

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/I/2020/36100138742069764

MODELOVANIE KONEČNEJ HRY N HRÁČOV
V EKONOMICKÝCH PODMIENKACH

Diplomová práca

Bratislava 2020

Bc. Zoltán Végh

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/I/2020/36100138742069764

MODELOVANIE KONEČNEJ HRY N HRÁČOV
V EKONOMICKÝCH PODMIENKACH

Diplomová práca

Študijný program: Operačný výskum a ekonometria

Študijný odbor: Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Marián Goga, PhD.

Bratislava 2020

Bc. Zoltán Végh

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: 09. apríla 2020

.....

Zoltán Végh, Bc.

Pod'akovanie

Rád by som poďakoval každému, kto priamo alebo nepriamo prosper k dokončeniu diplomovej práce, či radou, podporou alebo trpezlivosťou. Vyzdvihol by som moju rodinu, ktorej členovia mi dali dostatok priestoru k vykonaniu tvorivej činnosti, môjmu pracovisku za vytvorenie podmienok na inšpiráciu k téme skúmania a v neposlednom rade môjmu školiteľovi, doc. Ing. Mariánovi Gogovi, PhD., ktorý mi venoval čas, podelil sa so svojimi poznatkami a nápadmi a podporil ma v každej etape tohto dobrodružstva.

ABSTRAKT

VÉGH, Zoltán: *Modelovanie konečnej hry n hráčov v ekonomických podmienkach*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Marián Goga, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2020, 65 s.

Cieľom záverečnej práce je skúmanie vzťahu medzi pomerom povýšených a odchádzajúcich zamestnancov v spoločnosti korporátneho typu a aplikácia optimalizačného modelu vychádzajúceho z teórie hier za účelom minimalizácie potreby nových zamestnancov. Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Obsahuje osem tabuliek a jednu prílohu. Prvá kapitola je venovaná charakterizácii súčasného stavu riešenia problematiky. V ďalšej časti sú opísané metódy použité na určenie modelu a zápis modelu s jeho podúlohami, ktoré viedli k definícii hry n hráčov. Záverečná kapitola sa zaoberá vyhodnotením výsledkov práce a návrhmi aplikácie v profesionálnom prostredí. Výsledkom riešenia danej problematiky je model na podporu rozhodovania manažmentu korporácie.

Kľúčové slová:

Hra, hráči, fluktuácia, korporácia, povýšenia, odchody

ABSTRACT

VÉGH, Zoltán: *Modelling of a finite game with n players in an economic environment*. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operational Research and Econometrics. Head of thesis: doc. Ing. Marián Goga, PhD. – Bratislava: FEI UE, 2020, 65 p.

The aim of this thesis is to investigate the relationship between the rates of employee promotions and turnover in a corporation and to apply an optimization model based on game theory to minimize the need for new hires. The thesis is split into four chapters, contains eight tables and one attachment. The first chapter is dedicated to describe the present state of the given problem. In the following chapters we've listed the methods used to build the optimization model and have formulated the model with all its subobjectives, defined for a game of n players. The last chapter contains the evaluation of the thesis and the propositions of the model's practical use in a professional environment. The result of this thesis is a model supporting corporate management decision-making.

Keywords:

Game, players, employee turnover, corporation, promotions, leavers

Obsah

Úvod	10
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	11
1.1 Niektoré poznatky z teórie užitočnosti	13
1.2 Matematická formulácia hry	18
1.3 Optimalizácia hry	21
1.4 Motivácia zamestnancov a ciele korporácií	32
2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania	34
3 Výsledky práce	36
3.1 Optimalizácia stratégií pomocou teórie hier	38
3.2 Dynamizácia počtu zamestnancov	40
3.3 Stanovenie korporátnych vzťahov	43
3.4 Kvantifikácia hry korporácie	46
3.5 Modelovanie motivácie zamestnanca	50
3.6 Zápis hry	52
3.7 Výsledky dynamického modelu	56
4 Diskusia a záver	60
Zoznam použitej literatúry	62
Príloha	65

Úvod

Neustále klesajúca nezamestnanosť a otvorený trh práce postavili spoločnosť pred výzvu: zaujať ľudí, aby sa u nich zamestnali. Okrem určitých nepodporovaných regiónov je v Slovenskej republike prebytok voľných pracovných miest oproti počtu uchádzačov o zamestnanie. Táto situácia je spôsobená množstvom sociologických, ekonomických a politických faktorov, ktoré však nie sú predmetom tejto diplomovej práce.

Jednou z hlavných tém súčasného vývoja ekonomiky je nová priemyselná revolúcia, ktorú prinesie so sebou výrazná automatizácia pracovných procesov¹. Slovenská republika je štát, kde ekonomika je v značnej miere sústredená na montážnu výrobu². Montáž a výroba majú najnižšiu pridanú hodnotu zo všetkých etáp produkcie a zavedením automatizácie vyššieho stupňa čelí populácia kríze nezamestnanosti³.

Týmto procesom sú najviac ohrození ľudia, ktorí vykonávajú činnosti ľahko automatizovateľné: manuálne alebo repetitívne činnosti. Dôsledkom tohto procesu bude zvýšenie nezamestnanosti, ktorá ale nevplýva na silné postavenie tvorivých a odborne vzdelaných ľudí ako zamestnanci voči zamestnávateľom. Riešením tejto situácie by bolo účelnejšie a perspektívnejšie vzdelanie ľudí aj po ukončení štandardnej školskej výchovy.

Spomínané silné postavenie zamestnanca v súčasnej dobe má za následok, že spoločnosti musia znášať oveľa vyššie náklady na nábor zamestnancov ako predtým. Rozbehlo sa využívanie agentúrnych zamestnancov, aby spoločnosti mali menšie náklady v prípade krátkodobých výkyvov potreby pracovnej sily. Minimálna mzda sa zvýšila za posledných päť rokov štvornásobne rýchlejšie ako inflácia krajiny vykázaná Štatistickým úradom Slovenskej republiky. Rýchle tempo rastu mzdových nákladov tiež podporuje potrebu optimalizovať náborovú činnosť spoločností, kvôli zefektívneniu pomeru produktivity a nákladovosti práce.

V tejto diplomovej práci skúmame závislosť medzi povýšením a pravdepodobnosťou odchodu zamestnancov, agregovaných podľa manažérskych úrovní, špecificky v korporátnom prostredí.

¹ NOVOTNÝ, P. Hlavnou hrozbou je automatizácia. In: *Hospodárske noviny (Online)*. Bratislava : 2018. Dostupné na internete: <<https://finweb.hnonline.sk/ekonomika/1798599-hlavnou-hrozbou-je-automatizacia>>.

² *Priemyselná výroba a jej postavenie v hospodárstve SR*. Bratislava : Odbor priemyselného rozvoja na Ministerstve hospodárstva Slovenskej republiky, 2018. Dostupné na internete: <<https://www.economy.gov.sk/uploads/files/ezNh8gXF.pdf>>.

³ MARTIŠKOVÁ, M. *Budúcnosť pracujúcich v automobilovom priemysle na Slovensku*. Bratislava : Stredoeurópsky inštitút pre výskum práce, 2018. Dostupné na internete: <<http://library.fes.de/pdf-files/bueros/slowakei/15459.pdf>>.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V minulosti boli hry simulujúce vojenské stratégie vnímané ako jedny z možností inteligentnej zábavy šľachtických a vzdelaných vrstiev. Medzi najznámejšie a najobľúbenejšie hry tohto typu patril v západnej kultúre šach a vo východnom svete hra s názvom go.

Obidve uvedené hry simulovali vojenský konflikt dvoch protivníkov, kde dvaja ľudia, nazývaní hráči, vykonávali svoje kroky striedavo a neustále, reagujúc na akcie protivníka. Každým svojím krokom sa snažili napredovať k cieľu, čo predstavovalo výhru nad druhým hráčom. Kým v šachu sa skončila hra porazením kráľa druhého hráča, čo sa mohlo stať aj dobrovoľne položením danej postavy do vodorovného stavu; v hre go koniec hry zaznamenávali dve vynechané kolá za sebou toho istého hráča, pričom sa spočítali postavy hráčov a vyhral hráč s vyšším počtom.

Na základe historicky zaužívaných a pod vplyvom hore opísaných hier, pomenovali matematici v prvej polovici 20. storočia základné prvky novovzniknutej disciplíny teórie hier. Tieto prvky sú hra, hráč, stratégia, ťah a výplata.

Hrou nazývame konfliktnú rozhodovaciu situáciu medzi dvomi alebo viacerými entitami, pričom hráči sú účastníci tejto situácie⁴. Títo hráči môžu konať racionálne, t. j. pri dokonalej informovanosti so snahou maximalizovať svoj úžitok, kým dokonalá informovanosť zahŕňa aj poznanie úžitkov protihráča, ako aj neracionálne, inak povedané ľahostajne (v hrách proti prírode). Racionálne správanie je u hráčov ťažko vyjadriteľné v číslach, čo autori kritizovali už tesne po začatí aplikácie modelov teórie hier v 20. storočí⁵. Tieto kritiky sa týkali najmä kvantifikovania úžitku hráčov, totiž axiomy preferencií sa nespĺňali v každej skúmanej hre a viackrát sa potvrdilo, že človek je náchylný na neracionálne konanie⁶.

Stratégie sú typy akcií, z ktorých si vie hráč vybrať svojím rozhodnutím jednu, pričom súhrn stratégií prípustných pre hráča v danom kole hry nazývame ťahom.

Od začiatku vývoja tejto vednej disciplíny bola najnáročnejšou úlohou v modelovaní hry definícia „výplaty hráča“, teda vyčíslenie výhry hráča pri zvolenej stratégii. Pod pojmom výplata zahŕňame nielen monetárnu hodnotu, ale napr. aj v známej väzňovej dileme počet

⁴ DLOUHÝ, M. – FIALA, P. *Teorie ekonomických a politických her*. Praha : Nakladatelství Oeconomica, 2015. s. 7.

