funkciou $f_i : y = f_i(x)$, ktorá prechádza bodmi: $[x_i, f(x_i)]$ a $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$ pre $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Obsah lichobežníka nad intervalom $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ pre $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sa dá vyjadriť vzťahom:

$$s_i = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1})), \quad [1]$$

Výsledný vzťah pre výpočet určitého integrálu lichobežníkovou metódou odvodíme nasledovne:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x) dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \\ &\approx s_0 + s_1 + \dots + s_{n-2} + s_{n-1} = \\ &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2)) + \dots \\ &\dots + \frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots \\ &\dots + (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) + f(x_n))] = \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \dots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right], \quad [1]$$



Obr. 4 Graf lichobežníkové metódy

Tento vzťah v nasledujúcich kapitolách taktiež implementujeme do nášho programu.

Pre odhad chyby lichobežníkové metódy platí vzťah:

$$\left| s(n) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2. \quad [1]$$

Kde $M_2 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$.

Lichobežníková metóda je mierne náročnejšia na implementáciu a výpočet ako obdĺžniková metóda, avšak predpokladáme že jej výsledok bude presnejší.

1.4 Simpsonova metóda

Pri Simpsonovej metóde budeme plochu opísanú funkciou $f(x)$ na intervale $J = \langle a, b \rangle$, teda integrál $\int_a^b f(x)dx$, aproximovať parabolami. Interval J rozdelíme na párny počet $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ rovnakých subintervalov čím získame $n + 1$ uzlových bodov $x_0, x_1, \dots, x_n$.

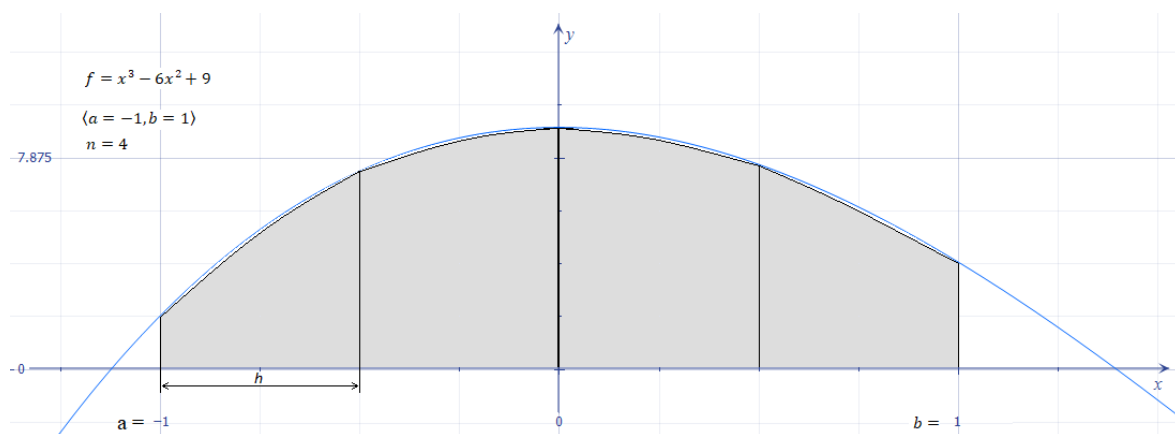
Nech $h \in \mathbb{R}$ a platí: $h = \frac{(b-a)}{n}$ a dĺžka každého subintervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ sa rovná číslu h , čiže platí vzťah $x_{i+1} = x_i + h$.

Kde $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ a $x_0 = a, x_n = b$. Na každom intervale $\langle x_{2i}, x_{2i+2} \rangle$ aproximujeme funkciu f kvadratickou funkciou $f_i : y = f_i(x)$, ktorá prechádza bodmi: $[x_{2i}, f(x_{2i})], [\frac{1}{2}(x_{2i} + x_{2i+2}), f(\frac{1}{2}(x_{2i} + x_{2i+2}))]$ a $[x_{2i+2}, f(x_{2i+2})]$. Obsah krivočiareho lichobežníka nad intervalom $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ pre $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sa dá vyjadriť vzťahom:

$$s_i = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad [1]$$

Výsledný vzťah pre výpočet určitého integrálu Simpsonovou metódou odvodíme nasledovne:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \\ &\approx s_0 + s_1 + \dots + s_{n-2} + s_{n-1} = \\ &= \frac{h}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3} \cdot (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots \\ &\dots + \frac{h}{3} \cdot (f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})) + \frac{h}{3} \cdot (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \\ &= \frac{h}{3} \cdot [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots \\ &\dots + (f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})) + (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))] = \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \dots \\ &\dots + 2 \cdot f(x_{n-2}) + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right], \quad [1] \end{aligned}$$



Obr. 5 Graf Simpsonovej metódy

Tento vzťah taktiež v ďalších kapitolách implementujeme do nášho programu. Pre odhad chyby Simpsonovej metódy platí vzťah:

$$\left| s(n) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot M_4. \quad [1]$$

Kde $M_4 \geq \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(iv)}(x)|$.

Z nami uvedených numerických integračných metód je Simpsonova metóda najnáročnejšou na implementáciu a taktiež nemôžeme zabudnúť na potrebu párneho počtu deliacich bodov n . Predpokladáme, že Simpsonova metóda bude časovo najnáročnejšou na výpočet, avšak výsadná aproximácia určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$, by mala byť rádovo najpresnejšou.

2 Program a jeho funkcie

V tejto kapitole popíšeme nami vytvorený program pre aproximačný výpočet určitého integrálu nami zvolených polynomických funkcií, jeho súčasti, použité funkcie, ich volania, ich návratové hodnoty a implementáciu jednotlivých integračných metód. Ukážeme tiež príklad vstupu a výstupu programu.

Program sme vytvorili v jazyku C pomocou vývojového prostredia Microsoft Visual Studio Community 2015 ako konzolovú aplikáciu pre cieľový operačný systém Microsoft Windows 10 Home.

Náš program obsahuje dva zdrojové súbory pomenované Main.c a Funkcie.c a jeden hlavičkový súbor Funkcie.h.

2.1 Main.c

Ako prvý opíšeme zdrojový súbor Main.c ktorý obsahuje iba jednu funkciu: `void main()` ktorá zabezpečuje komunikáciu s používateľom a volanie ostatných funkcií.

