

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/I/2013/3374068507

GLM A ODHAD TECHNICKÝCH REZERV

Diplomová práca

2013

Bc. Mária Živčáková

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

GLM A ODHAD TECHNICKÝCH REZERV

Diplomová práca

Študijný program: Aktuárstvo

Študijný odbor: 6258 Aktuárstvo

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva

Vedúci záverečnej práce: Ján Gogola, RNDr., PhD.

Bratislava 2013

Bc. Mária Živčáková

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem na svoju česť, že som diplomovú prácu GLM a odhad technických rezerv napísala samostatne a výhradne s použitím uvedenej literatúry.

29. apríl 2013

.....

Mária Živčáková

Ďakujem vedúcemu záverečnej práce RNDr. Jánovi Gogolovi, PhD. za cenné rady a pripomienky pri tvorbe tejto práce.

Zároveň ďakujem aj mojej rodine a priateľom za ich podporu v období písania.

Abstrakt

ŽIVČÁKOVÁ Mária: GLM a odhad technických rezerv. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva. – Vedúci záverečnej práce: RNDr. Ján Gogola, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2013, 73 s.

Cieľom tejto diplomovej práce bolo priblížiť deterministický a stochastický prístup k odhadu technických rezerv. Objasniť metódy spojené s doplnením vývojových trojuholníkov, inak nazývaných aj IBNR trojuholníkov a dokázať, že vybrané deterministické postupy odhadu rezerv nám dávajú rovnaké výsledky ako vybrané stochastické postupy. Ďalej sme sa v tejto práci venovali problematike zovšeobecneného lineárneho modelu (GLM), kde sme sa snažili čitateľa oboznámiť o tvare modelu, jeho predpokladoch, vlastnostiach a metódach odhadu neznámych parametrov. Práca je rozdelená do troch kapitol. Obsahuje dva grafy, jeden diagram, 34 tabuliek a štyri prílohy. Prvá kapitola je venovaná definovaniu technických rezerv. Uvádzali sme v nej delenie technických rezerv stanovené zákonom a jednotlivé typy sme bližšie popisovali. V ďalšej časti sme sa zamerali na odhad technických rezerv a zovšeobecnený lineárny model. Venovali sme sa metóde Chain Ladder a niektorým jej zovšeobecneniam, ďalej separačnej metóde, metóde Cape Cod a Bornhuettero – Fergusonovej metóde. Pre lepšie pochopenie zovšeobecneného lineárneho modelu sme najprv charakterizovali klasický lineárny model. Popísali sme predpoklady v oboch lineárnych modeloch a podrobne aj jednotlivé časti zovšeobecneného lineárneho modelu. Záverečná kapitola sa zaoberá aplikáciou metód Chain Ladder, separačnej a Cape Cod a zovšeobecneného lineárneho modelu na dáta. Snažili sme dokázať, že deterministická metóda Chain Ladder a stochastický GLM s Poissonovým rozdelením poistných plnení vracajú rovnaké hodnoty odhadu výšky technických rezerv. Túto skutočnosť sa nám dokázať podarilo.

Kľúčové slová: technické rezervy, zovšeobecnený lineárny model, GLM, metóda Chain Ladder, vývojový trojuholník

Abstract

ŽIVČÁKOVÁ Mária: GLM and estimation of technical reserves. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Mathematics and Actuary. – Supervisor: RNDr. Ján Gogola, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2013, 73 p.

The scope of this thesis was to describe deterministic and stochastic approach to estimate technical reserves. Clarify the methods associated with the solving of run-off triangles (IBNR triangles) and prove that the selected deterministic reserves estimation procedures give us the same results as selected stochastic processes. Furthermore, this paper is dedicated to the issue of a generalized linear model (GLM), where we tried to inform the reader about the shape of the model, its assumptions, properties and methods of estimation of unknown parameters. The work is divided into three chapters. It contains two graphs, one diagram, 34 charts and four annexes. The first chapter is devoted to defining the technical reserves. Here we presented division technical reserves laid down by law and more detailed description of various types. In the next section we focused on the estimation of technical reserves and generalized linear model. We dedicated the Chain Ladder and some of its generalizations, next separation method, the method Cape Cod and Bornhuettero - Ferguson method. First we described classical linear model to better understand the generalized linear model, then we examined in detail assumptions of the generalized linear model. The final chapter is addressing to application of deterministic methods and the generalized linear model with Poisson claims to data set of claims. We have tried to show that deterministic method Chain Ladder and the generalized linear model with Poisson claims return the same value of estimates. This fact we successfully demonstrated.

Keywords: technical reserves, generalized linear model GLM, method Chain Ladder, run-off triangle

O B S A H	str.
Úvod	10
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	11
1.1 Technické rezervy	11
1.1.1 Technická rezerva na poistné budúcich období	13
1.1.2 Technická rezerva na poistné plnenie	14
1.1.3 Technická rezerva na poistné prémie a zľavy	15
1.1.4 Technická rezerva na úhradu záväzkov voči Slovenskej kancelárii poisťovateľov vznikajúcich z činností	15
1.1.5 Technická rezerva na životné poistenie	16
1.1.6 Technická rezerva na krytie rizika z investovania finančných prostriedkov v mene poistených	18
1.1.7 Technická rezerva na vyrovňovanie mimoriadnych rizík v poistnom odvetví neživotného poistenia	18
1.1.8 Ďalšie technické rezervy	19
2 Cieľ a metodika práce a metódy skúmania	19
2.1 Odhad technických rezerv	20
2.1.1 Metóda Chain Ladder	22
2.1.1.1 Neupravená metóda Chain Ladder	22
2.1.1.2 Metóda Chain Ladder s inflačným vyrovnaním upravená o úrokovú mieru	24
2.1.1.3 Zovšeobecnenie metódy Chain Ladder	25
2.1.1.4 Metóda London Chain Ladder	26
2.1.2 Separačná metóda	26
2.1.3 Metóda Cape Cod	31
2.1.4 Bornhuetterova – Fergusonova metóda	33
2.2 Odhad technických rezerv pomocou GLM	35

2.2.1	Lineárny model	35
2.2.1.1	Predpoklady lineárneho modelu	37
2.2.2	Zovšeobecnený lineárny model GLM (<i>Generalized linear model</i>)	39
2.2.2.1	Exponenciálne triedy rozdelení	40
2.2.2.2	Apriórne váhy	43
2.2.2.3	Rušivý parameter	45
2.2.2.4	Deviancia	45
2.2.2.5	Väzbové funkcie (<i>Link functions</i>)	47
2.2.2.6	Posun (<i>offset</i>)	49
2.2.2.7	Štruktúra zovšeobecneného lineárneho modelu	50
2.2.2.8	Odhad neznámych parametrov pre zovšeobecnený lineárny model metódou maximálnej vierohodnosti	51
2.2.2.9	Štandardné chyby	52
2.2.2.10	Vhodnosť dát	54
2.2.2.11	Poissonov model	54
3	Výsledky práce	56
3.1	Odhad technických rezerv metódou Chain Ladder	56
3.2	Odhad technických rezerv zovšeobecneným lineárnym modelom	61
3.3	Odhad technických rezerv separačnou metódou	64
3.4	Odhad technických rezerv metódou Cape Cod	68
	Záver	71
	Zoznam použitej literatúry	72
	Príloha A	74
	Príloha B	75
	Príloha C	77
	Príloha D	78

Zoznam tabuliek a grafov	str.
Tabuľka 2.1: Kumulatívny vývojový trojuholník	21
Tabuľka 2.2: Vývojový trojuholník poistných plnení $P_{i,j}$ vyjadrených vzťahom (2.4)	28
Tabuľka 2.3: Vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt	29
Tabuľka 2.4: Upravený vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt	29
Tabuľka 2.5: Vývojový trojuholník škodových pomerov	34
Tabuľka 2.6: Hodnoty rozptylových funkcií pre konkrétne rozdelenia	41
Graf 2.1: GLM graf pre rôzne rozptylové funkcie	41
Graf 2.2: Rôznych metódy modelovania	43
Tabuľka 2.7: Typy väzbových funkcií	48
Tabuľka 2.8: Typ kanonickej väzbovej funkcie vzhľadom na typ rozdelenia	49
Tabuľka 2.9: Tvary modelu	51
Diagram 2.1: Zmena logaritmickéj funkcie maximálnej vierohodnosti vzhľadom na parametre	53
Tabuľka 3.1: Nekumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch	57
Tabuľka 3.2: Kumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch	57
Tabuľka 3.3: Vývojové koeficienty	58
Tabuľka 3.4: Vývojové faktory	59
Tabuľka 3.5: Doplnený vývojový trojuholník	59
Tabuľka 3.6: Technické rezervy v tisícoch podľa roku vzniku poistnej udalosti	60
Tabuľka 3.7: Technické rezervy v tisícoch podľa roku uhradenia poistných plnení	60
Tabuľka 3.8: Odhad technických rezerv pomocou Poissonovho modelu	62
Tabuľka 3.9: Doplnený vývojový trojuholník pomocou Poissonovho modelu	62
Tabuľka 3.10: Deviancia	63
Tabuľka 3.11: Nekumulatívny vývojový trojuholník	64
Tabuľka 3.12: Počty škôd	65
Tabuľka 3.13: Matica štandardizovaných hodnôt	65

Tabuľka 3.14: Odhady d_i , λ_i a r_j	66
Tabuľka 3.15: Odhad λ_{2012+k}	66
Tabuľka 3.16: Doplnená matica štandardizovaných hodnôt	67
Tabuľka 3.17: Doplnený IBNR trojuholník	67
Tabuľka 3.18: Technické rezervy	67
Tabuľka 3.19: Kumulatívny vývojový trojuholník	68
Tabuľka 3.20: Vývojové koeficienty b_j	68
Tabuľka 3.21: Kumulatívne koeficienty m_j	69
Tabuľka 3.22: Inverzné koeficienty i_j	69
Tabuľka 3.23: Doplnky inverzných koeficientov i'_j	69
Tabuľka 3.24: Upravené zaslúžené poistné	69
Tabuľka 3.25: Odhad technických rezerv	70

Úvod

Poistenie je zmluvný vzťah medzi poisťovňou a poistencom, kedy poisťovňa na seba preberá poistné riziko poistenca a zaväzuje sa v prípade poistnej udalosti poskytnúť poistencovi poistné plnenie. Na účely poskytnutia poistných plnení si musí poisťovňa vytvárať technické rezervy. Keďže zistenie skutočnej výšky škody môže trvať aj niekoľko rokov (najmä v neživotnom poistení), správne určenie technických rezerv sa nedá presne vypočítať, ale len odhadnúť. Tento odhad by mal byť čo najefektívnejší, aby mala poisťovňa finančné prostriedky na uhradenie všetkých poistných plnení, ktorí vzniknú a nedostala sa do straty. Skutočná výška poistných plnení by sa nemala veľmi líšiť od odhadovanej.

Cieľom tejto diplomovej práce je popísať poistno – matematické metódy na odhad technických rezerv. Budeme sa venovať deterministickému odhadu, ktorý je v praxi poisťovňami využívaný najčastejšie. Takýto odhad je však len bodovým odhadom a neposkytuje nám ďalšie informácie o odhade technických rezerv, napríklad nepoznáme variabilitu.

Tieto informácie môžeme získať odhadom pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu, bežne nazývanému GLM (z angl. *Generalized Linear Model*). GLM je stále viac využívaný poisťovňami hlavne kvôli jeho nenáročným predpokladom a presným výsledkom. Niektoré typy GLM odhadu technických rezerv nám dávajú rovnaké výsledky ako odhady získané deterministickými metódami (napríklad metódou Chain Ladder). Toto tvrdenie sa budeme snažiť dokázať na praktickom príklade. V slovenskej literatúre sa nachádza stále málo informácií o zovšeobecnenom lineárnom modeli, i keď je jeho využitie rozsiahle. Okrem odhadu technických rezerv ním môžeme modelovať napríklad rizikové poistné.

Najväčším prínosom tejto diplomovej práce je prezentovanie GLM, oboznámenie sa s predpokladmi modelu, popísanie jeho komponentov a následná aplikácia v praxi pri odhadovaní výšky technických rezerv.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

Dôležitou a stále aktuálnejšou povinnosťou poisťovní je dosiahnuť záruky, aby každá poisťovňa bola schopná splniť všetky svoje záväzky, ktoré na seba prevzala uzavretím poisťných zmlúv, a to aj v budúcnosti, v ekonomických podmienkach, ktoré nie sú v čase uzavretia poisťnej zmluvy známe. Problém je o to závažnejší, že poistenie predstavuje zväčša dlhodobý záväzok, ktorého poisťné plnenie sa často odkladá o niekoľko rokov od momentu zaplatenia poisťného alebo uzavretia poisťnej zmluvy. Preto je poistenie úzko spojené s tvorbou technických rezerv. Technické rezervy sú potrebné pre poisťovaciu činnosť, významnú úlohu hrajú aj pri rezervotvornom poistení.

Pre poisťovňu by bolo vhodné tvoriť technické rezervy v optimálnej výške, teda dostatočne vysoké na to, aby bola poisťovňa schopná plniť svoje záväzky z poisťných plnení v každom okamihu, ale na druhej strane musí byť ich tvorba aj efektívna. Tieto požiadavky nie je jednoduché splniť, keďže sa technické rezervy často určujú na základe pravdepodobnosti.

Pre poisťovňu predstavujú podstatný objem finančných prostriedkov a sú zdrojom investičných výnosov. Na ich výšku a pohyb dohliada samotná poisťovňa aj dozorné orgány nad poisťovníctvom, ktoré sa ich snažia regulovať. V súvislosti s tým sa zavádza princíp sledovania poisťovne SOLVENCY II. Práve technické rezervy sú najdôležitejším faktorom pri posudzovaní solventnosti poisťovne a slúžia aj na hodnotenie konkurencieschopnosti na poisťnom trhu.

1.1 Technické rezervy

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [1],[2],[3],[4],[5].

Technické rezervy sú vytvárané poisťovateľom ako náklady povinne podľa zákona k plneniu záväzkov z poisťovacej činnosti, ktoré sú pravdepodobné alebo isté, ale neistá je ich výška a okamih ich vzniku.

Zákon stanovuje typ aj priemernú výšku technických rezerv, sú prísne sledované dozornými orgánmi (napríklad Národnou bankou Slovenska) aj samotnou poisťovňou. Používajú sa na krytie rizík, záväzkov a strát z poisťovacej činnosti. Tvorí sa vo výške dostatočnej na to, aby bola poisťovňa schopná v každom okamihu uhradiť všetky záväzky vyplývajúce z poisťných zmlúv a iných činností a to v plnej miere a samostatne pre neživotné a samostatne pre životné poistenie. Predstavujú dôležitú súčasť pasív každej poisťovne. O každej rezerve sa účtuje oddelene od ostatných záväzkov.

Technické rezervy nesmieme miešať s „netechnickými“ rezervami, ktoré poisťovňa vytvára ako každý iný podnikateľský subjekt a nepoužíva ich primárne na krytie rizík z poisťovacej činnosti (napríklad zákonný rezervný fond, zákonné rezervy určené na opravu hmotného majetku, rezervy na kurzové straty).