⁵ LUCE, R. D. – RAIFFA, H. *Games and Decisions – Introduction & Critical Survey*. Dover : Dover Publications, 1989. s. 4.

⁶ GRÜNE, T. The Problems of Testing Preference Axioms with Revealed Preference Theory. In: *Analyse & Kritik*. Stuttgart : Lucius & Lucius, 2004. roč. 26 č. 2. s. 396. Dostupné na internete: <<https://people.kth.se/~gryne/papers/Revealed%20Preferences%20A&K.pdf>>.

rokov väzenia, takisto ako aj také abstraktné ponímania ako prežitie alebo smrť hráča, prípadne pravdepodobnosti nastania nejakého javu. Problémy pri vyčíslení výplaty hráča spočívali už zo spomenutých problémov v rámci teórie užitočnosti.

Pri vyšetrení správania sa hráčov kladieme dôraz aj na jednu z príčin neracionálneho správania sa, a to vzhľadom na konflikt záujmov, čo však neznamená zlý úmysel, napr., že hráč sa môže rozhodovať v podmienkach súčasného rizika a neistoty, kde neistota vychádza z hráčovej ignorancie zámerov protihráčov⁷. Poznatky aplikovateľné na našu diplomovú prácu sú opísané v ďalšej podkapitole.

Dôležitou súčasťou úvah v teórii hier je aj existencia alebo tvorba koalícií hráčov. Všeobecne môžeme povedať, že koalícia je vytvorená iba v tom prípade, ak z daného spojenectva hráči získajú dodatočné výnosy. Keďže koalície v ekonomickom prostredí sú nelegálne, ak by aspoň jeden z hráčov nezískal viac ako za predpokladu svojho samostatného konania, do koalície by nešiel, pretože sa mu neoplatí za nulový alebo záporný zisk riskovať penalizácie zo strany orgánov činných v trestnom konaní. V prípade, ak hráči pristúpia k dohode, hovoríme o nekonfliktnej hre. Rozdelenie dodatočnej výhry hráčov získanej po vzájomnej dohode nemá všeobecné pravidlá, hráči si totiž môžu rozdeliť nadbytočné prostriedky pol na pol, v pomere ich trhovej hodnoty alebo trhového podielu, pričom nikto z hráčov nemôže dostať menej ako by získal samostatným konaním.

Fluktuácia zamestnancov je proces vymenenia pracovníkov spoločnosti. Táto veličina vyjadruje, aké percento zamestnancov sa rozhodlo opustiť danú spoločnosť a sleduje, počas obdobia jedného roka, vydelením počtu ubudnutých zamestnancov priemerným počtom zamestnancov v danom období a určuje sa percentuálne. Existuje želaná a neželaná fluktuácia. Totiž spoločnosť chce, aby niektorí z jej zamestnancov s nižšou efektivitou odišli zo spoločnosti, a tým dávali možnosť novým uchádzačom. Neželaná fluktuácia je odliv takých zamestnancov, ktorí sú hodnotní pre firmu. V súčasnosti sa venuje minimalizácii tohto javu každé personálne oddelenie v nejakej forme a v určitom rozsahu, keďže neželaná fluktuácia má obrovský dopad na potenciálny budúci vývoj spoločnosti.

V ďalších častiach sa venujeme súčasnému stavu poznania čiastkových oblastí opísaných hore.

⁷ LUCE, R. D. – RAIFFA, H. *Games and Decisions – Introduction & Critical Survey*. Dover : Dover Publications, 1989. s. 14.

1.1 Niektoré poznatky z teórie užitočnosti

Od počiatkov ekonómie bolo jej hlavnou otázkou riešenie preferencií subjektov ekonómie. Definoval sa pojem úžitok, ktorý znamená blahobyť, dobrý pocit alebo uspokojenie potreby získané za prijatie nejakého statku alebo služby. Vyčíslenie týchto javov bolo však problematické a doteraz existujú dve filozofické školy teórie úžitku: kardinalistická a ordinalistická teória.

Staršia z nich je ordinalistická teória. Predstavitelia tejto školy tvrdia, že pocit úžitku sa nedá vyčísliť. Namiesto toho, ak chceme analyzovať správanie sa jednotlivca, musíme zistiť jeho preferencie jednotlivých statkov pred druhými. Základné pojmy použité uvedenou teóriou sú silná a slabá preferencia a indiferencia. Silnú a slabú preferenciu môžeme pre účely tejto diplomovej práce zlúčiť ako preferencia. Preferencia sa prejavuje tak, že ak by ako rozhodovateľ vždy vybral statok x pred statkom y , tak preferuje x pred y , čo označíme ako:

$$x \succ y$$

Ak sa rozhodovateľ nevie rozhodnúť, či by si vybral statok x pred y alebo naopak, je indiferentný voči nim. Tento vzťah označíme:

$$x \sim y$$

Nutné podmienky existencie funkcie užitočnosti podľa ordinalistickej teórie užitočnosti sú tranzitivita, úplnosť a spojitosť.

Tranzitivita znamená, že ak nejaký statok x je preferovaný pred y a y je preferovaný pred z , tak rozhodovateľ by automaticky musel preferovať x pred z .

Funkcia užitočnosti je úplná, ak pre všetky podmnožiny množiny rozhodovania platí preferenčný vzťah, teda rozhodovateľ nie je indiferentný voči žiadnym dvom prvkom množiny rozhodovania.

Predpoklad spojitosti funkcie užitočnosti je splnený, ak existujú dve podmnožiny množiny rozhodovania a jedna je preferovaná pred druhou a žiadna malá zmena v hodnotách jednej či druhej podmnožiny nezmení preferenčný vzťah medzi nimi. Na príklade to vyzerá takto:

Predpokladajme, že existujú vektory $a_1 = (3;1;1)$ a $a_2 = (3;0;0)$, a a_1 je preferovaný pred a_2 , tak táto funkcia užitočnosti nie je splnená, lebo malá zmena v prvom prvku a_2 nahor

by znamenalo, že a_1 už nie je preferované pred a_2 . Totiž napríklad 3,1 je väčšia ako 3, tým nemôžeme jednoznačne určiť preferenciu medzi dvomi podmnožinami.

Ordinalistické vyjadrenie preferencií spôsobuje určité problémy v porovnaní alternatív, keďže teória pracuje s binárnou hodnotou vzťahov: existuje iba preferencia alebo indiferencia medzi dvomi hodnotami. Tento problém môžeme ukázať na príklade.

Predpokladajme, že jedno dieťa má rado čokoládovú aj vanilkovú zmrzlinu, ale nemá rado citrónovú. Nemôžeme priradiť číselné hodnoty k týmto statkom, napríklad čokoládovej zmrzline priradiť hodnotu úžitku jedna, vanilkovej podobne hodnotu jedna, kým zmrzline s citrónovou príchuťou mínus jedna. Namiesto toho by sme sa ho mali opýtať, či by skôr dostalo čokoládovú alebo vanilkovú, potom na základe jeho odpovede zoradiť príchute, takýmto spôsobom:

$$\text{čokoláda} > \text{vanilka} > \text{citrón}$$

Ak by našou úlohou bolo určiť, akú príchuť máme kúpiť dieťaťu ako odmenu, odpoveď by bola jasná: čokoládovú, pretože tým by sme maximalizovali jeho úžitok. Ak by ale otázka znela, že akú kombináciu zmrzlín by chcelo kúpiť dieťa zo svojich nasporených 2 eur, tak by sme museli analyzovať kombinatorické možnosti jeho nákupov. Predpokladajme, že čokoládová zmrzlina stojí 80 centov, vanilková 70 centov a citrónová 40 centov. Na základe vzťahu preferencií by sme mohli povedať, že by sa uskutočnil nákup dvoch kopčekov čokoládovej zmrzliny a zvyšných 40 centov by dieťa odložilo na ďalší nákup alebo na iné účely. Nevieme však určiť jeho preferenciu medzi usporením 40 centov alebo nákupom dodatočnej kôpky citrónovej zmrzliny, hoci ju až tak nemá rado. Na prvý pohľad je zrejmé, že by sme museli klásť priveľa otázok na vyriešenie jednoduchšej úlohy. So zvýšením počtu premenných rastie úloha exponenciálne.

Na vyriešenie tejto problematiky Keeney a Raiffa vo svojej publikácii (1975) navrhli hraničnú mieru substitúcie⁸. Túto hraničnú mieru užitočnosti určili pre spojité, diferenciálne funkcie užitočnosti ako pomer prvých parciálnych derivácií funkcie užitočnosti podľa dvoch porovnaných premenných. Ak predpokladáme, že existuje vektor možností $\mathbf{x}$ s prvkami x_1 a x_2 , a funkciu užitočnosti, označíme ako $f(\mathbf{x})$, tak hraničná miera substitúcie (MRS) je vyjadrená takto:

⁸ KEENEY, R. L. – RAIFFA H.. *Decision Analysis with Multiple Conflicting Objectives. Preferences and Value Tradeoffs*. Laxenburg : International Institute for Applied Systems Analysis, 1975. s. 130. Dostupné na internete: <<https://pdfs.semanticscholar.org/5f09/424d3e7ef7dac43af4b970c5660ba98f656d.pdf>>.

$$MRS = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}}$$

Vo svojej publikácii charakterizujú maximalizáciu úžitku ako úlohu viackriteriálneho rozhodovania, kde čiastkové riešenia – tzv. efektívne riešenia – sú poskytnuté rozhodovateľovi na preverenie a prípadné prijatie. Efektívne riešenie je také riešenie, v ktorom nemožno zlepšiť žiadny prvok vektora riešení bez zhoršenia ostatných hodnôt. Množina efektívnych riešení je vyčíslená rôznymi metódami, ktoré v tejto diplomovej práci nebudú rozvíjané. Keeney a Raiffa odporúčajú na základe hraničnej miery substitúcie upraviť váhy užitočnosti jednotlivých premenných, a tým hľadať ďalšieho riešenia, až kým rozhodovateľ nebude spokojný s výsledkom. Ak napríklad v nejakom bode množiny efektívnych riešení je vyčíslená hodnota MRS na 0,5, znamená to, že v ďalšom kroku by sa mali aplikovať váhy $\lambda_1 = 1/3$ a $\lambda_2 = 2/3$ v pôvodnej funkcii užitočnosti. Keďže funkcie užitočnosti v ordinalistickej teórii užitočnosti sú ťažko kvantifikovateľné a nutné podmienky tejto funkcie pri ohraničeniach vyplývajúcich z binárnej hodnoty vzťahov (iba preferencia alebo indiferencia) sa tiež začal vyvíjať iný smer, ktorý sa snažil viac kvantifikovať užitočnosť pre jednotlivca.