Do zdrojového súboru Main.c je ešte pred samotnou funkciou `void main()` vložený hlavičkový súbor

```
#include "Funkcie.h"
```

Vo funkcii `void main()` budeme používať nasledujúce lokálne premenne:

```
long double x0, xn, *f, vysledok, trvanie;
```

formát `long double` používame hlavne preto aby sme čo najviac redukovali chybu zaokrúhľovaním programu.

```
long n=0;
```

n bude predstavovať počet subintervalov, preto nám stačí celočíselná premenná a maximálny počet subintervalov je $\approx 2,147$ miliardy.

char v = 'a',cf;

premenné typu *char* nám budú slúžiť pri výbere funkcie a integračnej metódy a na ukončenie chodu programu. Do premennej *v* sme vložili znak 'a', aby sme predišli automatickému skončeniu programu.

*FILE *res;*

Premennú *res* typu ukazovateľ na *FILE* budeme používať pri zápise výsledkov do textového dokumentu.

time_t cas;

clock_t start, koniec;

Premenné typu *time_t* a *clock_t* budeme používať pri zápise dátumu a času vykonania výpočtu a dĺžku trvania výpočtu.

Pomocou volania funkcie: *fopen_s(&res,"vysledky.txt", "a");* otvoríme dátový prúd spojený s textovým súborom *vysledky.txt* v priečinku kde sa nachádza náš program. V prípade ak tento súbor neexistuje funkcia ho taktiež vytvorí a otvorí v režime "append", ktorý umožňuje zápis na koniec súboru. Pred ukončením programu dátový prúd spojený so súborom *vysledky.txt* zavrieme volaním funkcie: *fclose(res);*

V nasledovnom cykle:

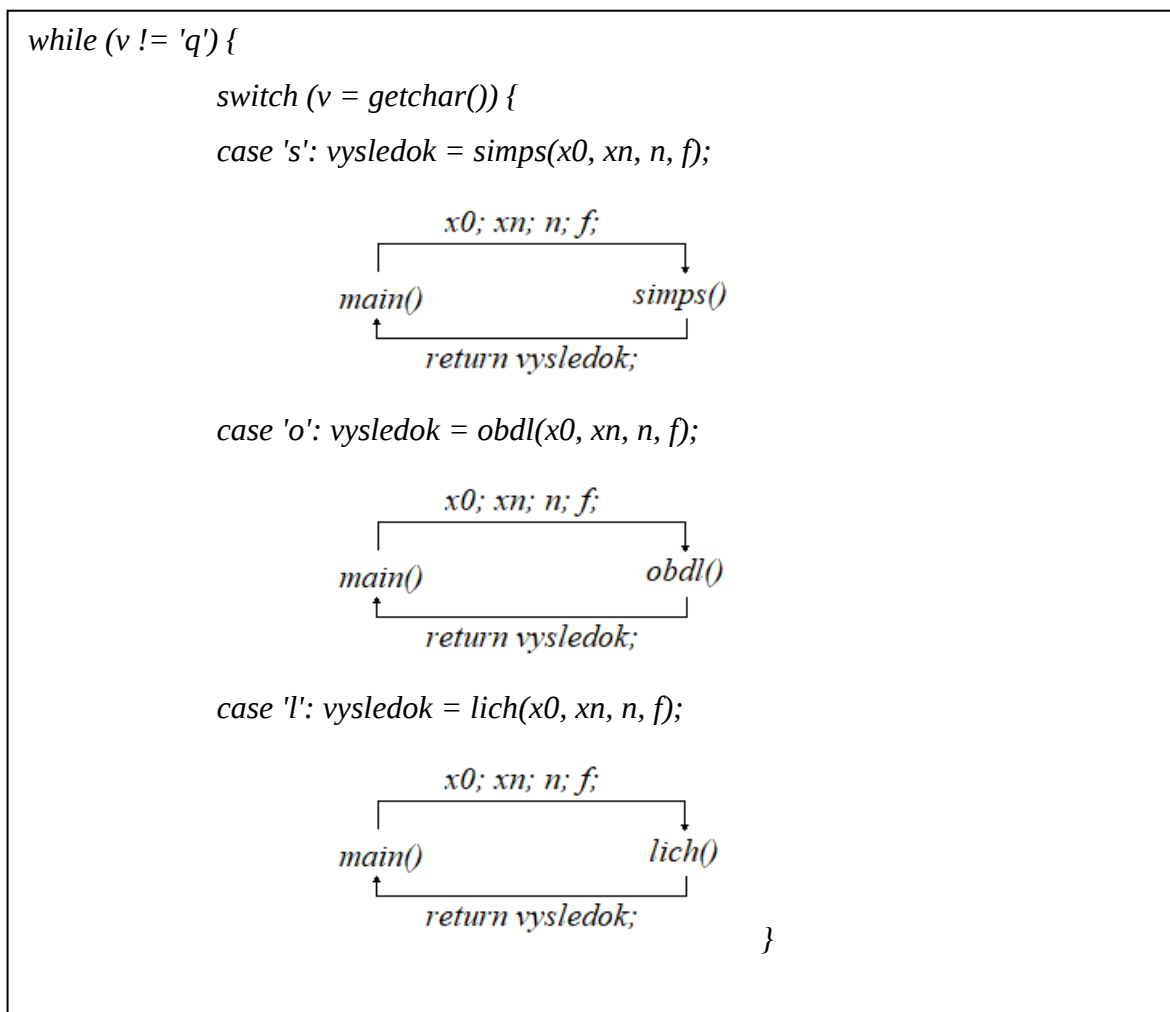
```
while (v != 'w'){  
    switch (v = getchar()) {  
  
        case '1':  f = f1;  
  
                cf = '1';  
  
                break;  
  
        case '2':      f = f2;  
  
                cf = '2';  
  
                break;  
  
        ...  
        ...  
        case '0':      f = f10;  
  
                cf = '0';  
        case 'w':      return 0;  
  
                break;  
  
        default: f = f1;  
  
                break;}  
}
```

Obr. 6 Cyklus pre výber polynomickej funkcie.

Najskôr používateľ zvolí jednu z nami vybraných funkcií f_1 až f_{10} poprípadе ak zadá 'w' program skončí. Ak užívateľ zadá iný znak program zvolí funkciu f_1 .

Po výbere funkcie používateľom program vyzve používateľa k zadaniu intervalu $\langle a, b \rangle$ a počtu subintervalou n .