Aktíva, ktorých zdrojom sú technické rezervy, podliehajú prísnyim obmedzeniam, pretože ich umiestnenie musí spĺňať tieto zásady:

- „Zásadu bezpečnosti, podľa ktorej prostriedky technických rezerv a garančného fondu sú uložené tak, aby poskytovali záruku návratnosti týchto prostriedkov technických rezerv
- Zásadu rentability, podľa ktorej prostriedky technických rezerv a garančného fondu zabezpečujú výnos z ich umiestnenia alebo zisk z ich predaja
- Zásadu likvidity, podľa ktorej časť prostriedkov technických rezerv je uložená tak, aby sa dala ihneď použiť na plynulú úhradu výplat záväzkov z uzavretých poisťných zmlúv
- Zásadu diverzifikácie, podľa ktorej prostriedky technických rezerv sú umiestnené u väčšieho počtu právnických osôb, medzi ktorými nie je vzťah materskej spoločnosti a dcérskej spoločnosti, alebo že tieto právnické osoby nekonajú v zhode“¹

Zo zákona je poisťovňa povinná vytvárať tieto technické rezervy:

- *Technickú rezervu na poistné budúcich období*
- *Technickú rezervu na poistné plnenie*

¹ Zákon o poisťovníctve č. 8/2008 o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov

- *Technickú rezervu na poistné prémie a zľavy*
- *Technickú rezervu na úhradu záväzkov voči Slovenskej kancelárii poisťovateľov vznikajúcich z činností*
- *Technickú rezervu na životné poistenie*
- *Technickú rezervu na krytie rizika z investovania finančných prostriedkov v mene poistených*
- *Technickú rezervu na vyrovňovanie mimoriadnych rizík v poistnom odvetví neživotného poistenia*
- *Ďalšie poistné rezervy*

1.1.1 Technická rezerva na poistné budúcich období

Technická rezerva na poistné budúcich období zodpovedá tej časti predpísaného poistného, ktoré sa vzťahuje na budúce účtovné obdobie. Napríklad štvrtina ročného poistného zaplateného na konci septembra pokryje zvyšok bežného účtovného (kalendárneho) roka (*zaslúžené poistné, earned premium*), zatiaľ čo zvyšné tri štvrtiny poistného (*nezaslúžené poistné, unearned premium*) sa už vzťahujú k prvým deviatim mesiacom nasledujúceho účtovného roka a túto časť je nutné v bežnom účtovnom roku umiestniť do rezervy na poistné budúcich období. Bežne sa nazýva ako rezerva na nezaslúžené poistné.

Celková výška tejto rezervy sa vypočíta ako súčet nezaslúžených častí poistného stanovených pre jednotlivé poistné zmluvy. Ak technickú rezervu nie je možné určiť týmto spôsobom, používajú sa na určenie jej výšky poistno - matematické metódy. Delenie poistného na zaslúžené a nezaslúžené väčšinou vykonáva systém poisťovni hneď pri predpise poistného.

Súčasťou technickej rezervy na nezaslúžené poistné je rezerva na neukončené riziká. „Rezerva na neukončené riziká sa tvorí, ak predpísané poistné, ktoré sa vzťahuje na budúce účtovné obdobie, nie je dostatočné na krytie všetkých poistných plnení z poistných udalostí a nákladov, ktoré nastanú v budúcom období a vzťahujú sa na platné poistné zmluvy.“² Technická rezerva na poistné budúcich období sa tvorí v neživotnom poistení a v životnom okrem životných poistení za jednorazové poistné.

² Zákon o poisťovníctve č. 8/2008 o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov

1.1.2 Technická rezerva na poistné plnenie

Technická rezerva na poistné plnenie predstavuje odhad celkových nákladov, ktoré vyplývajú z úhrad všetkých poistných plnení, ktoré nastali do konca účtovného obdobia, znížené o už vyplatené poistné plnenia vo vzťahu k týmto udalostiam.

Tvorí sa v životnom aj neživotnom poistení, avšak v životnom poistení nie je tak dôležitá, životné poisťovne do nej nanajvýš len prevádzajú technickú rezervu na životné poistenie pri ohlásení poistnej udalosti alebo bezprostredne pred výplatou poistného plnenia. Naopak v neživotnom poistení má dôležitú úlohu, je významná hlavne pri tých produktoch neživotného poistenia, u ktorých dochádza k časovému oneskoreniu medzi poistnou udalosťou a dokončeným poistným plnením (napríklad pri havarijnom poistení, úrazovom poistení, povinnom ručení, cestovnom poistení a pri iných produktoch, kde môže likvidácia poistnej udalosti trvať niekoľko rokov, zvlášť, ak pri nej došlo k ujme na zdraví). Podľa typu poistnej udalosti sa technická rezerva na poistné plnenie delí do dvoch zložiek:

1.) *Technická rezerva RBNS (Reported But Not Settled)*

Táto rezerva je určená na krytie záväzkov z poistných udalostí nahlásených do konca bežného účtovného obdobia, ale v tomto období nevybavených (prípadne vybavených, ale ešte úplne nevyplatených). V praxi sa tvorí z odhadov pre jednotlivé poistné udalosti, kedy likvidátor ocení predpokladanú výšku (budúceho) poistného plnenia na základe svojho odhadu alebo podľa zavedenej praxe v poisťovni a na základe prípadných ďalších informácií a vývoja daného prípadu svoje odhady postupne spresňuje.

2.) *Technická rezerva IBNR (Incurred But Not Reported)*

Táto rezerva je určená na krytie záväzkov z poistných udalostí vzniknutých v bežnom účtovnom období, ale v tomto účtovnom období nenahlásených. Pre kvalifikovaný odhad IBNR rezervy sa používajú matematicko – štatistické metódy, ktoré berú do úvahy aj vonkajšie faktory ako je inflácia (napríklad nárast cien stavebného materiálu), zmeny vyhlášok a predpisov.

RBNS a IBNR rezervy spolu tvoria rezervu, ktorú nazývame **IBNS rezerva** (***Incurred But Not Settled***), kryje záväzky z poistných udalostí vzniknutých v bežnom účtovnom období, ale v tomto období nevybavených.

Výška technickej rezervy na poistné plnenie v životnom a neživotnom poistení sa určuje ako súčet technických rezerv na poistné plnenia vypočítaných pre jednotlivé poistné udalosti. Ak jej výšku nie je možné určiť takýmto spôsobom, použijeme na jej výpočet poistno – matematické metódy.

1.1.3 Technická rezerva na poistné prémie a zľavy

Technická rezerva na poistné prémie a zľavy je určená na krytie nákladov a zliav poskytnuté v súlade s poistnými zmluvami. Takáto rezerva sa vytvára napríklad na zľavy za frekvenciu platenia bežného poistného (napríklad klient zaplatí poistné vždy na rok dopredu namiesto mesačných splátok) alebo za oslobodenie od platenia poistného v prípade invalidity, kedy pri nastúpení invalidity poistenca pokračuje poistenie v nezmenenej podobe bez platenia poistného, alebo za bonusy v havarijnom poistení (napríklad zmluvne zaručené zľavy poistného podľa počtu minulých bezškodových rokov).

Ak je súčasťou zjednaného poistného plnenia podiel na zisku, zahrňuje sa v tejto rezerve (pokiaľ už nie je zahrnutý v rezerve na životné alebo neživotné poistenie), pričom podielom na zisku sa rozumie alikvótna časť prípadného celkového prebytku hospodárenia poisťovne v súvislosti s vykonávaním poistenia pripadajúci na danú poistnú zmluvu a použitou v prospech poistenca. Technická rezerva na poistné prémie a zľavy sa určuje ako súhrn technických rezerv vypočítaných podľa jednotlivých zmlúv.

1.1.4 Technická rezerva na úhradu záväzkov voči Slovenskej kancelárii poisťovateľov vznikajúcich z činností

Technická rezerva na úhradu záväzkov voči Slovenskej kancelárii poisťovateľov vznikajúcich z činností je určená na plnenie záväzkov vznikajúcich z činností, na ktoré Slovenská kancelária poisťovateľov nemá vytvorené aktíva. Poisťovňa tvorí túto rezervu

v rozsahu, v akom sa podieľa na celkových záväzkoch vznikajúcich z činností podľa osobitného predpisu daného zákonom.

1.1.5 Technická rezerva na životné poistenie

Technická rezerva na životné poistenie je tvorená na krytie záväzkov zo životného poistenia. Je to najdôležitejšia rezerva v rámci klasických životných poistení. Počíta sa poistno – matematickými metódami ako súhrn rezerv podľa jednotlivých zmlúv prospektívne tak, že od hodnoty budúcich záväzkov vrátane podielov na zisku alebo podielov na prebytku poistného a nákladov spojených so správou poistení sa odpočíta hodnota budúceho poistného. Rozdiel medzi poistnou čiastkou (čiastka splatná v prípade poistnej udalosti) a vytvorenou technickou rezervou na životné poistenie sa nazýva rizikový kapitál. Ak je technická rezerva záporná, nahradí sa nulou.

Netto rezervu v životnom poistení ${}_tV_x^{netto}$ (netto rezerva na rozdiel od brutto rezervy nezohľadňuje správne náklady poisťovne) na konci t – teho roka poistenia uzatvoreného vo vstupnom veku x na poistnú dobu n môžeme všeobecne zapísať ako

$${}_tV_x^{netto} = \frac{\sum_{j=t+1}^n (a_j \cdot l_{x+j} \cdot v^{x+j} + b_j \cdot d_{x+j-1} \cdot v^{x+j})}{l_{x+t} \cdot v^{x+t}} - P \cdot \frac{\sum_{j=t+1}^n l_{x+j-1} \cdot v^{x+j-1}}{l_{x+t} \cdot v^{x+t}},$$

kde

l_x je počet osôb dožívajúcich sa veku x podľa používanej úmrtnostnej tabuľky,

d_x je počet zomrelých vo veku x podľa používanej úmrtnostnej tabuľky,

$v = \frac{1}{(1+i)}$ je diskontný faktor zodpovedajúci technickej miere i ,

P je ročné poistné platené vždy na začiatku roka poistenia,

a_t je poistné plnenie vyplatené pri dožití sa konca t – teho roka poistenia,

b_t je poistné plnenie vyplatené pri úmrtí počas t – teho roka poistenia.

Na výpočet rezervy sa používajú rovnaké úmrtnostné tabuľky a rovnaká technická úroková miera (l_x, d_x, i) ako na výpočet poistného.

Technická úroková miera i predstavuje zaručené zhodnotenie poistného výsledku pre klienta, keďže je zakalkulovaná priamo do výpočtu poistných sadzieb a rezervy. Maximálnu výšku technickej úrokovej miery stanovuje Národná banka Slovenska, avšak neplatí pre produkty životného poistenia s jednorazovým poistným, ak poistná doba netrvá dlhšie ako päť rokov. V roku 2008 stanovila Národná banka Slovenska maximálnu výšku technickej úrokovej miery na 2,5%.

Bruttorezerva v životnom poistení ${}_tV_x^{brutto}$ navyše zohľadňuje aj správne náklady poisťovne. Bruttorezerva na konci t – toho roka poistenia uzatvoreného vo vstupnom veku x na poistnú dobu n s bežne plateným poistným má tvar

$${}_tV_x^{brutto} = {}_tV_x^{netto} - A \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t, n-t}}{\ddot{a}_{x, n}} = {}_tV_x^{netto} - A \cdot \frac{\frac{\sum_{j=t+1}^n l_{x+j-1} \cdot v^{x+j-1}}{l_{x+t} \cdot v^{x+t}}}{\frac{\sum_{j=1}^n l_{x+j-1} \cdot v^{x+j-1}}{l_x \cdot v^x}},$$

kde A označuje počiatkové jednorazové náklady poisťovne (v životných poisťovniach sa väčšinou odhadujú v percentách α poistnej čiastky S , teda $A = \alpha \cdot S$). Podstatnú časť počiatkových jednorazových nákladov tvoria získavacie náklady na provízie vyplácané poisťovňou ako odmena predajcom za zrealizovaný predaj poistenia.

Člen odčítaný od nettorezervy sa nazýva zillmerizačný rozdiel a jeho odčítanie od rezervy poistného sa označuje ako zillmerizácia rezervy, namiesto bruttorezervy potom hovoríme o Zillmerovej rezerve. Zillmerizáciu môžeme vysvetliť takto: počiatkové náklady A vynaloží poisťovňa hneď pri uzatvorení poistenia (napríklad províziu agentovi vyplatí bezprostredne po uskutočnení predaja). Pri bežnom poistnom ich od klienta dostane naspäť až pri splátkach poistného, takže sa stáva veriteľom klienta. Pri predčasnom zániku poistenia (poistná udalosť alebo zrušenie poistenia) by poisťovňa o dlžnú časť prišla, preto sa znižuje rezerva poistného (konto klienta) v danom čase vždy o neumorenú časť počiatkových nákladov, ktorá zrejme predstavuje práve zillmerizačný rozdiel. Zillmerizácia môže viesť k záporným hodnotám Zillmerovej rezervy (zvyčajne k tomu dochádza v prvých rokoch dlhodobých poistných zmlúv) a v tomto prípade sa záporné

hodnoty nahradia nulou. Zo zákona je povolená zillmerizácia do výšky obstarávacích nákladov započítaných do poistného v životnom poistení.

1.1.6 Technická rezerva na krytie rizika z investovania finančných prostriedkov v mene poistených

Technická rezerva na krytie rizika z investovania finančných prostriedkov v mene poistených je určená na krytie záväzkov poisťovni voči poisteným pri tých odvetiach poistenia, kedy na základe poistnej zmluvy nesie investičné riziko poistenec. Uplatňuje sa hlavne v rámci investičného životného poistenia.

1.1.7 Technická rezerva na vyrovňovanie mimoriadnych rizík v poistnom odvetví neživotného poistenia

Technická rezerva na vyrovňovanie mimoriadnych rizík sa zvyčajne nazýva aj výkyvová rezerva (*equalization reserve*). Tvorí sa z časti poistného a je určená na vyrovňovanie zvýšených nákladov na poistné plnenia, ktoré vznikli kolísaním škodového priebehu (kolísaním pomeru medzi poistným plnením a poistným) v dôsledku skutočností nezávislých na vôli poisťovne. Takéto kolísanie nemusí byť stále náhodné, ale môže mať racionálne dôvody (síce zvyčajne ťažko predpovedateľné), ako sú klimatické výkyvy, ekonomické cykly a pod.

V každom prípade je však žiadúce, aby poisťovňa v období s priaznivým škodovým priebehom vytvárala zo vznikajúceho prebytku poistného (nad dlhodobým priemerom) technickú rezervu, z ktorej by sa mohlo čerpať v rokoch s nepriaznivým škodovým priebehom.

Vytvára sa vo výške 75 % technického zisku, maximálne 12 % predpísaného poistného zníženého o podiel zaistovateľa, ale len dovtedy, kým nedosiahne hodnotu 150 % predpísaného poistného zníženého o podiel zaistovateľa za posledných päť rokov. Poisťovňa nie je povinná túto rezervu tvoriť, ak predpísané poistné predstavuje menej než 4 % z celkového predpísaného poistného alebo ak je prijaté poistné z neživotného poistenia menšie ako 2 500 000 eur.

1.1.8 Ďalšie technické rezervy

Ďalšie technické rezervy si poisťovňa vytvára, ak nie je schopná uhradiť záväzky voči poisteným z niektorej skôr spomínanej rezervy. Na tvorbu týchto rezerv je potrebný predchádzajúci súhlas Národnej banky Slovenska vydaný na základe žiadosti poisťovne. Medzi takéto rezervy patrí napríklad rezerva na katastrofické riziká ako sú zemetrasenia, záplavy, sopečný výbuch, atómové riziká, zodpovednosti za farmaceutický výrobok a ďalšie.

Občas si poisťovňa vytvára **CBNI technickú rezervu** (*Covered But Not Incured*). Táto rezerva je určená na krytie záväzkov z nevzniknutých a neoprávnených poistných udalostí. V takom prípade hovoríme o poistných podvodoch.