Začiatky kardinalistickej teórie užitočnosti sú viditeľné v publikácii Pierra Remond de Montmorta z roku 1708,⁹ v ktorej načrtol Petrohradský paradox: predpokladajme, že existuje lotéria, v ktorej pri stávke 2 eurá získa hráč 2 eurá, ak sa po prvom hodení mincou objaví hlava, 4 eurá, ak sa objaví po druhom hodení, 8 eur, ak po treťom hodení, atď. Ukázalo sa, že pri spravodlivom hodení mincou sa tieto pravdepodobnosti a výhry skumulujú v súčte rovnajúcom sa nekonečnu. Tento paradox ukázal, že jednoduchý, lineárny prístup nepostačuje na analýzu užitočnosti z čistého výpočtového hľadiska.

Hlavný rozdiel medzi ordinalistickou a kardinalistickou teóriou užitočnosti je v tom, že pokiaľ ordinalistická teória je zakladaná na preferenčných vzťahoch prvkov množiny rozhodovania, kardinalistická teória priradzuje hodnoty úžitku k jednotlivým prvkom a vytvorí funkcie užitočností na základe merania. Užitočnosť je merateľná len vtedy, ak testovanie priameho merania je zakladané na takej objektívnej veličine, ktorá umožňuje

⁹ De MONTMORT, P. R. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris : 1708.

ľubovoľnému externému pozorovateľovi zopakovať merania pri dosiahnutí rovnakých výsledkov.¹⁰

Moderná teória užitočnosti bola v značnej miere ovplyvnená prácou von Neumanna a Morgensterna (1944). V knihe vyjadrili vzťah preferencií medzi dvomi prvkami množiny rozhodovania vzorcom¹¹:

$$\alpha * u + (1 - \alpha) * v = w,$$

kde u a v sú prvky množiny rozhodovania, teda ľubovoľné statky, služby alebo činnosti, w vyjadruje nejakú kombináciu užitočnosti alebo želanú mieru úžitku a α označuje rozhodovateľom určenú mieru preferencie prvku, u pred prvkom v a nadobudne hodnoty z intervalu $(0;1)$, teda $0 < \alpha < 1$. Práve tento vzťah je základom funkcií užitočností, ktoré použijeme v rámci teórie hier.

Aby sme mohli aplikovať ich závery, funkcia užitočnosti musí spĺňať určité axiómy. Prvá z nich je totožná s predpokladom úplnosti v ordinalistickej teórii užitočnosti. To znamená, že pre každý pár prvkov u a v z rozhodovacej množiny X musí platiť iba jeden zo vzťahov:

$$u < v, \quad u = v, \quad u > v$$

Druhá axióma spomínaná v ich publikácii je axióma tranzitivity: pre ľubovoľné tri prvky u , v a w , musí platiť, že ak $u > v$ a zároveň $v > w$, tak $u > w$. Keďže v tomto prípade už hovoríme o funkciách užitočnosti, nie iba o priradení hodnoty úžitku jednotlivým statkom, táto axióma automaticky implikuje monotónnosť funkcie užitočnosti.

¹⁰ BERNADELLI, H. The End of the Marginal Utility Theory? In *Économica*, roč. 5, č. 18. s. 196.

¹¹ VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944, s. 26.

Tretia axioma hovorí, pre ľubovoľnú dvojicu prvkov u a v neexistuje taká lineárna kombinácia dvoch prvkov, ktorá by zmenila smer preferencií:

$$(u < \alpha * u + (1 - \alpha) * v \mid u < v)$$

$$(u > \alpha * u + (1 - \alpha) * v \mid u > v)$$

Pre tri ľubovoľné prvky u, v, w tiež platí:

$$(w > \alpha * u + (1 - \alpha) * v \mid u < w < v)$$

$$(w < \alpha * u + (1 - \alpha) * v \mid u > w > v)$$

Tieto vzťahy vyjadrujú, že existuje také α , ktoré spôsobuje to, že napriek prítomnosti prvku, ktorý je preferovaný pred daným prvkom w , existuje taká kombinácia nepreferovaného a preferovaného prvku, ktorá je nepreferovaná pred prvkom w , resp. že existuje kombinácia preferovaného a nepreferovaného prvku, ktorá je preferovaná pred w . To je štvrtá axioma užitočnosti podľa von Neumanna a Morgensterna a prakticky znamená, že dvojice preferencií môžu byť neplatné v dôsledku kombinácií s ostatnými prvkami, teda rozhodujúca je číselná hodnota preferencií vyjadrená funkciou užitočnosti, nie jednotlivé dvojice preferencií, čo poruší predpoklady ordinalistickej teórie užitočnosti.

Funkcia užitočnosti v našej diplomovej práci nebude podliehať ordinalistickej teórii užitočnosti z dôvodu, že nami použité vzťahy z teórie hier sú zakladané na práci von Neumanna a Morgensterna, kde aj účelová funkcia našej úlohy musí spĺňať práve tieto štyri axiomy. Dôkaz na tieto axiomy vypracujeme v ďalších kapitolách.

1.2 Matematická formulácia hry

Základné pojmy vednej disciplíny zaoberajúcej sa teóriou hier zakladali von Neumann a Morgenstern v publikácii z roku 1944. Definovali ich v knihe „Theory of Games and Economic Behavior“. Existujú aj predchádzajúce práce, ktoré sa zaoberali podobným modelovaním rozhodovania ako je teória hier, ale táto práca je všeobecne uznaná za základ v tejto oblasti matematiky.

V tejto publikácii sa autori rozhodli nazvať túto problematiku teóriou hier, keďže porovnali výber z možných alternatív aspoň dvoch účastníkov s hrami, napríklad šach alebo poker. Základné myšlienky potom vysvetlili pomocou jednoduchých hier.

Kniha vymedzuje rozdiel medzi anglickými výrazmi „game“, teda hra ako pojem a „play“, čo znamená skôr postupnosť hry, teda hru od jej začiatku ku koncu a všetky kroky vykonané všetkými účastníkmi hry¹². Hru ako pojem, po anglicky „game“, definovali ako súhrn pravidiel. Ďalej upozornili na rozdiel medzi *tahom* vyjadreným anglickým pojmom „move“ a *výberom* z možných alternatív, v angličtine ako „choice“. Podľa nich je *tah* okamih, v ktorom účastník alebo viacero účastníkov hry má možnosť si vybrať z alternatív. Výber z možných alternatív, teda „choice“ je konkrétna voľba účastníka alebo účastníkov z ich možností. V knihe zhrnuli, že hra ako výraz „game“ je postupnosť *tahov*, kým hra vyjadrená po anglicky ako „play“ je postupnosť konkrétnych *výberov* z možností. Ako príklad uvedieme hru poker, kde na základe týchto definícií od autorov nazývame hrou (po anglicky „game“) množinu všetkých kôl a hra (po anglicky „play“) tvorí súhrn rozhodnutí hráčov pýtať si kartu, blufovať či vzdať sa a znížiť alebo zvýšiť svoju stávkou.

Účastníci hry sú intuitívne nazvaní hráčmi. Títo hráči podliehajú *pravidlám* hry a môžu si vybrať medzi *stratégiami*, ktoré majú k dispozícii. Pravidlá hry sú určené pred začiatkom hry a nemožno ich zmeniť. Tieto pravidlá môžu byť napríklad, že každý môže hodiť mincou v každom kole iba raz, alebo že hráč s vyššou hodnotou kariet vyhrá. Stratégie sú súhrn možností rozhodovania, ktoré má hráč k dispozícii. Súhrn stratégií hráčov nemusí byť totožný, ba ani ich počet. Napríklad, ak podstatou hry je ukázať karty inej farby ako má druhý hráč a jeden hráč má karty iba jednej farby, kým druhý hráč má v ruke karty obidvoch farieb, tak počet stratégií prvého hráča je iba jedna, kým druhý hráč si môže vybrať až dve stratégie, teda pre neho existuje voľba medzi farbami.

¹² VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944, s. 49

Po zavedení týchto pojmov zhrnieme aj ich označenie, ktoré budeme aplikovať počas našej práce. Tieto značenia budú vychádzať z tej istej knihy od profesorov von Neumanna a Morgensterna.

Hru ako postupnosť ťahov (po anglicky „game“) značíme ako Γ . Počet hráčov je n . Za predpokladu, že poznáme počet krokov pred začatím hry, označíme toto číslo písmenom v . Ťahy sú označené od η_1 až do η_v . Ďalej platí predpoklad, že index ťahov určuje aj ich poradie, čo znamená, že kroky nasledujú za sebou v poradí $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v$. Index, ktorý nadobudne všetky hodnoty od 1 až do v je označený písmenom κ . Počet alternatív v danom ťahu je α_κ a jednotlivé stratégie dostupné v danom kroku hry sú A_κ . Množina stratégií v danom kroku je teda postupnosť podľa indexu α_κ : $A_\kappa(1), A_\kappa(2), \dots, A_\kappa(\alpha_\kappa)$.