Následne používateľ vojde do vnoreného cyklu:



Obr. 7 Cyklus pre výber integračnej metódy.

V tomto cykle používateľ volí medzi jednotlivými integračnými metódami a po zvolení jednej z nich program zavolá funkciu vybranej metódy pre vybraný interval, počet subintervalov a polynomickejšiu funkciu.

Po vykonaní výpočtov program vypíše výslednú aproximáciu výsledku na konzolu pomocou funkcie *printf* s presnosťou na 15 desatinných miest. Zmeria trvanie výpočtu aproximácie s presnosťou na tisíciny sekundy a do textového súboru *vysledky.txt* zapíše na jeho koniec pomocou funkcie *fprintf* čas kedy ukončil výpočet, jeho trvanie, číslo polynomickej funkcie, interval na ktorom bola polynomickejšia funkcia numericky integrovaná, názov použitej metódy a výsledok aproximácie.

Používateľ môže po sebe zvoliť viacero metód pre vybrané atribúty numerického integrovania. Ak chce používateľ zmeniť integrand zadá 'q', čím vystúpi z vnoreného cyklu

naspäť na výber funkcie kde môže nasledne zadaním 'w' program vypnúť, alebo zvolením funkcie uskutočniť ďalší výpočet.

2.2 Funkcie.c

V tomto zdrojovom súbore sme implementovali jednotlivé numerické integračné metódy a definovali sme desať vybraných polynomických funkcií.

Do súboru Funkcie.c je taktiež zahrnutý hlavičkový súbor:

```
#include "Funkcie.h"
```

Pre Obdĺžnikovú metódu so vzťažným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika platí vzťah:

$$\int_a^b f(x)dx \approx s(n) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Ktorý sme zapísali pomocou syntaktických prostriedkov jazyka C do funkcie *obdl*:

```
long double obdl(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x))
{
    long double h, x, ans = 0;
    long i;
    h = (xn - x0) / n;
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        x = x0 + i*h;
        ans += f(x);
    }
    return(ans*h);
}
```

Obr. 8 Funkcia *obdl*.

Šírku subintervalu h vypočítame ako podiel šírky intervalu $< a, b >$ a počtu subintervalov n .

Cyklus *for* vypočíta sumu od $i=0$ až $i=n-1$, $\sum_{i=0}^{n-1}$

x_i vyrátame ako $x_i = a + i \cdot h$, kde $a = x_0$ a $x_i = x$

Do premennej *ans* nasčítavame hodnoty $f(x_i)$ kde $f(x)$; je volaním používateľom zvolenej polynomickej funkcie.

Funkcia vracia hodnotu $ans \cdot h$ teda násobok sumy funkčných hodnôt $f(x_i)$ a šírky

subintervalu h : $ans \cdot h = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

Návratovej hodnote sme dali typ *long double* aby sme tak zabezpečili čo najväčšiu presnosť pri zaokrúhľovaní.

Pre Lichobežníkovú metódu platí vzťah:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Ktorý sme zapísali pomocou syntaktických prostriedkov jazyka C do funkcie *lich*:

```
long double lich(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x))
{
    long i;
    long double h, ans = 0, x;
    h = (xn - x0) / n;
    for (i = 1; i < n; i++)
    {
        x = x0 + i*h;
        ans += 2*f(x);
    }
    return((ans+f(x0)+f(xn))*h / 2);
}
```

Obr. 9 Funkcia *lich*.

Šírku subintervalu h vypočítame ako podiel šírky intervalu $< a, b >$ a počtu subintervalov n .

Cyklus *for* vypočíta sumu od $i=1$ až $i=n-1$, $\sum_{i=1}^{n-1}$

x_i vyrátame ako $x_i = a + i \cdot h$, kde $a = x_0$ a $x_i = x$

Do premennej *ans* nasčítavame hodnoty $2 \cdot f(x_i)$ kde $f(x)$; je volaním používateľom zvolenej polynomickej funkcie.

Funkcia vracia hodnotu $ans = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$ teda suma funkčných hodnôt $f(x_i)$ krát dva plus $f(x_0)+f(x_n)=f(x_0) + f(x_n)$, funkčná hodnota v prvom a poslednom bode intervalu a tento súčet vynásobíme polovicou šírky intervalu $\frac{h}{2}$:

$$(ans+f(x_0)+f(xn))*h / 2 = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

Návratovej hodnote sme dali typ *long double* aby sme tak zabezpečili čo najväčšiu presnosť pri zaokrúhľovaní.

Pre Simpsonovu metódu platí vzťah:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right]$$

Ktorý sme zapísali pomocou syntaktických prostriedkov jazyka C do funkcie *simps*:

```
long double simps(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x))
{
    long double h, x, ans = 0;
    long i;
    if (n % 2 == 1)
        n += 1;
    h = (xn - x0) / n;

    for (i = 0; i < n - 1; i += 2) {
        x = x0 + i * h;
        ans += (f(x) + 4 * f(x + h) + f(x + 2 * h));
    }
    return (ans * h / 3);
}
```

Obr. 10 Funkcia *simps*.

Porovnaním *if (n % 2 == 1)* sa uistíme aby bol počet subintervalov *n* párny keďže Simpsonová metóda sa dá použiť len pri párnom počte subintervalov $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ ak tomu tak nieje počet subintervalov navýšime o jeden.

Šírku subintervalu *h* vypočítame ako podiel šírky intervalu $\langle a, b \rangle$ a počtu subintervalov *n*.

Cyklus *for* vypočíta sumu od *i*=0 až *i*=*n*-1, $\sum_{i=0}^{n-1}$ namiesto $\sum_{i=1}^{n/2}$ čo vykompenzujeme v ďalšom kroku kde namiesto x_{2i} použijeme x_i vyrátame ako $x_i = a + i \cdot h$, kde $a = x_0$ a $x_i = x$, touto zmenou oproti pôvodnému vzorcu výrazne zredukujeme zaokrúhľovaciu chybu keďže sa vyhneme násobeniu $2 \cdot i$ v každom cykle.

Do premennej *ans* nasčítavame hodnoty $(f(x) + 4 \cdot f(x + h) + f(x + 2 \cdot h))$ ktoré su

ekvivalentom $4 \cdot f(x_{2i-1}) + 2 \cdot f(x_{2i})$ vrátane $f(x_0) + f(x_n)$ kde $f(x)$; je volaním používateľom zvolenej polynomickej funkcie.

