

# Modelovanie neistoty vo váhach v rámci viackriteriálneho hodnotenia

## Modelling of uncertainty in weights in multi-criteria decision making

Martin Bodá<sup>ab</sup>

<sup>a</sup> Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Ekonomická fakulta, Tajovského 10, 974 90 Banská Bystrica, Slovenská republika

<sup>b</sup> Univerzita Jána Evangelistu Purkyně v Ústí nad Labem, Fakulta sociálně-ekonomická, Moskevská 54, 400 96 Ústí nad Labem, Česká republika

<sup>a</sup> Matej Bel University in Banská Bystrica, Faculty of Economics, Tajovského 10, 974 90 Banská Bystrica, Slovak Republic

<sup>b</sup> Ján Evangelista Purkyně University in Ústí nad Labem, Faculty of Social and Economic Sciences, Moskevská 54, 400 96 Ústí nad Labem, Czech Republic  
martin.boda@umb.sk

---

**Abstrakt:** Článok má dvojaký obsah. Na jednej strane mapuje komplexne metódy viackriteriálneho hodnotenia využiteľné v manažérskej praxi pri výbere spomedzi rôznych variantov rozhodovacej úlohy alebo pri hodnotení subjektov v kontexte viacerých formulácií benchmarkingu (typicky medzipodnikovej komparácie alebo vnútropodnikového hodnotenia výkonnosti zamestnancov alebo prevádzkových jednotiek). Na druhej strane predostiera, ako možno zahrnúť do deterministického procesu viackriteriálneho hodnotenia neistotu spojenú s diferencovanou dôležitosťou jednotlivých hodnotiacich kritérií. Na tento účel sa neistota vo váhach modeluje skrze Dirichletovo rozdelenie a vyhodnocuje sa pomocou simulačnej metódy Monte Carlo. Súčasťou článku je aj ukážka aplikácie pri výbere technológie na generovanie elektrickej energie v podmienkach tureckého energetického priemyslu.

**Abstract:** The article has a dual content. On the one hand, it gives a complex overview of multiple criteria decision analysis methods usable in managerial practice in selecting from amongst diverse variants of a decision-making problem or in assessing subjects in a context of several formulations of benchmarking (typically intercompany comparisons or intracompany performance evaluations of employees or operating units). On the other hand, it outlines a possibility of including uncertainty into the deterministic process of multiple criteria decision analysis in order to capture the differentiated importance of individual assessment criteria. To this end, uncertainty in weights is modelled through the Dirichlet distribution and is assessed with the aid of the simulation method Monte Carlo. The article also contains an application of selecting a technology to generate electricity energy in conditions of the Turkish energetic industry.

**Kľúčové slová:** viackriteriálne hodnotenie, neistota, váhy, Dirichletovo rozdelenie.

**Key words:** multiple criteria decision analysis, uncertainty, weights, Dirichlet distribution.

---

### 1 Úvod

Kvantitatívne metódy v rôznych stupňoch formalizácie a technickej náročnosti sa začali používať v manažérskom riadení a špeciálne rozhodovaní v snahe

objektivizovať a dobre zdôvodniť uskutočnené rozhodnutie. Viackriteriálne hodnotenie, označované po anglicky *multiple criteria decision analysis* (MCDA), sa v rôznych modifikáciách používa vo finančnej analýze aj vo všeobecnejšom podnikovom riadení, keď treba realizovať medzipodnikové porovnávanie alebo syntetizovať informáciu o viacerých aspektoch do jedného hodnotiaceho kritéria. Okrem štandardnej situácie, keď sa vyberá nejaký variant rozhodovania konfrontáciou viacerých kritérií, možno vytypovať niekoľko ďalších využití metód viackriteriálneho hodnotenia. Jedno z použití v manažérskej praxi je, keď sa hodnotí výkonnosť podniku v komparatívnom kontexte na základe finančných, ekonomických alebo ďalších kritérií s cieľom globálne opísať výkonnosť podniku. Ak je cieľom ešte identifikovať benchmarky pre zvyšovanie výkonnosti, medzipodnikové porovnávanie možno vnímať ako *benchmarking*. Tento benchmarking ale môže byť realizovaný aj dovnútra podniku ako interný benchmarking. Nad rámec operatívneho riadenia sa používa viackriteriálne hodnotenie napr. na taktickej úrovni ako spôsob stanovenia trhovej a podnikateľskej atraktívnosti alebo na strategickej úrovni pri hodnotení aspektov konkurenčného prostredia. Vo všetkých týchto prípadoch treba informáciu o viacerých (nie nevyhnutne numerických) kritériách syntetizovať do jednej (spravidla numerickej) charakteristiky ako smerodajného meradla komparatívnej výhodnosti.

Článok dáva systematický prehľad metód viackriteriálneho hodnotenia využívaných pri manažérskom rozhodovaní s orientáciou na potreby strategického a taktického riadenia, potreby vnútropodnikovej analýzy (interný benchmarking) a medzipodnikového porovnávania (benchmarking konkurencieschopnosti, funkčný a generický benchmarking). Článok venuje pozornosť šiestim metódam viackriteriálneho hodnotenia (ordinálne ohodnotenie, proporcionálna vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty, proporcionálna vzdialenosť od priemernej hodnoty, proporcionálna vzdialenosť na intervale rozpätia hodnôt, štandardizácie na z-skóre, štvorec euklidovskej vzdialenosti od benchmarkovej hodnoty), študuje základné vlastnosti týchto metód a vzájomne ich porovnáva.

Článok ďalej dáva návod, ako možno zahrnúť do deterministického procesu výberu variantov neistotu spojenú s diferencovanou dôležitosťou jednotlivých hodnotiacich kritérií a používa Dirichletovo rozdelenie na modelovanie tejto neistoty. S týmto súvisí aj diskusia o metódach elicitácie váh subjektívnymi metódami tak, aby boli kompatibilné s preferenciami rozhodujúceho subjektu. Samotná analýza neistoty sa v článku realizuje za pomoci simulačnej metódy Monte Carlo a obsiahnutá prípadová štúdia je koncipovaná v snahe preukázať praktickú využiteľnosť modelovania neistoty váh týmto (a vlastne aj iným) spôsobom. Prípadová štúdia sa týka výberu spôsobu zabezpečenia generovania

elektrickej energie pre potreby tureckého energetického priemyslu a je adaptovaná z článku Şahina (2021) a augmentovaná o analýzu neistoty.

V ďalšom článok pozostáva z piatich častí. Prvé tri sú teoreticko-explikatívneho charakteru. Časť 2 konceptualizuje príslušný manažérsky problém, časť 3 poskytuje sľúbený prehľad metód viackritériálneho hodnotenia s orientáciou na potreby manažérského hodnotenia a časť 4 ozrejmuje metodiku stochastického modelovania neistoty vo váhach. Predposledná časť 5 obsahuje prípadovú štúdiu a posledná časť je záverom.

## 2 Konceptualizácia rozhodovacieho problému

V článku sa pozornosť sústreďuje na *numericke* kritériá, ktoré budú *numericke* ohodnotené a syntetizované do jednej *numerickej* charakteristiky. Bez ohľadu na kontext, je možné uplatniť túto myšlienkovú schému: Rozhodovací variant (napr. konkrétny dodávateľ pre zabezpečenie výroby, lokalita pre umiestnenie výrobnjej prevádzky, model financovania rozvojových plánov podniku) je charakterizovaný  $m$  kritériami  $x_1, \dots, x_m$ , ktoré sú známe numericke hodnoty. Predpokladá sa, že subjekt rozhodovania (manažér, hodnotiteľ, rozhodovateľ, analytik, riadiaci subjekt ap.) je schopný posúdiť, aké sú želateľné hodnoty týchto kritérií. Hodnotenie sa môže opierať pritom o to, či je kritériá vhodné maximalizovať, alebo minimalizovať. Iný prístup je, že sú k dispozícii referenčné hodnoty jednotlivých kritérií a čím je konkrétna hodnota bližšie danému kritériu zospodu alebo zhora, tým je lepšia. Referenčné kritériá (vlastne benchmarky) môžu vyplývať z objektívnych okolností rozhodovacieho problému alebo môžu byť subjektívne určené. Výsledkom je, že subjekt rozhodovania určí ich hodnoty kritérií  $u_1(x_1), \dots, u_m(x_m)$  a zohľadní pritom ich diferencovaný význam. Hodnotenie konkrétneho kritéria je tu reprezentované funkciou  $u_j: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , ktorá ohodnocuje izolovanú samostatnú hodnotu kritéria  $j$  spôsobom, ktorý je porovnateľný s funkciami hodnoty  $u_{j'}$  aplikovateľnými pre iné kritérium  $j'$  ( $j, j' \in \{1, \dots, m\}, j' \neq j$ ). Ohodnotenia poskytované hodnotovou funkciou  $u_j$  nemusia byť vo všeobecnosti nevyhnutne kladné (a stačí iba  $u_j(x_j) \in \mathfrak{R}$  pre každé  $j \in \{1, \dots, m\}$ ). V dôsledku tejto požiadavky je možné číselné ohodnotenia  $u_1(x_1), \dots, u_m(x_m)$  navzájom porovnávať a je možné ich integrovať či sumarizovať do jedného kritéria. Kritériá  $x_1, \dots, x_m$  však prispievajú do rozhodovania s rôznou významnosťou, ktorá je reprezentovaná váhami  $v_1, \dots, v_m$ . Vyššia váha pritom znamená vyššiu dôležitosť. Následne je sledovaný variant reprezentovaný váženým priemerným ohodnotením  $U \equiv \sum_j v_j u_j(x_j)$  (pre aditívne väzby) alebo  $U \equiv \prod_j u_j(x_j)^{v_j}$  (pre multiplikatívne väzby). Vyššia hodnota indikuje vyššiu preferenciu a definuje zoradenie príslušných variantov. Pri zavedení multiplikatívnych väzieb v procese agregácie je nevyhnutné požadovať pozitivitu hodno-

tových funkcií (resp.  $u_j(x_j) \in \mathfrak{R}_{>0}$  pre každé  $j \in \{1, \dots, m\}$ ). Ukazuje sa, že medzi aditívnym a multiplikatívnym modelom nie sú podstatné rozdiely (napr. Stewart, 1995).

Načrtnutý plán predpokladá, že rozhodovanie (alebo hodnotenie) prebieha pri plnej informačnej znalosti, keď neexistuje neistota. Tu sa pozornosť venuje situácii, že neistota sprevádza váhy  $v_1, \dots, v_m$ , ktoré nemusia ideálne zodpovedať preferenciám rozhodovacieho subjektu. Nie je v reálnej situácii možné pre nejakú  $m$ -ticu preferenčných váh zaručiť, že sú v úplnej zhode s postojmi hodnotiaceho subjektu a že iná  $m$ -tica by nevedla k inému zoradeniu variantov, a tak ide o problém univerzálnejšieho charakteru. Zároveň možno úlohu interpretovať tak, že do úvahy prichádza viacero (alt. neobmedzený počet) váh  $v_1, \dots, v_m$ , pri ktorých rozhodujúci subjekt nevidí rozpor s jeho preferenciami.

### 3 Metódy viackriteriálneho hodnotenia pre manažérske rozhodovanie a ich základné vlastnosti

Štandardný rozhodovací model viackriteriálneho hodnotenia spočíva v aplikácii aditívnej formy

$$U = \sum_{j=1}^{j=m} v_j u_j(x_j), \quad (1)$$

alebo multiplikatívnej formy

$$U = \prod_{j=1}^{j=m} [u_j(x_j)]^{v_j}, \quad (2)$$

kde  $u_1(x_1), \dots, u_m(x_m)$  sú kritériá  $x_1, \dots, x_m$  konvertované na hodnoty a  $v_1, \dots, v_m$  sú kladné váhové koeficienty normalizované na jednotkový súčet. V kontexte teórie viackriteriálnej hodnoty (MAVT) rozhodujúci subjekt vníma dosiahnutú hodnotu kritéria  $x_j$  a priraduje mu nejakú subjektívnu cenu, resp. hodnotu  $u_j(x_j)$ , čo robí pre každé kritérium  $j, j \in \{1, \dots, m\}$ . Následne po agregácii podľa vzorca (1) alebo (2) po zohľadnení diferencovaného významu jednotlivých kritérií je výsledkom viackriteriálna hodnota  $U$ . Oba uvádzané tvary viackriteriálnej hodnoty je potrebné maximalizovať a vyberá sa rozhodovací variant, ktorému zodpovedá najvyššia hodnota  $U$ . Neexistuje záväzný návod na špecifikáciu parciálnych hodnotových funkcií  $u_1, \dots, u_m$  a váh  $v_1, \dots, v_m$  a volia sa také hodnotové funkcie a váhy, ktoré zodpovedajú danému rozhodovaciemu kontextu. Táto časť dáva prehľad základných metód určovania parciálnych hodnotových funkcií.

Bude sa terminologicky používať pojem variant a viackriteriálne hodnotenie bude kontextovo zasadené do situácie výberu nejakého variantu riešenia. Samozrejme, kontextové manažérske aplikácie viackriteriálneho hodnotenia môžu byť odlišné a môžu zodpovedať komparatívne hodnoteniu objektov (typicky organizácií, vnútroorganizačných jednotiek a procesov, podnikov a ich

útvarov, produktových segmentov); nie však výberu optimálneho alebo kvázi optimálneho riešenia spomedzi existujúcich možností.