V hrách modelovaných v teórii hier existuje aj ťah, ktorý sa nedá ovplyvniť žiadnym hráčom. Tento ťah nazvali autori ako „chance move“, teda náhodný ťah, ktorý musí mať pridelené pravdepodobnosti k jednotlivým stavom, ktoré môže nadobudnúť. Tieto pravdepodobnosti sú p_κ a sú označené spôsobom $p_\kappa(A_\kappa(1)), p_\kappa(A_\kappa(2)), \dots, p_\kappa(A_\kappa(\alpha_\kappa))$. Náhodný ťah je označený v modeli ako ťah hráča s číslom 0¹³.

Ďalšie označenie patrí voľbám hráčov. Táto množina volieb, teda postupnosť, ktorú nazvali v knihe „play“ σ_κ . Táto veličina nadobudne hodnoty v každom kroku z intervalu $\langle 1; \alpha_\kappa \rangle$. σ_κ teda označíme postupnosť volieb hráčov. Táto veličina bude vyjadrená pre každého hráča k pre každý jeho ťah η_κ . Ak číslo v je konečné číslo, potom existuje konečná množina Ω , ktorá obsahuje všetky možné kombinácie postupností σ_κ , teda množina Ω obsahuje kombinácie v -tej triedy α_κ prvkov s opakovaním, čo je vyjadrené vzťahom:

$$C'_v(\alpha_\kappa) = \frac{(\alpha_\kappa + v - 1)!}{(\alpha_\kappa - 1)! * v!}$$

Platba hráča vyjadruje jeho úžitok z hry, teda nadobudne kladnú hodnotu, ak vyhrá alebo príjme nejakú hodnotu od protihráčov, zápornú hodnotu v prípade prehry alebo povinnosti platby ostatným hráčom a nulovú hodnotu v prípade remízy, alebo keď jeho úroveň úžitku je nezmenená. Platby hráčov označíme ako $F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_\kappa)$. Ako môžeme vidieť, funkcia platieb obsahuje postupnosť volieb hráča a jej funkčná hodnota je závislá na nich. Z tohto dôvodu je zrejmé, prečo sa autori rozhodli rozlíšiť pojmy „game“ a „play“ na súhrn pravidiel a postupnosť volieb hráčov: ako súčasť hry Γ , funkcia F_k je vyjadrená výlučne ako

¹³ VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944, s. 50

funkcia závislá na konkrétnych výberoch hráča k . Závislosť σ_k na jednotlivé α_k je súčasťou hry vyjadrenej po anglicky výrazom „play“. Rozdiel medzi týmito javmi vysvetlíme na príklade na konci tejto podkapitoly.

Autori publikácie sa venovali aj vyjadreniam informovanosti hráčov. Táto charakteristika je kľúčová, keďže sme definovali teóriu hier ako modelovanie rozhodnutí racionálnych účastníkov, kde racionalita znamená byť vlastníkom úplných informácií o hre a o ostatných účastníkoch. Von Neumann a Morgenstern predpokladajú, že v ich modeli každý hráč k je si vedomý predchádzajúcich hodnôt $\sigma_\lambda = \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$, všetkých hráčov pre všetky λ z množiny $A_k = 1, \dots, \kappa-1$, pričom množina A_k môže ale nemusí obsahovať všetky čísla od 1 do $\kappa-1$. V ich príkladoch ale predpokladajú, že množina A_k je spojitá, teda obsahuje všetky čísla od 1 do $\kappa-1$.

Príklad: predstavme si hru, v ktorej dvaja hráči dostanú na začiatku hry tri náhodné karty, ktoré majú hodnoty od 1 do 10 a môžu mať červenú alebo čiernu farbu. Pravidlá hry sú, že hráči v každom kole hry ukážu jednu zo svojich kariet. Ak sa farby líšia, hráč, ktorý ukázal kartu s vyššou hodnotou získa svoju kartu ako aj kartu druhého hráča. Ak obidvaja hráči ukážu karty tej istej farby, každý získa iba kartu druhého hráča. Hru vyhrá hráč, ktorý má súčet získaných kariet väčší. Predpokladajme, že hráč 1 dostal karty 2 a 5 červenej farby a 6 čiernej farby, kým hráč 2 dostal karty 3, 4 a 8 červenej farby. Zapišeme veličiny definované v tejto podkapitole:

$$k = 1, 2; n = 2$$

$$\kappa = 1, 2, 3; v = 3; \text{ pre všetky } k$$

$$\alpha_1 = 3; \alpha_2 = 2; \alpha_3 = 1; \text{ pre všetky } k$$

$$\sigma_1 \in \{1; 2; 3\}; \sigma_2 \in \{1; 2\}; \sigma_3 \in \{1\}; \text{ pre všetky } k$$

$$\Omega = \{(1; 1; 1); (1; 2; 1); (2; 1; 1); (2; 2; 1); (3; 1; 1); (3; 2; 1); \}; \text{ pre všetky } k.$$

Tieto veličiny sú prvky hry Γ . Hra, definovaná ako postupnosť jednotlivých volieb, teda anglickým výrazom „play“ by súčasne bola definovaná jednotlivými platbami, ktoré nastanú pri výbere hráča k v závislosti od volieb ostatných hráčov.

1.3 Optimalizácia hry

V predchádzajúcej podkapitole sme sa venovali matematickej definícii teórie hier, čím sme sa oboznámili so základnými pojmami a vzťahmi, ktoré boli definované v polovici minulého storočia dvojicou autorov Johna von Neumanna a Oskara Morgensterna.

Matematická formulácia nejakej skutočnosti neslúži iba na analytické účely, t. j. okrem charakteristiky prvkov modelu, vďaka vyčísleným vzťahom je možné aj optimalizovať systém zapísaný v tvare modelu.

Optimalizácia znamená určenie najlepšieho prvku z nejakej množiny alternatív vzhľadom na určité ohraničenia¹⁴. Problém s konkrétnymi parametrami, ktorý je subjektom optimalizácie, nazývame úlohou matematickej optimalizácie, keďže riešenie tejto úlohy je výsledkom matematických operácií.

Každá úloha matematickej optimalizácie (alebo matematického programovania) pozostáva z dvoch častí: z účelovej funkcie, ktorej funkčná hodnota je predmetom optimalizácie a ľubovoľného počtu ohraničení, ktoré znižujú množinu alternatív definovanú pre danú úlohu. V týchto ohraničeniach sú zadané napríklad dostupné množstvá materiálu alebo pracovného času, dohodnuté minimálne počty potrebné na výrobu, limity skladovania atď. Ohraničenia môžu mať tvar nerovníc aj rovníc, pričom ohraničenia vo forme rovníc značne limitujú množinu prípustných riešení – množinu alternatív vyhovujúcich všetkým ohraničeniam – na body ležiace na j -dimenzionálnej úsečke, kde j je počet premenných v úlohe. Počet j tiež označuje rozmer úlohy. Všeobecná formulácia minimalizačnej úlohy matematického programovania je takáto:

$$\min_{x \in R} f(x_j)$$

pri ohraničeniach:

$$g_i(x_j) \leq b_i \text{ pre všetky } i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_k(x_j) = w_k \text{ pre všetky } k = 1, 2, \dots, l$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Úlohy matematického programovania sa členia na úlohy lineárneho a nelineárneho programovania. Tieto dva typy úloh sa líšia v charaktere ich účelových funkcií a ohraničení: v prípade, ak všetky ohraničenia aj účelová funkcia sú lineárne, hovoríme o lineárnom

¹⁴ BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačná analýza v podnikovej praxi*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2014.

programovaní, ale ak jedno z ohraničení alebo samotná účelová funkcia má nelineárny tvar, potom úlohu nazývame nelineárnou.

Úlohy lineárneho aj nelineárneho programovania majú jednoznačné riešenie iba v tom v prípade, ak ich množina prípustných riešení je konvexná, teda všetky lineárne kombinácie dvoch ľubovoľných bodov v priestore z množiny prípustných riešení patria tiež do množiny. Ak táto množina je nekonvexná, potom je výrazne ťažšie zistiť globálny extrém funkcie a metódy hľadania extrému môžu konvergovať do bodov lokálneho extrému.

Jedna z najznámejších metód na riešenie úloh lineárneho programovania je simplexová metóda. Túto metódu vypracoval George Dantzig v dvadsiatom storočí, po druhej svetovej vojne a je založená na prešetroení krajných bodov množiny prípustných riešení, pomocou zmien bázy maticovými a vektorovými úpravami lineárnych kombinácií. Je dokázané, že táto metóda konverguje k optimálnemu riešeniu v konečnom počte krokov.

Ak aspoň jedno z ohraničení alebo samotná účelová funkcia majú nelineárny charakter, hovoríme o nelineárnom programovaní. Metódy na riešenie týchto úloh sú založené na iteráciách krokov, teda postupne sa blížia k optimálnemu riešeniu z nejakého počiatočného bodu. V prípade niektorých metód je správny počiatočný bod kľúčový, keďže prípadné nekonvexnosti ohraničení alebo existencia viacero krajných bodov pôsobí, že metódy nekonvergujú do bodu optimálneho riešenia, teda globálneho extrému, ale ako sme už spomínali do bodu najbližšieho lokálneho extrému. Často je však aj vlastnosťou metód na riešenie nelineárnych úloh tolerancia odchýlky, t. j. riešenie nie je optimálne, len dostatočne blízke k nemu, pričom táto tolerancia je vopred definovaná.