Funkcia vracia hodnotu $ans = \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right]$ súčet všetkých funkčných hodnôt $f(x_i)$ potrebných na výpočet Simpsonovej metódy, tento súčet vynásobíme tretinou šírky intervalu $\frac{h}{3}$:

$$ans \cdot h / 3 = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right]$$

Návratovej hodnote sme dali typ *long double* aby sme tak zabezpečili čo najväčšiu presnosť pri zaokrúhľovaní.

Polynomicke funkcie:

Zadefinovali sme desať nami zvolených rôznych polynomických funkcií:

```
long double f1(long double x)
{
    return(x*x*x + 3 * x*x + x - 3);
}
long double f2(long double x)
{
    return(x*x - 4 * x + 2);
}
...
...
long double f10(long double x)
{
    return (x*x*x*x*x*x*x*x*x*x - 0.5*x*x*x*x*x*x*x*x*x*x + x*x*x*x*x*x*x*x*x*x - 2 *
x*x*x*x*x*x*x*x + 3.5*x*x*x*x*x*x*x*x - 7 * x*x*x*x*x*x + 15 * x*x*x*x - 27 * x*x + x - 18);
}
```

Obr. 11 Definície polynomických funkcií.

Zoznam všetkých desiatich zvolených polynomických funkcií v matematickom tvare:

$$f_1(x^3 + 3x^2 + x - 3)$$

$$f_2(x^2 - 4x + 2)$$

$$f_3(x^3 - 7x + \frac{5}{2})$$

$$f_4(x^4 - 4x^2 + 3)$$

$$f_5(x^4 + 1)$$

$$f_6(x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6)$$

$$f_7(-x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27)$$

$$f_8(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 3x - 5)$$

$$f_9(-x^3 + 2x^2 - 7x + 2)$$

$$f_{10}(x^9 - \frac{1}{2}x^8 + x^7 - 2x^6 + \frac{7}{2}x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 27x^2 + x - 18)$$

Funkcie sme zvolili tak, aby sme otestovali presnosť jednotlivých numerických integračných metód pri rôznom stupni polynómu a rôznych koeficientoch.

2.3 Funkcie.h

V hlavičkovom súbore Funkcie.h do programu zahrnieme knižničné súbory a deklarujeme funkcie zadefinované v súbore Funkcie.c, aby sme ich mohli volať vo funkcii *void main()* definovanej v zdrojovom súbore Main.c.

```
#pragma once

#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS

#include<stdio.h>

#include<time.h>

long double simps(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x));

long double obdl(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x));

long double lich(long double x0, long double xn, long n, long double f(long double x));

long double f1(long double x);

long double f2(long double x);

...

...

long double f9(long double x);

long double f10(long double x);
```

Obr. 12. Hlavičkový súbor Funkcie.h

Prvé dva riadky v zdrojovom súbore sú pridané app wizardom z vývojového prostredia Microsoft Visual Studio 2015. Z vloženého hlavičkového súboru <stdio.h> náš program volá knižničné funkcie vstupu, výstupu a funkcie pre manipuláciu so súbormi a z hlavičkového súboru <time.h> program volá funkcie pre zistenie času a dátumu.

2.4 Vstupy a výstupy programu

Príklad vstupu a výstupu programu v konzole pre funkciu $f_5 = f_5(x^4 + 1)$, interval $\{a = 0, b = 2\}$ počet subintervalov $n = 10000$, použitím Simpsonovej a obdĺžnikovej metódy:

```
Vyberte funkciu :
1- x^3 +3x^2 +x-3
2- x^2 -4x +2
3- x^3-7x+2,5
4- x^4 -4x^2 +3
5- x^4 +1
6- x^5 -2x^4 +3x^3 -4x^2 +5x -6
7- -x^4 +8x^3 -18x^2 +27
8- 0,25x^4 -0,5x^3 -x^2 -3x -5
9- -x^3 +2x^2 -7x +2
0- x^9 -0,5x^8 +x^7 -2x^6 +3,5x^5 -7x^4 +15x^3 -27x^2 +x -18

w- koniec
5

Zadajte hodnoty: a, b, n
a Lavy krajny bod integrovaneho intervalu
b Pravy krajny bod integrovaneho intervalu
n Pocet subintervalov
0 2 10000

Vyberte integracnu metodu :
s - Simpsonova metoda
o - Obdlznikova metoda
l - Lychobeznikova metoda
q - Spet na vyber funkcie
s

Vysledok aproximacie Simpsonovou metodom: 8.399999999999979
o

Vysledok aproximacie obdlznikovou metodom: 8.398400106666656
```

Obr. 13 Príklad vstupu a výstupu programu

Vstupné údaje do programu zadávame pomocou konzoly, pričom nás program vyzve najskôr k zadaniu čísla funkcie $f_1 - f_{10}$ pričom pre funkciu f_{10} zadáme nulu, po zvolení čísla funkcie nás program vyzve k zadaniu krajných bodov integrovania a , b a počtu subintervalov integrovania n . Tieto čísla zadáme oddelené buď medzerou alebo odriadkovaním. Následne nás program vyzve k zvoleniu integračnej metódy, ktorou budeme zvolený integrál aproximovať, môžeme zvoliť viacero metód až pokiaľ nezádame 'q'. Táto možnosť nás vráti späť na výber funkcie odkiaľ môžeme celý proces opakovať pre rôzne parametre integrovania alebo ukončiť program zadáním 'w'.

Výstup programu do súboru vysledky.txt pri tomto vstupe:

```
Wed May 9 17:31:05 2018
Trvanie: 0.0010 sek.
Funkcia: f5, a = 0.00, b= 2.00, n= 10000
Pouzita metoda: Simpsonova, Vysledok aproximacie= 8.399999999999979

Wed May 9 17:31:19 2018
Trvanie: 0.0010 sek.
Funkcia: f5, a = 0.00, b= 2.00, n= 10000
Pouzita metoda: Obdlznikova, Vysledok aproximacie= 8.398400106666656
```

Obr. 14 Príklad výstupu programu do textového súboru vysledky.txt

2.5 Porovnanie s existujúcimi programami

V tejto podkapitole sme sa pokúsili na internete vyhľadať programy, ktoré riešia našu problematiku a porovnať programy, ktoré sme našli s nami vytvoreným programom. Program, ktorý by aproximoval určitý integrál pre viacero funkcií na rôzne voliteľných intervaloch s rôznym počtom subintervalov a pre viaceré numerické metódy súčasne sa nám nájsť nepodarilo.