Na samotnom začiatku je nutné zdôrazniť, že sa predpokladá racionalita rozhodujúceho subjektu, ktorá sa prejavuje už pri výbere kritérií, na základe ktorých sa vyhodnocujú rozhodovacie varianty. Výber kritérií musí rešpektovať určité metodicko-logické pravidlá, v rámci ktorých možno akcentovať najmä tieto dve požiadavky:

- Kritériá musia byť merateľné a ideálne na kardinálnej škále.
- Kritériá musia nadobúdať hodnoty usporiadateľné smerom k najlepšej hodnote. Pri kardinálnej škále si to vyžaduje, aby boli identifikovateľné ako maximalizačné či minimalizačné, tzn. musí byť stanovené, či ich želateľná hodnota je vo všeobecnosti čo najväčšia a nízke hodnoty sú chápané ako nepriaznivé, resp. opačne.

Pri viackriteriálnom hodnotení nie sú formálne obmedzenia na počet kritérií  $m$  vo vzťahu k počtu hodnotených variantov, pre ktorý bude v texte prijaté označenie  $n$ . Navzdor tomu je minimálne pre prehľadnosť a následnú interpretovateľnosť výsledkov analýzu založiť na čo najmenšom počte kritérií a zároveň sa snažiť o dodržanie čo najmenšieho počtu kritérií vo vzťahu k počtu variantov, resp.  $m \ll n$ .

Nevenuje sa ale pozornosť tomu, či pre praktické rozhodovanie sa použije aditívna (1) alebo multiplikatívna forma (2). Na jednej strane je aditívna forma v empirických aplikáciách jednoznačne prevalentná, na druhej strane sa osvojil názor, že na voľbe konkrétneho spôsobu agregácie nevelmi záleží. Toto presvedčenie vyplýva z výsledkov experimentálnej štúdie Stewarta (1995), ktorý ukázal, že keď sú kritériá volené rozumne, tak aditívna a multiplikatívna forma agregácie sú zastupiteľné bez zásadného vplyvu na výsledky. Tiež je možné zaviesť (potenciálne vážený) aritmetický priemer viackriteriálnych hodnôt uvedených vo vzťahoch (1) a (2) ako kompromisný rozhodovací model (napr. Langhans et al., 2014).

Bude sa predpokladať, že všetky kritériá  $x_1, \dots, x_m$  sú numerické a majú kardinálny charakter. Pri ich ohodnocovaní takým spôsobom, aby korešpondovali preferenciám hodnotiaceho subjektu, sa v princípe zavádza normalizačná transformácia  $u_j: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , ktorá zvykne byť aplikovaná rovnako pre každé kritérium  $j, j \in \{1, \dots, m\}$ . Pre kritériá sa zároveň bude požadovať, že sú jednoznačné z hľadiska extremalizácie, a teda je pevne známe, či preferenčne dominujú vyššie (čo najvyššie) alebo nižšie (čo najmenšie) hodnoty. Toto v niektorých prípadoch nemusí byť samozrejmé. Napríklad v kontexte finančnej výkonnosti podniku možno založiť hodnotenie na ukazovateľoch, ktoré je žiaduce maximalizovať (napr. obrátka aktív v tržbách, rentabilita vlastného

imania, produktivita práce), zatiaľ čo iné ukazovatele majú jednoznačne minimalistický charakter (napr. dĺžka prevádzkového cyklu alebo náročnosť tržieb na zásoby). Sú ukazovatele, kde taký úsudok nie je možný, pretože príliš nízke aj príliš vysoké hodnoty sú vnímané ako nežiaduce. Flagrantný príklad je napríklad ukazovateľ likvidity tretieho stupňa L3. Vysoká hodnota môže indikovať neefektívne viazanie zdrojov v bežných aktívach a nízka hodnota indikuje slabú likviditu a môže slúžiť ako včasná indícia hroziacej finančnej tiesne. Normalizačné transformácie  $u_1, \dots, u_m$  musia generovať ohodnotenia, ktoré sú extrémálne konzistentné (požadované sú vysoké alebo nízke hodnoty), a zároveň agregovateľné. Agregovateľnosť znamená, že jednotlivé  $u_1, \dots, u_m$  musia viesť k číselným hodnotám, ktoré je možné vážiť buď aditívne aritmetickým priemerom podľa (1), alebo multiplikatívne geometrickým priemerom (2). Voľnejšie povedané, parciálne hodnotové funkcie musia neutralizovať vplyv merných jednotiek a rozmeru.

V nasledujúcom texte sú v jednotlivých podčastiach stručne opísané tieto ohodnocovacie transformácie: (a.) ordinálne ohodnotenie, (b.) proporcionálna vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty, (c.) proporcionálna vzdialenosť od priemernej hodnoty, (d.) proporcionálna vzdialenosť na intervale rozpätia hodnôt, (e.) štandardizácia na z-skóre, (f.) štvorec euklidovskej vzdialenosti od benchmarkovej hodnoty. V poslednej podčasti sa napokon jednotlivé transformácie porovnávajú a študujú sa ich vlastnosti.

Je nevyhnuté prihliadnuť na charakter kritéria z hľadiska extremalizácie, čo je kritérium, ktoré predurčuje podobu transformácie. V uvádzaných vzťahoch pri označovaní hodnoty kritéria symbolom  $x$  sa vynecháva index  $j$ , ktorý teraz nemá význam.

### 3.1 Ordinálna ohodnocovacia transformácia

Pri použití ordinálnej ohodnocovacej transformácie (a.) sa použijú vzorce

$$\begin{aligned} u(x) &= \text{rank}(x, +), \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,} \\ u(x) &= \text{rank}(x, -), \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,} \end{aligned} \quad (3)$$

pomocou ktorých sa hodnoty kritéria  $x$  konvertujú na poradie  $\text{rank}(x, \pm)$  tak, že najlepšia hodnota kritéria dostáva poradie 1, druhá najlepšia poradie 2 a tak ďalej, až najhoršej hodnote sa priradí posledné možné poradie. Druhý argument zápisu  $\pm$  je zapisovaný symbolom  $+$ , keď kritérium má maximalizačný charakter a uplatňuje sa zostupné usporiadanie, a symbol  $-$  sa uplatňuje vtedy, keď kritérium má minimalizačný charakter a usporiadanie je zostupné. Niekedy, a síce najmä pri diskretných kritériách, môže nastať situácia, keď kritérium nadobudne rovnaké hodnoty. V takom prípade sa uplatňuje pre všetky rovnaké hodnoty kritéria tá istá priemerná poradová hodnota počítaná z poradí, ktoré by

inak prislúchali príslušným hodnotám kritéria. Samozrejme, priemerovanie sa opiera o aritmetický priemer. Výhoda tohto postupu je simplicita a aplikovateľnosť bez ťažkostí aj pri kvalitatívnych kritériách, nevýhoda je slabá výsledná informačná hodnota stelesnená vo výsledných hodnoteniach. Hodnotenia sú ordinálne a neprenášajú informáciu o odstupoch medzi pôvodnými hodnotami kritéria. Poradia nie sú schopné zachytiť, či odskoky medzi hodnotami sú zanedbateľné a tesné, alebo markantné. Takto definované hodnotenia je potrebné minimalizovať. Ostatné transformácie (b.) až (f.) sú už kardinálne a až na prípad (e.) generujú hodnotenia na intervalovej škále, čiže je možné usudzovať nielen o relatívnej pozícii (v zmysle aditívnych rozdielov medzi hodnoteniami, ktoré udávajú, o koľko je jedno hodnotenie lepšie alebo horšie ako druhé), ale priamo aj o relatívne komparatívnych rozdieloch v pozícii (v zmysle možnosti dávať hodnotenia do vzájomného pomeru v snahe zistiť, koľkonásobne je jedno hodnotenie lepšie alebo horšie ako druhé).

### 3.2 Proporcionálna vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty a od priemernej hodnoty

Ohodnocovacie transformácie (b.) a (c.) založené na proporcionálnej vzdialenosti sú si konštrukčne veľmi blízke a už ich označenie napovedá, že transformujú hodnotu kritéria na relatívnu vzdialenosť od nejakej referenčnej hodnoty. Líšia sa iba tým, či prepočítavajú hodnotu kritéria vzhľadom na benchmarkovú hodnotu  $c^*$  alebo na observovanú hodnotu aritmetického priemeru hodnôt kritéria  $\text{avg}(x)$ . Transformácia (b.) zavádzajúca proporcionálnu vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty vychádza zo vzorcov

$$\begin{aligned} u(x) &= x / c^*, \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,} \\ u(x) &= c^* / x, \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,} \end{aligned} \quad (4)$$

a transformácia (c.) počítajúca proporcionálnu vzdialenosť od priemernej hodnoty stojí na vzťahoch

$$\begin{aligned} u(x) &= x / \text{avg}(x), \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,} \\ u(x) &= \text{avg}(x) / x, \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,} \end{aligned} \quad (5)$$

Pri transformácii (b.) sa sleduje, ako veľmi hodnota kritéria zaostáva za benchmarkovou hodnotou  $c^*$  (alebo ju presahuje), a je definovaná tak, že najlepšia hodnota kritéria je ohodnotená číslom 1 a horším hodnotám sa zavádza číselné hodnotenie menšie ako 1. Pri transformácii (c.) sa zase meria, ako je hodnota kritéria v relatívnom vzťahu k priemernej hodnote  $\text{avg}(x)$ . V dôsledku toho číselné ohodnotenie vyššie ako 1 indikuje nadpriemerne dobré hodnotenie a číselné hodnotenie nižšie ako jedna je známkou podpriemeru. Obe transformácie sú použiteľné iba vtedy, keď sledované kritérium nadobúda výlučne kladné hodnoty (teda striktne musí byť  $x > 0$ ). Pri transformácii (b.) sú

hodnotenia kladné a obmedzené zhora hranicou 1 (teda  $0 < u(x) \leq 1$ ), pri transformácii (c.) hodnotenia nemajú ani hornú, ani dolnú hranicu (teda formálne  $-\infty < u(x) < \infty$ ). Hodnotenia definované proporcionalizujúcimi transformáciami (b.) a (c.) je žiaduce maximalizovať. Hoci je definícia pre maximalizačné a minimalizačné kritérium zdanlivo primeraná, hodnotová funkcia pri maximalizácii kritéria má lineárny priebeh v závislosti od  $x$ , zatiaľ čo pri minimalizácii kritéria má konvexný priebeh v závislosti od  $x$ , čo možno vidieť ako pomerne neuspokojivé.

### 3.3 Proporcionálna vzdialenosť na intervale rozpätia hodnôt

Nedostatkom proporcionalizujúcich transformácií (b.) a (c.) je nereštrikované rozpätie výsledných ohodnotení. Tento nedostatok je eliminovaný uplatnením inej proporcionalizačnej transformácie (d.), ktorou sa hodnoty kritéria napozorované na rozpätí najmenej a najväčšej hodnoty rozvrhnú lineárne na interval  $[0,1]$ . Najlepšia napozorovaná hodnota kritéria získa potom číselné ohodnotenie 1 a najhoršia hodnota dostane číselné ohodnotenie 0. Transformácia je reprezentovaná zápisom  $s(x, \pm)$ , v ktorom zase druhý argument nadobúda hodnotu  $+$ , keď ide o maximalizačné kritérium, a hodnotu  $-$  pri minimalizačnom kritériu. Transformácia (d.) vychádza potom zo vzťahu

$$\begin{aligned} u(x) = s(x, +) &= \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)}, \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,} \\ u(x) = s(x, -) &= \frac{\max(x) - x}{\max(x) - \min(x)}, \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,} \end{aligned} \quad (6)$$

Vzhľadom na linearitu transformácie platí  $s(x, -) = 1 - s(x, +)$ . Výhodou tejto transformácie je to, že veľmi jednoducho rozvrhne hodnoty na dobre interpretovateľný interval  $[0,1]$  (resp.  $0 \leq u(x) \leq 1$ ). Nevýhodou je ale samotná linearita vzhľadom k pôvodným hodnotám kritéria, keďže často sa vyžaduje transformácia  $u$ , ktorá je v skutočnosti konkávna (Dyer, 2016, s. 273), čo má reflektovať zákon klesajúcej marginálnej užitočnosti. Toto sa dá riešiť tým, že vzťahy (6) sa na ľavej strane ešte mocninne transformujú, napr. sa zvolí  $u(x) = s(x, \pm)^\varphi$ , pričom  $\varphi \in [0,1]$ . Čím vyššia hodnota sa po transformácii získa, tým je ohodnotenie priaznivejšie.