2 Cieľ a metodika práce a metódy skúmania

Cieľ práce spočíva v priblížení metód vhodných na odhad technických rezerv. Objasníme si postupy niektorých deterministických odhadov technických rezerv, ktoré stále patria medzi najpoužívanejšie. Zameriame sa na stochastický prístup k odhadu rezerv pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu, ktorý je v dnešnej dobe čoraz viac používaný aktuármi vďaka jeho nenáročným predpokladom a poskytnutím obsiahlejších informácií o odhadovaných technických rezervách. I napriek tomu je na Slovensku málo literatúry, ktorá by sa venovala teoretickým i praktickým postupom zovšeobecnených lineárnych modelov.

Teoreticky si ukážeme poistno – matematické metódy na dokončenie IBNR trojuholníka. Niektoré uvedené teoretické postupy aplikujeme na dáta, čím si ukážeme, že deterministický prístup metódy Chain Ladder poskytuje rovnaké výsledky ako stochastický prístup zovšeobecneným lineárnym modelom s Poissonovým rozdelením poistných plnení.

2.1 Odhad technických rezerv

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [2], [3] a [4].

Najväčší podiel kapitálu má poisťovňa práve z technických rezerv. Častokrát dosahujú až mnohonásobok ročného príjmu poisťovne zo získaného poistného a mnohonásobok jej zisku. Práve preto musí poisťovňa venovať mimoriadnu pozornosť dôveryhodnému a čo najpresnejšiemu odhadu výšky technických rezerv. Ich podcenenie a nepresnosť môže viesť k veľkým hospodárskym problémom poisťovne, ktoré sa môžu prejaviť aj až o niekoľko rokov, i keď za toto obdobie vykazuje poisťovňa fiktívny zisk (z dôvodu toho, že tieto straty sú skryté). V tejto kapitole si bližšie priblížime niektoré vyššie spomínané poistno – matematické metódy, ktoré sa používajú na odhadovanie výšky technických rezerv. Väčšinou vychádzajú z minulých dát usporiadaných do tzv. vývojových trojuholníkov (*run-off triangle*). Vývojové trojuholníky obsahujú doteraz vyplatené poistné plnenia zapísané do riadkov podľa obdobia vzniku a do stĺpcov podľa obdobia vývoja, na diagonálach vývojového trojuholníka tak vzniká členenie podľa kalendárneho roka. Zvyčajne sa používajú ročné vývojové trojuholníky, teda obsahujú ročné účtovné obdobie, aj keď v praxi sa niekedy pracuje s polročnými alebo štvrtročnými vývojovými trojuholníkmi. Metódy vychádzajúce z vývojových trojuholníkov sa nazývajú trojuholníkové metódy. Ich princíp spočíva v doplnení vývojových trojuholníkov na obdĺžniky hodnotami (odhadmi) výšky škôd $X_{i,j}$ a predovšetkým v nájdení odhadu celkovej výšky škôd $X_{i,\infty}$, ktoré vznikli v roku i , $i = 0, 1, \dots, n$. Medzi trojuholníkové metódy patrí metóda Chain Ladder, separačná metóda, metóda Cape Cod, Bornhuetterova – Fergusonova metóda, de Vylderova metóda najmenších štvorcov, metóda London Chain Ladder, a ďalšie. Niektoré z nich si priblížime.

Vysvetlenia pojmov:

- *Rok vzniku poistného plnenia (origin year)*

Je kalendárny rok vzniku poistnej udalosti (napríklad prvý riadok sa týka poistných udalostí, ktoré vznikli v prvom kalendárnom roku niekoľkoročného minulého obdobia použitého na konštrukciu trojuholníka).

- *Rok vývoja poistného plnenia (development year)*

Je počet rokov, ktoré uplynuli od vzniku poistných udalostí (napríklad prvý stĺpec, zvyčajne označený ako stĺpec „0“, obsahuje poistné plnenia vyplatené ešte v roku vzniku poistných udalostí).

- *Kalendárny rok poistných plnení (calendar year)*

Reprezentuje všetky poistné plnenia v danom kalendárnom roku (napríklad vedľajšia diagonála obsahuje poistné plnenia vyplatené v minulom roku, teda v poslednom kalendárnom roku niekoľkoročného minulého obdobia použitého na konštrukciu trojuholníka).

- *Kumulatívny vývojový trojuholník (run-off triangle for cumulative losses)*

Vznikne postupnou kumuláciou (nahromadením) riadkových hodnôt (nekumulatívneho) vývojového trojuholníka, pričom $X_{i,j}$ vyjadruje celkovú výšku škôd, ktoré vznikli v roku i a boli uhradené do konca roka j , $Y_{i,k}$ označuje výšku škôd, ktoré vznikli v roku i a boli uhradené v roku k a platí

$$X_{i,j} = \sum_{k=0}^j Y_{i,k}, \quad i = j = 0, 1, \dots, n \text{ a } n \text{ vyjadruje maximálny počet rokov}$$

potrebných do vyplatenia poistnej udalosti od jej vzniku.

Rok vzniku	Rok vývoja						
	0	1	...	j	...	$n-1$	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	...	$X_{0,j}$	...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	...	$X_{i,j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$n-1$	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$					
n	$X_{n,0}$						

Tabuľka 2.1: Kumulatívny vývojový trojuholník

2.1.1 Metóda Chain Ladder

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [5] a [8].

Metóda Chain Ladder sa označuje aj ako trojuholníková metóda alebo stupňovitá metóda. Vychádza z predpokladu, že pomer kumulatívnych poistných plnení medzi susednými rokmi vývoja zostáva pre jednotlivé roky vzniku približne rovnaký.

2.1.1.1 Neupravená metóda Chain Ladder

Neupravená metóda Chain Ladder vychádza z vývojového trojuholníka (Tabuľka 2.1: Kumulatívny vývojový trojuholník). Hodnoty $X_{i,j}$ zvyknú byť vyjadrené v rovnakých finančných jednotkách. Ak sú vyjadrené vo finančných jednotkách bežného roka, hovoríme o metóde Chain Ladder upravenej o infláciu.

Pre poistné plnenie $P_{i,j}$ platí

$$P_{i,j} = \begin{cases} X_{i,j} & j = 0 \\ X_{i,j} - X_{i,j-1} & j \neq 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

pričom $P_{i,j}$ je poistné plnenie na poistné udalosti, ktoré vznikli v roku i , a boli zaplatené vo vývojovom roku j .

Ďalej platí

$$t_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}} \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, n \text{ a } i = 0, 1, 2, \dots, n-j,$$

kde $t_{i,j}$ označuje veličinu, ktorú nazývame vývojový koeficient alebo tiež spojovací pomer.

Základnou podmienkou použitia metódy Chain Ladder je, že ani jedno poistné plnenie $X_{i,j}$ nesmie byť nulové, $X_{i,j} \neq 0$, vývojové koeficienty $t_{i,j}$ sú približne rovnaké pre pevné j a $i = 1, 2, \dots, n-j$ a nevykazujú žiaden trend. Vypočítame vývojový faktor b_j , ktorý získame spriemerovaním vývojových koeficientov $t_{0,j}, t_{1,j}, \dots, t_{n-j,j}$, často používame obyčajný aritmetický priemer

$$b_j = \frac{1}{n-j+1} \sum_{i=0}^{n-j} t_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

ale zvyčajne sa používa vážený aritmetický priemer

$$b_j = \sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j} \cdot t_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

s váhami

$$w_{i,j} = \frac{X_{i,j-1}}{\sum_{k=0}^{n-j} X_{k,j-1}}.$$

Potom vieme vývojový faktor b_j upraviť do tvaru

$$b_j = \sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j} \cdot t_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{X_{i,j-1}}{\sum_{k=0}^{n-j} X_{k,j-1}} \cdot \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} X_{i,j-1}}.$$

V praxi sa najčastejšie využíva práve v tomto tvare.

Predpokladáme, že poistné plnenia v jednotlivých vývojových rokoch majú podobný charakter aj v nasledujúcich rokoch. Potom pre odhad kumulatívnych poistných plnení na nasledujúce roky platí

$$X_{i,j} = X_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^j b_k = X_{i,j-1} \cdot b_j, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=n-i+1, n-i+2, \dots, n.$$

Odhadnuté kumulatívne poistné plnenia na nasledujúce roky sa vo vývojovom trojuholníku nachádzajú pod diagonálou.

Odhadované technické rezervy $P_{i,j}$, $i=1,2,\dots,n$, $j=n-i+1, n-i+2, \dots, n$, ktoré musí poisťovňa vytvoriť pre poistné plnenia na poistné udalosti, ktoré vznikli v i -tom roku a budú vyplatené v j -tom vývojovom roku, vypočítame podľa vzťahu (2.1) z týchto odhadnutých kumulatívnych poistných plnení.

Odhad celkových technických rezerv na poistné plnenia z poistných udalostí, ktoré vznikli v rokoch 1 až n a doteraz ešte neboli vyplatené dostaneme súčtom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+1}^n P_{i,j}.$$

Technické rezervy dokážeme vyčíslieť podľa rokov vzniku poistnej udalosti aj podľa budúcich rokov uhradenia poistných plnení.

Metóda Chain Ladder vracia relatívne spoľahlivé výsledky, ak je portfólio stabilné a inflácia má stabilnú úroveň, prípadne je nulová. Nedostatkom je fakt, že pri výpočte násobíme najmenej presné hodnoty s najväčšími faktormi. Aj napriek tejto nevýhode sa metóda Chain Ladder v praxi často využíva a to pre výhodu, ktorou je jednoduchosť a nenáročnosť potrebných údajov týkajúcich sa poistných udalostí.

2.1.1.2 Metóda Chain Ladder s inflačným vyrovnaním upravená o úrokovú mieru

Klasická metóda Chain Ladder uvažuje o stabilnej miere inflácie, čo nie je vždy možné vzhľadom na to, že sa vývojové trojuholníky týkajú pomerne dlhého časového obdobia. Z tohto dôvodu sa odporúča zahrnúť do výpočtov technických rezerv pomocou metódy Chain Ladder aj vplyv inflácie.

Potom sa postup výpočtu môžeme zhrnúť do piatich krokov:

- 1.) Z kumulatívneho vývojového trojuholníka vyrátame poistné plnenia, ktoré boli reálne vykonané podľa vzťahu:

$$P_{i,j} = X_{i,j} - X_{i,j-1} \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$P_{i,0} = X_{i,0} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- 2.) Všetky známe vyplatené poistné plnenia prepočítame na úroveň cien ku koncu n – tého vývojového roka podľa mier inflácie z minulých rokov.
- 3.) Vývojový trojuholník z týchto upravených finančných platieb prepočítame na kumulatívny.
- 4.) Aplikujeme klasickú metódu Chain Ladder na odhad technických rezerv.
- 5.) Odhadnuté technické rezervy diskontujeme k dátumu ich odhadu o poistno – technickú úrokovú mieru.

2.1.1.3 Zovšeobecnenie metódy Chain Ladder

Sú známe viaceré zovšeobecnenia metódy Chain Ladder. Jedno z nich zovšeobecňuje vzorec na výpočet vývojových faktorov (2.3) takto:

$$b_{i,j} = b_j^{(m)} = \sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j}^{(m)} t_{i,j} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

kde váhy sú

$$w_{i,j}^{(m)} = \frac{X_{i,j-1}^m}{\sum_{k=0}^{n-j} X_{k,j-1}^m} \quad m > 0.$$

Kumulatívne poistné plnenia $X_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = n - i + 1, n - i + 2, \dots, n$ potom získame rovnakým postupom ako pri klasickej metóde Chain Ladder. Toto zovšeobecnenie sa nazýva metóda Chain Ladder m – teho rádu.

Môžeme vidieť, že pre $m=0$ dostávame metódu Chain Ladder s vývojovými koeficientmi počítanými ako obyčajný aritmetický priemer, teda vzorec (2.2). Pre $m=1$ je to vzorec (2.3), takže vývojové koeficienty dostaneme pomocou váženého aritmetického priemeru. Pre $m \rightarrow \infty$ je hodnota vývojového faktora rovná hodnote vývojového koeficienta, $b_j = t_{i,j}$, pre také i , pre ktoré platí $X_{i,j-1} = \max \{X_{0,j-1}, X_{1,j-1}, \dots, X_{n-j+1,j-1}\}$.

2.1.1.4 Metóda London Chain Ladder

Metóda London Chain Ladder vychádza zo zovšeobecnenia klasickej metódy Chain Ladder špeciálne pre $m=2$. Snažíme sa nájsť také hodnoty $b_1, b_2, \dots, b_n$, aby výraz

$$z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-j} (X_{i,j-1} - X_{i,j})^2,$$

nadobúdal minimálnu hodnotu. Takéto hodnoty existujú a dajú sa jednoznačne určiť z

$$b_j = \sum_{i=0}^{n-j} w_{i,j}^2 t_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

kde

$$w_{i,j}^2 = \frac{X_{i,j-1}^2}{\sum_{k=0}^{n-j} X_{k,j-1}^2}.$$

2.1.2 Separačná metóda

V nasledujúcej kapitole som čerpala najmä z [2], [4], [5] a [8].

Výpočet technickej rezervy pomocou metódy Chain Ladder a jej úprav prestal vyhovovať v polovici sedemdesiatych rokov minulého storočia, pretože sa miera inflácia neustále menila a odhad jej budúceho priebehu bol čoraz viac zložitejší. Vtedy prišiel

austrálsky aktuár Greg Taylor s postupom výpočtu technických rezerv pomocou separačnej metódy, ktorej výhodou je najmä to, že jej súčasťou je aj odhad mier inflácie.

Východiskom tejto metódy je vývojový trojuholník. Rozdiel od metódy Chain Ladder je, že poznáme počet škôd N_i pre každý rok vzniku poistnej udalosti. V prípade, že by neexistovala inflácia, bolo by vyplatené konštantné poistné plnenie v každom vývojovom roku j bez ohľadu na rok vzniku i .

Označme r_j podiel škôd vo vývojovom roku j z celkových škôd. Predpokladáme, že nezávisí od roku vzniku i poistnej udalosti a platí

$$r_0 + r_1 + \dots + r_k = 1,$$

kde k je maximálny počet rokov potrebných na zlikvidovanie škody.

Symbol λ_{i+j} predstavuje výšku skutočnej priemernej individuálnej škody v roku $i+j$, kde i je rok vzniku poistnej udalosti a j je vývojový rok. Hodnoty λ_{i+j} sú konštantné pre každý kalendárny rok, teda hodnota λ je konštantná na každej diagonále vývojového trojuholníka. Hodnoty λ_{i+j} v jednotlivých rokoch sú rozdielne kvôli zmene miery inflácie.

Pri týchto predpokladoch platí

$$P_{i,j} = N_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}, \quad (2.4).$$

Takéto poistné plnenia vieme prepísať do vývojového trojuholníka (Tabuľka 2.2: Vývojový trojuholník poistných plnení $P_{i,j}$ vyjadrených vzťahom (2.4)).

i	N_i	Rok vývoja						
		0	1	...	j	...	$k-1$	k
0	N_0	$N_0 r_0 \lambda_0$	$N_0 r_1 \lambda_1$	...	$N_0 r_j \lambda_j$	...	$N_0 r_{k-1} \lambda_{k-1}$	$N_0 r_k \lambda_k$
1	N_1	$N_1 r_0 \lambda_1$	$N_1 r_1 \lambda_2$	...	$N_1 r_j \lambda_{j+1}$	...	$N_1 r_{k-1} \lambda_k$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
i	N_i	$N_i r_0 \lambda_i$	$N_i r_1 \lambda_{i+1}$	...	$N_i r_j \lambda_{i+j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$k-1$	N_{k-1}	$N_{k-1} r_0 \lambda_{k-1}$	$N_{k-1} r_1 \lambda_k$					
k	N_k	$N_k r_0 \lambda_k$						

Tabuľka 2.2: Vývojový trojuholník poistných plnení $P_{i,j}$ vyjadrených vzťahom (2.4)

Z vývojového trojuholníka poistných plnení $P_{i,j}$ chceme odhadnúť hodnoty $r_0, r_1, \dots, r_k$ a na základe nich aj hodnoty $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Vďaka týmto odhadom môžeme doplniť vývojový trojuholník do obdĺžnika.