V predchádzajúcej kapitole sme definovali platby hráčov ako funkciu $F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, teda funkcia je závislá na vybraných stratégiách v jednotlivých ťahoch. V našej diplomovej práci sa budeme venovať takým príkladom, ktoré predpokladajú iba jeden ťah, kde sa všetci hráči rozhodujú naraz, bez časového odkladu. Preto je v tomto prípade funkcia platieb hráčov závislá iba od ich aktuálnej voľby. Keďže neexistujú predchádzajúce ťahy hry, dokonalá informovanosť hráčov v tomto prípade znamená, že všetci hráči poznajú funkciu platieb všetkých ostatných hráčov. To znamená, že počas svojho rozhodovania sú schopní rátať aj s rozhodovaním ostatných hráčov, lebo každý hráč predpokladá, že všetci ostatní hráči sa snažia maximalizovať svoju výplatu. Dokonalá informácia teda vyjadruje stav, v ktorom všetci hráči poznajú funkciu platieb všetkých ostatných hráčov.

Ako sme spomínali, hry sa členia na jednokolové a viackolové. Jednokolové hry sme definovali v predchádzajúcom odseku ako hry s jedným ťahom, kde sa všetci zúčastnení hráči rozhodujú súčasne a vyberajú svoju stratégiu bez časového odkladu spolu so všetkými

ostatnými hráčmi. Viackolové hry majú viac kôl, často aj striedavého charakteru, čo znamená, že v každom kole môže rozhodovať napríklad iba jeden z hráčov a nasledujúci hráči rozhodujú po ňom, v určitom poradí. V tejto diplomovej práci sa budeme venovať jednokolovým hrám.

Jednokolové hry sa členia podľa racionality hráčov na hry proti prírode a hry n hráčov, kde n je číslo väčšie alebo sa rovná 2. Všeobecne hry dvoch hráčov sú analyzované ako špecifická kategória, kvôli niektorým vlastnostiam, ktoré budeme rozoberať neskôr.

Hry proti prírode sú charakteristické tým, že v nich vystupuje hráč, ktorý je ľahostajný, a preto jeho stratégie nie sú nazvané stratégiami, ale stavmi sveta. Takéto hry sa používajú v prípade, keď sa hráč rozhoduje sám, ale za predpokladu existencie viac možností stavov, ktoré značne ovplyvnia jeho platbu. Hráč v hre proti prírode môže rozhodovať za predpokladu istoty, neistoty alebo rizika. Za predpokladu istoty vie určiť budúci stav sveta s istotou, teda s pravdepodobnosťou 1 vie, čo sa stane, a preto vie určiť svoju najlepšiu stratégiu. Predpoklad neistoty znamená, že existuje viac alternatív, ale hráč nevie určiť pravdepodobnosti nastatia žiadneho zo stavov, je si iba vedomý toho, že jeden z nich nastane. Riziko znamená, že hráč vie určiť pravdepodobnosti nastatia jednotlivých stavov sveta, a preto na základe niektorých metód vie určiť svoju stratégiu, s ktorou buď maximalizuje svoju platbu (tento prístup sa nazýva optimistickým) alebo minimalizuje svoju stratu (pesimistický prístup). Najznámejšie metódy na rozhodovanie v hre proti prírode za predpokladu rizika alebo neurčitosti sú minmaxová metóda, metóda Bayesovho princípu alebo metóda minmaxu straty na základe Savageovho princípu¹⁵.

V hre dvoch hráčov vystupujú dvaja racionálni hráči, obaja so svojou funkciou platieb a s vedomosťou o funkcii platieb druhého hráča. Platby prvého hráča sú súčasťou matice **A**, v ktorej riadky prislúchajú stratégiám hráča 1 a stĺpce patria stratégiám hráča 2. Napríklad ak hráč 1 má k dispozícii 2 stratégie a hráč 2 si môže vybrať z 3 alternatív, matica **A** bude mať rozmer 2×3 . Prvok a_{ij} matice **A** vyjadruje platbu hráča 1 za predpokladu, že si vyberie stratégiu i a hráč 2 si vyberie stratégiu j . Hráč 2 má svoju maticu platieb, maticu **B**, v ktorej prvky b_{ij} vyjadrujú hodnotu platby alebo prehry hráča 2 v prípade, že si vyberie stratégiu i , pričom za ten istý čas si vyberie hráč 1 svoju stratégiu j . Matica **B** má v našom prípade rozmer 3×2 .

Podľa súčtu hodnôt platieb pre dvoch hráčov rozlišujeme hry s konštantnou hodnotou alebo s nekonštantnou hodnotou. Hry s konštantnou hodnotou platby modelujú antagonistické konflikty, kde výhra jedného hráča sa rovná prehre druhého hráča, t. j. hráči

¹⁵ GOGA, M. *Teória hier*. Bratislava : IURA Edition, 2013. s. 24

si môžu získať iba takú hodnotu, akú prehrá ich protivník. V tomto prípade platí súvislosť medzi maticami platieb dvoch hráčov:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}^T = \mathbf{C},$$

kde $\mathbf{C}$ je matica, ktorá obsahuje na každej pozícii iba jednu ľubovoľnú konštantu, napr. 2 alebo 3. Hry s konštantným súčtom možno redukovať v každom prípade na hru s nulovým súčtom:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B}^T &= \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T - c &= \mathbf{C} - \mathbf{A} - c \\ \mathbf{B}^T &= -\mathbf{A} \\ &\text{alebo} \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{A}^T\end{aligned}$$

Teda, na analýzu aj modelovanie stačí sledovať iba maticu jedného hráča. Z lexikografických dôvodov sa zaužívalo, že sa analyzuje vždy matica platieb prvého hráča, teda matica $\mathbf{A}$. Z tejto matice sa vypočíta takzvaný sedlový bod funkcie, teda bod, kde maximálna hodnota jedného stĺpca sa stretne s minimálnou hodnotou daného riadku. Sedlový bod (x^0) je teda:

$$x^0 = \max_i \min_j a_{ij}$$

Sedlový bod je rovnovážne riešenie hry. Nashova rovnováha¹⁶ nastáva, keď žiadny z hráčov nemôže zlepšiť svoju výhru hocijakou odlišnou stratégiou. Pre hráča 1 je toto zabezpečené maximom zo stĺpca, teda, ak hráč 2 sa drží pri svojej rovnovážnej stratégii, tak žiadnou inou stratégiou (indexy i v matici $\mathbf{A}$) nemôže hráč 1 získať viac ako so svojou rovnovážnou stratégiou. Naopak, ak hráč 1 nezmení svoju rovnovážnu stratégiu a hráč 2 sa snaží zvoliť inú stratégiu, tak jeho výhra bude znížená, prípadne jeho prehraná hodnota bude navýšená, totiž minimum z riadkov spolu so vzťahom matíc $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ a kvôli konštantnému súčtu platieb znamená, že v hocijakom inom prípade hodnota v matici $\mathbf{A}$ by bola vyššia a tým hodnota v matici $\mathbf{B}$ nižšia.

¹⁶ OSBORNE, M. J. – RUBINSTEIN, A. *A course in Game Theory*. Cambridge, MA : The MIT Press, 1994. s. 14.

Označme vektor pravdepodobnosti použitia stratégií prvého hráča $\mathbf{x}$ a druhého hráča $\mathbf{y}$. Potom, ako sme spomínali, počítame platbu prvého hráča, ktorý túto platbu chce maximalizovať. Jeho výhra alebo prehra závisí od voľby stratégií druhého hráča, ako aj od rozhodnutia o svojej stratégii, pričom musí rátať s tým, že racionálny protivník uvažuje podobným spôsobom. Označme hodnotu hry, teda hodnotu, ktorú môže získať hráč v danej hre písmenom v . Pomocou vyjadrenia stredných hodnôt pre hráčov môžeme formulovať úlohu:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \rightarrow \text{pre hráča 1}$$

$$c - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \rightarrow \text{pre hráča 2}$$

$$E(\mathbf{x}, j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \text{ pre všetky } j = 1, \dots, n$$

$$E(i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \text{ pre všetky } i = 1, \dots, m$$

V predchádzajúcich častiach sme uviedli, že v hre s racionálnymi hráčmi obidvaja hráči rátajú so stratégiou druhého hráča. Môžeme predpokladať, že vyčíslia hore uvedené stredné hodnoty pre seba a pre druhého hráča, t. j. stredné hodnoty svojich stratégií s ohľadom na stratégie druhého hráča a stredné hodnoty stratégií protivníka, vzhľadom na svoje stratégie. Predpokladajú, že vektor stredných hodnôt protivníkových stratégií vynásobené vektorom vlastných stratégií sa bude rovnať tej hodnote, ktorú dostane druhý hráč takou istou operáciou, čo znamená:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_i E(i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n y_j E(\mathbf{x}, j)$$

Ak si predstavíme, že vektory vyjadrujúce sedlový bod funkcie, teda Nashovej rovnováhy hry $\mathbf{x}^{(0)}$ a $\mathbf{y}^{(0)}$ sú vyjadrené v priestore $S_n \times S_m$, tak sú optimálnym riešením vtedy a práve vtedy, ak:

$$\max_{\mathbf{x} \in S_m} \min_{\mathbf{y} \in S_n} E(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) = \min_{\mathbf{y} \in S_n} \max_{\mathbf{x} \in S_m} E(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) = v$$

v každom inom prípade:

$$E(i, \mathbf{y}^{(0)}) \leq E(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) \leq E(\mathbf{x}^{(0)}, j)$$

Môžeme tvrdiť, že po odvodení z týchto vzťahov sú nasledujúce rovnice pravdivé iba v sedlovom bode funkcie:

$$y_j[E(\mathbf{x}^{(0)}, j) - v] = 0, \text{ pre každé } j = 1, \dots, n$$

$$x_i[E(i, \mathbf{y}^{(0)}) - v] = 0, \text{ pre každé } i = 1, \dots, m$$

Tieto vzťahy sú základom pre analýzu ďalšieho typu hier dvoch hráčov, hier s nekonštantným súčtom. Tieto sa nazývajú bimaticové hry, z toho dôvodu, že už je tu potrebné analyzovať matice platieb obidvoch hráčov, totiž súčet ich prvkov už nie je konštantný.