### 3.4 Štandardizácia na z-skóre

Informačne podobnou ohodnocovacou transformáciou k proporcionalizujúcej transformácii (c.) je transformácia (e.) spočívajúca v štandardizácii na z-skóre (tzn. v normovaní, ako je operácia známa v československej literatúre). Túto operáciu možno zaznačiť symbolicky  $z(x, \pm)$ , kde  $+$  v druhom argumente vyznačuje variáciu zodpovedajúcu maximalizačnému kritériu a  $-$  signalizuje variáciu pre minimalizačné kritérium. Štandardizácia na z-skóre je určená vzťahmi:

$$u(x) = z(x, +) = \frac{x - \text{avg}(x)}{\text{sd}(x)}, \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,}$$

$$u(x) = z(x, -) = \frac{\text{avg}(x) - x}{\text{sd}(x)}, \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,}$$
(7)

Vlastne sa dá okamžite vidieť, že platí  $z(x, -) = -z(x, +)$ . Kým lokáciu a variabilitu pôvodných hodnôt kritéria charakterizuje priemer  $\text{avg}(x)$  a smerodajná odchýlka  $\text{sd}(x)$ , po konverzii na z-skóre majú výsledné hodnotenia priemernú hodnotu 0 a smerodajnú odchýlku 1 a je ihneď možné zistiť, či je hodnota kritéria relatívne uspokojivá, alebo nedosahuje ani priemernú úroveň. Ohodnotenia väčšie ako 0 sú nadpriemerne dobré a ohodnotenia touto hranicou sú podpriemerné. Nevýhodou je, že ohodnotenia nie sú teoreticky vonkoncom ohraničené z oboch strán, a najmä, že nie sú na intervalovej škále, takže nemožno rozumne zisťovať, koľkonásobne je jedno ohodnotenie lepšie než druhé. Aj v prípade tejto transformácie sa žiada dosahovať čo najvyššie hodnotenia.

### 3.5 Štvorec euklidovskej vzdialenosti od benchmarkovej hodnoty

Ďalšou možnosťou, ako priradovať pôvodným hodnotám kritéria číselné ohodnotenia, je zohľadňovať ich vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty  $c^*$  použitím vhodnej metriky, čo vystihuje transformácia (f.). S cieľom eliminovať vplyv merných jednotiek a rôznej úrovne jednotlivých kritérií, ktoré by mohli podstatným spôsobom ovplyvniť proces agregácie váženým aritmetickým alebo geometrickým priemerom, pred vyčíslňovaním vzdialenosti sa najprv transformujú pôvodné hodnoty kritéria a benchmarku  $x$  a  $c^*$  na z-skóre a následne sa vypočíta pozičná (štandardne euklidovská) vzdialenosť medzi  $z(x, \pm)$  a  $z(c^*, \pm)$ . Zmysluplné použitie vzťahu pre aritmetický a geometrický priemer limituje v princípe možnosti stanovenia vzdialenosti. Na úrovni každého kritéria prichádza do úvahy merať priamo odstup oboch hodnôt z-skóre na číselnej osi a vzdialenosť definovať ako absolútnu hodnotu rozdielu medzi z-skóre  $|z(x, \pm) - z(c^*, \pm)|$ , avšak častejšie sa používa štvorec euklidovskej vzdialenosti  $(z(x, \pm) - z(c^*, \pm))^2$ . Toto vedie k vzorcom pre transformáciu (f.) v podobe

$$u(x) = [z(x, +) - z(c^*, +)]^2, \text{ ak } x \text{ je maximalizačné kritérium,}$$

$$u(x) = [z(x, -) - z(c^*, -)]^2, \text{ ak } x \text{ je minimalizačné kritérium,}$$
(8)

Čím má kritérium lepšiu hodnotu, tým je jeho z-skóre bližšie z-skóre benchmarkovej hodnoty a vzdialenosť je menšia, v ideálnom prípade 0. Táto hodnota však nemusí byť dosiahnutá. Získané ohodnotenia sú však ohraničené zdola hraničnou hodnotou 0 (teda  $0 \leq u(x) < \infty$ ). Dôležitým aspektom tejto transformácie je, že síce je konvexnou funkciou hodnôt kritéria, snaha o jej minimalizáciu jej dáva konkávny priebeh.

### 3.6 Vlastnosti uvádzaných ohodnocovacích transformácií

Základné vlastnosti zavedených šiestich transformácií sú sumarizované v tabuľke 1, ktorá pre každú transformáciu ukazuje tri charakteristické prvky: (1.) to, či treba skonštruované ohodnotenia maximalizovať alebo minimalizovať, (2.) hodnoty, ktoré transformácia nadobúda (stĺpec „množina ohodnotení“), a (3.) napokon aj samotný priebeh závislosti ohodnotení od hodnôt kritéria so štandardnou typológiou: lineárny, konvexný a konkávny. Symbol  $n$  v tabuľke 1 označuje počet rozhodovacích variantov, resp. uskutočnených hodnotení. Žiada sa podotknúť, že transformácie (a.), (b.), (e.) a (f.) sú bežne aplikované vo finančno-ekonomickej analýze podniku v rámci komparatívnej analýze v priestore, resp. analýze postavenia podniku na trhu, kde sa v príslušnom kontexte nazývajú postupne ako metóda (váženého) súčtu poradí, bodovacia metóda, metóda normovanej premennej a metóda vzdialenosti od fiktívneho podniku (napr. Zalai et al., 2016, s. 365-372). Jediný rozdiel je v tom, že transformácia (f.) sa implementuje tak, že vo vzorci (8) sa ešte na pravej strane pridá druhá odmocnina, čím nejde o štvorec euklidovskej vzdialenosti, ale euklidovskú vzdialenosť samotnú. Táto adjustácia nemení hodnotenie a výsledky, ale má efekt na matematické vlastnosti transformácie (f.).

**Tab. 1** Vlastnosti ohodnocovacích transformácií (Zdroj: Boďa a Úradníček (2021, s. 42))

| Transformácia                                                   | Extremálny charakter      | Množina ohodnotení   | Tvar hodnotovej funkcie v závislosti od hodnôt kritéria                    |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| (a.) ordinálne ohodnotenie                                      | minimalizácia ohodnotenia | $\{1, 2, \dots, n\}$ | ordinálne lineárny                                                         |
| (b.) proporcionálna vzdialenosť od benchmarkovej hodnoty        | maximalizácia ohodnotenia | $(0, 1]$             | lineárny pre maximalizačné kritérium, konkávny pre minimalizačné kritérium |
| (c.) proporcionálna vzdialenosť od priemernej hodnoty           | maximalizácia ohodnotenia | $(0, \infty)$        | lineárny pre maximalizačné kritérium, konkávny pre minimalizačné kritérium |
| (d.) proporcionálna vzdialenosť na intervale rozpätia hodnôt    | maximalizácia ohodnotenia | $[0, 1]$             | lineárny                                                                   |
| (e.) štandardizácia na z-skóre                                  | maximalizácia ohodnotenia | $(-\infty, \infty)$  | lineárny                                                                   |
| (f.) štvorec euklidovskej vzdialenosti od benchmarkovej hodnoty | minimalizácia ohodnotenia | $[0, \infty)$        | konkávny                                                                   |

Je zjavné, že ak sa požaduje, aby hodnotové funkcie mali maximalizačný charakter, realizovali sa na intervale  $[0, 1]$  a boli podľa možností konvexné, najlepšie tomu vyhovuje transformácia (d.). Tieto vlastnosti, a to najmä rozvrhnutie hodnôt kritéria čitateľným spôsobom na interval  $[0, 1]$ , z nej robia

favorizovanú metódu pre konštrukciu integrálneho indikátora v rámci komparatívnej analýzy v priestore a benchmarkingu, ako aj kompozitného indikátora pre ľubovoľnú manažérsku aplikáciu. Pri výučbe na Ekonomickej fakulte Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici v rámci študijného programu financie, bankovníctvo a investovanie sa osvojil pre hodnotenie založené na transformácii (d.) názov *skórovacia metóda* a transformačná operácia sa nazýva *skórovanie*. Toto pojmoslovie zaviedol autor tohto článku.

#### 4 Stochastické modelovanie neistoty vo váhach pomocou Dirichletovho rozdelenia

Stochastické modelovanie neistoty za pomoci Dirichletovho rozdelenia patrí do kategórie pravdepodobnostnej analýzy senzitivity, ako ju nazvali Broekhuizen et al. (2015), pričom tu je analýza senzitivity aplikovaná na váhy. Od rozhodujúceho sa subjektu sa vyžaduje stanovenie vhodného združeného pravdepodobnostného rozdelenia pre váhy  $v_1, \dots, v_m$  (ktoré vyhovuje podmienke nezápornosti a tiež obmedzenia na jednotkový súčet). Ako realistické združené pravdepodobnostné rozdelenie je uvažované v článku Dirichletovo rozdelenie. Implementácia je už pomerne jednoduchá a bežný používateľ dokáže analýzu zrealizovať aj v programe Microsoft® Excel, ktorý mu dovoľí zostaviť potrebné simulácie Monte Carlo v požadovanom rozsahu. Pravdepodobnostná analýza senzitivity dokáže pri malej cene poskytnúť dostatočne detailné informácie pre rozhodovanie. Iné (tzn. nepravdepodobnostné, resp. spravidla nestochastické) prístupy enumerované Broekhuizenom et al. (2015) dávajú veľmi slabý náhľad na rozsah neistoty (deterministická analýza scenárov) alebo kladú silné požiadavky na analytickú infraštruktúru (bayesovské metódy, fuzzy prístup a tzv. sivá relačná analýza).

Stochastický prístup modeluje elicítované váhy ako náhodné veličiny, ktoré majú svoje rozdelenie na jednotkovom  $(m - 1)$  simplexe. Samozrejme, netvrdí sa, že ide naozaj o náhodné veličiny, iba sa používa pravdepodobnostné rozdelenie na modelovanie hodnôt váh tak, aby korešpondovali (neistým) preferenciám. Je preto potrebné dôsledne rozlišovať váhy ako predmet neistoty  $v_1, \dots, v_m$  (modelované ako náhodné veličiny), ich elicítované hodnoty  $v_1^*, \dots, v_m^*$  určené vhodným postupom a tiež ich pravdepodobnostné charakteristiky: typicky očakávané hodnoty  $\mu_1, \dots, \mu_m$  a smerodajné odchýlky  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Očakávané hodnoty budú spravidla pri modelovaní totožné s elicítovanými hodnotami (tzn.  $\mu_j = v_j^*$  pre každé  $j \in \{1, \dots, m\}$ ) a zároveň musia splňovať podmienku positivity a obmedzenia na jednotkový súčet vyžadovanú od váh samotných. Smerodajné odchýlky stelesňujú mieru neistoty asociovanú s jednotlivými váhami a vyžaduje sa iba ich pozitivita. Je možné sa nazdávať, že to budú malé (kladné) hodnoty.

Modelovanie neistoty skrze Dirichletovo rozdelenie je najmenej úsporné na vstupy a vynucuje si u rozhodujúceho subjektu stanoviť pre elicítované váhy  $v_1, \dots, v_m$  ich očakávané hodnoty  $\mu_1, \dots, \mu_m$  a smerodajné odchýlky  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Za

pomoci týchto vstupných podkladov môže rozhodujúci subjekt elicítovať hyperparametre združeného pravdepodobnostného rozdelenia, aby plne korešpondovalo percipovanej podstupovanej neistote.

Dirichletovo rozdelenie je konjugovaný prior multinomického rozdelenia, keďže opisuje združené správanie kladných náhodných premenných, ktoré sú reštrikované jednotkovým súčtom. Charakterizuje teda pravdepodobnostné správanie kompozícií (percentuálnej štruktúry) a navyše disponuje zaujímavými štatistickými vlastnosťami. Užitočné detaily ohľadom Dirichletovho rozdelenia sú uvedené napr. u Johnsona a Kotza (1970, s. 37-53; 1972, s. 232-234) alebo u Gelmana et al. (2004, s. 567, 581-582). Nakoľko marginálnymi rozdeleniami Dirichletovho rozdelenia sú beta rozdelenia, možno ho vnímať ako generalizáciu beta rozdelenia na viacrozmerný prípad. Ak sa o  $m$ -tici váh  $v_1, \dots, v_m$  predpokladá, že sa riadia Dirichletovým rozdelením s parametrami  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , ktoré sú všetky kladné a ich suma je  $\theta := \sum_j \theta_j$ , potom platí  $\sum_j v_j = 1$  a  $v_j \sim Be(\theta_j, \theta - \theta_j)$  pre každé  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Ak pri vyjadrovaní neistoty vo váhach rozhodujúci sa subjekt uprednostní Dirichletovo rozdelenie, stanoví stredné (očakávané) hodnoty váh  $\mu_1, \dots, \mu_m$  a ich smerodajné odchýlky  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Porovnaním momentov marginálnych beta rozdelení s touto špecifikáciou sa získa séria rovníc

$$\begin{aligned} E(v_j) &= \theta_j / (\theta - \theta_j) \equiv \mu_j, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \\ \text{var}(v_j) &= [\theta_j(\theta - \theta_j)] / [\theta^2(\theta + 1)] \equiv \sigma_j^2, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (9)$$

ktoré po riešení vedú k elicítovaným hyperparametrom

$$\theta_j = \mu_j \theta, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{kde} \quad \theta = \sum_j \mu_j (1 - \mu_j) / \sum_j \sigma_j^2 - 1. \quad (10)$$

Prirodzene, tieto rovnice sú použiteľné aj v situácii, keď rozhodujúci subjekt je indiferentný a dokáže iba nahrubo posúdiť neistotu vo váhach a určí, že váhy, ktoré v skutočnosti vystihujú jeho preferencie, sa budú odchyľovať od svojho očakávania spoločne v rozsahu spoločného disperzného faktora  $\pm \sigma$  (keď následne nutne  $\sigma = \sigma_1 = \dots = \sigma_m$ ).