Ďalej vytvoríme maticu štandardizovaných hodnôt

$$S_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{N_i} = r_j \cdot \lambda_{i+j}, \quad i, j \geq 0, \quad i+j \leq k,$$

ktorú môžeme rovnako zapísať do vývojového trojuholníka (Tabuľka 2.3: Vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt).

Rok vzniku	Rok vývoja						
	0	1	...	j	...	$k-1$	k
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,j}$	...	$S_{0,k-1}$	$S_{0,k}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,j}$	...	$S_{1,k-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$k-1$	$S_{k-1,0}$	$S_{k-1,1}$					
k	$S_{k,0}$						

Tabuľka 2.3: Vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt

Na základe vzťahu pre maticu štandardizovaných hodnôt môžeme vývojový trojuholník prepísať do tvaru, s ktorým budeme ďalej pracovať (Tabuľka 2.4: Upravený vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt).

Rok vzniku	Rok vývoja						
	0	1	...	j	...	$k-1$	k
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	...	$r_j\lambda_j$	...	$r_{k-1}\lambda_{k-1}$	$r_k\lambda_k$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	...	$r_j\lambda_{j+1}$	...	$r_{k-1}\lambda_k$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
i	$r_0\lambda_i$	$r_1\lambda_{i+1}$	...	$r_j\lambda_{i+j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$k-1$	$r_0\lambda_{k-1}$	$r_1\lambda_k$					
k	$r_0\lambda_k$						

Tabuľka 2.4: Upravený vývojový trojuholník štandardizovaných hodnôt

Chceme odhadnúť hodnoty r_j , $j=0,1,\dots,k$ a λ_{i+j} , $0 \leq i+j \leq k$. Na to nám poslúžia vstupy na i -tej diagonále, ktoré označíme d_i pre $i=1,2,\dots,k$.

Potom platí

$$\begin{aligned} d_k &= S_{k,0} + S_{k-1,1} + \dots + S_{1,k-1} + S_{0,k} = \\ &= r_0 \lambda_k + r_1 \lambda_k + \dots + r_{k-1} \lambda_k + r_k \lambda_k = \\ &= \lambda_k \cdot (r_0 + r_1 + \dots + r_k) = \lambda_k \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že d_k je odhad λ_k , $d_k = \hat{\lambda}_k$. Jediný vstup s r_k , ktorý obsahuje vývojový trojuholník, je $S_{0,k} = r_k \lambda_k$, odkiaľ dostaneme odhad $\hat{r}_k$

$$\hat{r}_k = \frac{S_{0,k}}{\hat{\lambda}_k}.$$

Rovnako postupujeme pre odhad λ_{k-1} a r_{k-1}

$$\begin{aligned} d_{k-1} &= S_{k,0} + S_{k-1,1} + \dots + S_{1,k-1} = \\ &= r_0 \lambda_{k-1} + r_1 \lambda_{k-1} + \dots + r_{k-1} \lambda_{k-1} = \\ &= \lambda_{k-1} \cdot (r_0 + r_1 + \dots + r_{k-1}) = \\ &= \lambda_{k-1} \cdot (1 - r_k) \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}_{k-1} = \frac{d_{k-1}}{1 - \hat{r}_k}. \end{aligned}$$

Analogicky pre λ_{k-2} dostaneme odhad

$$\hat{\lambda}_{k-2} = \frac{d_{k-2}}{1 - \hat{r}_k - \hat{r}_{k-1}}.$$

Takto budeme pokračovať, až kým neodhadneme všetky hodnoty $\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_{k-1}, \dots, \hat{\lambda}_0$ a $\hat{r}_k, \hat{r}_{k-1}, \dots, \hat{r}_0$.

Na odhad λ_t pre $t > k$ použijeme predpoklady o vývoji inflácie v ďalších rokoch. Ak predpokladáme, že v sledovanom období je priemerná výška individuálnej škody v stabilnej mene konštantná, potom

$$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} - 1$$

vyjadruje mieru inflácie v roku t .

Pre odhad technickej rezervy na poistné plnenia z poistnej udalosti, ktoré vznikli v roku i a budú vyplatené vo vývojovom roku j platí

$$\hat{P}_{i,j} = N_i \cdot \hat{r}_j \cdot \hat{\lambda}_{i+j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k, \quad k \leq i + j \leq 2k$$

a pre odhad celkových technických rezerv platí

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=k-i+1}^k \hat{P}_{i,j}.$$

2.1.3 Metóda Cape Cod

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [2], [4] a [10].

Metóda Cape Cod dostala názov podľa mesta aktuárskej konferencie, kde bola navrhnutá. Na rozdiel od metódy Chain Ladder a separačnej metódy berie do úvahy aj škodový pomer. Škodový pomer je podiel poistného plnenia a poistného.

Ak sú riadky vývojového trojuholníka tvorené podľa roku vzniku poistnej udalosti, na výpočet škodového pomeru použijeme zaslúžené poistné, ak sú tvorené podľa roku uzatvorenia poistenia, na stanovenie škodového pomeru sa použije predpísané poistné.

Pri odhade výšky technickej rezervy vychádzame z kumulatívneho vývojového trojuholníka, ktorý obsahuje doteraz vyplatené poistné plnenia $X_{i,j}$, ktoré vznikli v roku i

a budú vyplatené vo vývojovom roku j . Pre jednoduchosť predpokladáme konštantnú výšku zaslúženého poistného.

Najprv vypočítame koeficienty vývoja b_j , $j = 2, 3, \dots, n$, pre ktoré platí vzťah

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j-1}}$$

a z nich potom kumulatívne koeficienty m_j , $j = 2, 3, \dots, n$,

$$\begin{aligned} m_2 &= b_2 \\ m_3 &= b_2 \cdot b_3 \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \\ m_n &= b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n \end{aligned}$$

a inverzné koeficienty i_j , $j = 2, 3, \dots, n$,

$$i_j = \frac{1}{m_j}.$$

Pre každý rok vzniku poistnej udalosti vypočítame upravené zaslúžené poistné, ktoré dostaneme vynásobením zaslúženého poistného a inverzného koeficientu. Sčítaním diagonálnych prvkov v kumulatívnom vývojovom trojuholníku získame celkové poistné plnenie. Podielom tohto celkového poistného plnenia a upraveného zaslúženého poistného dostaneme škodový pomer.

Technické rezervy pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí vypočítame vynásobením zaslúženého poistného, škodového pomeru a doplnku príslušného inverzného koeficienta i'_j , ktorý dostaneme zo vzťahu

$$i'_j = 1 - i_j, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Celkovú výšku technických rezerv dosiahneme súčtom technických rezerv pre jednotlivé roky vzniku i .

2.1.4 Bornhuetterova – Fergusonova metóda

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [2], [4] a [10].

Bornhuetterova – Fergusonova metóda sa podobá metóde Cape Cod, ale namiesto celkového škodového pomeru pracuje s individuálnymi škodovými pomermi. Berie do úvahy, že za dlhšie časové obdobie sa bude škodový pomer z roka na rok meniť.

Aj táto metóda vychádza z kumulatívneho vývojového trojuholníka. Na rozdiel od metódy Cape Cod nemusí byť výška zaslúženého poistného pre roky $1, 2, \dots, n$ konštantná, ale môže sa meniť.

Postup odhadu technických rezerv je podobný ako pri metóde Cape Cod. Najprv vypočítame koeficienty vývoja b_j , kumulatívne koeficienty m_j , inverzné koeficienty i_j aj doplnky inverzných koeficientov i'_j .

Podľa vzťahu (2.1) vypočítame poistné plnenia $P_{i,j}$, ktoré následne predelíme zaslúženým poistným z_i pre jednotlivé roky vzniku a dostaneme individuálne škodové pomery. Vznikne nám nový vývojový trojuholník (Tabuľka 2.5: Vývojový trojuholník škodových pomerov).

Rok vzniku	Rok vývoja						
	1	2	...	j	...	$n-1$	n
1	$\frac{P_{1,1}}{z_1}$	$\frac{P_{1,2}}{z_1}$	...	$\frac{P_{1,j}}{z_1}$	...	$\frac{P_{1,n-1}}{z_1}$	$\frac{P_{1,n}}{z_1}$
2	$\frac{P_{2,1}}{z_2}$	$\frac{P_{2,2}}{z_2}$	...	$\frac{P_{2,j}}{z_2}$	...	$\frac{P_{2,n-1}}{z_2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
i	$\frac{P_{i,1}}{z_i}$	$\frac{P_{i,2}}{z_i}$	...	$\frac{P_{i,j}}{z_i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$n-1$	$\frac{P_{n-1,1}}{z_{n-1}}$	$\frac{P_{n-1,2}}{z_{n-1}}$					
n	$\frac{P_{n,1}}{z_n}$						

Tabuľka 2.5: Vývojový trojuholník škodových pomerov

Tento vývojový trojuholník doplníme do obdĺžnika extrapoláciou škodových pomerov v jednotlivých rokoch vývoja. Škodový pomer v každom riadku spočítame a dostaneme celkový škodový pomer s_i .

Výšku technických rezerv R_i pre príslušné roky vypočítame vynásobením škodového pomeru s_i , zaslúženého poistného z_i a doplnku inverzného koeficientu i'_j

$$R_i = s_i \cdot z_i \cdot i'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Celkovú výšku technických rezerv R získame súčtom jednotlivých technických rezerv

$$R = \sum_{i=1}^n R_i.$$

2.2 Odhad technických rezerv pomocou GLM

Všetky metódy odhadujúce výšku technickej rezervy, ktoré sme doteraz uviedli, vychádzajú z deterministického prístupu. Sú to vlastne bodové odhady, ktoré nám však neposkytujú informáciu o variabilite technickej rezervy. V poisťovniach sa začínajú využívať metódy odhadu technických rezerv založené na stochastickom prístupe. Tie sú náročnejšie na pochopenie, ale dávajú nám viac informácií o odhadovaných technických rezervách.

V takom prípade sa môžeme obrátiť na zovšeobecnený lineárny model (*generalized linear model GLM*). Zovšeobecnený lineárny model je zovšeobecnením klasického lineárneho modelu, pre lepšie pochopenie zovšeobecneného lineárneho modelu si najskôr priblížime klasický lineárny model.

2.2.1 Lineárny model

V nasledujúcej kapitole som čerpala z [6], [7] a [9].

Lineárny aj zovšeobecnený lineárny model majú za cieľ vyjadriť vzťah medzi vysvetľovanou (závislou) premennou Y a vysvetľujúcimi premennými X_j , pričom $j = 1, 2, \dots, k$. Vysvetľované (závislé) premenné sú kvantitatívne premenné, ktorých závislosť od iných premenných zisťujeme. Vysvetľujúce (nezávislé) premenné sú kvantitatívne i kvalitatívne premenné, o ktorých predpokladáme, že vyvolávajú zmeny vysvetľovanej premennej a pomocou ktorých odhadujeme hodnoty vysvetľovanej premennej. Označujeme ich $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_k$ a ich pozorovania sa označujú $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{ik}$, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Majme lineárny regresný model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i,$$

koeficient β_0 nazývame lokujúca konštanta a je interpretovaná ako podmienená stredná hodnota vysvetľovanej premennej Y v prípade, ak všetky vysvetľujúce premenné X_j , ($j=1,2,\dots,k$) nadobúdajú nulovú hodnotu. Splnenie tohto predpokladu je často nereálne, v tom prípade lokujúca konštanta nemá logickú interpretáciu. Napriek tomu je jej zaradenie do lineárneho modelu potrebné kvôli kvalite modelu (lokujúca konštanta β_0 spolu s náhodnou zložkou ε_i odzrkadľujú vplyv neuvažovaných a nezaradených činiteľov na vysvetľovanú premennú) a z geometrického hľadiska (lokujúca konštanta β_0 určuje postavenie regresnej nadroviny v priestore).

Koeficienty β_j , ($j=1,2,\dots,k$) nazývame regresné koeficienty, udávajú, aký prírastok resp. úbytok strednej hodnoty vysvetľovanej premennej Y zodpovedá jednotkovému prírastku vysvetľujúcej premennej X_j pri nezmenených hodnotách ostatných vysvetľujúcich premenných. O prírastku hovoríme v prípade, ak $\beta_j > 0$, o úbytku, ak $\beta_j < 0$. Táto interpretácia regresných koeficientov je však zjednodušená, pretože vyjadruje čistý vplyv vysvetľujúcich premenných X_j na vysvetľovanú premennú Y , čo je korektné len za predpokladu nezávislosti. V praxi sú ale vysvetľujúce premenné X_j navzájom aspoň čiastočne závislé.

Lineárny regresný model môžeme zapísať pomocou matíc a vektorov takto

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}}_{\vec{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\vec{\varepsilon}},$$

kde

$\vec{y}$ je n – prvkový stĺpcový vektor pozorovaných hodnôt vysvetľovanej premennej Y ,

X je matica typu $n \times (k+1)$ pozorovaných hodnôt vysvetľujúcich premenných X_j ,

$\vec{\beta}$ je $(k+1)$ – prvkový stĺpcový vektor neznámych parametrov,

$\vec{\varepsilon}$ je n – prvkový stĺpcový vektor náhodných chýb, predstavuje náhodnú zložku regresného modelu.

2.2.1.1 Predpoklady lineárneho modelu

1. Náhodná zložka lineárneho modelu, ktorá obsahuje náhodné chyby ε_i , má nulovú strednú hodnotu. Pre maticové znenie to znamená, že vektor náhodných chýb $\vec{\varepsilon}$ je nulovým vektorom.

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n; \quad E(\vec{\varepsilon}) = \mathbf{0}_n.$$

2. Predpoklad homoskedasticity; rozptyl náhodných chýb ε_i je konštantný, teda so zmenami hodnôt vysvetľujúcich premenných X_j sa rozptyl σ_ε^2 náhodných chýb nemení.

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ak splnenie predpokladu homoskedasticity nie je reálne, hovoríme o heteroskedasticite.

3. Náhodné chyby ε_i sú pre ľubovoľné dvojice hodnôt vysvetľujúcich premenných $x_i \neq x_j$ vzájomne závislé, takže ich kovariancie sú nulové.

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{pre všetky } i \neq j.$$

Ak je tento predpoklad porušený, hovoríme o autokorelácii chýb.

4. Náhodná zložka ε_i má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ε^2 .

$$\varepsilon_i \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

5. Vysvetľujúce premenné X_j sú nestochastické, to znamená nenáhodné a neexistuje medzi nimi funkčná lineárna závislosť, teda hodnosť matice $\mathbf{X}$ typu $n \times (k+1)$ je $k+1$:

$$h(\mathbf{X}) = k+1 \leq n.$$

6. Predpokladáme, že $\vec{\beta}$ je vektor konštánt, ktorému sa nedávajú žiadne obmedzujúce požiadavky. Často sa presadzuje bayesovský prístup, ktorý považuje jednotlivé zložky tohto vektora za náhodné veličiny, o ktorých máme doplnkové informácie zlepšujúce kvalitu lineárneho modelu.