Väčšina programov, ktoré sme našli sa zaoberajú len jednou konkrétnou metódou alebo sú zadefinované len pre určitú funkciu a interval. Ďalší problém, s ktorým sme sa stretli, sú zle aplikované numerické metódy, ktorých výsledky boli často diametrálne odlišné od skutočných výsledkov. V prípade správne aplikovaných numerických metód pre obdĺžnikové a lichobežníkové metódy sa vo väčšine prípadov líšili len minimálne a to najmä v postupe jednotlivých matematických úkonov avšak bez vplyvu na výsledok. Väčšie rozdiely sme našli pri Simpsonovej metóde, kde sa výsledky často líšia kvôli náchylnosti na zaokrúhľovaciu chybu, ktorá má na celkovú výslednú chybu väčší vplyv ako v predchádzajúcich metódach. Túto chybu sme minimalizovali najmä vyhnutím sa práci s poliami keďže programy, ktoré pri Simpsonovej metóde s poliami pracovali, mali rádovo väčšiu chybu. Ďalej sa zaokrúhľovacia chyba líšila aj v prípade zmeny postupnosti jednotlivých krokov výpočtu, pričom sme sa zamerali hlavne na odstránenie redundantných výpočtov vďaka čomu sme dosiahli presnejšie výpočty pre vybrané funkcie

v porovnaní s programami, ktoré sme porovnávali. Odkazy na tri najpodobnejšie zdrojové kódy programov sme uviedli medzi ako zdroje práce [12],[13],[14].

3 Výsledky práce

V tejto kapitole porovnáme výsledky a efektivitu Simpsonovej a obdĺžnikovej integračnej metódy pre jednotlivé funkcie na nami zvolenom intervale pre rôzne počty subintervalov a vyhodnotíme, ktorú z metód je vhodnejšie použiť.

Na získanie presných výsledkov, s ktorými sme porovnávali výsledky našich aproximácií, sme použili voľne dostupný matematický program Microsoft Mathematics.

Výsledky pre jednotlivé funkcie uvedieme vo forme tabuliek, pričom najskôr uvedieme presný výsledok určitého integrálu pre danú funkciu f a interval $\langle a, b \rangle$ a v tabuľke uvedieme výsledky aproximácií pre jednotlivé počty subintervalov. Na aproximácie sme použili metódy ktoré sme popísali v kapitole 2.2.

3.1 Výsledky pre jednotlivé funkcie

$$f_1(x^3 + 3x^2 + x - 3), \langle a = 1, b = 3 \rangle$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_1^3 x^3 + 3x^2 + x - 3 \, dx = 44,00$$

Počet subintervalov n	Výsledky aproximácií Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácií obdĺžnikovou metódou
5000	43,999999999999900	43,989600480000000
10000	44,000000000000000	43,994800120000000
100000	43,999999999999800	43,999480001199800
500000	44,0000000000000200	43,999896000049400
1000000	43,999999999999300	43,999948000010500
10000000	43,999999999999400	43,999994800002100
50000000	44,000000000000000	43,999998960002500
100000000	44,0000000000000200	43,999999479996400
500000000	43,999999999995100	43,999999895991900
1000000000	43,999999999993300	43,999999948004000

Tab. 1 Výsledky aproximácií pre funkciu č. 1 na intervale $\langle a=1, b=3 \rangle$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 44,94 \text{ sek}$. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 36,48 \text{ sek}$. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

S rastúcim počtom subintervalov síce presnosť obdĺžnikovej metódy rástla narozdiel od Simpsonovej metódy, kde pri vysokom počte subintervalov došlo k väčšej chybe. Simpsonova metóda bola aj napriek tomu vo všetkých prípadoch výrazne presnejšia ako obdĺžniková metóda. Priemerná chyba Simpsonovej metódy pri aproximácii integrálu funkcie:

$f_1(x^3 + 3x^2 + x - 3)$ na intervale $\langle a = 1, b = 3 \rangle$ bola približne $3,09 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku, zatiaľ čo priemerná chyba obdĺžnikovej metódy bola približne $3,7 \cdot 10^{-3}\%$ z presného výsledku integrálu.

Najpresnejšiu aproximáciu sme dostali použitím Simpsonovej metódy pri n rovnom 10 000 a $n = 50\,000\,000$ v oboch prípadoch bola aproximácia presná na viac ako 15 desatinných miest.

Obdĺžniková metóda bola najpresnejšia pri miliarde subintervalov a to s presnosťou na 7 desatinných miest na tento výpočet program potreboval približne 36,48 sekundy pričom na najpresnejší výsledok použitím Simpsonovej metódy programu stačilo približne 0,0004 sekundy.

$$f_5(x^4 + 1), < a = -1, b = 3 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_1^3 x^4 + 1 \, dx = 52,80$$

počet subintervalov n	Výsledky aproximácií Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácií obdĺžnikovou metódou
5000	52,800000000000200	52,768005973333300
10000	52,799999999999900	52,784001493333200
100000	52,799999999999800	52,798400014933300
500000	52,799999999999700	52,799680000597400
1000000	52,799999999999400	52,799840000149000
10000000	52,799999999998400	52,799984000001900
50000000	52,800000000001600	52,799996799996600
100000000	52,800000000004500	52,799998399981400
500000000	52,800000000007200	52,799999679945300
1000000000	52,79999999952400	52,799999840533800

Tab. 2 Výsledky aproximácií pre funkciu č. 5 na intervale $<a=-1, b=3>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 45,00 \text{ sek.}$ Pre obdĺžnikovú metódu $t = 41,47 \text{ sek.}$ Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Tak, ako v predošlom prípade, presnosť obdĺžnikovej metódy s rastúcim počtom subintervalov n , rástla, naproti tomu presnosť Simpsonovej metódy s rastúcim počtom subintervalov klesala.

Aj napriek tomuto javu však bola aj pri najväčšom nami testovanom počte subintervalov Simpsonova metóda presnejšia ako obdĺžniková. Priemerná chyba Simpsonovej metódy pri aproximácii integrálu funkcie $f_5(x^4 + 1)$ na intervale $<a = -1, b = 3>$ bola približne $1,21 \cdot 10^{-11}\%$ z presného výsledku, zatiaľ čo priemerná chyba obdĺžnikovej metódy bola približne $9,48 \cdot 10^{-3}\%$ z presného výsledku integrálu.