Bimaticové hry sa riešia rozložením úlohy na dve podúlohy nelineárneho programovania. V tomto prípade sa formulujú účelové funkcie oboch hráčov analogickým spôsobom, ako pri hrách s konštantným súčtom: vynásobia sa vektory stratégií hráčov s maticou platieb hráča, pre ktorú skladáme aktuálnu optimalizačnú úlohu, teda s maticou **A** pre hráča 1 a s maticou **B** pre hráča 2. Obidve úlohy sú maximalizačné, s podmienkou, že súčet prvkov vo vektore stratégií sa musí rovnať jednej a jeho prvky musia byť nezáporné.

Tieto úlohy maximalizácie s viazaným extrémom sa transformujú na úlohu s voľným extrémom pomocou modifikovanej Lagrangeovej metódy, na základe ktorej sa formulujú podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera¹⁷. Tieto podmienky sú založené na podmienkach optimálnosti vypracovaných F. Johnom.¹⁸ Obidve metódy vyšetrenia optimálnosti riešenia sú založené na multiplikátoroch Lagrangeovej funkcie vytvorenej pôvodnou účelovou funkciou a ohraničeniami úlohy, riešia geometrickú optimálnosť: prešetia, či existuje také riešenie, ktoré spôsobí lepšiu funkčnú hodnotu a je stále v rámci množiny prípustných riešení. Na účely tejto diplomovej práce ukážeme na všeobecnom príklade podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera, ale dôkazy fungovania tejto metódy nie sú súčasťou tejto diplomovej práce. Ukážeme podmienky optimálnosti minimalizačnej úlohy s ohraničeniami vo forme nerovníc aj rovníc. V prvom kroku v tejto metóde sa transformuje úloha

¹⁷ GOGA, M. *Teória hier*. Bratislava : IURA Edition, 2013. s. 53

¹⁸ BAZARAA, M. – GOODE, J. – SHETTY, C. Optimality Criteria in Nonlinear Programming without Differentiability. In *Operations Research*. Maryland : 1971, roč. 19, č. 1. s. 77-86.

na minimalizačnú, ak máme pôvodnú úlohu maximalizačnú, a to vynásobením účelovej funkcie hodnotou mínus jedna. V druhom kroku upravujeme všetky ohraničenia vo forme nerovníc na tvar, v ktorom vyjadrujú, že ich ľavá strana je menšia alebo sa rovná nule.

$$\max f(x) \rightarrow \min -f(x)$$

$$\min f(x_j) \quad j = 1, \dots, n$$

pri ohraničeniach:

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, l$$

$$x \geq 0$$

Potom existuje Lagrangeova funkcia s multiplikátormi u_i a v_k , ktorú vyjadrujeme vo vektorovej forme:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}[g_i(\mathbf{x})] + \mathbf{v}[h_k(\mathbf{x})]$$

Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera sa vzťahujú na jednotlivé podmienky kladené prvým parciálnym deriváciám funkcie. V pôvodnej Lagrangeovej metóde transformácie úlohy s viazaným extrémom na úlohu s voľným extrémom bola nutná podmienka existencie extrému, že každá prvá parciálna derivácia Lagrangeovej funkcie sa rovná nule. V tejto metóde sa líšia podmienky takto:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \geq 0 & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} \leq 0 & \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = 0 \\ \mathbf{x} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = 0 & \mathbf{u} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{u}} = 0 & \\ \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{u} \geq 0 & \end{array}$$

Na optimalizáciu sú obzvlášť zaujímavé podmienky v druhom riadku: podmienky komplementarity. To znamená, že ak prvá derivácia podľa nejakej premennej z vektora $\mathbf{x}$ alebo $\mathbf{u}$ sa nerovná nule, teda nie sú extrémami funkčnej hodnoty podľa danej premennej, potom hodnota danej premennej sa musí rovnať nule, inak tu neplatí rovnica. Kuhnove-Tuckerove podmienky tvrdia, že ak existuje vektor multiplikátorov $\mathbf{u}$, ktorého každý prvok je nezáporný, potom riešenie je optimálne. Nutné podmienky sú súčasne aj postačujúcimi podmienkami v prípade, ak aj účelová funkcia aj ohraničenia vo forme nerovníc sú

konvexné¹⁹. Konvexnosť jednotlivých nerovnic a samotnej účelovej funkcie sa prešetruje pomocou determinantu Hesseovej matice **H** vytvorenej druhými parciálnymi deriváciami funkcie, resp. ohraničení. Ak determinant Hesseovej matice je kladný, funkcia je konvexná, ak záporný, tak je konkávna. Ak je funkcia konkávna, neexistuje jej voľný extrém typu minimum, keďže funkčná hodnota takej funkcie môže klesať do mínus nekonečna.

Zostrojme všeobecnú úlohu nelineárneho programovania, ktorá modeluje bimaticovú hru, v ktorej matice **A** a **B** sú matice platieb jednotlivých hráčov, vektory **x** a **y** sú vektory pravdepodobností použitia jednotlivých stratégií dvoch hráčov, *u* je hodnota hry pre prvého hráča a *v* je hodnota hry pre druhého hráča. V prípade bimaticovej hry sa tieto hodnoty nemusia rovnať. Obidvaja hráči maximalizujú svoju platbu, teda pôvodné úlohy sú maximalizačné, a preto ich musíme prepísať na minimalizačný tvar pred ich zaradením do Lagrangeovej funkcie. Jediné ohraničenie pre obidvoch hráčov bude, že súčet pravdepodobností použitia ich stratégií sa musí rovnať jednej.

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \rightarrow \min - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

pri ohraničeniach:

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Lagrangeova funkcia obsahuje multiplikátor *u* ako Lagrangeov multiplikátor ohraničení v tejto zloženej funkcii. Ďalej zapíšeme Kuhn-Tuckerove podmienky optimálnosti pre funkciu s nezápornými premennými:

$$L(x, u) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j + u \left(\sum_{i=1}^m x_i - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L(x, u)}{\partial x_i} \geq 0 \rightarrow - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + u \geq 0 \rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - u \leq 0, \text{ pre všetky } i = 1, \dots, m$$

¹⁹ HANSON, M. A. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Cambridge : Academic Press, 1981, roč. 22 č. 80 s. 546

$$x_i \frac{\partial L(x, u)}{\partial x_i} = 0 \rightarrow x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - u \right) = 0, \text{ pre všetky } i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial L(x, u)}{\partial u} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^m x_i - 1 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Úloha formulovaná pre druhého hráča vyzerá veľmi podobne, s tým rozdielom, že suma prvkov vektora y sa musí rovnať jednej a namiesto prvkov matice $\mathbf{A}$ násobíme prvkami vektora platieb druhého hráča, matice $\mathbf{B}$ a hodnota hry pre druhého hráča bude vyjadrená ako v .

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ji} x_i y_j \rightarrow \min - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ji} x_i y_j$$

pri ohraničeníach:

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$L(y, v) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ji} x_i y_j + v \left(\sum_{j=1}^n y_j - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L(y, v)}{\partial y_j} \geq 0 \rightarrow - \sum_{i=1}^m b_{ji} x_i + v \geq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^m b_{ji} x_i - v \leq 0, \text{ pre všetky } j = 1, \dots, n$$

$$y_j \frac{\partial L(y, v)}{\partial y_j} = 0 \rightarrow y_j \left(\sum_{i=1}^m b_{ji} x_i - v \right) = 0, \text{ pre všetky } j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L(y, v)}{\partial v} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^n y_j - 1 = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Tieto podmienky zabezpečia optimálnosť riešenia, ak aj účelová funkcia aj všetky ohraničenia sú konvexné. Tieto podmienky dvoch úloh zlúčime do jednej úlohy nelineárneho programovania tak, že účelovú funkciu oboch úloh spočítame a zároveň odpočítame hodnoty hry pre obidvoch hráčov a ohraničíme funkčnú hodnotu prvými podmienkami optimálnosti Kuhna-Tuckera pre obidvoch hráčov.

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ji} x_i y_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j - u - v$$

pri ohraničeniach:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - u \leq 0, \text{ pre všetky } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ji} x_i - v \leq 0, \text{ pre všetky } j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$x_i, y_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

Ďalší typ hier je hra n hráčov. Tieto hry hrá množstvo hráčov $n \geq 3$. Menšie úlohy sa riešia explicitnou enumeráciou: vytvoria sa matice platieb $\mathbf{A}_n$ pre všetkých hráčov n s počtom riadkov rovnajúcim sa počtu ich možných stratégií a s počtom stĺpcov rovnajúcim sa všetkým možným kombináciám stratégií ostatných hráčov. Následne sa vyčíslia stĺpcové maximá pre všetkých hráčov. Tieto maximá sú potom zahrnuté do množín R_n jednotlivých hráčov a následne sa hľadá prienik týchto množín, ktorý vytvára množinu R optimálneho riešenia.

$$R = R_1 \cap \dots \cap R_n$$

Ukážeme to na nasledujúcom príklade: predpokladajme, že existuje hra troch hráčov s nasledujúcimi množinami R_n , ktoré obsahujú ich efektívne stratégie za predpokladu všetkých kombinácií použitia stratégií ostatnými hráčmi. Tieto kombinácie stratégií sú dané

vektormi v tvare (s_1, s_2, s_3) , kde jednotlivé s_k označujú stratégiu použitú k -tým hráčom. Množiny R_n po výpočte stĺpcových maxím:

$$R_1 = \{(1; 1; 1); (1; 1; 2); (2; 2; 1); (1; 2; 2)\}$$

$$R_2 = \{(1; 2; 1); (1; 2; 2); (2; 2; 1); (2; 1; 2)\}$$

$$R_3 = \{(1; 1; 2); (1; 2; 1); (2; 1; 1); (2; 2; 1)\}$$

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{(2; 2; 1)\}$$

To znamená, že rovnovážny stav nastane, keď prvý a druhý hráč zvolí svoju druhú stratégiu a tretí hráč sa rozhodne použiť svoju prvú stratégiu. V prípade, ak prienik množín obsahuje viac vektorov stratégií, hráči zvolia stratégiu podľa dominancií ich vektorov výplat. Dominancia vektorov nastane, ak všetky prvky jedného vektora predstavujú lepšiu hodnotu ako prvky druhého vektora – toto nazývame silnou dominanciou. Slabá dominancia nastane v prípade, ak aspoň jeden z prvkov sa rovná prvku z druhého vektora. V teórii hier sa zaoberáme iba so silnou dominanciou, keďže ak vyradíme slabo dominované stratégie, môžeme zanedbať niektorý z potenciálnych sedlových bodov²⁰.