I keď Dirichletovo rozdelenie vychádza ako rozumný spôsob modelovania subjektívne zadaných váh, jeho voľba implikuje, že korelácia medzi dvoma váhami je vždy negatívna a je fixovaná elicítáciou hyperparametrov  $\theta_1, \dots, \theta_m$  a nadobúda hodnotu  $\text{cor}(v_j, v_{j'}) = -\sqrt{\theta_j \theta_{j'}} / [(\theta - \theta_j)(\theta - \theta_{j'})]$  pre ľubovoľné  $j$  a  $j'$  (také, že  $j \neq j'$  a  $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ ). Táto skutočnosť opisuje flagrantný nedostatok Dirichletovho rozdelenia pre použitie v situácii, keď je cítiť, že implikovaná korelácia nekorešponduje s apriórnym presvedčením rozhodujúceho sa subjektu, že váhy sú v skutočnosti previazané odlišnou závislostnou štruktúrou.

Praktický problém nebude pri vyjadrovaní neistoty a elicítácii hyperparametrov vybraného združeného rozdelenia predstavovať stanovenie stredných

hodnôt váh  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , pretože tieto sa spravidla stotožnia so špecifikovanými hodnotami  $\nu_1^*, \dots, \nu_m^*$ , na základe ktorých sa vypracuje deterministická časť viac-kriteriálnej analýzy. Nezáleží, akou metódou boli stanovené tieto hodnoty  $\nu_1^*, \dots, \nu_m^*$  v úzkom napojení na osobný úsudok rozhodujúceho subjektu. Praktický problém predstavuje vyjadrovanie neistoty pre jednotlivé váhy formou smerodajných odchýlok  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Potrebná je na to určitá skúsenosť.

Predstavu o typickej veľkosti neistoty možno získať úvahami okolo vhodného rozdelenia v tejto situácii. Flexibilným a prakticky často používaným rozdelením v tejto situácii pre jednu konkrétnu váhu a veličinu na intervale  $[0,1]$  je beta rozdelenie a vhodné (hoci aj kritizované) združené pravdepodobnostné rozdelenie pre všetky váhy a veličiny zavedenej na simplexe je Dirichletovo rozdelenie.

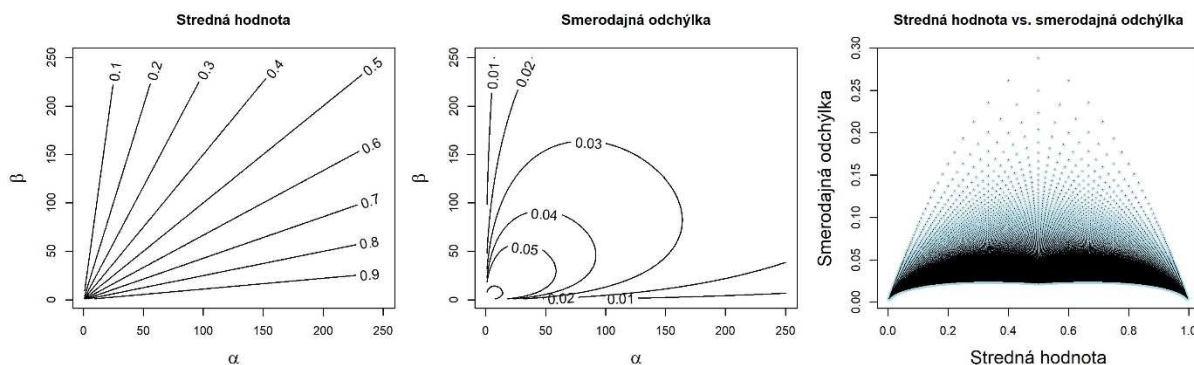
Beta rozdelenie má nosič na intervale  $[0,1]$  a jeho hustota závisí na dvoch tvarovacích parametroch  $\alpha$  a  $\beta$  (také, že  $\alpha, \beta > 0$ ). V hustote beta rozdelenia  $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$  pre  $x \in [0,1]$  vystupuje gama funkcia  $\Gamma(\cdot)$  veľmi dobre známa v matematickej analýze. Náhodná premenná  $\xi$  s beta rozdelením  $\text{Be}(\alpha, \beta)$  má strednú hodnotu určenú vzťahom  $E(\xi) = \alpha/(\alpha+\beta)$  a varianciu  $\text{var}(\xi) = \alpha\beta/[(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)]$ . Beta rozdelenie môže v závislosti od hodnôt parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  byť unimodálne, bezmodálne alebo antimodálne. Tradičný vzťah pre modálnu hodnotu rozdelenia  $(\alpha-1)/(\alpha+\beta-2)$  platí iba pre hodnoty  $\alpha, \beta > 1$  a vtedy je rozdelenie unimodálne s modusom situovaným niekde na intervale  $(0,1)$ , čiže vo „vnútri“ intervalu  $[0,1]$ . Dá sa ukázať, že pri voľbe  $\alpha = \beta = 1$  sa beta rozdelenie redukuje na rovnomerné rozdelenie na intervale  $[0,1]$ , pre  $\alpha, \beta < 1$  je zase antimodálne s antimodusom niekde na intervale  $(0,1)$  a s relatívne najvyššou vierohodnosťou koncentrovanou okolo 0 a 1. Napokon, pri konštelácii parametrov  $\alpha \leq 1, \beta > 1$  je modálna hodnota 0 a rozdelenie je výrazne pravostranne zošikmené a kombinácia parametrov  $\alpha > 1, \beta \leq 1$  situáciu „preklápa“ a beta rozdelenie je od modálnej hodnoty 1 výrazne zošikmené doľava. Detaily o beta rozdelení a množstvo vysvetľujúcich poznámok k nemu vrátane grafických znázornení hustoty v týchto situáciách čitateľ nájde napr. u Johnsona a Kotza (1970, s. 37ff).

Pri modelovaní neistoty prichádza do úvahy pre konkrétnu váhu primerane iba modálne rozdelenie s modusom niekde „vnútri“ intervalu  $(0,1)$ , a teda pre hodnoty parametrov  $\alpha, \beta > 1$ . Ostatné možnosti indikujú buď absenciu akejkoľvek informácie (uniformita), alebo vecne nezmyselný kontext (antimodalita, kde sa preferujú skôr extrémne hodnoty váh 0 a 1 vo vylučovacom fuzzy štýle), alebo sotva obhájitelný postoj (modalita v 0 a 1, kde sa buď priznáva, že atribút nemá čo participovať v hodnotení, alebo sa presadzuje, že je jediný významný).

Graf 1 ukazuje pre situáciu  $\alpha, \beta > 1$ , ako determinuje voľba parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej s beta rozdelením a zároveň, aký je vzájomný vzťah medzi strednou hodnotou a smerodajnou

odchýlkou. Znázornenia tvoriace obrázok sú obyčajné kontúrové grafy, ktoré zobrazujú trojrozmernú informáciu a vrstevnicami spájajú a súbežne aj rozdeľujú tie isté hodnoty tretej súradnice v závislosti od súradníc zobrazených na horizontálnej a vertikálnej osi. Ide o uplatnenie kartografického princípu znázorňovania zemského reliéfu mapou. Na účely vizualizácie použité parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  od 1 do 250 s odstupňovaním o 0.50. Z grafu 1 vyplývajú tri hlavné skutočnosti: Po prvé, vhodnou kombináciou parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  je možné dosiahnuť vlastne ľubovoľnú úroveň očakávanej výšky váhy na intervale  $(0,1)$ . Po druhé, smerodajná odchýlka je štandardne do hodnoty 0.050. Detailnejšia analýza hodnôt smerodajnej odchýlky ukazuje, že smerodajná odchýlka variuje v rozpätí od 0.004 do 0.289 a spočítané hodnoty sú porozdeľované kvartilmi 0.024, 0.270 a 0.032.

Znamená to, že smerodajná odchýlka 0.05 už znamená vysokú neistotu a hodnota do 0.03 postačuje na vyjadrenie bežnej úrovne neistoty.



**Graf 1** Stredná hodnota a smerodajná odchýlka náhodnej premennej s beta rozdelením pri vhodnej voľbe parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  (Zdroj: vlastné spracovanie)

Implementácia v tabuľkovom kalkulátore Microsoft<sup>®</sup> Excel môže pohodlne využiť algoritmus opísaný Gelmanom et al. (2004, s. 582), hoci je výpočtovo menej efektívny. Algoritmus využíva vlastnosť Dirichletovho rozdelenia, že jednorozmerné podmienené marginálne a podmienené rozdelenia sú beta rozdeleniami a krokovo vlastne rozdeľuje číselnú os na intervale  $[0,1]$ . Pri simulovaní  $m$ -tice hodnôt  $\nu_1^\#, \dots, \nu_m^\#$  z Dirichletovho rozdelenia s parametrami  $\theta_1, \dots, \theta_m$  (pričom  $\theta = \sum_j \theta_j$ ) sa postupuje tak, že sa nasimuluje najprv  $\nu_1^\#$  z beta rozdelenia  $Be(\theta_1, \theta - \theta_1)$  a potom ďalších  $m - 2$  hodnôt  $\nu_2^\#, \dots, \nu_{m-1}^\#$  sa určí sekvenčným prepočtom. Pre  $k \in \{2, \dots, m-1\}$  sa nasimuluje hodnota  $y_k^\#$  z beta rozdelenia  $Be(\theta_k, \theta - \sum_{j \in \{1, \dots, k\}} \theta_j)$  a samotná simulovaná hodnota  $\nu_k^\#$  sa stanoví vzťahom  $\nu_k^\# = y_k^\# (1 - \sum_{j \in \{1, \dots, k-1\}} \nu_j^\#)$ . Naostatok sa určí komplementárne posledná simulovaná hodnota  $\nu_m^\#$  ako  $\nu_m^\# = 1 - \sum_{j \in \{1, \dots, m-1\}} \nu_j^\#$ .

Potenciálny problém môže predstavovať simulovanie pseudonáhodných čísel z beta rozdelenia, ale od verzie 2010 je Microsoft<sup>®</sup> Excel vybavený kvantilovou funkciou beta rozdelenia BETA.INV s argumentmi *probability* (pravde-

podobnostná hladina pre, ktorú sa chce určiť kvantil), *alpha* a *beta* (štandardné parametre rozdelenia). Núka sa na tento účel metóda inverznej transformácie známa ako univerzálna metóda pre generovanie výberov z ľubovoľného rozdelenia so známou distribučnou funkciou (napr. Rubinstein, 1981, s. 39-40). Platí totiž, že ak  $\xi$  je náhodná veličina s distribučnou a kvantilovou funkciou  $F_\xi$  a  $F_\xi^{-1}$  a  $U$  je rovnomerne rozdelená náhodná veličina na intervale  $(0,1)$ , tak  $F_\xi(\xi) \equiv U$ . Toto znamená, že kumulatívne pravdepodobnosti  $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$  pre všetky realizácie  $x \in \mathfrak{R}$  sú rovnomerne rozosiate na intervale  $[0,1]$ . Keď ale je  $F_\xi(\xi) \equiv U$ , inverzne sa hneď získava  $F_\xi^{-1}(F_\xi(\xi)) \equiv F_\xi^{-1}(U) \Rightarrow \xi = F_\xi^{-1}(U)$ , čo dáva priamy návod, ako zrekonštruovať či simulovať rozdelenie ľubovoľnej náhodnej veličiny  $\xi$  iba z rovnomerného rozdelenia  $Unif(0,1)$  a známej kvantilovej funkcie  $F_\xi^{-1}$ . Samotná simulácia je v programe Microsoft® Excel dobre podchytená a k dispozícii je napr. funkcia RAND podporovaná už v raných verziách programu alebo nástroj *Random Number Generation* dostupný na karte *Data* (Údaje) cez modul *Data Analysis* (Analýza údajov).<sup>1</sup> Z toho vyplýva hneď algoritmus pre získanie simulovanej hodnoty  $b$  z beta rozdelenia  $Be(\alpha, \beta)$ . Najprv sa nagenereuje hodnota  $u$  z rovnomerného rozdelenia  $Unif(0,1)$  a následne sa spočíta kvantil  $F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(b)$  za pomoci známej kvantilovej funkcie beta rozdelenia.

Sumárne možno algoritmus pre implementáciu Dirichletovho rozdelenia na účely stochastickej analýzy neistoty materializovanej vo váhach pri viacriteriálnom hodnotení s orientáciou na program Microsoft® Excel aplikovať nasledovne:

### *Stanovenie hyperparametrov pre modelovanie neistoty*

- Krok 1** Stanov vhodnou (pravdepodobne subjektívnou) metódou (najlepšie, stredné či deterministické) hodnoty váh  $v_1^*, \dots, v_m^*$ .
- Krok 2** Ohodnoť neistotu obsiahnutú vo váhach a stanov smerodajné odchýlky hodnôt váh  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ .
- Krok 3** Použi vzorce (9) a (10) na stanovenie hyperparametrov  $\theta_1, \dots, \theta_m$  a polož  $\theta = \sum_j \theta_j$ .

### *Získanie B stochastických simulácií váh*

Opakuj pre každú simuláciu  $b$ ,  $b \in \{1, \dots, B\}$ , sekvenciu **krokov 4a až 4d**:

<sup>1</sup> Funkcia RAND nie je úplne optimálna, pretože pri každom prepočítavaní zošita po uložení, otvorení alebo stlačení klávesy F9 sa simulácia uskutoční nanovo a hodnoty sa aktualizujú. Ak sa funkcia RAND predsa len použije, možno odporučiť prepísať simulované hodnoty a nakopírovať ich ako čísla (nie vzorce).