Vektor náhodných chýb $\vec{\varepsilon}$ má n -rozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt $E(\vec{\varepsilon}) = \mathbf{0}_n$, ktorý je mierou polohy vektora $\vec{\varepsilon}$ a obsahuje stredné hodnoty $E(\varepsilon_i)$ jeho prvkov a s kovariančnou maticou

$$\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon}^2 \end{pmatrix} = \sigma_{\varepsilon}^2 \cdot \mathbf{I}_n.$$

Z predpokladu o nezávislosti náhodných chýb vyplýva, že matica $\mathbf{\Sigma}_{\varepsilon}$ je diagonálna a z predpokladu o homoskedasticite vyplýva, že na diagonále má rovnaké prvky.

Ak sú splnené hore uvedené predpoklady pre klasický lineárny model, potom pre vysvetľovanú premennú Y platí:

- i.) Vektor $\vec{\eta}$ je vektorom podmienených stredných hodnôt vysvetľovanej premennej Y a nazýva sa lineárny prediktor.

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \mu_{y/x_1} \\ \mu_{y/x_2} \\ \vdots \\ \mu_{y/x_n} \end{pmatrix} = E(\vec{y}/\mathbf{X}) = E(\mathbf{X} \cdot \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}) = E(\mathbf{X} \cdot \vec{\beta}) + E(\vec{\varepsilon}) = \mathbf{X} \cdot \vec{\beta};$$

$$E(\mathbf{X} \cdot \vec{\beta}) = \mathbf{X} \cdot \vec{\beta}, \text{ keďže } \mathbf{X} \cdot \vec{\beta} \text{ je konštanta a } E(\vec{\varepsilon}) = 0.$$

- ii.) Kovariančná matica vektora $\vec{y}$ je totožná s kovariančnou maticou náhodnej zložky $\vec{\varepsilon}$.

$$\Sigma_y = C(\vec{y}) = C(X \cdot \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}) = C(X \cdot \vec{\beta}) + C(\vec{\varepsilon}) = \mathbf{0} + C(\vec{\varepsilon}) = \Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{I}_n,$$

pričom $X \cdot \vec{\beta}$ je konštanta, teda $C(X \cdot \vec{\beta}) = \mathbf{0}$.

- iii.) Náhodný vektor $\vec{y}$ má n – rozmerné normálne rozdelenie s parametrami $X \cdot \vec{\beta}$ a $\sigma_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{I}_n$.

$$\vec{y} \sim N(X \cdot \vec{\beta}; \sigma_\varepsilon^2 \cdot \mathbf{I}_n)$$

2.2.2. Zovšeobecnený lineárny model GLM (*Generalized linear model*)

V nasledujúcej kapitole som čerpala hlavne z [9] a [7].

GLM modely obsahujú široký okruh modelov, ktoré zahŕňajú lineárne modely ako špeciálny prípad. Obmedzenia predpokladov normality, ktoré platili pri lineárnych modeloch, v prípade GLM neplatia. Miesto toho predpokladáme, že vysvetľovaná premenná Y je členom exponenciálnej triedy rozdelení. Exponenciálna trieda je široký okruh rozdelení, ktoré majú rovnakú formu hustoty pravdepodobnosti. Rozptyl nie je konštantný, ale môže sa meniť.

Predpoklady zovšeobecneného lineárneho modelu:

(GLM1) Náhodná zložka: Každá zložka Y je nezávislá a pochádza z exponenciálnej triedy rozdelení.

(GLM2) Systematická zložka: Vektor $\vec{\eta}$ je vektorom podmienených stredných hodnôt vysvetľovanej premennej Y a nazýva sa lineárny prediktor.

$$\vec{\eta} = X \cdot \vec{\beta}$$

(GLM3) Väzbová funkcia, link function: Vzťah medzi náhodnými a systematickými zložkami je špecifický väzbovou funkciou g , ktorá je diferencovateľná a monotónna.

$$E[\tilde{Y}] \equiv \bar{\mu} = g^{-1}(\bar{\eta}).$$

2.2.2.1 Exponenciálne triedy rozdelení

Exponenciálne triedy rozdelení sú definované ako

$$f_i(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\},$$

kde $a_i(\phi)$, $b(\theta_i)$ a $c(y_i, \phi)$ sú vopred stanovené funkcie, θ_i je parameter strednej hodnoty a ϕ sa nazýva rušivý parameter.

V praxi je užitočné poznať dve základné vlastnosti exponenciálnych tried:

- rozdelenie je presne špecifikované v podmienkach jeho strednej hodnoty a rozptylu
- rozptyl $Var(Y_i)$ je funkciou strednej hodnoty

$$Var(Y_i) = \frac{\phi \cdot V(\mu_i)}{\omega_i},$$

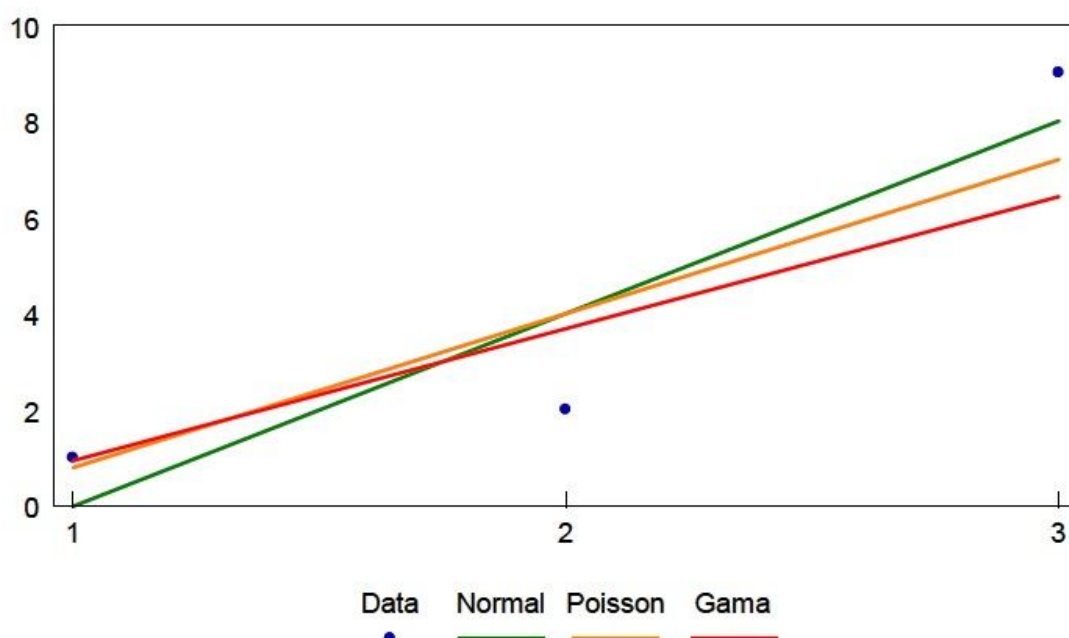
kde $V(x)$ je špeciálna funkcia, ktorá sa nazýva rozptylová funkcia, ω_i je konštanta predstavujúca váhu alebo vierohodnosť (kredibilitu) pozorovania i .

Do exponenciálnej triedy rozdelení patria rozdelenia: normálne, Poissonovo, binomické, gama, inverzný Gaussian a ďalšie. Hodnoty rozptylových funkcií pre konkrétne rozdelenia môžeme zapísať do prehľadnej tabuľky (Tabuľka 2.6: Hodnoty rozptylových funkcií pre konkrétne rozdelenia).

Rozdelenie	Rozptylová funkcia
<i>Normálne</i>	$\frac{V(x)}{1}$
<i>Poisson</i>	x
<i>Gama</i>	x^2
<i>Binomické</i>	$x(1-x)$; počet pokusov = 1
<i>Inverzný Gaussian</i>	x^2

Tabuľka 2.6: Hodnoty rozptylových funkcií pre konkrétne rozdelenia

Výber rozptylovej funkcie ovplyvňuje výsledky zovšeobecného lineárneho modelu. Na grafe (Graf 2.1: GLM graf pre rôzne rozptylové funkcie) môžeme vidieť výsledky troch rôznych, ale veľmi jednoduchých zovšeobecných lineárnych modelov použitých na tri pozorovania (modré body). Hodnoty vysvetľovanej premennej Y sa nachádzajú na y-ovej osi, hodnoty vysvetľujúcej premennej sú na x-ovej osi. Použili sme tri rôzne rozptylové funkcie, normálnu, Poissonovu a gama rozptylovú funkciu.



Graf 2.1: GLM graf pre rôzne rozptylové funkcie

Zovšeobecnený lineárny model s normálnou rozptylovou funkciou, kedy predpokladáme, že každé pozorovanie má rovnaký fixný rozptyl, vytvára vhodné hodnoty, ktoré sa približujú originálnym hodnotám (modrým bodom) s rovnakou váhou.

Naopak, zovšeobecnený lineárny model s Poissonovou rozptylovou funkciou predpokladá, že sa rozptyl zvyšuje s očakávanou hodnotou každého pozorovania. Pozorovania s nižšími očakávanými hodnotami majú nižší predpokladaný rozptyl, čo má za následok vyššiu kredibilitu (dôveryhodnosť). Potom model vytvára vhodné hodnoty, ktoré sú viac ovplyvnené pozorovaniami naľavo s nižšou očakávanou hodnotou ako pozorovania napravo s vyššou očakávanou hodnotou a teda s vyšším predpokladaným rozptylom.

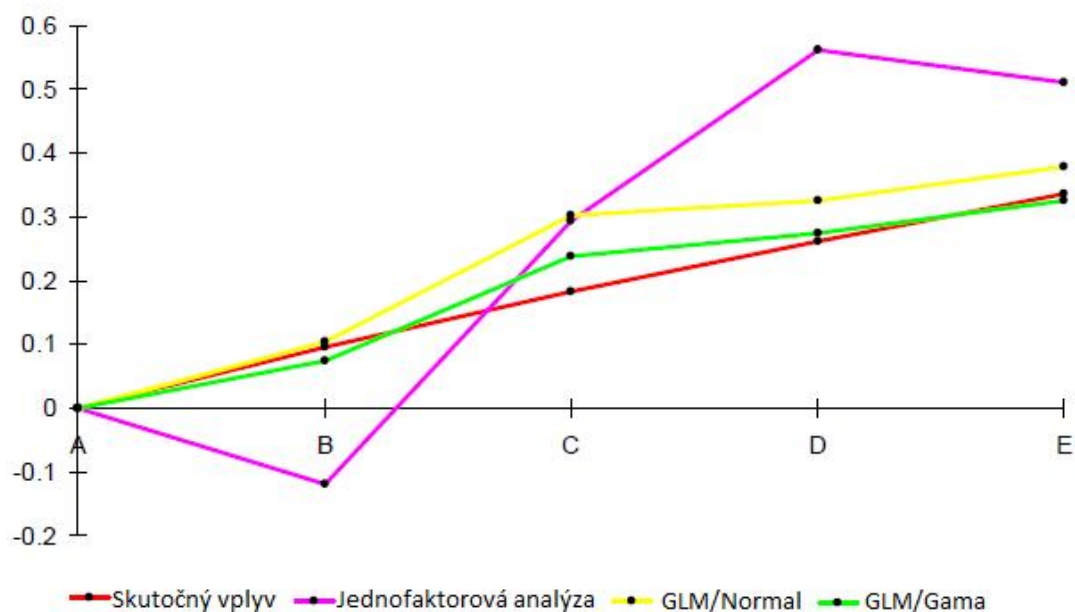
Zovšeobecnený lineárny model s gama rozptylovou funkciou je dokonca omnoho viac ovplyvnený bodom (pozorovaním) naľavo ako bodom napravo.

Ďalší príklad ilustruje vhodnejší a reálnejší výber rozptylovej funkcie, ktorý zlepšuje správnosť modelu. V tomto príklade uvažujeme umelo vygenerované dáta, ktoré reprezentujú poisťné portfólio. Tieto dáta obsahujú niekoľko ratingových faktorov (niektoré z nich sú korelované) a pre každý prípad predpokladáme, že poznáme skutočný vplyv ratingových faktorov.

Škodový priebeh je náhodne vygenerovaný pre každé poisťné s gama rozdelením so strednou hodnotou obsahujúcou predpokladaný efekt ratingových faktorov. Škodový priebeh analyzujeme použitím troch modelov. Vidíme, ako presne výsledky každého modelu súvisia so skutočným vplyvom faktorov.

Použijeme tri metódy modelovania, a to jednofaktorovú analýzu, GLM s normálnou rozptylovou funkciou a GLM s gama rozptylovou funkciou. Výsledky pre jeden ratingový faktor vidíme na grafe (Graf 2.2: Rôznych metódy modelovania). Pozorujeme, že následkom korelovanosti medzi ratingovými faktormi v dátach je jednofaktorová analýza značne skreslená.

GLM s normálnou rozptylovou funkciou sa nachádza bližšie ku skutočným výsledkom, ale všimnime si, že najlepšie výsledky nám dáva GLM s gama rozptylovou funkciou, ktorý je najbližšie ku skutočnému modelu.



Graf 2.2: Rôznych metódy modelovania

Okrem rozptylovej funkcie $V(x)$ definujú rozptyl každého pozorovania aj ďalšie dva parametre, a to rušivý parameter ϕ a apriórne váhy ω_i

$$Var[Y_i] = \frac{\phi \cdot V(\mu_i)}{\omega_i}.$$

2.2.2.2 Apriórne váhy

Apriórne váhy začleňujú do modelu informácie ohľadom známej kredibility všetkých pozorovaní. Napríklad pri modelovaní škodovej frekvencie môže jedno pozorovanie súvisieť s mesačným a iné s ročným časovým obdobím. Pritom pozorovanie z jedného roku nám dáva viac informácií a má menšiu variabilitu ako pozorovanie z jedného mesiaca. Potom môžeme apriórne váhy definovať ako dĺžku časového obdobia pozorovania.

Pre lepšie pochopenie uvidíme príklad použitia apriórnych váh pri modelovaní výšky škôd.

Príklad: Uvažujeme pozorovania škodovosti osobných automobilov, ktoré roztriedime podľa rovnakých kritérií do i súborov. Nech

z_{ik} je výška k – tej škody v i – tom súbore

ω_i je počet škôd v i – tom súbore

Y_i je pozorovaná stredná hodnota výšky škody v i – tom súbore

$$Y_i = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{\omega_i} z_{ik} .$$

Predpokladáme, že pri náhodnom generovaní individuálnych škôd sme použili gama rozdelenie. Označme strednú hodnotu a rozptyl výšky k – tej škody v i – tom súbore ako

$$E[z_{ik}] = m_i$$

a

$$Var[z_{ik}] = \sigma^2 m_i^2 .$$

Predpokladáme, že všetky škody sú nezávislé, teda platí

$$\mu_i = E[Y_i] = \frac{1}{\omega_i} \cdot \sum_{k=1}^{\omega_i} E[z_{ik}] = \frac{1}{\omega_i} \cdot \omega_i m_i = m_i$$

$$Var[Y_i] = \frac{1}{\omega_i^2} \cdot \sum_{k=1}^{\omega_i} Var[z_{ik}] = \frac{1}{\omega_i^2} \cdot \omega_i \sigma^2 m_i^2 = \frac{1}{\omega_i} \cdot \sigma^2 m_i^2 = \mu_i^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\omega_i} .$$

Všeobecný zápis pre všetky exponenciálne rozdelenia je $V(\mu_i) = \mu_i^2$, $\phi = \sigma^2$ a apriórna váha sa rovná počtu škôd v i – tom súbore.

2.2.2.3 Rušivý parameter

V niektorých prípadoch (napríklad Poissonovo rozdelenie) je rušivý parameter ϕ rovný 1. Avšak vo všeobecnosti a pre ďalšie exponenciálne triedy rozdelení je ϕ vopred neznámy a v tom prípade musí byť odhadnutý z dát. Odhadovanie rušivého parametra nie je nutné na vyčíslenie vektora $\vec{\beta}$, ale na zaručenie spoľahlivosti štatistiky. Parameter ϕ môžeme odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Nevýhodou tejto metódy je, že nie je možné derivovať explicitný výraz pre ϕ a tak odhad metódou maximálnej vierohodnosťou môže trvať podstatne dlhšie.