Hore uvedená metóda explicitnej enumerácie je vhodná na hľadanie riešení v čistých stratégiách. Akonáhle hovoríme o hrách, kde riešenie nenájdeme, teda množina R je prázdna, musíme pristúpiť k nájdeniu riešenia v zmiešaných stratégiách. Existuje viac metód. Na účely tejto diplomovej práce sme vybrali rozšírenie metódy uvedenej pri bimaticových hrách. Túto metódu detailnejšie opíšeme v štvrtej časti diplomovej práce.

²⁰ GOGA, M. *Teória hier*. Bratislava : IURA Edition, 2013. s. 35

1.4 Motivácia zamestnancov a ciele korporácií

Korporáciou rozumieme spoločnosti ako právne subjekty nazvané právnickými osobami, ktoré nadobudnú právnu spôsobilosť podľa ods. (1) § 18 zákona č. 40/1964 Zb. Občiansky zákonník a ich vznik, zánik a iné črty sú upravené tým istým zákonom. Právna spôsobilosť znamená, že subjekt nadobudne práva a povinnosti podľa platnej legislatívy.

Nie všetky právnické osoby sú korporáciou v našom ponímaní; právnická osoba musí podnikať, teda vykonávať sústavnú činnosť samostatne vo vlastnom mene a na vlastnú zodpovednosť za účelom dosiahnutia zisku²¹.

V diplomovej práci sa venujeme predovšetkým fluktuácii zamestnancov v korporácii. Vybrali sme túto tematiku, lebo korporácie tvoria hlavnú ťažnú silu slovenskej ekonomiky²². Napriek tomu, že ich predmety podnikania sa líšia výrazne od agrikultúry cez priemysel až k administratívnym a vedeckým činnostiam, všetky obsahujú základné črty, ktoré sú spoločné, a to hierarchia funkcií, väčšie množstvo zamestnancov, ktoré tvoria viaceré homogénne skupiny podľa ich pracovných činností alebo funkcií, právomoci a v rámci jedného sektora majú veľmi podobné organizačné schémy a zvyky.

Hierarchia funkcií znamená, že spoločnosť má určitú postupnosť funkcií od začiatočníkov až k najvyšším vedúcim zamestnancom. Na každom stupni tohto rebríčka sa môže nachádzať viac funkcií, ktoré majú podobné právomoci, povinnosti a úlohy.

Korporácie majú vyšší počet zamestnancov z jednoduchého dôvodu: čím viac pracovníkov má daná spoločnosť, tým väčší je jej potenciálny výstup, čo znamená vyššie tržby, ktoré kvôli znižovaniu efektu fixných nákladov a za predpokladu nezmenenia sadzby variabilných nákladov znamená vyšší zisk. Obchodné spoločnosti sú zakladané fyzickými alebo inými právnickými osobami za účelom dosiahnutia zisku, keďže z dosiahnutých ziskov sa v závislosti od rozhodnutia spoločníkov na valnom zhromaždení vyplácajú podiely zo zisku, takzvané dividendy.

Spoločníci obchodných spoločností sa nemusia podieľať na vedení a zorganizovaní podnikania. Tieto povinnosti môžu zveriť svojim zamestnancom, ktorí tým nadobudnú status manažéra podniku. Za manažovanie poberajú výplatu a v niektorých prípadoch medzi ich benefitmi sú aj podiely zo zisku. Manažéri sú ohodnotení podľa ich kľúčových ukazovateľov výkonnosti (anglický názov KPI – „Key Performance Index“), ktoré sa líšia

²¹ Ods. (1) § 2 zákona č. 513/1991 Zb. Obchodný zákonník

²² MATIJEK, P. 50 firiem tvorí 60 percent HDP Slovenska. To je rebríček Forbes Top 50. In: *Forbes Slovensko*. Bratislava : 2018. Dostupné na internete: <<https://www.forbes.sk/50-firiem-60-percent-hdp-slovenska-to-je-rebricek-forbes-top-50/>>.

v závislosti od zamerania spoločníkov: výška tržieb, výška zisku, pomer úspor nákladov oproti plánu alebo predchádzajúcich období, výkonnosť výroby atď.

Zamestnanci spoločností odvedú svoje pracovné výkony týmto spoločnostiam za zmluvne dohodnutú protihodnotu. Táto práca predstavuje jeden z troch základných výrobných faktorov, ktoré sú práca, pôda a kapitál. Je jasné, že výkon zamestnancov, teda množstvo a nie v poslednom rade kvalita ich práce majú veľmi významný vplyv na úspešnosť podniku, ich zamestnávateľa. Keďže v dnešnej hospodárskej situácii majú podniky problém nájsť dodatočnú pracovnú silu z dôvodu nízkej nezamestnanosti²³, množstvo nevedia vo veľkej miere zlepšiť. Namiesto toho je trend zvýšenia motivácie zamestnancov rôznymi benefitmi, ktoré nemusia mať finančný charakter²⁴. Týmto zvyšujú vnútornú vôľu zamestnanca pracovať, a tým očakávajú aj lepšiu kvalitu práce.

Môžeme teda tvrdiť, že je jasná súvislosť medzi motiváciou zamestnanca a cieľom korporácie dosiahnuť zisk. Motivácia zamestnancov pomôže iba vo zvyšovaní výnosov, na minimalizovanie nákladov musia manažéri nájsť iné spôsoby.

²³ Historické čísla nezamestnanosti, prvýkrát klesla pod 5 percent. In: Pravda.sk. Bratislava : 2019. Dostupné na internete: <<https://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/512728-historicke-cisla-nezamestnanosti-prvykrat-klesla-pod-5-percent/>>.

²⁴ *OPTIMISING HUMAN CAPITAL: Evolving strategies for skills, space and service*. CBRE, 2019. Dostupné na internete: <http://cbre.vo.llnwd.net/grgservices/secure/EMEA_Occupier_Survey_2019.pdf?e=1580565250&h=293bedab838cf7494860ab0481aaff50>.

2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

Táto diplomová práca je venovaná matematickému modelovaniu korporátnej hierarchie, pričom sú charakterizované základné a zásadné črty tohto systému. Pomocou týchto vzťahov je potom zapísaná hra n hráčov, v ktorej vystupujú zamestnanci ako aj samotná korporácia a všetky strany sa snažia optimalizovať svoj úžitok a sú si vedomí snahe ostatných o to isté.

Naším cieľom je získať efektívne stratégie korporácie, ako aj zamestnancov pri rôznych východiskových veličinách; výpočet priemerného počtu nových zamestnancov, ktorých má spoločnosť najat' každú periódu, aby si zachovala štruktúru a zistenie, či priemerná fluktuácia naozaj má byť okolo 14-16 % ako tvrdí štúdia²⁵.

Aby sme získali efektívne stratégie korporácie, zostavili sme dynamický model založený na pohybe zamestnancov hore korporárnym rebríkom. Do tohto modelu sme zapracovali pravdepodobnosti povýšenia ľudí vo forme pomeru povýšených z celkového počtu na jednej zamestnaneckej úrovni a zároveň vôľu zamestnancov zostať v spoločnosti a neopustiť ju. Pomocou tohto modelu sme vyrátali výrazy rovnovážnych vzťahov a pridali sme k podmienkam aj podmienku korporátnej hierarchie: na každej vyššej zamestnaneckej úrovni má byť menej zamestnancov ako na predchádzajúcej úrovni.

Teóriu hier sme použili na určenie optimálnych pomerov odchodu zamestnancov zo spoločnosti, ako aj pomery potrebných povýšení korporáciou, pričom sme charakterizovali závislosť týchto ukazovateľov. Nemodelovali sme správanie sa jednotlivých zamestnancov; agregovali sme ich podľa zamestnaneckých úrovní: začiatníci, pokročilí, a štatutárny orgán. Zápis modelu sme uviedli aj vo všeobecnom tvare, aby sa mohol použiť na zápis optimalizačného modelu pre ľubovoľný počet zamestnaneckých úrovní, vytvoriac skutočnú funkciu platieb pre n hráčov.

Za účelom splnenia druhého cieľa, teda výpočtu priemerného počtu nových zamestnancov, ktorých má korporácia najat', aby udržala korporátnu štruktúru a doplnila odchádzajúcich, sme odvodili výraz počtu nových prijatí. Pri tvorbe modelu sme sa snažili minimalizovať počet exogénnych premenných potrebných na určenie rozhodujúcich.

Zistenie, či 5 až 7 % reprezentuje zdravú fluktuáciu zamestnancov, sme tiež prešetrili. Model sme spustili viackrát za sebou so zmenou vstupných exogénnych parametrov v rámci ich očakávaného vývoja, čo znamená, že extrémne situácie sme nepovažovali za vhodné

²⁵ ManPower Group: *Fluktuácia zamestnancov v SR je v rozmedzí 14 – 16 %*. Bratislava : Camit.sk, 2018. Dostupné na internete: <https://camit.sk/sk/novinky/13067_manpowergroup-fluktuacia-zamestnancov-v-sr-je-v-rozmedzi-14-16>.

prešetriť a pridať do bázy spriemerňovania. Zo získaných údajov vytvoríme priemer a štandardnú odchýlku. Pomocou štandardného t-testu s nulovou hypotézou predpokladáme, že ukazovateľ fluktuácie zamestnancov má nadobudnúť hodnotu intervalu 5 až 7 %. Získané výsledky interpretujeme.