**Krok 4a** Generuj  $m$  pseudonáhodných hodnôt  $z_1, \dots, z_m$  z rovnomerného rozdelenia  $Unif(0,1)$  duplikáciou výpočtu  $RAND()$  v  $m$  rôznych bunkách alebo naraz nástrojom *Random Number Generation*.

**Krok 4b** Získaj simuláciu prvej váhy  $\nu_1^\#$  výpočtom:  $\nu_1^\# = \text{BETA.INV}(z_1, \theta_1, \theta - \theta_1)$ .

**Krok 4c** Získaj simuláciu ďalších  $m - 2$  váh  $\nu_2^\#, \dots, \nu_{m-1}^\#$  iterovaním výpočtu pre  $k \in \{2, \dots, m-1\}$ :  $\nu_k^\# = \text{BETA.INV}(z_k, \theta_k, \theta - \sum_{j \in \{1, \dots, k\}} \theta_j) (1 - \sum_{j \in \{1, \dots, k-1\}} \nu_j^\#)$ .

**Krok .d** Získaj simuláciu poslednej váhy  $\nu_m^\#$  dopočítaním:  $\nu_m^\# = 1 - \sum_{j \in \{1, \dots, m-1\}} \nu_j^\#$ .

Výsledkom postupných opakovaní **krokov 4a až 4d** je  $B$  simulácií  $m$ -tíc váh  $\nu_1^{\#(b)}, \dots, \nu_m^{\#(b)}$ , kde  $b \in \{1, \dots, B\}$ .

### *Viackriteriálne hodnotenie*

**Krok 5** Pre zvolenú metódu viackriteriálneho hodnotenia a agregačný operátor podľa (1) alebo (2) stanov ohodnotenie daného variantu za použitia deterministických váh a simulovaných váh. Získava sa deterministické ohodnotenie  $U^*$  a  $B$  simulovaných ohodnotení  $U^{(b)}$ ,  $b \in \{1, \dots, B\}$ , zodpovedajúcich postupovanej neistote.

**Krok 6** Charakterizuj rozdelenie simulovaných hodnôt  $U^{(b)}$ ,  $b \in \{1, \dots, B\}$ , vhodnými deskriptívnymi charakteristikami (priemer, medián, smerodajná odchýlka, stredné 95%-né kvantilové rozpätie ap.) a grafickými prostriedkami (histogram, jadrový odhad hustoty) a konfrontuj ho s deterministickým ohodnotením  $U^*$  s cieľom zistiť, kde nastávajú odchýlky vo výslednom hodnotení.

---

Samozrejme, je možné niektoré kroky prispôbiť vlastným potrebám. Je napríklad vhodné kroky 4a až 4d realizovať maticovo naraz, nie sekvenčne.

## **5 Praktická demonštrácia (výber technológie pre generovanie elektrickej energie)**

Prístup k modelovaniu neistoty vo váhach v rámci viackriteriálneho modelovania je v tejto časti ilustrovaný na prípadovej štúdie obsahujúcej konkrétny vybraný manažérsky problém reálneho sveta. Aplikácia sa týka výberu technológie pre generovanie elektrickej energie v podmienkach tureckého energetického priemyslu. Ide o štandardný problém výberu optimálneho riešenia spomedzi dostupných variantov pri súbežnom zohľadnení rozmanitých kritérií. V tomto prípade varianty riešenia predstavujú šesť konkurenčných technológií pre získavanie elektrickej energie a je použitých dvanásť indikátorov dlhodobej udržateľnosti pokrývajúcich ekonomické, environmentálne, socioekonomické a technické aspekty. Dáta a dizajn aplikácie I pochádzajú od

Şahina (2021), ktorý však končí deterministickou analýzou. Výber technológií sa uskutočňuje relatívne v súčasnosti, teda okolo roku 2020, hoci dáta sú skompilované ako deskriptory typických vlastností šiestich technológií z rôznych oficiálnych zdrojov za ostatnú dekádu. Stochastická analýza neistoty vo váhach v tomto prípade iba dosvedčuje stálosť výsledkov deterministickej analýzy, keďže aplikácia má malý počet variantov a väčší počet kritérií (šesť variantov vs. dvanásť kritérií). Ukázalo sa, že tento podiel počtu variantov/objektov a kritérií špeciálne odhaľuje, kedy je stochastická analýza menej potrebná, keďže iba validuje deterministické hodnotenie. Prípadová štúdia využíva aditívnu reprezentáciu viackriteriálnej hodnoty podľa vzorca (1) a prezentuje výsledky pre názornosť predovšetkým graficky, pretože grafická vizualizácia dokáže veľmi rýchlo odkomunikovať základnú informáciu, tým skôr, keď je primerane spracovaná.

Analýza bola zväčšia vypracovaná aj väčšina výpočtov realizovaná v programe R (R Core Team, 2020) za použitia knižnice gtools (Warnes et al., 2020) na simuláciu pseudonáhodných výberov z Dirichletovho rozdelenia. Na účely analýzy boli pripravené vlastné kódy v programe R.

V súčasnosti sa veľmi intenzívne na politickej a celospoločenskej úrovni forsírujú riešenia napomáhajúce všeobecnému udržateľnému ekonomickému rozvoju (Caiado et al., 2017; Prashar a Vijaya Sunder, 2020), spoločenskej zodpovednosti podnikov (Pranugrahaning et al., 2020), environmentálne udržateľnej produkcie (napr. Malek a Desai, 2020), recyklácii odpadu (Ho et al., 2020; Armenise et al., 2021) alebo energetickej zodpovednosti (Turkson et al., 2020). Aplikácia je postavená na výbere vhodného technologického riešenia pre produkciu elektrickej energie pre tureckú ekonomiku a preberá základnú konfiguráciu od Şahina (2021), ktorý porovnával vybrané prístupy k stanovovaniu váh a viackriteriálnemu hodnoteniu v kontexte energetickej udržateľnosti. V aplikácii sa porovnáva šesť technológií (zemný plyn, uhlie, voda, pobrežný vietor, geotermálna energia a solárna fotovoltaika) na základe dvanástich kritérií, ktorým sú pridelené váhy.

Kritériá s obsahovou náplňou a mernými jednotkami, označením a extremalizačnou špecifikáciou sú sprehľadnené v tabuľke 2. Kritériá v tabuľke 2 sú zoskupené v štyroch skupinách. Zatiaľ čo kritériá c1 – c3 sú ekonomické, kritériá c4 – c6 sú environmentálne, kritériá c7 – c8 sú socioekonomické, zvyšné štyri kritériá sú technického charakteru. Väčšina kritérií má maximalizačný status, iba päť kritérií je minimalizačných (c1, c4, c5, c6 a c8).

Hodnoty samotných kritérií pre sledovaných šesť technológií uvádza separátna tabuľka 3. Zavádza sa v nej aj kódovanie technológií t1 – t6 pre účely tabelárnej a grafickej prezentácie. Vstupná dátová matica poukazuje na značné rozdiely medzi jednotlivými kritériami a pomerne vysokú variabilitu. Nejde o chybu, ale o skutočné vlastnosti daných technológií. Napr. pobrežný vietor (technológia t4) má skutočne minimálnu spotrebu vody na vygenerovanie

elektrickej energie (kritérium c5), 0.001 litrov na KWh elektrickej energie, kým napr. geotermálna energia (technológia t5) má túto spotrebu až 156 litrov. V prípade ordinálnej hodnotovej transformácie (a.) sa tieto rozdiely a vzdialenosti sčasti vytratia, ale pri ostatných transformáciách, kde sa nesledujú poradia a merajú sa priamo rozdiely medzi hodnotami, by to malo podstatne silnejší vplyv na výsledky, ak by sa príslušnému kritériu c5 pridela vyššia váha. Markantné rozdiely markantne nastávajú aj v prípade kritérií c2, c3 (pre výskyt núl pri technológiách t1 a t2) a tiež pri kritériu c8.

V ďalšej tabuľke 4 sú zobrazené elicitované hodnoty váh a zvolené tri úrovne neistoty pre nasledujúcu stochastickú analýzu. Şahin (2021) vo svojej aplikácii použil dve subjektívne metódy stanovovania váh (Saatyho AHP metódu a Rezaiovu BW metódu) a štyri objektívne metódy. Objektívne metódy však fungujú na odlišnom princípe a u Şahina (2021, tabuľka 10) na prvý pohľad generovali váhy významnosti odlišné od váh určených subjektívnymi metódami (napr. pri subjektívnych metódach je váha kritéria c1 aspoň 0.2614, ale pri objektívnych metódach nanajvyš 0.0961). Váhy generované objektívnymi metódami zjavne nedokážu byť v tomto prípade kompatibilné s preferenciami subjektu vyjadrenými pri Saatyho a BW metóde. Preto tabuľka 3 predkladá iba váhy vzídené zo subjektívnych metód. Ako vstup do deterministického hodnotenia boli zvolené váhy implikované Saatyho metódou (predstavujúc tak hodnoty  $v_1^*, \dots, v_{12}^*$ ). Rozdiely vo váhach oboch subjektívnych metód sú interpretované ako miera neistoty a táto je zmeraná v riadku označenom „Základ“ (ide vlastne o *baseline* scenár s minimálnou úrovňou neistoty). Hodnoty v tomto referenčnom riadku vznikli ako rozdiely medzi hodnotami váh pri Saatyho a BW metóde (triviálne sú to aj smerodajné odchýlky spočítané z jednotlivých hodnôt váh). Z tejto metriky diferencovanej neistoty po jednotlivých kritériách sa odvodili aj smerodajné odchýlky  $\sigma_1, \dots, \sigma_{12}$  merajúce neistotu v troch úrovniach: nízka, stredná a vysoká. Smerodajné odchýlky pre nízku úroveň neistoty sa získali tak, že hodnoty referenčného riadku sa prenásobili 20 a položili sa rovné maximálne 0.03. Pre strednú úroveň neistoty referenčný riadok bol násobený faktorom 30 a smerodajné odchýlky boli zhora ohraničené 0.04. Napokon pre vysokú úroveň neistoty násobenie bolo faktorom 40 a horné ohraničenie bolo 0.05. Týmto postupom sa zachovávajú rozdiely v neistote medzi atribútmi a zavádzajú sa tri úrovne neistoty v zhode s analýzou okolo grafu 1.

**Tab. 2** Kritériá pre hodnotenie šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: Şahin (2021, tabuľky 7 a 8))

| Označenie | Vymedzenie atribútu a jeho merné jednotky                                                                                                                                 | Typ |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| c1        | Rozpočítané náklady elektriny (LCOE: <i>levelized cost of electricity</i> ): priemerné náklady na generovanie elektrickej energie počas životnosti elektrárne v USD / MWh | min |
| c2        | Ekonomická podpora: výkupné sadzby poskytované pre danú technológiu na generovanie elektrickej energie v US centoch / kWh                                                 | max |
| c3        | Domáca podpora vybavenia: dodatočný maximálny príspevok z domácich zdrojov na vybavenie elektrárne v US centoch / kWh                                                     | max |
| c4        | Použitie pôdnej plochy: veľkosť plochy zabratej pre technológiu generujúcu elektrickú energiu v m <sup>2</sup> / kWh                                                      | min |
| c5        | Použitie vodných zdrojov: objem spotrebovanej vody, ktorú nemožno vrátiť do svojho zdroja v l / kWh                                                                       | min |
| c6        | Emisie skleníkových plynov: životnosť emisií skleníkových plynov pri danej technológii na generovanie elektrickej energie v g CO <sub>2e</sub> / kWh                      | min |
| c7        | Tvorba pracovných miest: roky pracovných miest pri plnej zamestnanosti generované počas celej životnosti elektrárne v Ø rokoch miest / GWh                                | max |
| c8        | Úmrtnosť spôsobená nehodami: miera smrteľných úrazov v dôsledku nehôd počas celej životnosti elektrárne v počte úmrtí / GW rokoch                                         | min |
| c9        | Podiel generovanej elektrickej energie: podiel (iba) elektrickej energie generovanej danou technológiou v %                                                               | max |
| c10       | Účinnosť: podiel výstupu k vstupným energiám v %                                                                                                                          | max |
| c11       | Využitie kapacity: podiel skutočného výstupu elektrárne k maximálnemu možnému výstupu v %                                                                                 | max |
| c12       | Životnosť: celková dĺžka prevádzky danej technológie na generovanie elektrickej energie v rokoch                                                                          | max |

**Tab. 3** Vstupné dáta pre hodnotenie šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: Şahin (2021, tabuľka 9))

| Kritérium | t1     | t2     | t3     | t4     | t5     | t6     |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| c1        | 156    | 92.5   | 41.34  | 73.19  | 116.33 | 160    |
| c2        | 0      | 0      | 7.3    | 7.3    | 10.5   | 13.3   |
| c3        | 0      | 0      | 2.3    | 3.7    | 2.7    | 6.7    |
| c4        | 0.0003 | 0.0004 | 0.004  | 0.015  | 0.05   | 0.0003 |
| c5        | 1.6    | 1.6    | 20     | 0.001  | 156    | 0.01   |
| c6        | 499    | 888    | 26     | 26     | 170    | 85     |
| c7        | 0.11   | 0.11   | 0.27   | 0.17   | 0.25   | 0.87   |
| c8        | 0.0721 | 0.12   | 0.0027 | 0.0019 | 0.0017 | 0.0002 |
| c9        | 30.34  | 37.2   | 19.7   | 6.54   | 2.44   | 2.56   |
| c10       | 49     | 38.5   | 90     | 34     | 15     | 13     |
| c11       | 85     | 85     | 35     | 33     | 90     | 18     |
| c12       | 30     | 40     | 80     | 25     | 40     | 25     |

Legenda: Kódy technológií majú tento význam: t1 - zemný plyn, t2 - uhlie, t3 - voda, t4 - pobrežný vietor, t5 - geotermálna energia, t6 - solárna fotovoltaika.