Alternatívou je použiť na odhad:

- momentový odhad (Pearsonovu χ^2 štatistiku) definovanú ako

$$\hat{\phi} = \frac{1}{n-p} \sum_i \frac{\omega_i (Y_i - \mu_i)^2}{V(\mu_i)}$$

- odhad na základe celkovej deviancie

$$\hat{\phi} = \frac{D}{n-p},$$

kde D je celková deviancia.

2.2.2.4 Deviancia

Deviancia je miera toho, ako veľmi sa vhodné zvolené hodnoty líšia od pozorovaní, je teda mierou presnosti. Uvažujme funkciu deviancie $d(Y_i, \mu_i)$ definovanú ako

$$d(Y_i, \mu_i) = 2\omega_i \int_{\mu_i}^{Y_i} \frac{(Y_i - \zeta)}{V(\zeta)} d\zeta ,$$

za podmienky, že $V(x)$ je kladná, $d(Y_i, \mu_i)$ je tiež kladná a vyhovuje podmienkam pre funkciu vzdialenosti. Nech Y_i je pozorovanie a μ_i je stredná hodnota tohto pozorovania, $d(Y_i, \mu_i)$ je mierou rozdielu medzi vhodne zvolenými a aktuálnymi pozorovaniami, ktorá prikladá väčšiu váhu na rozdiel medzi Y_i a μ_i , keď je rozptylová funkcia $V(x)$ malá. Ak Y_i pochádza z rozdelenia s malým rozptylom, potom je väčší dôraz kladený na odlišnosť medzi Y_i a μ_i . Funkcia deviancie $d(Y_i, \mu_i)$ je zovšeobecnenou formou štvorcových chýb. Sčítaním deviančnej funkcie cez všetky pozorovania dostávame celkovú mieru deviancie nazývanú celková deviancia D

$$D = \sum_{i=1}^n 2\omega_i \int_{\mu_i}^{Y_i} \frac{(Y_i - \zeta)}{V(\zeta)} d\zeta .$$

Predelením tohto výrazu rušivým parametrom ϕ dostávame škálovú devianciu D^* , ktorá je zovšeobecnenou formou súčtu štvorcových chýb.

$$D^* = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\omega_i}{\phi} \int_{\mu_i}^{Y_i} \frac{(Y_i - \zeta)}{V(\zeta)} d\zeta$$

Rozdiel dvoch škálových deviancií D_1^* a D_2^* bude mať χ^2 rozdelenie s počtom stupňov voľnosti rovným rozdielu medzi počtami stupňov voľnosti oboch modelov, pričom počet stupňov voľnosti pre jeden model je definovaný ako počet pozorovaní mínus počet parametrov.

$$D_1^* - D_2^* \sim \chi_{df_1 - df_2}^2 ,$$

kde df_1 je počet stupňov voľnosti pre model so škálovou devianciou D_1^* a df_2 je počet stupňov voľnosti pre model so škálovou devianciou D_2^* . χ^2 testy dobrej zhody,

ktoré testujú nezávislosť, závisia od škálovej deviancie. Pre niektoré rozdelenia (napríklad Poissonovo a binomické) predpokladáme, že rušivý parameter je známy a možno ho vypočítať štatisticky presne. Pre ďalšie rozdelenia je rušivý parameter neznámy a musíme ho odhadnúť. Najčastejšie sa odhaduje pomerom deviancie a počtu stupňov voľnosti. Ak nie je odhad rušivého parametra presný, môže spôsobiť zníženie spoľahlivosti testu. Je možné ukázať, že aj po delení počtom stupňov voľnosti má odhad rušivého parametra χ^2 rozdelenie. Fisherovo – Snedecorovo rozdelenie je rozdelenie pomeru dvoch χ^2 rozdelení. Teda aj rozdiel deviancií vydelený upraveným rušivým parametrom má Fisherovo – Snedecorovo rozdelenie

$$\frac{D_1 - D_2}{(df_1 - df_2) D_2 / df_2} \sim F_{df_1 - df_2, df_2}.$$

To znamená, že F – test je vhodné použiť, ak je rušivý parameter neznámy (napríklad pri gama rozdelení), ale nie, ak je známy.

2.2.2.5 Väzbové funkcie (*Link functions*)

Väzbová funkcia (*link function*) je inverznou funkciou lineárneho prediktora

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i).$$

Teoreticky by sme mohli použiť odlišné väzbové funkcie pre jednotlivé pozorovania i , ale v praxi je to nemožné. Väzbová funkcia musí vyhovovať podmienkam, teda musí byť diferencovateľná a monotónna. V tabuľke (Tabuľka 2.7: Typy väzbových funkcií) môžeme vidieť niektoré typy väzbových funkcií.

$g(x)$	$g^{-1}(x)$
x	x
$\ln(x)$	e^x
$\ln(x/(1-x))$	$e^x/(1+e^x)$
$1/x$	$1/x$

Tabuľka 2.7: Typy väzbových funkcií

Pre zjednodušenie matematického výpočtu zovšeobecneného lineárneho modelu sa využívajú kanonické väzbové funkcie. Základnou vlastnosťou je rovnosť lineárneho prediktora $\tilde{\eta}$ s kanonickým parametrom $\tilde{\theta}$. Ďalšou charakteristikou je, že inverzná väzbová funkcia g^{-1} je inverznou funkciou b' . Každé rozdelenie z exponenciálnej triedy má svoju kanonickú väzbovú funkciu. Vo všeobecnosti platí

$$f_i(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \frac{y_i (b')^{-1}(g^{-1}(\eta_i)) - b((b')^{-1} g^{-1}(\eta_i))}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\} = \exp \left\{ \frac{y_i \eta_i - b(\eta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\}.$$

Tvary kanonických väzbových funkcií pre niektoré typy rozdelení zobrazíme v tabuľke (Tabuľka 2.8: Typ kanonickej väzbovej funkcie vzhľadom na typ rozdelenia).

Typ rozdelenia	Kanonická väzbová funkcia
<i>Normálne</i>	μ
<i>Poissonovo</i>	$\ln(\mu)$
<i>Gama</i>	$1/\mu$
<i>Binomické</i>	$\ln(\mu/(1-\mu))$
<i>Inverzný Gaussian</i>	$1/\mu^2$

Tabuľka 2.8: Typ kanonickej väzbovej funkcie vzhľadom na typ rozdelenia

V praxi nie je nutné používať kanonické väzbové funkcie, pretože rôzne moderné softwary dokážu rátať aj zložité matematické operácie.

2.2.2.6 Posun (*offset*)

Existujú prípady, kedy vplyv vysvetľujúcej premennej je známy a pred odhadovaním parametrov $\vec{\beta}$ je vhodné zahrnúť do modelu informácie o tejto premennej. Nech $\vec{\xi}$ je vektor obsahujúci známe informácie o vysvetľovanej premennej, potom lineárny prediktor $\vec{\eta}$ definujeme ako

$$\vec{\eta} = \mathbf{X} \cdot \vec{\beta} + \vec{\xi}.$$

Vektor $\vec{\xi}$ sa nazýva posun (*offset*) a platí

$$E[\vec{Y}] = \vec{\mu} = g^{-1}(\vec{\eta}) = g^{-1}(\mathbf{X} \cdot \vec{\beta} + \vec{\xi}).$$

2.2.2.7 Štruktúra zovšeobecneného lineárneho modelu

Predpokladanú štruktúru zovšeobecneného lineárneho modelu definujeme ako

$$\mu_i = E[Y_i] = g^{-1}\left(\sum_j X_{ij}\beta_j + \xi_i\right)$$
$$Var[Y_i] = \frac{\phi V(\mu_i)}{\omega_i},$$

kde

Y_i je vektor hodnôt vysvetľovanej premennej,

$g(x)$ je väzbová funkcia, ktorá je vopred stanovená,

X_{ij} je matica hodnôt vysvetľujúcich premenných (tzv. dizajnová matica),

β_j je vektor odhadovaných parametrov,

ξ je vektor obsahujúci známe informácie o vysvetľovanej premennej, posun (*offset*),

$V(x)$ je rozptylová funkcia,

ϕ je parameter rozptylovej funkcie $V(x)$,

ω_i je apriórna váha, ktorá určuje kredibilitu alebo váhu každého pozorovania.

Vektor hodnôt vysvetľovanej premennej Y_i , dizajnová matica X_{ij} , apriórne váhy ω_i a posun (*offset*) ξ vychádzajú z dát a o ich konečnom tvare rozhoduje človek, ktorý vytvára model. Predpoklady, ktoré bližšie definujú model sú väzbová funkcia $g(x)$, rozptylová funkcia $V(x)$ a parameter ϕ , ktorý je buď známy alebo odhadovaný.

Typickou formou modelu pri modelovaní počtu poistných škôd alebo frekvencie je viacnásobné Poissonovo rozdelenie. Poissonovo rozdelenie má charakteristickú vlastnosť, ktorá je vhodná v tom, že je invariantná vzhľadom na čas. Teda napríklad škodová frekvencia za rok bude rovnaká ako škodová frekvencia za mesiac. To však neplatí pri použití iných rozdelení, napríklad gama rozdelenia. Všeobecná forma modelu pri modelovaní poistných škôd má gama rozdelenie. Gama rozdelenie má vynikajúcu

vlastnosť pri modelovaní výšky škody, pretože je invariantná vzhľadom na menu. Teda výpočet výšky škody v dolároch bude rovnaký ako v eurách pri použití gama rozdelenia. To neplatí pri iných rozdeleniach ako napríklad Poissonovom.

V tabuľke (Tabuľka 2.9: Tvary modelu) môžeme vidieť niektoré typické tvary modelu.

$\bar{Y}$	Škodová frekvencia	Počet škôd	Priemerná výška škody
Väzbová funkcia	$\ln(x)$	$\ln(x)$	$\ln(x)$
Chybová zložka	Poisson	Poisson	gama
Rušivý parameter	1	1	odhadovaný
Rozptylová funkcia	x	x	x^2
Apriórne váhy	expozícia	1	podľa škôd
Posun (offset)	0	$\ln(\text{expozícia})$	0

Tabuľka 2.9: Tvary modelu

2.2.2.8 Odhad neznámych parametrov pre zovšeobecnený lineárny model metódou maximálnej vierohodnosti

Pre exponenciálnu triedu rozdelení má logaritmická funkcia maximálnej vierohodnosti formu

$$l = \sum_i \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\}.$$

Túto logaritmickú funkciu zderivujeme podľa β_j ; $j = 1, 2, \dots, p$ a dáme do rovnosti s nulou

$$0 = \frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right) \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \cdot \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}$$

k tomu platí, že

$$\begin{aligned} \mu_i = b'(\theta_i) &\Rightarrow \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = b''(\theta_i) &\Rightarrow \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} = \frac{1}{b''(\theta_i)} \\ \eta_i = g(\mu_i) &\Rightarrow \frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} = g'(\mu_i) &\Rightarrow \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \frac{1}{g'(\mu_i)} \\ \eta_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_p X_{ip} &\Rightarrow \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = X_{ij} \end{aligned}$$

a potom môžeme dospieť k

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial l}{\partial \beta_j} &= \sum_i \frac{(y_i - \mu_i)}{a(\phi)} \cdot \frac{1}{b''(\theta_i)} \cdot \frac{1}{g'(\mu_i)} \cdot x_{ij} = \\ &= \sum_i \frac{\omega_i (y_i - \mu_i) x_{ij}}{\phi V(\mu_i) g'(\mu_i)}. \end{aligned}$$

2.2.2.9 Štandardné chyby

Pomocou štatistickej teórie môžeme odhadnúť nepresnosti v modelovaní, tieto nepresnosti sa nazývajú štandardné chyby. Predovšetkým viacrozmerná Rao – Cramerova nerovnosť, ktorá hovorí, že rozptyl odhadu parametra je väčší prípadne rovný ako druhá derivácia logaritmickkej funkcie maximálnej vierohodnosti na mínus prvú, môže stanoviť štandardné chyby pre odhad každého parametra.

Tieto chyby sú definované ako diagonála kovariančnej matice $-\mathbf{H}^{-1}$, kde $-\mathbf{H}^{-1}$ je Hessova matica, ktorej prvky sú druhé derivácie logaritmickkej funkcie maximálnej vierohodnosti. Štandardné chyby považujeme za ukazovatele rýchlosti, akou logaritmická funkcia maximálnej vierohodnosti klesá.

Diagram (Diagram 2.1: Zmena logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti vzhľadom na parametre) ilustruje jednoduchý prípad s dvoma parametrami β_1 a β_2 a ukazuje, ako sa mení logaritmická funkcia maximálnej vierohodnosti vzhľadom na rôzne hodnoty týchto parametrov. Vidíme, že zmenami parametra 1 (β_1) z optimálneho stavu sa logaritmická funkcia maximálnej vierohodnosti znižuje omnoho rýchlejšie ako rovnakými zmenami parametra 2 (β_2), teda môžeme povedať, že sa krivka logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti stáva strmšou v smere parametra 1 než parametra 2. Druhá parciálna derivácia logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti podľa parametra 1 je veľká a záporná, potom štandardná chyba pre parameter 1 je malá (podľa Rao – Cramera druhá parciálna derivácia na mínus prvú). Naopak druhá parciálna derivácia logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti podľa parametra 2 nie je tak veľká a je záporná, teda štandardná chyba parametra 2 je väčšia, čo nám indikuje väčšiu nepresnosť.

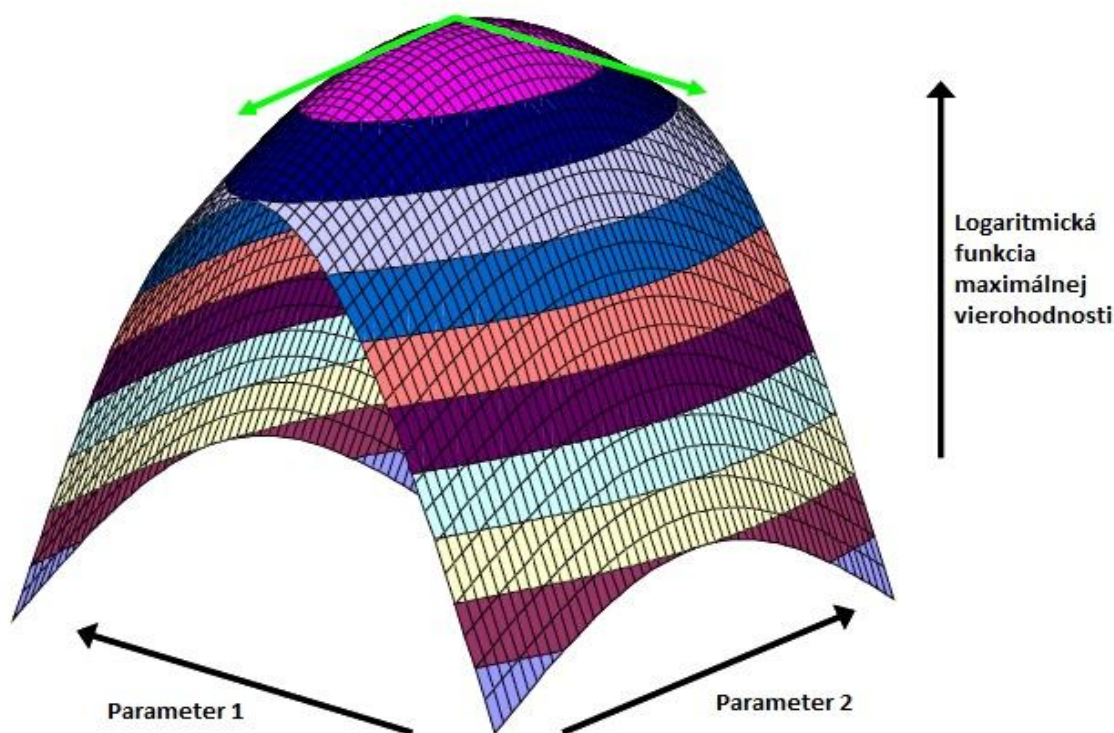


Diagram 2.1: Zmena logaritmickej funkcie maximálnej vierohodnosti vzhľadom na parametre

Vo všeobecnosti predpokladáme, že odhady parametrov majú asymptoticky Normálne rozdelenie, v dôsledku čoho je teoreticky možné previesť jednoduchý test na odhad každého parametra. Test spočíva v porovnaní každého odhadu s nulou, teda či vplyv každej úrovne faktora má signifikantný rozdiel od základnej úrovne tohto faktora. Na to sa zvyčajne využíva χ^2 test. Štvorec odhadov delíme ich rozptylom a výsledok porovnávame s χ^2 rozdelením. Tento test v skutočnosti porovnáva parameter so základnou úrovňou faktora, teda nie je nevyhnutný ani prospešný, keďže výber základnej úrovne je ľubovoľný. Teoreticky je možné opätovne zmeniť základnú úroveň a tak zostrojiť trojuholník χ^2 testov porovnávajúcich každú dvojicu odhadov parametrov. Ak žiaden z takýchto rozdielov nie je signifikantný, je to dôkazom toho, že faktor nie je signifikantný.