Najpresnejšiu aproximáciu sme dostali použitím Simpsonovej metódy pri n rovnom 10 000, pričom bol výsledok aproximácie presný na 13 desatinných miest. Najpresnejší výsledok obdĺžnikovej metódy, pri $n = 1000\,000\,000$ bol presný na 6 desatinných miest. Tak ako v predošlom príklade program potreboval na najpresnejší výpočet Simpsonovou metódou približne 0,0004 sekundy naproti približne 41,5 sekundy potrebných na najpresnejšiu aproximáciu obdĺžnikovou metódou.

$$f_{10}(x^9 - \frac{1}{2}x^8 + x^7 - 2x^6 + \frac{7}{2}x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 27x^2 + x - 18), < a = 0, b = 3 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^3 x^9 - \frac{1}{2}x^8 + x^7 - 2x^6 + \frac{7}{2}x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 27x^2 + x - 18 dx = 5102,9678571428567$$

počet subintervalov n	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	5102,967857143090000	5097,695458917780000
10000	5102,967857142860000	5100,331257586600000
100000	5102,967857142850000	5102,704161147320000
500000	5102,967857142850000	5102,915117303020000
1000000	5102,967857142890000	5102,941487182930000
10000000	5102,967857142930000	5102,965220143450000
50000000	5102,967857142950000	5102,967329743330000
100000000	5102,967857143010000	5102,967593442330000
500000000	5102,967857142390000	5102,967804401490000
1000000000	5102,967857143400000	5102,967830774010000

Tab. 3 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 10 na intervale $<a=0, b=3>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\ 000\ 000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 77,77$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 56,92$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Tak ako aj pri ostatných funkciách presnosť obdĺžnikovej metódy rástla spolu s počtom subintervalov n , Simpsonova metóda sa spočiatku spresňovala od miliónu subintervalov $n \geq 1000\ 000$ sa však chyba výpočtu opäť začala zväčšovať. Ani v tomto prípade však nebola obdĺžniková metóda pre žiadny počet subintervalov presnejšia ako Simpsonova metóda. Priemerná chyba Simpsonovej metódy pri aproximácii integrálu funkcie $f_{10}(x^9 - \frac{1}{2}x^8 + x^7 - 2x^6 + \frac{7}{2}x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 27x^2 + x - 18)$ na intervale $< a = 0, b = 3 >$ bola približne $3,20 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku, zatiaľ čo priemerná chyba obdĺžnikovej metódy bola približne $0,016\%$ z presného výsledku integrálu.

Najpresnejšiu aproximáciu sme dostali použitím Simpsonovej metódy pri n rovnom $100\ 000$ a $n = 500\ 000$, pričom bol výsledok aproximácie presný na 11 desatinných miest. Najpresnejší výsledok obdĺžnikovej metódy, pri $n = 1000\ 000\ 000$ bol presný na 4 desatinné miesta. Aj napriek tomu že pri tejto funkcii bol najväčší rozdiel v čase potrebnom na výpočet aproximácie pri rovnakom počte n v prospech obdĺžnikovej metódy, Simpsonova metóda bola stále výrazne efektívnejšia keďže na najpresnejší

výsledok Simpsonovej metódy nám stačilo sto tisíc subintervalov a na tento výpočet program potreboval približne 0,008 sekúnd.

Výsledky pre ostatné funkcie sú uvedené v prílohách našej práce.

3.2 Porovnanie numerických integračných metód

Simpsonova metóda bola v každom z našich príkladov výrazne presnejšia ako obdĺžniková metóda so vzťahným bodom v krajnom ľavom bode základne obdĺžnika.

Výhodou obdĺžnikovej metódy bolo, že sa v každom z príkladov spresňovala s rastúcim počtom subintervalov n . Taktiež pri rovnakom počte subintervalov bol výpočet obdĺžnikovej metódy v priemere zhruba o 19% rýchlejší ako pri Simpsonovej metóde, pričom čím viac koeficientov polynóm mal, tým väčší bol rozdiel medzi dobami spracovania. Avšak ani najpresnejšie výsledky obdĺžnikovej metódy neboli presnejšie ako najmenej presné výsledky Simpsonovej metódy.

Časová výhoda obdĺžnikovej metódy bola teda zanedbateľná s prihliadnutím na skutočnosť, že Simpsonova metóda dosahovala najpresnejšie výsledky pri nižšom počte subintervalov, pričom v siedmich z desiatich príkladov bola Simpsonova metóda najpresnejšia pre $n = 10\,000$, kde doba výpočtu pre Simpsonovu metódu a pre $n = 10\,000$ bola približne 0,0005 sekundy a v ďalších dvoch prípadoch pre $n = 100\,000$, kde doba výpočtu pre Simpsonovu metódu a pre $n = 100\,000$ bola približne 0,005 sekundy. Priemerná chyba Simpsonovej metódy bola $7,87 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku. Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy bola 0,0127% z presného výsledku. Teda chyba Simpsonovej metódy bola v priemere o viac ako 10^9 krát menšia. Simpsonova metóda dosahovala v priemere najpresnejšie výsledky pre $n = 10\,000$, kde výsledky boli v priemere presne na 13 desatinných miest, zatiaľ čo pre obdĺžnikovú metódu boli výsledky najpresnejšie pre $n = 1\,000\,000\,000$ presne v priemere na 6 desatinných miest.

Lichobežníková metóda, ktorej sme sa nevenovali tak podrobne ako metóde Simpsonovej a obdĺžnikovej, sa správala podobne ako obdĺžniková metóda s podobnou časovou náročnosťou a taktiež sme spozorovali spresňovanie výsledku s každým nárastom počtu subintervalov. Výsledky lichobežníkovej metódy boli rádovo presnejšie v porovnaní s obdĺžnikovou metódou a v niektorých prípadoch pre veľké počty subintervalov bola presnejšia aj ako Simpsonova metóda, pre $n = 1\,000\,000\,000$ dokonca v 50% príkladov.

Ak však porovnáme absolútne najpresnejšie aproximácie, Simpsonova metóda dosahovala presnejšie výsledky, taktiež bola výhodnejšia z praktického hľadiska keďže presnejšie výsledky z pravidla dosahovala pre nižšie hodnoty n a tým pádom vyžadovala omnoho menej času na výpočet.