**Tab. 4** Stanovené váhy a ich neistota pre hodnotenie šiestich technológií generovania elektrickej energie (*Zdroj: Şahin (2021, tabuľka 10) a vlastné spracovanie*)

| Kritérium                                                                            | c1     | c2     | c3     | c4     | c5     | c6     | c7     | c8     | c9     | c10    | c11    | c12    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Váhy stanovené subjektívnymi metódami</i>                                         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>Saaty</b>                                                                         | 0.2614 | 0.1331 | 0.0558 | 0.0396 | 0.0495 | 0.0930 | 0.0523 | 0.0492 | 0.0444 | 0.1282 | 0.0544 | 0.0391 |
| <b>BW</b>                                                                            | 0.2660 | 0.1330 | 0.0665 | 0.0287 | 0.0503 | 0.0934 | 0.0517 | 0.0517 | 0.0268 | 0.1204 | 0.0669 | 0.0446 |
| <i>Neistota vo váhach vyplývajúca z variability medzi váhami Saatyho a BW metódy</i> |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>Základ</b>                                                                        | 0.0031 | 0.0001 | 0.0076 | 0.0077 | 0.0006 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0018 | 0.0124 | 0.0055 | 0.0088 | 0.0039 |
| <b>Nízka</b>                                                                         | 0.0300 | 0.0014 | 0.0300 | 0.0300 | 0.0113 | 0.0057 | 0.0085 | 0.0300 | 0.0300 | 0.0300 | 0.0300 | 0.0300 |
| <b>Stredná</b>                                                                       | 0.0400 | 0.0021 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0170 | 0.0085 | 0.0127 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0400 |
| <b>Vysoká</b>                                                                        | 0.0500 | 0.0028 | 0.0500 | 0.0500 | 0.0226 | 0.0113 | 0.0170 | 0.0500 | 0.0500 | 0.0500 | 0.0500 | 0.0500 |

Výsledky deterministického hodnotenia sú prezentované v tabuľke 5, ktorá konfrontuje pre šesť ohodnocovacích transformácií (a.) až (f.) viackritériálne hodnoty a z nich plynúce poradia. Pri transformáciách (a.) a (f.) je integrálny indikátor minimalizačný, pri ostatných sú lepšie vyššie hodnoty. Za benchmarkovú hodnotu sa použila najlepšia napozorovaná hodnota (tzn. observované maximum pri maximalizačných kritériách a observované minimum pri minimalizačných kritériách). Číselná hodnota 1505.16 pre transformáciu (c.) konštruovaná ako proporcionálna vzdialenosť od priemernej hodnoty nie je chybná, ale vyplýva z vyššie diskutovanej minimálnej spotreby vody technológiou t4 (pobrežného vetra) a zo spôsobu ako táto transformácia (veľmi citlivo) meria rozdiely medzi hodnotami kritérií. Kým výsledné poradie sú kvázi definitívne, má stále zmysel študovať rozdiely medzi viackritériálnymi hodnotami (po stĺpcoch) so zámyslom zistiť odstup jednotlivých technológií vo výhodnosti.

**Tab. 5** Viackritériálne hodnoty (U) a výsledné poradie (rank) pri deterministickej analýze šiestich technológií generovania elektrickej energie (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

|             |           | Ohodnocovacia transformácia |      |       |      |         |      |       |      |        |      |       |      |
|-------------|-----------|-----------------------------|------|-------|------|---------|------|-------|------|--------|------|-------|------|
|             |           | (a.)                        |      | (b.)  |      | (c.)    |      | (d.)  |      | (e.)   |      | (f.)  |      |
|             |           | U                           | rank | U     | rank | U       | rank | U     | rank | U      | rank | U     | rank |
| Technológia | <b>t1</b> | 4.296                       | 6    | 0.278 | 6    | 2.66    | 4    | 0.484 | 3    | 0.180  | 3    | 2.805 | 2    |
|             | <b>t2</b> | 3.979                       | 5    | 0.314 | 5    | 2.46    | 5    | 0.401 | 4    | -0.038 | 4    | 3.240 | 4    |
|             | <b>t3</b> | 2.327                       | 1    | 0.682 | 1    | 3.18    | 3    | 0.310 | 5    | -0.221 | 5    | 3.779 | 5    |
|             | <b>t4</b> | 2.995                       | 2    | 0.508 | 2    | 1505.16 | 1    | 0.244 | 6    | -0.407 | 6    | 3.848 | 6    |
|             | <b>t5</b> | 3.577                       | 3    | 0.373 | 4    | 1.95    | 6    | 0.487 | 2    | 0.182  | 2    | 2.516 | 1    |
|             | <b>t6</b> | 3.826                       | 4    | 0.480 | 3    | 161.09  | 2    | 0.524 | 1    | 0.303  | 1    | 2.976 | 3    |

Legenda: Kódy technológií majú tento význam: t1 - zemný plyn, t2 - uhlie, t3 - voda, t4 - pobrežný vietor, t5 - geotermálna energia, t6 - solárna fotovoltaika.

Tabuľka 5 tiež dokumentuje kategorické nezhody medzi výsledkami pri použití rôznych transformácií. Napr. technológia t4 (pobrežný vietor) je dobre hodnotená transformáciami (a.) až (c.) na mieste 1 alebo 2, pre ostatné tri transformácie (d.) až (f.) je to miesto posledné, teda miesto 6. Napriek tomu transformácie (d.) a (f.) vedú k tomu istému usporiadaniu technológií.

Nasledujúca korelačná analýza umožňuje lepšie posúdiť podobnosť získaných výsledkov.

Silná disharmónia vo výsledkoch je tiež indikovaná korelačnou analýzou viackriteriálnych hodnôt a poradí v tabuľke 6. Tabuľka v maticovom formáte obsahuje tradičné pearsonovské korelačné koeficienty (a pri poradiach spearmanovské korelačné koeficienty aplikované pre viackriteriálne hodnoty). Pred korelačnou analýzou boli viackriteriálne hodnoty pri minimalizačných transformáciách (a.) a (d.) invertované prenasobením faktorom  $-1$ . Keďže každá transformácia zavádza svoj vlastný funkčný priebeh, tak korelačné koeficienty pre viackriteriálne hodnoty nemajú adekvátnu informačnú hodnotu. I tak však vidno, že medzi transformáciami (a.) až (c.) je určitá zhoda a ešte vyššia podobnosť je medzi transformáciami (d.) až (f.). Vyčlenené dve skupiny transformácií si inak odporujú. Nejde o generálne tvrdenie, ale o poznatok pre túto prípadovú štúdiu. Identické nezhody, hoci v inej sile na intervale  $[-1,1]$ , sú badateľné aj medzi poradiami. Zhoda vo výsledných poradiach pri transformáciách (d.) a (e.) vedie ku korelačnému koeficientu 1. Kendallov koeficient konkordancie je tradičnou mierou, ako posúdiť zhodu viacerých hodnotení, resp. usporiadaní (Kendall a Gibbons, 1990). Koeficient nadobúda vo všeobecnosti hodnoty na intervale  $[0,1]$  a vyššia hodnota svedčí o vyššej zhode. Hoci diskordancia je manifestná už v samotnej tabuľke 5, dokazuje ju aj hodnota Kendallovho koeficienta 0.172. Nízka hodnota blízka dolnej hranici nasvedčuje formálne o veľmi slabej zhode poradí použitých šiestich ohodnocovacích transformácií.

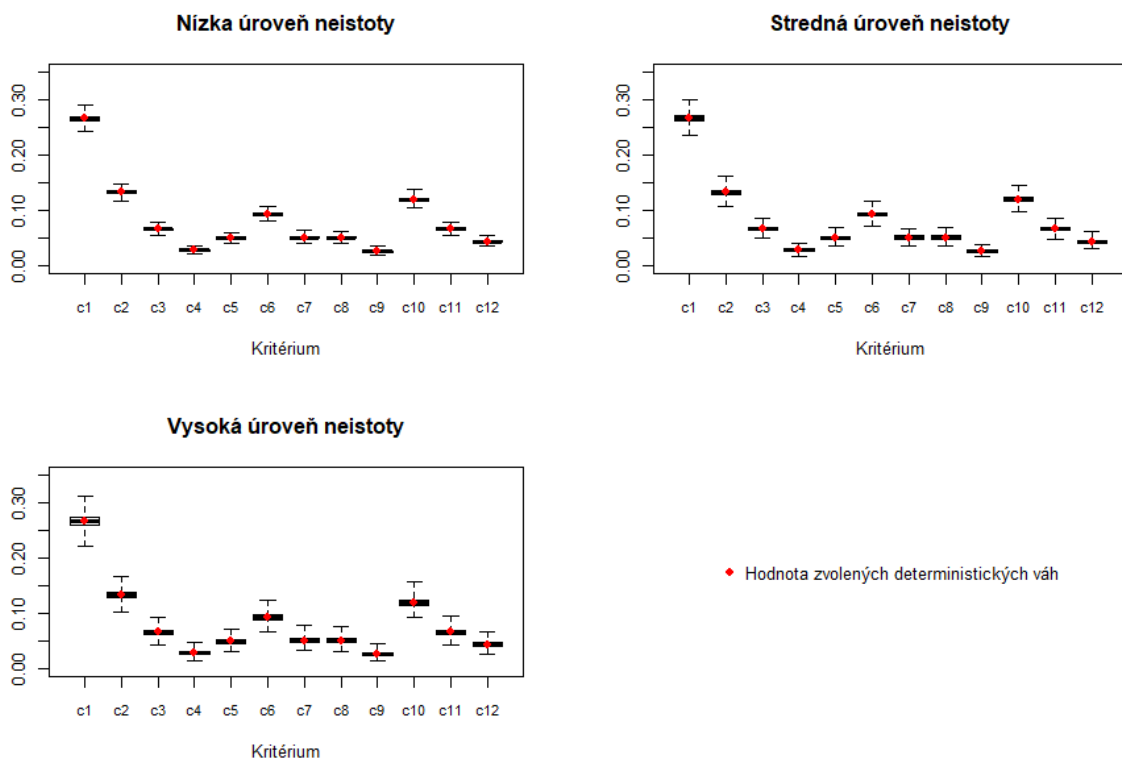
**Tab. 6** Zhoda medzi ohodnoteniami a poradiami podnikov pri deterministickej analýze šiestich technológií generovania elektrickej energie (*Zdroj: vlastné spracovanie*)

|      | Korelácia viackriteriálnych hodnôt |       |        |        |        | Korelácia poradí |       |        |        |        |
|------|------------------------------------|-------|--------|--------|--------|------------------|-------|--------|--------|--------|
|      | (b.)                               | (c.)  | (d.)   | (e.)   | (f.)   | (b.)             | (c.)  | (d.)   | (e.)   | (f.)   |
| (a.) | 0.927                              | 0.325 | -0.743 | -0.713 | -0.739 | 0.943            | 0.371 | -0.486 | -0.486 | -0.543 |
| (b.) |                                    | 0.245 | -0.565 | -0.518 | -0.701 |                  | 0.600 | -0.429 | -0.429 | -0.657 |
| (c.) |                                    |       | -0.681 | -0.683 | -0.588 |                  |       | -0.371 | -0.371 | -0.714 |
| (d.) |                                    |       |        | 0.998  | 0.918  |                  |       |        | 1.000  | 0.829  |
| (e.) |                                    |       |        |        | 0.899  |                  |       |        |        | 0.829  |

Nasledujúca stochastická analýza neistoty bola založená na 100 000 simuláciách Monte Carlo samostatne pre každú úroveň neistoty. Pre hyperparametre  $\theta_1, \dots, \theta_{12}$  odvodené od špecifikácie v tabuľke 4 sa postupne pre nízku, strednú a vysokú úroveň neistoty vygenerovalo 100 000 hodnôt dvanástich váh pre kritériá c1 až c12, ktoré sa použili pri výpočte integrálneho kritéria pre každú z transformácií (a.) až (f.).