2.2.2.10 Vhodnosť dát

Analýza škôd pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu vyžaduje spoľahlivé a veľké množstvo informácií a skúseností získaných z minulosti. Ideálne dáta by mali byť založené na dvoj- až trojročných skúsenostiach. Vierohodné výsledky môžeme vo všeobecnosti docieľiť zo 100 000 expozícií (môžu byť rozdelené napríklad po 50 000 v každom z dvoch rokov). Celková štruktúra dát vhodná pre analýzu škôd pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu sa skladá z informácií ohľadom poistenia a škodových informácií individuálneho rizika.

Ratingové faktory môžu ovplyvniť rôzne typy škôd rozdielnym spôsobom, preto je užitočnejšie analyzovať ich osobitnými modelmi. Takouto analýzou dosiahneme čistejšie základné trendy. Po vytvorení základných modelov podľa jednotlivých typov škôd stanovíme jediný model, ktorý vyhovuje súhrnu základných modelov.

2.2.2.11 Poissonov model

Poissonov model je zovšeobecnený lineárny model s vysvetľovanou premennou, ktorá pochádza z Poissonovho rozdelenia. Z tabuľky (Tabuľka 2.8: Typ kanonickej väzbovej funkcie vzhľadom na typ rozdelenia) vidíme, že väzbová funkcia pre Poissonovo

rozdelenie je logaritmická. Vysvetľovanou premennou sú pre nás poistné plnenia $P_{i,j}$, ktoré vznikli v roku i a boli uhradené do konca roku j .

Predpoklady Poissonovho modelu:

- Nekumulatívne poistné plnenia $P_{i,j}$ sú nezávislé premenné a majú Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou

$$E(P_{i,j}) = x_i \cdot y_j, \quad i \geq 1, j \leq n.$$

- y_j interpretujeme ako pomer nároku vo vývojovom roku j k nárokom vo vývojovom roku n a platí

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n = 1.$$

- x_i je očakávaná hodnota kumulatívnych poistných plnení do vývojového roku n

$$x_i = E(X_{i,n}).$$

Výsledky získané Poissonovým modelom sú rovnaké ako výsledky získané metódou Chain Ladder. Dôkaz indukciou tohto tvrdenia môžeme nájsť v [11].

3 Výsledky práce

Stochastický prístup k odhadu technických rezerv nám o odhade poskytuje viac informácií než deterministický, no napriek tomu sa v praxi viac využíva viac deterministický prístup a to z dôvodu, že je menej náročný na pochopenie než stochastický.

My si ukážeme deterministický prístup k odhadu technických rezerv metódou Chain Ladder s vývojovým faktorom b_j , $j = 1, \dots, 9$, vypočítanými ako vážený aritmetický priemer a stochastický prístup na odhad technických rezerv z rovnakých dát ako pri metóde Chain Ladder pomocou Poissonovho modelu. Deterministický postup spracujeme v softvéri **MS Excel 2007**, stochastický v open source štatistickom systéme **R** (po vzájomnej dohode s vedúcim diplomovej práce sme sa rozhodli kvôli nenáročnej dostupnosti pre voľne stiahnuteľný program **R**, nie softvér **SAS**).

Pri odhadovaní metódou Chain Ladder by sme mali dostať rovnaké výsledky ako pri odhade Poissonovým modelom.

3.1 Odhad technických rezerv metódou Chain Ladder

Metódu Chain Ladder na odhad technických rezerv aplikujeme na dáta, ktoré sme vygenerovali pomocou softvéru **Statgraphics Plus** a pochádzajú z Poissonovho rozdelenia z toho dôvodu, aby vyhovovali predpokladom Poissonovho modelu a mohli sme tak porovnať výsledky oboch metód.

Všetky výpočty robíme v softvéri **MS Excel 2007** a nájdeme ich aj na priloženom CD v **prílohe A**.

Tabuľka (Tabuľka 3.1: Nekumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch) obsahuje tieto dáta a považujeme ich za výšky poistných plnení v tisícoch. Rok vzniku poistnej udalosti je od roku 2003 do roku 2012 (riadky v Tabuľke 3.1). Počet rokov, ktoré uplynuli od vzniku poistnej udalosti po jej vyplatenie sú od roku „0“ do roku 9, hovoríme o vývojových rokoch (stĺpce Tabuľky 3.1). Vývojový rok „0“ obsahuje poistné plnenia vyplatené ešte v tom roku, kedy vznikli. Vývojový rok 5 vyjadruje výšku poistných plnení, ktoré boli vyplatené po piatich rokoch od ich vzniku. Hodnoty vo

vývojovom trojuholníku vyjadrujú výšku poistných plnení, ktoré vznikli v roku i , $i = 2003, 2004, \dots, 2012$, a boli vyplatené do konca roka j , $j = 0, 1, \dots, 9$. Pre rok 2003 nevytvárame technickú rezervu, keďže sa do vývojového roku 9 poistné plnenia zlikvidujú samé.

Rok vzniku	Vývojový rok									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2003	6576	5434	4987	4124	3214	2765	1674	964	734	514
2004	5876	5012	4624	3876	2456	1785	1007	684	325	
2005	4374	3574	2464	1735	956	775	573	397		
2006	2345	1676	746	539	329	239	146			
2007	3546	2344	1543	934	543	321				
2008	3789	3087	2675	999	653					
2009	4567	2675	1735	756						
2010	4825	3746	2103							
2011	5315	2937								
2012	5554									

Tabuľka 3.1: Nekumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch

Tabuľka (Tabuľka 3.2: Kumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch) vznikol postupnou kumuláciou (sčítaním) riadkových hodnôt nekumulatívneho vývojového trojuholníka (Tabuľka 3.1: Nekumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch).

Rok vzniku	Vývojový rok									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2003	6576	12010	16997	21121	24335	27100	28774	29738	30472	30986
2004	5876	10888	15512	19388	21844	23629	24636	25320	25645	
2005	4374	7948	10412	12147	13103	13578	13751	14048		
2006	2345	4021	4767	5306	5635	5774	5870			
2007	3546	5890	7433	8367	8910	9231				
2008	3789	6876	9551	10550	11203					

2009	4567	7242	8977	9733						
2010	4825	8571	10674							
2011	5315	8252								
2012	5554									

Tabuľka 3.2: Kumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch

Ďalej vypočítame vývojové koeficienty $t_{i,j}$ podľa vzťahu

$$t_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}}, \quad i = 2003, 2004, \dots, 2011, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

výsledky zapíšeme do tabuľky (Tabuľka 3.3: Vývojové koeficienty).

Rok vznik u	Vývojový rok									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2003		1,826	1,415	1,243	1,152	1,114	1,062	1,034	1,025	1,017
2004		1,853	1,425	1,25	1,127	1,082	1,043	1,028	1,013	
2005		1,817	1,31	1,167	1,079	1,036	1,013	1,022		
2006		1,715	1,186	1,113	1,062	1,025	1,017			
2007		1,661	1,262	1,126	1,065	1,036				
2008		1,815	1,389	1,105	1,062					
2009		1,586	1,24	1,084						
2010		1,776	1,245							
2011		1,553								
2012										

Tabuľka 3.3: Vývojové koeficienty

Základnou podmienkou použitia metódy Chain Ladder je, že ani jedno poistné plnenie nesmie byť nulové a vývojové koeficienty majú mať približne rovnakú hodnotu. Z nekumulatívneho vývojového trojuholníka (Tabuľka 3.1: Nekumulatívny vývojový trojuholník poistných plnení v tisícoch) a tabuľky vývojových koeficientov (Tabuľka 3.3: Vývojové koeficienty) vidíme, že je táto podmienka splnená.

Ďalej predpokladáme, že inflácia je nulová.

Zo vzťahu 2.3 vyrátame vývojové faktory $b_j, j=1,2,\dots,9$, ako vážený aritmetický priemer a zaznačíme do tabuľky (Tabuľka 3.4: Vývojové faktory).

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_j	1,74	1,329	1,176	1,106	1,074	1,042	1,029	1,019	1,017

Tabuľka 3.4: Vývojové faktory

Teraz máme všetky potrebné údaje na doplnenie kumulatívneho vývojového trojuholníka. Chýbajúce údaje dopočítame na základe vzťahu

$$X_{i,j} = X_{i,n-i} \prod_{k=n-i+1}^j b_k = X_{i,j-1} \cdot b_j, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=n-i+1, n-i+2,\dots,n, \quad n=10$$

a predstavujú odhadnuté kumulatívne poistné plnenia na nasledujúce roky. Vznikne nám doplnený kumulatívny vývojový trojuholník (Tabuľka 3.5: Doplnený vývojový trojuholník).

Rok vzniku	Vývojový rok									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2003	6576	12010	16997	21121	24335	27100	28774	29738	30472	30986
2004	5876	10888	15512	19388	21844	23629	24636	25320	25645	26078
2005	4374	7948	10412	12147	13103	13578	13751	14048	14318	14560
2006	2345	4021	4767	5306	5635	5774	5870	6040	6156	6260
2007	3546	5890	7433	8367	8910	9231	9620	9898	10089	10259
2008	3789	6876	9551	10550	11203	12035	12542	12905	13153	13375
2009	4567	7242	8977	9733	10765	11565	12052	12401	12639	12852
2010	4825	8571	10674	12553	13884	14915	15543	15993	16301	16576
2011	5315	8252	10967	12898	14265	15325	15970	16433	16749	17031
2012	5554	9662	12842	15102	16703	17944	18699	19241	19611	19942

Tabuľka 3.5: Doplnený vývojový trojuholník

Technické rezervy (TR) vieme vyčísliť podľa roku vzniku poistnej udalosti (PU) (Tabuľka 3.6: Technické rezervy v tisícoch podľa roku vzniku poistnej udalosti) aj podľa roku uhradenia poistných plnení (PP) (Tabuľka 3.7: Technické rezervy v tisícoch podľa roku uhradenia poistných plnení).

Rok vzniku PU	Výška TR
2004	432,6
2005	511,7
2006	390
2007	1028
2008	2172
2009	3119
2010	5902
2011	8779
2012	14388
Spolu:	36722

Tabuľka 3.6: Technické rezervy v tisícoch podľa roku vzniku poistnej udalosti

Rok uhradenia PP	Výška TR
2013	11828
2014	8383
2015	5803
2016	4056
2017	2797
2018	1739
2019	1133
2020	652,6
2021	330,8
Spolu:	36722

Tabuľka 3.7: Technické rezervy v tisícoch podľa roku uhradenia poistných plnení

Výška celkových technických rezerv je **36 722 000 €** a táto suma je rovnaká pre technické rezervy odhadnuté podľa roku vzniku poistnej udalosti ako aj pre technické rezervy odhadnuté podľa roku uhradenia poistných plnení.

3.2 Odhad technických rezerv zovšeobecneným lineárnym modelom

Teraz prejdeme k odhadu technických rezerv pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu, konkrétne Poissonovho modelu.

Podľa Veralla by nám mali vyjsť rovnaké výsledky ako pri odhade metódou Chain Ladder.

Odhad robíme pomocou open source programu **R**, ktorý je voľne stiahnuteľný na stránke :

<http://cran.r-project.org/>

Tento štatistický program predstavuje komplexný systém na prácu s údajmi, ich analýzu, spracovanie a grafické zobrazenie. Vyvinul ho Rick Becker, Allan Wilks a John Chambers v Bellových laboratóriách. Malá skupina štatistov, ktorí si hovoria **R Development Core Team**, udržiavajú základnú distribúciu programu **R**. Množstvo špeciálnych balíkov vytvárajú dobrovoľníci, čím zvyšujú funkcionality programu **R**. My využijeme práve jeden z takýchto balíkov, presne balík „*ChainLadder*“.

Vychádzame z rovnakých kumulatívnych dát ako pri metóde Chain Ladder. Prepíšeme ich do textového súboru (formát .txt), s ktorým vie **R** pracovať. Dáta musia mať tvar matice, preto miesto prázdnych miest v dolnom trojuholníku napíšeme NA (*Not Available*).

Kód na odhad technických rezerv sa nachádza v **prílohe B**. Uvedieme len niektoré výstupy z programu **R**, ktoré nám dokážu, že skutočne je odhad pomocou GLM rovnaký ako pomocou metódy Chain Ladder.

	IBNR
2	433
3	512
4	390
5	1028
6	2172
7	3119
8	5902
9	8779
10	14388
total	36722

Tabuľka 3.8: Odhad technických rezerv pomocou Poissonovho modelu

	dev									
origin	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6576	12010	16997	21121	24335	27100	28774	29738	30472	30986
2	5876	10888	15512	19388	21844	23629	24636	25320	25645	26078
3	4374	7948	10412	12147	13103	13578	13751	14048	14318	14560
4	2345	4021	4767	5306	5635	5774	5870	6040	6156	6260
5	3546	5890	7433	8367	8910	9231	9620	9899	10089	10259
6	3789	6876	9551	10550	11203	12035	12542	12905	13153	13375
7	4567	7242	8977	9733	10765	11565	12052	12401	12640	12853
8	4825	8571	10674	12553	13884	14915	15543	15993	16301	16576
9	5315	8252	10967	12897	14264	15324	15969	16431	16747	17030
10	5554	9662	12841	15101	16702	17943	18698	19240	19610	19941

Tabuľka 3.9: Doplnený vývojový trojuholník pomocou Poissonovho modelu

Vidíme, že hodnoty odhadov technických rezerv zovšeobecneným lineárnym modelom s Poissonovým rozdelením poistných plnení (Tabuľka 3.8: Odhad technických rezerv pomocou Poissonovho modelu) sú zhodné s hodnotami odhadov technických rezerv vypočítanými podľa roku vzniku poistnej udalosti (Tabuľka 3.6: Technické rezervy v tisícoch podľa roku vzniku poistnej udalosti).