Najvýhodnejšou z nami testovaných numerických integračných metód bola Simpsonova metóda, pre ktorú bolo najvhodnejšie použiť $n = 10\,000$ subintervalov pri ktorých dosahovala metóda v priemere najpresnejšie výsledky s priemernou chybou rovnou približne $1,90 \cdot 10^{-13}\%$ z presného výsledku. Obdĺžnikovú metódu je vhodné použiť v prípade keď sa uspokojíme s presnosťou menšou ako $0,05\%$ z presného výsledku ktorú obdĺžniková metóda v priemere dosahovala pre $n = 10\,000$, keďže pre väčší počet subintervalov by bola obdĺžniková metóda nie len nepresnejšia ale aj časovo náročnejšia. Nesmieme však zabudnúť na to že sa Simpsonova metóda nedá použiť v prípade ak musíme použiť nepárny počet subintervalov. V takomto prípade je vhodnejšie použiť lichobežníkovú metódu.

Záver

V prvej časti našej záverečnej práce sme si priblížili pojem určitého integrálu, uviedli sme si definíciu určitého integrálu, predstavili sme si Newton-Leibnizovu formulu a uviedli sme si definície jednotlivých numerických integračných metód.

Vytvorili sme program v jazyku C, do ktorého sme implementovali jednotlivé numerické integračné metódy a to tak, aby sme pomocou tohto programu boli schopní numericky integrovať nami zvolené rôzne polynomicke funkcie na rôznych intervaloch integrovania s voliteľným počtom subintervalov integrovania. Tento program sme popísali v druhej kapitole našej práce.

V poslednej kapitole sme si uviedli výsledky numerického integrovania Simpsonovou a obdĺžnikovou metódou pre rôzne polynomicke funkcie. Analyzovali a porovnali sme tieto výsledky.

Porovnaním a analýzou našich výsledkov sme prišli k záveru, že najvhodnejšie je použiť Simpsonovu metódu s počtom subintervalov $n = 10\,000$, pri ktorej sa veľkosť chyby pohybuje pod $5,00 \cdot 10^{-13}\%$ z presného výsledku integrálu. Obdĺžniková metóda je vhodná len v prípadoch keď nám stačí presnosť približne $0,05\%$ z presného výsledku integrálu. V prípadoch keď nie je možné použiť páry počet subintervalov integrovania a tým pádom nie je možné použiť Simpsonovu metódu ktorá je definovaná len pre párne počty subintervalov, je najvhodnejšou z nami testovaných metód lichobežníková integračná metóda.

Zdroje

[1] BEREŽNÝ, Štefan. *Numerická matematika* [elektronický zdroj]. 1. vyd. Košice, 2012, 120 s. [12.4.2018]. ISBN 978-80-553-1067-1. Dostupné na:

<http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/NumerickaMatematika-Berezny-CD-Final.pdf>

[2] FREČER, Vladimír. *Matematika pre farmaceutov* [elektronický zdroj]. Bratislava, 2014, 339 s. [12.4.2018]. ISBN-978-80-223-3503-4. Dostupné na:

https://www.fpharm.uniba.sk/fileadmin/faf/Pracoviska-subory/KFCHL/zlozka1/Ucebne_texty/Ucebnica-Matematika-FaFUK-Frecer-2014.pdf

[3] HORŇÁK, Mirko. *Numerická matematika* [elektronický zdroj]. Košice, 2007, 116 s. [12.4.2018]. Dostupné na:

<http://umv.science.upjs.sk/hornak/zaverecny.pdf>

[4] KRUPKOVÁ, Vlasta – FUCHS, Petr. *Matematická analýza pro FIT* [elektronický zdroj]. Brno, 2014, 361 s. [12.4.2018]. Dostupné na:

<http://www.umat.feec.vutbr.cz/~krupkova/IMA2014.pdf>

[5] HOŠKOVÁ, Šárka – KUBEN, Jaromír – RAČKOVÁ, Pavlína. *Integrální počet funkcí jedné proměnné* [elektronický zdroj]. Ostrava, 2006, 225 s. [12.4.2018]. ISBN 80-248-1191-X. Dostupné na:

<http://www.math.muni.cz/~plch/ip.pdf>

[6] RŮŽIČKOVÁ Irena – HLAVIČKA, Rudolf. *Numerické metody* [elektronický zdroj]. Brno, 139 s. [12.4.2018]. Dostupné na:

<http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf>

[7] BUŠA, Ján – PIRČ, Viktor – SCHRÖTTER, Štefan. *Numerické metody, pravdepodobnosť a matematická štatistika* [elektronický zdroj]. Košice, 2006, 263 s. [12.4.2018]. ISBN 80-8073-633-2. Dostupné na:

<http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/NMPaMS-Busa-Pirc-Schrotter.pdf>

[8] DRAKOS, Nikos. *Computer Based Learning Unit* [elektronický zdroj]. Leeds, 1996, [12.4.2018]. Dostupné na:

<https://www.math.sk/skripta2/node1.html>

[9] MOORE, Ross. Mathematics Department [elektronický zdroj]. Sydney, 1999, [12.4.2018].

Dostupné na:

<https://www.math.sk/skripta2/node1.html>

[10] HUTNÍK, Ondrej. Určitý integral [elektronický zdroj]. Košice, 2012, 92 s.

[12.4.2018]. ISBN 978-80-7097-929-7. Dostupné na:

<https://www.upjs.sk/public/media/5596/Urcity-integral.pdf>

[11] KOŠŤÁL, Igor. Numerické derivovanie a integrovanie funkcií v C++ programe [prednáška]. Programovanie II.

[12] Rosetta Code.org. Numerical integration [elektronický zdroj]. [29.4.2018].

Dostupné na:

https://rosettacode.org/wiki/Numerical_integration#C

[13] RLH. Numerical integration [elektronický zdroj]. [29.4.2018]. Dostupné na:

<http://www.mymathlib.com/quadrature/>

[14] Xenium Sahaj. C program for numerical integration [elektronický zdroj]. [29.4.2018].