Základnú predstavu o rozdelení simulovaných váh zodpovedajúcich trom úrovniám neistoty ukazujú boxploty na grafe 2. V podstate ide o grafické znázornenie použitých váh podľa Saatyho metódy vybavené informáciou o ich

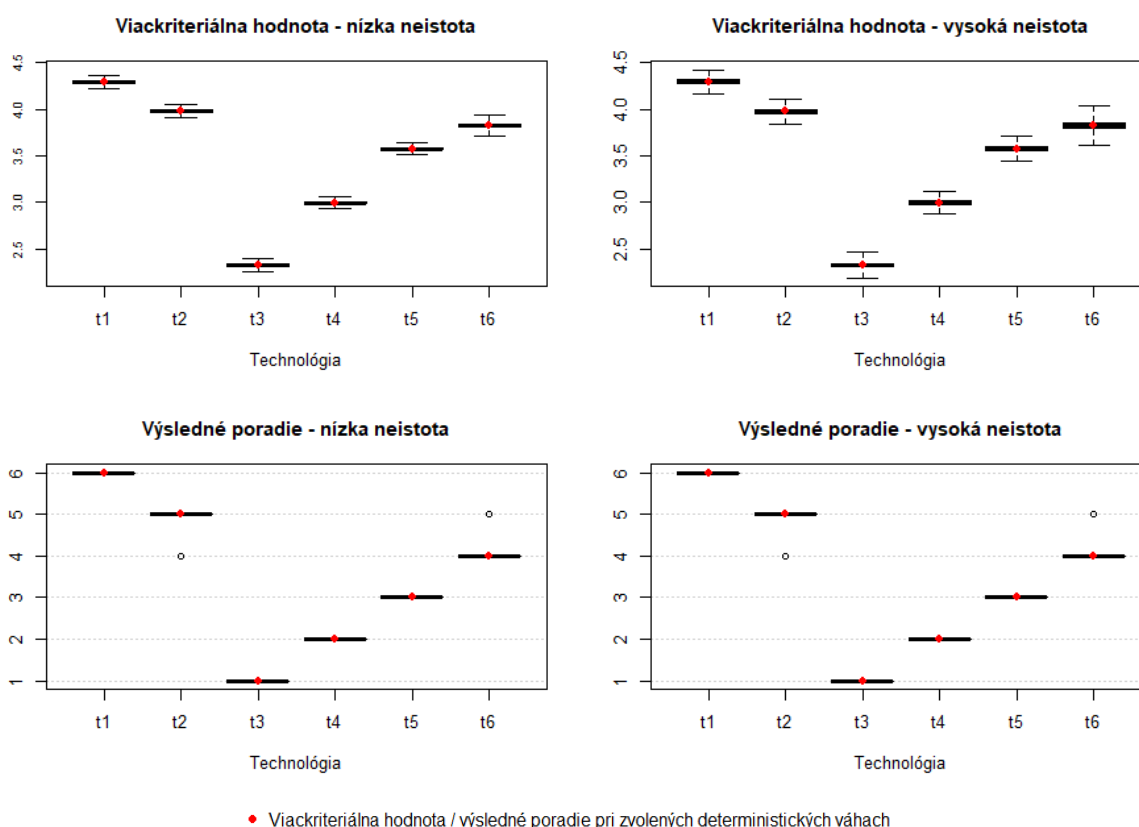
variabilite plynúcej z neistoty pri elicítácii preferencií. Fixné (deterministické) hodnoty váh sú znázorňované červenou bodkou a opticky splývajú s telom boxplotu, resp. s mediánovou hodnotou, ktorá prepoľuje škatuľku každého boxplotu. Neistota je vizualizovaná dĺžkou škatuľky a samotným rozpätím boxplotov. Napriek sugestívnemu trojvrstvovému rozlišovaniu nízkej, strednej a vysokej úrovne neistoty, neistota sprevádzajúca aplikáciu I nie je nejaká kritická a markantná. Boxploty majú úzke rozpätia a sú relatívne dobre separované na číselnej osi (znázornenej teraz na vertikálnej osi). Najmä prvé kritérium c1 je pri každej simulácii najvýznamnejšie a pri každej úrovni neistoty má aspoň päťtinovú váhu. Boxploty sa výraznejšie prekrývajú pri menej významných kritériách (napr. trojica c7, c8 a c12; dvojica c4 a c9; dvojica c2 a c10). Na jednej strane jednoznačne však vidno, že s rastúcou úrovňou neistoty sa boxploty rozširujú. Na strane druhej šírka škatuľky boxplotov a celkové rozpätie boxplotu nenaznačujú, že by mohlo dôjsť k významnejšiemu preusporiadaniu kritérií podľa významnosti a zmene ich váh. Samozrejme, závisí aj od hodnôt kritérií pre jednotlivé technológie.



**Graf 2** Rozdelenia simulovaných hodnôt váh pri rôznych úrovniach neistoty pri hodnotení šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: vlastné spracovanie)

Poctivá stochastická analýza by si vyžiadala vypracovať pre každú ohodnocovaciu transformáciu a každú úroveň neistoty parciálnu analýzu, teda celkom  $6 \times 3 = 18$  preverení viackritériálnej hodnoty a poradia. Z kapacitných dôvodov sú ďalej stochasticky sledované a preverované iba tri transformácie,

a to ordinálne hodnotenie (a.), proporcionálna vzdialenosť na intervale rozpätia hodnôt (d.) a štvorec euklidovskej vzdialenosti od benchmarkovej hodnoty (f.). Výber vyplýva z toho, že transformácia (a.) poskytuje vo všetkých ohľadoch len hrubý spôsob ohodnotenia kritérií, kým transformácia (d.) pracuje na podobných princípoch ako transformácie (b.), (c.) a (e.) a navyše produkuje kardinálne viackriteriálne hodnoty. Transformácia (f.) je minimalizačná a meria vzdialenosť. Pozornosť je ďalej zúžená iba na polárne úrovne neistoty, tzn. nízku a vysokú, keďže aj z preštudovania disperzie váh pri všetkých troch úrovniach neistoty na grafe 2 sa ukazuje veľmi slabý plynulý prechod z nízkej na strednú a zo strednej na vysokú úroveň neistoty. Summa summarum, miesto plnej realizácie 18 kombinácií „transformácia  $\times$  úroveň neistoty“ sa sleduje iba  $3 \times 2 = 6$  kombinácií. Pre tieto situácie variabilitu vo výslednom hodnotení zobrazujú postupne grafy 3, 4 a 5.



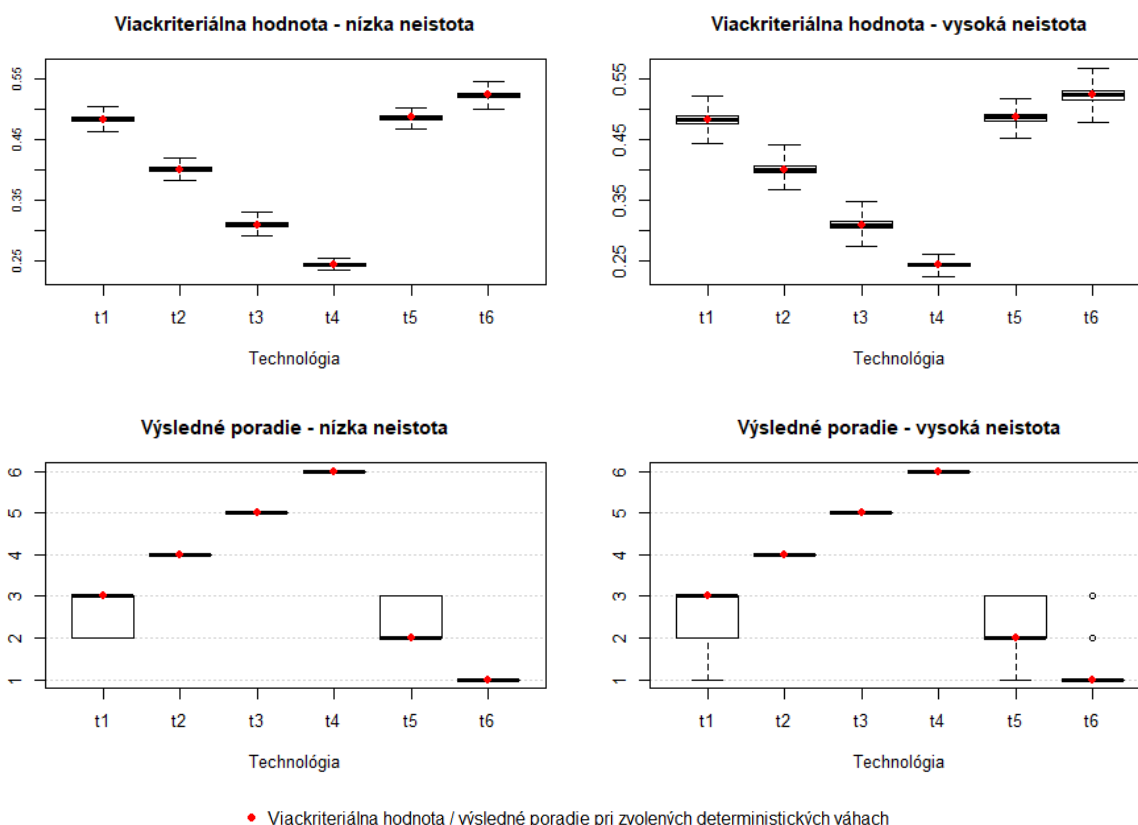
Legenda: Kódy technológií majú tento význam: t1 - zemný plyn, t2 - uhlie, t3 - voda, t4 - pobrežný vietor, t5 - geotermálna energia, t6 - solárna fotovoltaika.

**Graf 3** Analýza neistoty vo výsledkoch pri ohodnocovanej transformácii (a.) pri hodnotení šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: vlastné spracovanie)

Grafy 3, 4 a 5 vizualizujú distribúciu viackriteriálnej hodnoty a poradia boxplotmi a juxtaponujú variabilitu vo viackriteriálnej hodnote a poradí pre nízku a vysokú neistotu. Z grafu 3 možno vyčítať, že transformácia (a.) až na ojedinelé prípady pri technológiách t2 (uhlie) a t6 (solárna fotovoltaika) zachováva usporiadanie

variantov bez ohľadu na podstupovanú neistotu. Viackriteriálne hodnoty v prvom riadku obrázka sú veľmi dobre separované a boxploty v druhom riadku sú zmrštené do jednej hodnoty zodpovedajúcej deterministickému hodnoteniu a iba ojedinele dochádza k zameneniu poradia medzi t2 a t6.

Spoľahlivejší náhľad v porovnaní s transformáciou (a.) by mali poskytnúť ostatné dve transformácie, ktoré dovoľujú presnejšie meranie rozdielov v hodnotách jednotlivých kritérií. Na grafe 4 pre prípad transformácie (d.) naozaj vidno, že môže dôjsť k zámene poradia, hoci teraz nie pre technológie t2 a t6. Boxploty pre viackriteriálne hodnoty v prvom riadku grafu sa síce veľmi málo prekrývajú a aj boxploty v druhom riadku sú pre tri technológie t2 (uhlie), t3 (voda) a t4 (pobrežný vietor) zhustené na nulové rozpätie pre každý stupeň neistoty, ale pri technológiách t1 (zemný plyn) a t5 (geotermálna energia) je zrejماً čiastočná preusporiadateľnosť a aj pri technológii t6 (solárna fotovoltaika) môže vo vzácných prípadoch dôjsť k zmene poradia.



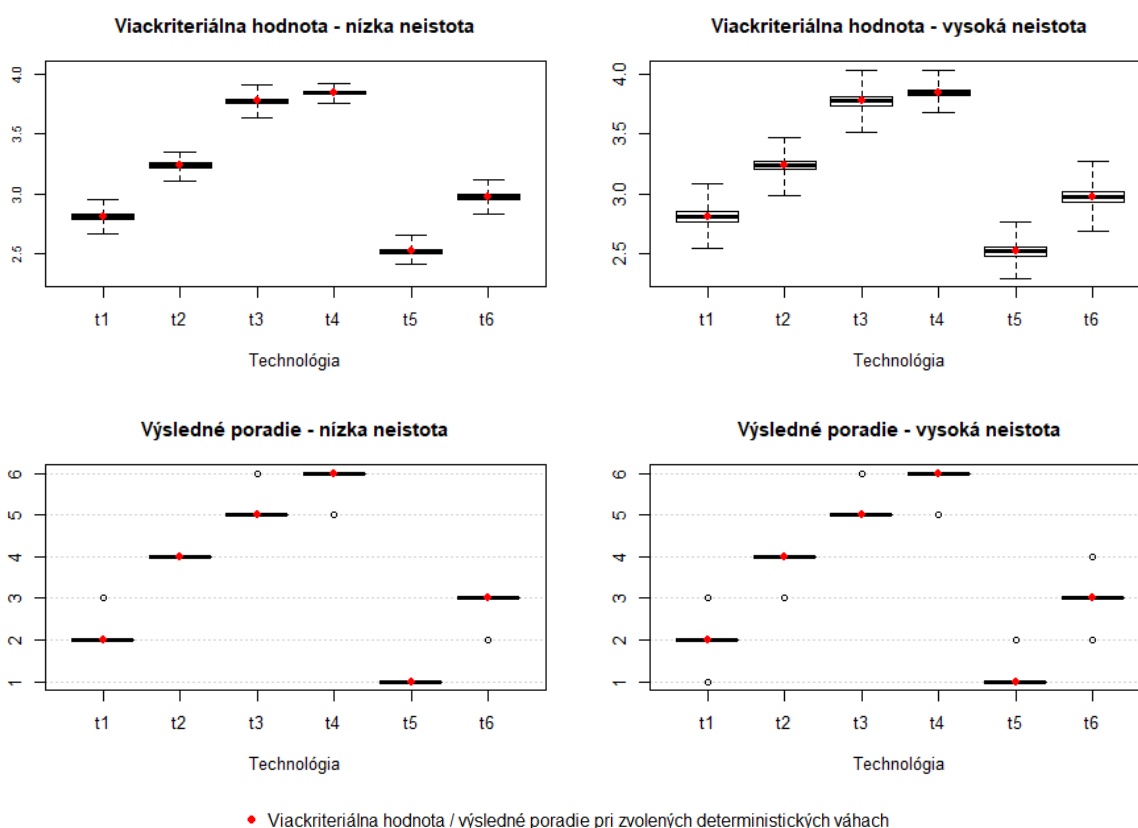
Legenda: Kódy technológií majú tento význam: t1 - zemný plyn, t2 - uhlie, t3 - voda, t4 - pobrežný vietor, t5 - geotermálna energia, t6 - solárna fotovoltaika.