Rovnako tak, aj doplnený kumulatívny vývojový trojuholník získaný Poissonovým modelom v programe **R** (Tabuľka 3.9: Doplnený vývojový trojuholník pomocou Poissonovho modelu) je zhodný s doplneným vývojovým trojuholníkom vypočítaným metódou Chain Ladder v **Exceli** (Tabuľka 3.5: Doplnený vývojový trojuholník).

Výstup z programu R obsahuje aj hodnoty deviancie pre odhady technických rezerv podľa roku vzniku poistnej udalosti. Devianciu sme definovali ako mieru presnosti odhadu.

Z tabuľky (Tabuľka 3.10: Deviancia) vidíme, že pre prvý odhadovaný rok je deviancia najvyššia, teda presnosť odhadu je vysoká. So zvyšovaním rokov a tým pádom ubúdaním informácii o výške poistných plnení vo vývojových rokoch sa deviancia znižuje, až pre posledný rok nadobúda nízku hodnotu, teda odhad je nepresný.

	Dev. To. Date
2	0.9833960
3	0.9648352
4	0.9376997
5	0.8997953
6	0.8376075
7	0.7573140
8	0.6439431
9	0.4845282
10	0.2785077
total	0.7318231

Tabuľka 3.10: Deviancia

3.3 Odhad technických rezerv separačnou metódou

V nasledujúcej časti si ukážeme odhad technických rezerv separačnou metódou, ktorá pri svojich výpočtoch zahŕňa aj mieru inflácie.

Východiskom je časť nekumulatívneho vývojového trojuholníka dát, ktoré sme použili pri výpočtoch metódou Chain Ladder a GLM. Vývojový trojuholník obsahuje výšky poistných plnení v tisícoch, ktoré vznikli v roku 2008 až 2012 a boli vyplatené do konca roka j , $j = 0, 1, \dots, 4$ (Tabuľka 3.11: Nekumulatívny vývojový trojuholník).

Rok vzniku	Rok vývoja					Počet škôd
	0	1	2	3	4	
2008	3789	3087	2675	999	653	156
2009	4567	2675	1735	756		143
2010	4825	3746	2103			169
2011	5315	2937				185
2012	5554					207

Tabuľka 3.11: Nekumulatívny vývojový trojuholník

Predpokladáme, že potrebný počet rokov na zlikvidovanie škôd je 5 rokov. Predpokladaná výška inflácie je 2,3 %. Je to náš odhad, ktorý sme stanovili na základe článkov o vývoji miery inflácie v budúcnosti. Z dôvodu, že stanoviť predpokladanú mieru inflácie na 10 rokov dopredu je náročné a hlavne by to nemuselo vypovedať o pravde, pracujeme s 5 ročným vývojovým trojuholníkom. Na rozdiel od metódy Chain Ladder poznáme aj počty škôd pre jednotlivé roky vzniku poistných udalostí (Tabuľka 3.12: Počty škôd).

Rok vzniku	Počet škôd
2008	156
2009	143
2010	169
2011	185
2012	207

Tabuľka 3.12: Počty škôd

Teraz aplikujeme postup z podkapitoly 2.1.2 Separačná metóda. Vytvoríme maticu štandardizovaných hodnôt $S_{i,j}$, $i = 2008, \dots, 2012$, $j = 0, 1, \dots, 4$ (Tabuľka 3.12: Matica štandardizovaných hodnôt).

Rok vzniku	Rok vývoja					Počet škôd
	0	1	2	3	4	
2008	24,29	19,79	17,15	6,404	4,186	156
2009	31,94	18,71	12,13	5,287		143
2010	28,55	22,17	12,44			169
2011	28,73	15,88				185
2012	26,83					207

Tabuľka 3.12: Matica štandardizovaných hodnôt

Z nej vypočítame hodnoty pomocnej premennej d_i a odhad λ_i a r_j . Vidíme, že r_j spĺňa podmienku

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$$

(Tabuľka 3.13: Odhady d_i , λ_i a r_j).

Rok vzniku	d	odhad λ	odhad r_j	j
2012	64,62	64,62	0,065	4
2011	74,24	74,24	0,084	3
2010	75,68	75,68	0,194	2
2009	78,78	78,78	0,261	1
2008	61,39	61,39	0,396	0
Spolu:			1	

Tabuľka 3.13: Odhady d_i , λ_i a r_j

Odhad λ_{2012+k} pre $k = 1, \dots, 4$ vypočítame zo vzťahu

$$\lambda_{2012+k} = \lambda_{2012} \cdot (1 + \text{inflácia})^k$$

(Tabuľka 3.14: Odhad λ_{2012+k}).

Rok vývoja	i	odhad λ
2013	1	66,11
2014	2	67,63
2015	3	69,19
2016	4	70,78

Tabuľka 3.14: Odhad λ_{2012+k}

Pomocou týchto odhadov doplníme maticu štandardizovaných hodnôt $S_{i,j}$, kde platí

$$S_{i,j} = r_j \cdot \lambda_{i+j}, \quad i = 2008, \dots, 2012, \quad j = 0, 1, \dots, 4$$

(Tabuľka 3.15: Doplnená matica štandardizovaných hodnôt) a na základe nej aj nekumulovaný vývojový trojuholník, ktorý zahŕňa aj počty škôd (Tabuľka 3.16: Doplnený IBNR trojuholník).

Rok vzniku	Rok vývoja				
	0	1	2	3	4
2008	24,29	19,79	17,15	6,404	4,186
2009	31,94	18,71	12,13	5,287	5,566
2010	28,55	22,17	12,44	12,86	5,694
2011	28,73	15,88	17,25	13,15	5,825
2012	26,83	26,15	17,65	13,46	5,958

Tabuľka 3.15: Doplnená matica štandardizovaných hodnôt

Rok vzniku	Rok vývoja					Počet škôd
	0	1	2	3	4	
2008	3789	3087	2675	999	653	156
2009	4567	2675	1735	756	795,9	143
2010	4825	3746	2103	2173	962,2	169
2011	5315	2937	3191	2433	1078	185
2012	5554	5414	3653	2785	1233	207

Tabuľka 3.16: Doplnený IBNR trojuholník

Odhad technických rezerv podľa roku uhradenia poisťného plnenia sa nachádza v tabuľke (Tabuľka 3.17: Technické rezervy).

Rok uhradenia PP	Výška TR
2013	11574
2014	7048
2015	3863
2016	1233
Spolu:	23718

Tabuľka 3.17: Technické rezervy

Celková výška technických rezerv je **23 718 000 €**.

3.4 Odhad technických rezerv metódou Cape Cod

V tejto časti aplikujeme na odhad technických rezerv metódu Cape Cod.

Vychádzame z nekumulovaného vývojového trojuholníka s údajmi, ktoré sme použili pri odhade technických rezerv separačnou metódou. Metóda Cape Cod na rozdiel od Chain Laddera a separačnej metódy berie do úvahy aj škodový pomer. Je to pomer poistného plnenia a poistného. Riadky nášho vývojového trojuholníka sú tvorené podľa roku vzniku poistnej udalosti, preto na výpočet škodového pomeru použijeme zaslúžené poistné. Predpokladáme, že má konštantnú výšku **13 500 000 €**.

Z nekumulatívneho vývojového trojuholníka urobíme kumulatívny (Tabuľka 3.18: Kumulatívny vývojový trojuholník).

Rok vzniku	Rok vývoja					Počet škôd
	0	1	2	3	4	
2008	3789	6876	9551	10550	11203	156
2009	4567	7242	8977	9733		143
2010	4825	8571	10674			169
2011	5315	8252				185
2012	5554					207

Tabuľka 3.18: Kumulatívny vývojový trojuholník

Zo vzťahov obsiahnutých v podkapitole 2.1.3 Metóda Cape Cod vypočítame vývojové koeficienty b_j , kumulatívne koeficienty m_j , inverzné koeficienty i_j a doplnky inverzných koeficientov i'_j , $j = 1, 2, 3, 4$.

j	1	2	3	4
b_j	1,67285	1,28706	1,09472	1,0619

Tabuľka 3.19: Vývojové koeficienty b_j

j	1	2	3	4
m_j	1,67285	2,15305	2,35699	2,50288

Tabuľka 3.20: Kumulatívne koeficienty m_j

j	1	2	3	4
i_j	0,59778	0,46446	0,42427	0,39954

Tabuľka 3.21: Inverzné koeficienty i_j

j	1	2	3	4
i'_j	0,40222	0,53554	0,57573	0,60046

Tabuľka 3.22: Doplnky inverzných koeficientov i'_j

Vyčíslime celkové poistné plnenie, ktoré získame sčítaním diagonálnych prvkov kumulatívneho vývojového trojuholníka. Činí **45 416 000 €**. Vypočítame upravené zaslúžené poistné vynásobením zaslúženého poistného a inverzných koeficientov pre všetky roky vzniku poistnej udalosti. Sčítaním všetkých upravených zaslúžených poistných dostaneme celkové upravené zaslúžené poistné, jeho výška je **25 461 700 €**. Škodový pomer je potom

$$\frac{13500000}{25461700} = 0,530208.$$

j	1	2	3	4	Spolu:
€	8 070 €	6270,18	5727,65	5393,8	25461,7

Odhad technických rezerv podľa roku vzniku poistnej udalosti sa nachádza v tabuľke (Tabuľka 3.23: Odhad technických rezerv). Získali sme ho vynásobením zaslúženého poistného, škodového pomeru a príslušného doplnku inverzného koeficientu.

Celková výška technických rezerv je **15 131 200 €**.

Rok vzniku PU	Výška TR
2009	2878,99
2010	3833,31
2011	4120,97
2012	4297,98
Spolu:	15131,2

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali zovšeobecnenému lineárnemu modelu a odhadom technických rezerv. Snažili sme sa priblížiť metódy odhadovania technických rezerv na základe deterministického prístupu i pomocou GLM, ktorý predstavuje stochastický prístup.

V prvej kapitole sme sa venovali charakteristike technických rezerv a popisu jednotlivých druhov, ktorí nám prikazuje vytvárať zákon.

V ďalšej kapitole sme podrobne rozoberali deterministické postupy odhadu technických rezerv. Uviedli sme niekoľko najčastejšie používaných metód ako metódu Chain Ladder, separačnú metódu, Cape Cod a Bornhuetterovú – Fergusonovú metódu. Zamerali sme sa na GLM. Uviedli sme predpoklady modelu, venovali sme sa charakteristike a štruktúre GLM a podrobne sme popísali jednotlivé zložky modelu.

V poslednej kapitole sme sa venovali aplikácii popísaných metód v praxi. Ukázali sme si aplikáciu metódy Chain Ladder na vygenerované dáta. Výpočty sme robili v softvéri *MS Excel 2007*. Na rovnaké dáta, ktoré spĺňali predpoklady GLM, sme aplikovali zovšeobecnený lineárny model s Poissonovým rozdelením poistných plnení a logaritmicou väzbovou funkciou (*log link function*). Aplikácia spočívala v doplnení IBNR trojuholníka a robili sme ju v open source programe *R*, ktorý sme v tejto kapitole tiež charakterizovali. Obe metódy nám dali zhodné výsledky, čím sme dokázali tvrdenie Veralla, že odhady Chain Ladder metódou a GLM s Poissonovým modelom sú rovnaké.

GLM je založený na štatistickej teórii a ponúka praktické metódy pre poisťovne, ktoré nim dosahujú prijateľný zisk a sú konkurencieschopné. GLM je účinný, priehľadný a všeobecne uznávaný ako štandard v amerických i európskych poisťovniach.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Zákon o poisťovníctve č. 8/2008 z 28. novembra 2007 o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov ako vyplýva zo zmien a doplnení vykonaných zákonom č. 270/2008 Z. z., zákonom č. 552/2008 Z. z., , zákonom č. 186/2009 Z. z., zákonom č. 276/2009 Z. z., zákonom č. 129/2010 Z. z., zákonom č. 130/2011 Z. z., zákonom č. 332/2011 Z. z., zákonom č. 520/2011 Z. z. zákonom č. 547/2011 Z. z. a zákonom č. 32/2013 Z. z.
- [2] CIPRA, T. 2006. *Finanční a pojistné vzorce*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2006. 375 s. ISBN 80-247-1633-X
- [3] CIPRA, T. 2005. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. 2. vyd. Praha: Ekopress, 2005. 308 s. ISBN 80-86119-91-2
- [4] CIPRA, T. *Kapitálová přiměřanost ve financích a solventnost v pojišťovnictví*. 1. vyd. Praha: Ekopress, 2002. 272 s. ISBN 80-86119-54-8
- [5] FECENKO, J. 2012. *Neživotné poistenie*. 2. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. 222 s. ISBN 978-80-225-3400-0
- [6] ŠOLTÉS, E. 2008. *Regresná a korelačná analýza s aplikáciam*. 1. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2008. 287 s. ISBN 978-80-8078-163-7
- [7] LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R. 1998. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika: Štatistické analýzy*. 2. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998. 344s. ISBN 80-223-1262-2
- [8] PACÁKOVÁ, V. 2004. *Aplikovaná poistná štatistika*. 3. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8
- [9] ANDERSON, D. a kol. 2007. *A practitioner's guide to generalized linear models*. 3. vyd. Watson Waytt, 2007. 113 s.
- [10] GATIALOVÁ, J. 2012. *Technické rezervy pre neživotné poistenie*: Diplomová práca. Bratislava: UK, 2012. 76s.
- [11] VERALL, R. J. 1996. *An investigation into stochastic claims reserving models and the chain – ladder technique* .[online]. London. City University, 2000.

[cit. 2013. 04. 20.] Dostupné na internete:

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167668799000384>>.

- [12] BUŠA, J. – ŠEVČOVIČ, L. 2007. *R Open source system na spracovanie údajov*.

[online]. Dostupné na internete:

<<http://people.tuke.sk/ladislav.sevcovic/esf/Rtlac.pdf>>.

Príloha A

Priložené CD s výpočtami odhadov technických rezerv metódou Chain Ladder v softvéri MS Excel 2007.

Príloha B

Kód na odhad technických rezerv pomocou zovšeobecneného lineárneho modelu s Poissonovým rozdelením poistných plnení v open source programe *R*.

Poznámky sú napísané za znakom #.

```
# Načítame balík ChainLadder
```

```
> library(ChainLadder)
```

```
# Do premennej 'data' uložíme kumulatívny vývojový trojuholník (IBNR trojuholník),  
ktorý máme uložený v textovom súbore (formát .txt). Cestu k nemu, ktorá je  
v úvodzovkách, musíme zmeniť podľa toho, kde sa v našom počítači nachádza a názov  
'GLM.txt' podľa toho, ako ho pomenujeme
```

```
> data<-read.table("C:\\DocumentsandSettings\\MARCA\\Diplomovka\\GLM.txt",  
header=TRUE)
```

```
# Zobrazíme načítané dáta
```

```
> data
```

```
# Dáta musia mať tvar trojuholníka
```

```
> data<-as.triangle(data)
```

```
# Odstránime X z názvov stĺpcov
```

```
> dimnames(data)$dev=1:10
```

```
# Odhad pomocou GLM, Poissonov model, väzbová funkcia logaritmická
```

```
> g <- glmReserve(triangle= data , var.power = 1, link.power = 0,
```

```
cum = TRUE, mse.method = "formula", nsim = 1000)
```

```
> fit1<- glmReserve(data)
```

```
# Zobrazíme odhadnuté IBNR rezervy
```

```
> fit1$summary
```

```
# Zobrazíme doplnený IBNR trojuholník
```

```
> g$FullTriangle
```

Príloha C

Priložené CD s výpočtami odhadov technických rezerv separačnou metódou v softvéri MS Excel 2007.

Príloha D

Priložené CD s výpočtami odhadov technických rezerv metódou Cape Cod v softvéri MS Excel 2007.