Dostupné na:

<https://computerprogram4ru.blogspot.sk/2016/08/c-program-for-numerical-integration.html>

Prílohy

Výsledky pre funkciu č.2.

$$f_2(x^2 - 4x + 2), < a = 0, b = 2 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^2 x^2 - 4x + 2 \, dx = -\frac{4}{3}$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	-1,333333333333330	-1,332533280000000
10000	-1,333333333333330	-1,332933200000000
100000	-1,333333333333330	-1,333293332000000
500000	-1,333333333333320	-1,333325333328000
1000000	-1,333333333333360	-1,333329333320000
10000000	-1,333333333333450	-1,333332933333380
50000000	-1,333333333333130	-1,333333253333680
100000000	-1,333333333333590	-1,333333293333340
500000000	-1,333333333333590	-1,333333325333600
1000000000	-1,333333333333830	-1,333333329329300

Tab. 4 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 2 na intervale $<a=0, b=2>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 42,15$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 34,26$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 1,03 \cdot 10^{-11}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 9,39 \cdot 10^{-3}\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.3.

$$f_3(x^3 - 7x + \frac{5}{2}), < a = 0, b = 4 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^4 x^3 - 7x + \frac{5}{2} dx = 18,00$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	18,0000000000000000	17,985602559999900
10000	18,0000000000000000	17,992800640000000
100000	17,9999999999999900	17,999280006400000
500000	18,0000000000000000	17,999856000255900
1000000	17,9999999999999700	17,999928000064300
10000000	18,0000000000000300	17,999992800000000
50000000	17,9999999999999700	17,999998559999100
100000000	18,0000000000001600	17,999999279994100
500000000	17,9999999999995800	17,999999856003300
1000000000	17,999999999999200	17,999999928002900

Tab. 5 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 3 na intervale $<a=0, b=4>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\ 000\ 000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 43,84$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 37,38$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 4,21 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 0,012\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.4.

$$f_4(x^4 - 4x^2 + 3), < a = 0,5, b = 1,5 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_{0,5}^{1,5} x^4 - 4x^2 + 3 \, dx = 0,179166\dot{6}$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	0,179166666666666	0,179466683333332
10000	0,179166666666666	0,179316670833335
100000	0,179166666666666	0,179181666708335
500000	0,179166666666687	0,179169666668335
1000000	0,179166666666665	0,179168166667097
10000000	0,179166666666726	0,179166816666687
50000000	0,179166666666586	0,179166696666950
100000000	0,179166666666833	0,179166681666731
500000000	0,179166666666641	0,179166669666308
1000000000	0,179166666666659	0,179166668167906

Tab. 6 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 4 na intervale $<a=0,5, b=1,5>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 47,21$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 39,94$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 2,03 \cdot 10^{-11}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 0,026\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.6.

$$f_6(x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6), < a = 0, b = 3 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^3 x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \, dx = 53,55$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	53,5500000000000200	53,507707379999800
10000	53,549999999999900	53,528851845000000
100000	53,549999999999900	53,547885018450200
500000	53,549999999999800	53,549577000737600
1000000	53,549999999999600	53,549788500183700
10000000	53,550000000000000	53,549978849999200
50000000	53,549999999995400	53,549995769998100
100000000	53,549999999995200	53,549997885004700
500000000	53,5500000000025700	53,54999577003500
1000000000	53,550000000010300	53,549999788492100

Tab. 7 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 6 na intervale $<a=0, b=3>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 54,90$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 43,88$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 8,66 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 0,012\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.7.

$$f_7(-x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27), < a = 0, b = 6 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^6 -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27 \, dx = 97,20$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	-97,2000000000001400	-97,070425919999500
10000	-97,2000000000000000	-97,135206479999900
100000	-97,199999999999900	-97,193520064799700
500000	-97,2000000000000400	-97,198704002591300
1000000	-97,2000000000000900	-97,199352000647000
10000000	-97,2000000000003900	-97,199935199997700
50000000	-97,1999999999986000	-97,199987040000200
100000000	-97,2000000000009200	-97,199993520023700
500000000	-97,199999999995700	-97,199998703971600
1000000000	-97,200000000020000	-97,199999352027700

Tab. 8 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 7 na intervale $<a=0, b=6>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 51,61$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 41,51$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 5,57 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 0,021\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.8.

$$f_8\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 3x - 5\right), < a = 0, b = 8 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^8 \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 3x - 5 \, dx = 819,73\dot{3}$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	819,733333333335000	819,189418666666000
10000	819,733333333334000	819,461354666667000
100000	819,733333333335000	819,706133546665000
500000	819,733333333330000	819,727893341866000
1000000	819,733333333334000	819,730613335473000
10000000	819,733333333329000	819,733061333345000
50000000	819,733333333361000	819,733278933328000
100000000	819,733333333241000	819,733306133206000
500000000	819,733333333473000	819,733327893244000
1000000000	819,733333332970000	819,733330613598000

Tab. 9 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 8 na intervale $<a=0, b=8>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 54,31$ sek. Pre obdĺžnikovú metódu $t = 43,78$ sek. Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 7,75 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 0,01\%$ z presného výsledku.

Výsledky pre funkciu č.9.

$$f_9(-x^3 + 2x^2 - 7x + 2), < a = 0, b = 5 >$$

Presný výsledok vyrátaný v Microsoft Mathematics:

$$\int_0^5 -x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \, dx = 150,416\dot{6}$$

počet subintervalov	Výsledky aproximácii Simpsonovou metódou	Výsledky aproximácii obdĺžnikovou metódou
5000	-150,416666666666000	-150,361671250000000
10000	-150,416666666666000	-150,389167812499000
100000	-150,416666666667000	-150,413916678124000
500000	-150,416666666665000	-150,416116667124000
1000000	-150,416666666666000	-150,416391666780000
10000000	-150,416666666665000	-150,416639166666000
50000000	-150,416666666658000	-150,416661166669000
100000000	-150,416666666662000	-150,416663916664000
500000000	-150,416666666684000	-150,416666116627000
1000000000	-150,416666666651000	-150,416666391682000

Tab. 3 Výsledky aproximácii pre funkciu č. 3 na intervale $<a=0, b=5>$.

Čas spracovania pre najvyšší počet subintervalov $n = 1000\,000\,000$ (miliarda) pre Simpsonovu metódu $t = 47,54 \text{ sek.}$ Pre obdĺžnikovú metódu $t = 38,94 \text{ sek.}$ Pričom doba spracovania bola konštantne priamo úmerná počtu subintervalov.

Priemerná chyba Simpsonovej metódy $\approx 3,45 \cdot 10^{-12}\%$ z presného výsledku.

Priemerná chyba obdĺžnikovej metódy $\approx 5,72 \cdot 10^{-3}\%$ z presného výsledku.