**Graf 4** Analýza neistoty vo výsledkoch pri ohodnocovanej transformácii (d.) pri hodnotení šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: vlastné spracovanie)

Čo sa týka potenciálnej zmeny poradia, vizualizácia na grafe 4 preukazuje, že technológie t1 a t5 môžu byť na mieste 2 alebo 3 a môže to byť v súlade

s preferenciami hodnotenia. Potenciálne môže dokonca dôjsť k preusporiadaniu technológií t1, t5 a t6 medzi miesta 1, 2 a 3. Napriek tomu pochybnosti môžu z praktického pohľadu vyvstať iba o pozíciách technológií t1 a t5 na miestach 2 a 3.

Ďalší graf 5 formou boxplotov porovnáva distribúciu viackriteriálnych hodnôt a poradí simulovaných v súlade s preferenciami pre prípad transformácie (f.). Aj teraz znázornené boxploty preukazujú robustnosť deterministickej analýzy, keďže iba veľmi zriedka sa pri simuláciách mení finálna pozícia technológií, aj to najmä pri vysokej neistote. Keďže ide o atypické hodnoty vytýčené mimo rozpätia boxplotu, nespochybňujú vôbec závery deterministickej analýzy.



Legenda: Kódy technológií majú tento význam: t1 - zemný plyn, t2 - uhlie, t3 - voda, t4 - pobrežný vietor, t5 - geotermálna energia, t6 - solárna fotovoltaika.

**Graf 5** Analýza neistoty vo výsledkoch pri ohodnocovanej transformácii (f.) pri hodnotení šiestich technológií generovania elektrickej energie (Zdroj: *vlastné spracovanie*)

## 6 Záver

Problematika viackriteriálneho hodnotenia v tuzemskej akademickej a odbornej sfére nie je neznáma, hoci v zahraničnom priestore sa jej dostáva oveľa viac priestoru na rozvoj po metodologickej aj aplikačnej stránke. S orientáciou na manažérske potreby sa viackriteriálne hodnotenie uplatňuje v širokom poli operačného výskumu / manažérskych vied (operational research / management science) alebo vo sfére finančno-ekonomickej analýzy podniku

a jeho potenciál sa prejavuje, keď na základe kvantifikovateľných kritérií s prípadne diferencovaným významom treba a) vybrať optimálne riešenie spomedzi viacerých variantov alebo b) hodnotiť, komparovať a riadiť pozíciu organizácií, ich vnútroorganizačných jednotiek alebo procesov. Tradičné použitie týchto metód je deterministické: stanovia sa kritériá, pridelia sa im fixné váhy a následne sa zostaví analýza s vyhodnotením. Tento prístup zanedbáva neistotu, ktorá sa môže týkať výberu adekvátnych kritérií, stanovenia váh, konverzie kritérií na konkrétne ohodnotenia so zámyslom zmerať príspevok k celkovej spokojnosti alebo výkonnosti a následne aj modelu agregácie ohodnotení pri reflektovaní diferencovanej významnosti kritérií. Uvedomujúc si, že je v praktických situáciách pomerne náročné už pri malom počte kritérií zodpovedne ohodnotiť a evalvovať subjektívne preferencie a transformovať ich na váhy, článok sa zameriava na neistotu obsiahnutú vo váhach významnosti a všíma si relatívne jednoduchú stochastickú metódu na preverenie neistoty, ktorej čelí viackriteriálna analýza. Na tento účel sa používa Dirichletovo rozdelenie ako vhodné združené pravdepodobnostné rozdelenie definované na simplexe opisujúce pravdepodobnostné správanie nezáporných čísel obmedzených jednotkovým súčtom (teda váh). Z praktického hľadiska si aplikácia Dirichletovho rozdelenia vyžaduje minimum vstupov. Okrem vlastných hodnôt váh, ktoré sa beztak používajú v deterministickom hodnotení a ktoré dobre poslúžia aj ako stredné (očakávané) hodnoty náhodných veličín reprezentujúcich váhy, musí hodnotiaci subjekt stanoviť stupeň podstupovanej neistoty a reprezentovať ju formou smerodajných odchýlok. Vypracovaná analýza ekonomicky adekvátnych hodnôt parametrov (marginálnych rozdelení) Dirichletovho rozdelenia preukázala, že typická smerodajná odchýlka zodpovedajúca bežnej úrovni neistoty je na úrovni 0.03 a hodnota 0.05 je už pomerne vysoká neistota.

Článok študuje šesť základných metód viackriteriálneho hodnotenia, ktoré spočívajú v tom, že napozorované hodnoty kritérií sa iba transformujú na hodnoty subjektívneho významu či ocenenia a následne sa tieto hodnoty agregujú. Hoci sa používajú dva základné modely agregácie, tzn. aditívny model využívajúci vzťah pre aritmetický priemer a multiplikatívny model využívajúci vzťah pre geometrický priemer, praktická demonštrácia je osnovaná bez akejkolvek straty výpovednej hodnoty okolo aditívneho modelu.

Praktický rozmer metodológie je vysvetlený na jednej prípadovej štúdii, kde bolo potrebné zvoliť spomedzi šiestich technológií výroby elektrickej energie najvhodnejší variant na základe trinástich parametrov. Dá sa uvážiť, že pri vysokom počte kritérií spravidla sú váhy kritérií pomerne nízke a viac nivelizované, a tak je možné využiť aspoň nejaké kompenzačné možnosti medzi kritériami. Prípadná neistota potom nemá efekt na výsledné ohodnotenie a umiestnenie. Naopak, keď je počet kritérií nízky, tak niektoré z kritérií je pravdepodobne dominantné a je ťažké jeho neplnenie kompenzovať inými

kritériami inak ako zmenou váh. Vtedy neistota môže podstatnejšie zmeniť celkové výsledky. Pri aplikácii takto stochastická analýza preukázala robustnosť deterministického riešenia.

Diskutovanú metódu možno využiť v manažérskej praxi na všetkých bazálnych úrovniach. Na operatívnej úrovni je to benchmarking, na taktickej úrovni MABA analýza a napokon na strategickej úrovni SWOT analýza a Porterova analýza piatich trhových síl. Kým v rámci benchmarkingu, MABA analýzy a Porterovej analýzy je potrebné priamo konštruovať kompozitné indikátory reprezentujúce výkonnosť v niektorej oblasti alebo v globálnej rovine, SWOT analýza je kvázi odberateľom výsledkov viackriteriálneho hodnotenia a stochastickej analýzy neistoty, pretože z nej vyplývajú silné a slabé stránky hodnotených objektov.

Okrem toho je možné využiť stochastickú analýzu neistoty v rámci kvantifikácie vplyvu zmien determinujúcich činiteľov na zmenu syntetického činiteľa v rámci pyramidálnych rozkladov, ktoré sú bežné vo finančnej analýze. Znameníým príkladom je du Pontov rozklad rentability vlastného imania ROE multiplikatívnym spôsobom na základné determinanty, ktorými sú rentabilita tržieb, obrátka aktív v tržbách a finančná páka. Tento rozklad je veľmi často používaný (napr. Kašík a Šnapka, 2020; Jenčová et al. 2018, 2019), hoci prikladá rovnakú nediferencovanú dôležitosť jednotlivým parciálnym činiteľom. Boďa a Úradníček (2016) ukazujú, ako do du Pontovho rozkladu alebo všeobecnejších faktorových modelov finančnej analýzy zaviesť váhy a ako ich stochasticky modelovať.

Metodológie pre modelovanie neistoty v elicítovaných váhach môže ľahko nájsť využitie aj mimo tradičnej podnikovej sféry. Toto tvrdenie možno exemplifikovať na projektoch Inštitútu pre ekonomické a sociálne reformy (INEKO), ktoré sú zacielené na hospodárenie municipálnych subjektov, školských a nemocničných zariadení. Za rebríčkami zostavovanými INEKO-m sa skrýva viackriteriálne hodnotenie, založené tradične na proporcionálnej vzdialenosti na intervale rozpätia hodnôt, ktorá je v článku označovaná ako transformácia (d.). Toto hodnotenie je však deterministické bez akejkoľvek tolerancie na stanovené váhy.

## 7 Literatúra

- Armenise, S. et al. (2021). Plastic waste recycling via pyrolysis: A bibliometric survey and literature review. In: *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 158, čl. 105265.
- Boďa, M., Úradníček, V. (2016). Zahrnutie váh a ich neistoty do kvantifikácie v rámci pyramidálneho rozkladu finančného ukazovateľa. In: *Ekonomický časopis*, 64, s. 70-92
- Boďa, M., Úradníček, V. (2021). Stochastická analýza neistoty vo váhach významnosti v rámci viacaspektného hodnotenia. Banská Bystrica: Belianum, 141 s.
- Broekhuizen, H. et al. (2015). A review and classification of approaches for dealing with uncertainty in multi-criteria decision analysis for healthcare decisions. In: *Pharmaco-Economics*, 33, s. 445-455.

- Caiado, R. G. G. et al. (2017). Towards sustainable development through the perspective of eco-efficiency - a systematic literature review. In: *Journal of Cleaner Production*, 165, s. 890-904.
- Ho, H.-J., Iizuka, A., Shibata, E. (2021). Chemical recycling and use of various types of concrete waste: A review. In: *Journal of Cleaner Production*, 284, čl. 124785.
- Dyer, J. S. (2016). Multiattribute utility theory (MAUT). In Greco, S., Ehrgott M., Riguiera, J. R. (eds.) *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*. Heidelberg: Springer, s. 285-314.
- Gelman, A. et al. (2004). *Bayesian data analysis*. 2 vyd. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 668 s.
- Jenčová, S., Litavcová, E., Vašaničová, P. (2018). Implementation of duPont model in non-financial corporations. In: *Montenegrin Journal of Economics* 14, s. 131-141.
- Jenčová, S., Vašaničová, P., Litavcová, E. (2019). Financial indicators of the company from electrical engineering industry: the case study of Tesla, Inc. In: *Serbian Journal of Management* 14, s. 361-371.
- Johnson, N. L., Kotz, S. (1970). *Distributions in statistics: continuous univariate distributions – 2*. New York: Wiley, 306 s.
- Johnson, N. L., Kotz, S. (1972). *Distributions in statistics: continuous multivariate distributions*. New York: Wiley, 333 s.
- Kašík, J., Šnapka, P. (2020). A general model based on the duPont system of financial analysis for identification, analysis and solution of a potential crisis in a business. In: *Montenegrin Journal of Economics* 16, s. 55-66.
- Kendall, M. G., Gibbons, J. D. (1990). *Rank correlation methods*. 5. vyd. New York: Oxford University Press, 272 s.
- Langhans, S. D., Reichert, P., Schuwirth, N. (2014). The method matters: indicator aggregation in ecological assessment. In: *Ecological Indicators*, 45, s. 495-507.
- Malek, J., Desai, T. N. (2020). A systematic literature review to map literature focus of sustainable manufacturing. In: *Journal of Cleaner Production* 256, čl. 120345.
- Pranugrahaning, A. et al. (2021). Corporate sustainability assessments: a systematic literature review and conceptual framework. In: *Journal of Cleaner Production* 295, čl. 126385.
- Prashar, A., Vijaya Sunder, M. (2020). A bibliometric and content analysis of sustainable development in small and medium-sized enterprises. In: *Journal of Cleaner Production*, 245, čl. 118665.
- R Core Team (2020). *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, <https://www.R-project.org>.
- Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo method*. New York: Wiley, 278 s.
- Şahin, M. (2021). A comprehensive analysis of weighting and multicriteria methods in the context of sustainable energy. In: *International Journal of Environmental Science and Technology* 18, s. 1591-1616.
- Stewart, T. J. (1995). Simplified approaches for multicriteria decision making under uncertainty. In: *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 4, s. 246-258.
- Turkson, C. et al. (2020). Sustainability assessment of energy production: a critical review of methods, measures and issues. In: *Journal of Environmental Management*, 264, čl. 110464.

Warnes, G. R., Bolker, B., Lumley, T. (2020). gtools: Various R programming tools. Balík programu R, verzia 3.8.2, <https://cran.r-project.org/package=gtools>.

Zalai, K. et al. (2016). Finančno-ekonomická analýza podniku. 9. vyd. Bratislava: Sprint 2, 487 s.

## 8 Potvrdenie

Článok vychádza z rigorózneho práce autora *Modelovanie neistoty vo viackriteriálnom hodnotení pri manažérskom rozhodovaní* obhajovanej v októbri 2021 na Fakulte managementu Univerzity Komenského v Bratislave.