Dodatočne porovnáme výsledky modelu s údajmi jednej spoločnosti z trhu, ktorá poskytla svoje personalistické údaje za roky 2017 až 2019, na základe ktorých sme kvôli udržaniu anonymity a zachovania obchodného tajomstva vytvorili podielové ukazovatele, ktoré sme porovnali s výsledkami nášho modelu. Pomocou dynamického modelu v diskretnom čase sme porovnali vývoj zamestnancov so skutočnými ukazovateľmi spoločnosti a s ukazovateľmi vypočítanými naším modelom.

V časti Diskusia a záver tejto diplomovej práce sme interpretovali výsledky a porovnania s údajmi skutočnej spoločnosti a uviedli sme možné využitia výsledku našej práce v pracovnom prostredí.

3 Výsledky práce

V korporátnom prostredí existujú tzv. manažérske úrovne, ktoré tvoria rebríček kariérneho postupu: existuje začiatková úroveň, vrcholový manažment a niekoľko medziúrovní, ktoré sú tvorené na základe rozhodnutí vrcholového manažmentu. Do ďalších úrovní sa dostane zamestnanec na základe povýšenia, kým na začiatkovú úroveň sa dostanú ľudia na základe náboru do spoločnosti.

Povýšenia alebo promócie môžu mať dve formy: úrovňové povýšenie a statusové povýšenie²⁶. Rozdiel medzi nimi je, že kým úrovňové povýšenie znamená zvýšenie finančného a nefinančného ohodnotenia zamestnanca, pri nezmenenej pracovnej pozícii, napríklad priradenie výrobného pracovníka na inú, prácnejšiu pozíciu, statusové povýšenie znamená zmenu v ohodnotení aj v pracovnej pozícii, napr. povýšenie z pokladníka na vedúceho obchodu. V našej diplomovej práci modelujeme iba statusové povýšenie a v ďalších častiach, ak hovoríme o povýšení alebo promócii, rozumieme pod pojmom práve statusové povýšenie.

Dôležitý faktor vo finančnom a personálnom plánovaní spoločnosti je počet zamestnancov, ktorých chce spoločnosť v blízkej budúcnosti najat'. Keďže pri náboe má personálne oddelenie obmedzené údaje o uchádzačovi, jeho záujmoch, odborných vedomostiach, získaných zručnostiach, pracovnej morálke a iných faktoroch, ktoré sú dôležité na prácu špecifickú pre korporátne prostredie, myslíme si, že je zrejmé, že spoločnosť by sa snažila minimalizovať množstvo ľudí, ktorých chce prijímať. Táto jej snaha vychádza z faktu, že noví zamestnanci sa zúčastnia na školeniach ešte predtým, než začnú vykonávať svoju prácu a počas týchto školení im vypláca spoločnosť mzdu. Tieto náklady, plus náklady na lektorov, študijný materiál, atď. predstavujú pre spoločnosť tzv. slepé náklady, lebo uchádzač sa môže rozhodnúť počas skúšobnej doby hocikedy okamžite skončiť pracovný pomer, a tým sa stanú tieto náklady neúrodnými: daný zamestnanec korporácii neodviedol žiadne výkony, náklady neprispeli k vytvoreniu výnosov.

Z predchádzajúceho odseku by sa mohol vytvoriť dojem, že korporácie by sa mali posnažiť minimalizovať svoju náborovú činnosť, lebo tá im predstavuje riziko slepých nákladov. Napriek tomu vidíme množstvo akcií (fóra, profesijné dni, veľtrhy práce, kvantá marketingu v médiách a na univerzitách), na ktorých sa veľké spoločnosti uchádzajú o absolventov, ako aj profesionálov a skúšajú prilákať nových ľudí do svojich kolektívov

²⁶ SAPORTA, Ishak – FARJOUN, Moshe. The Relationship Between Actual Promotion and Turnover Among Professional and Managerial-Administrative Occupational Groups. In: *Work and Occupations*. Nashville : Vanderbilt University, USA, 2003, roč. 30, č. 3, s. 263.

a pravidelne môžeme pozorovať stánky najväčších spoločností v Slovenskej republike na všetkých menších aj väčších podujatiach. Je to z dôvodu, že v korporáciách sa každoročne rozhodne určitý počet ľudí ukončiť svoju pracovnú činnosť v danej spoločnosti. Týchto ľudí chce korporácia nahradiť a kvôli tomuto postupnému poklesu počtu zamestnancov určitých zamestnaneckých úrovní musí počítať korporácia za účelom náhrady jedného odchádzajúceho zamestnanca z vyšších zamestnaneckých úrovní s náborom viacerých ľudí na nižšej úrovni (dôkaz ukážeme v ďalších častiach).

3.1 Optimalizácia stratégií pomocou teórie hier

Aplikácia teórie hier na túto problematiku vyplýva z charakteru rozhodovania: môžeme zostrojiť hru n hráčov, kde n sa rovná dvojnásobku počtu zamestnaneckých úrovní mínus najvyšší manažment, na ktorých postup už korporácia nevie vplývať (nemožno ich ďalej povýšiť). V tejto hre majú hráči dve stratégie: korporácia môže povýšiť zamestnancov z nejakej zamestnaneckej úrovne, alebo nechať ich na danej úrovni. Na účely modelovania abstrahujeme od ukončenia pracovného pomeru zamestnanca spoločnosťou, keďže ten prípad musí byť odôvodnený hrubým porušením morálky alebo pracovnej disciplíny²⁷.

Tieto stratégie môžeme vyjadriť ako pomer povýšených, resp. nepovýšených na celkovom počte zamestnancov na danej úrovni, pričom súčet pravdepodobností pre každého jedného hráča sa rovná jednej, čo spĺňa predpoklady teórie hier. Zamestnanci, ktorých agregujeme na základe ich zamestnaneckých úrovní, disponujú so stratégiami zostať v spoločnosti alebo odísť z nej. Špecifickou črtou hry je, že kým zamestnanci agregovaní v ich úrovniach musia vyčíslieť iba vlastné stratégie so súčtom jedna, korporácia musí určiť svoje stratégie a povýšiť alebo nepovýšiť zamestnancov zvlášť na každej úrovni, t. j. korporácia je považovaná za viacero hráčov, ktorých počet sa rovná počtu zamestnaneckých úrovní. Z hľadiska interpretácie by bolo neúnosné vyjadriť, aký pomer všetkých zamestnancov povýšia alebo nechajú na pôvodnej úrovni. Tento ukazovateľ je vhodný iba na prezentačné účely, napr. kvôli zvýšeniu morálky zamestnancov, ale pomer počtu povýšených na celkovom počte zamestnancov má z analytického aj z rozhodovacieho hľadiska minimálnu hodnotu.

Z hore opísaných skutočností je možné vytvoriť optimalizačnú úlohu, kde účelová funkcia bude hodnota nákladov na nábor a zaškolenie jedného nového zamestnanca a nezávislá premenná bude počet nových zamestnancov. Hodnotu účelovej funkcie musíme minimalizovať.

Predpokladajme existenciu hypotetickej korporácie s tromi úrovňami zamestnancov: úroveň A sú začiatovníci, tzv. entry-level, úroveň B tvoria už skúsenejší zamestnanci so širším okruhom povinností a na úrovni C sa nachádza vrcholový manažment.

Súhrn stratégií korporácie označíme ako s_k , kým súhrn stratégií zamestnaneckých úrovní budú označené s_a a s_b . Množiny stratégií hráčov teda budú tieto:

$$s_k = \{P_A; F_A; P_B; F_B\}$$

²⁷ Ods. (1) § 68 zákona č. 311/2001 Z. z. Zákonník práce

$$s_A = \{Z_A; O_A\}$$

$$s_B = \{Z_B; O_B\}$$

kde: P_i – pomer povýšených na celkový počet danej úrovne zamestnancov,
 F_i – pomer nepovýšených na celkový počet danej úrovne zamestnancov,
 Z_i – pomer zostávajúcich zamestnancov na celkový počet z danej úrovne zamestnancov,
 O_i – pomer odchádzajúcich zamestnancov na celkový počet z danej úrovne zamestnancov.

Ako vidíme, korporácia už nemá vplyv na vrcholový manažment povýšením alebo nepovýšením. Do úlohy ale vstupujú aj určité exogénne údaje, ktoré pomôžu, aby model mal lepšiu kvalitu opisu skutočnosti. Tieto exogénne ukazovatele sú pomer novo prijatých zamestnancov, ktorí sa rozhodli opustiť spoločnosť počas prvého roka a pomer tých vrcholových manažérov, ktorí z nejakých dôvodov prestali vykonávať svoju funkciu v korporácii. V našom príklade označujeme počet nových zamestnancov H , pravdepodobnosť ich odchodu v prvom roku O_H a pravdepodobnosť odchodu vrcholového manažéra O_C . Tieto stratégie, ako aj stratégie ostatných skupín a samotnej spoločnosti môžeme vyjadriť aj takým spôsobom, aby sa počet parametrov použitých vo výpočtoch zredukoval na polovicu, využívajúc tú vlastnosť stratégií, že ich súčet pre hráča sa rovná jednej:

$$F_i = 1 - P_i \mid i = A, B$$

$$Z_i = 1 - O_i \mid i = A, B, C, H$$

Vieme, že v teórii hier sa rovná platba hráča hodnote, ktorú získame vynásobením matice platieb s vektormi pravdepodobností stratégií všetkých hráčov, čo je geometrický súčet pravdepodobností nastatia jednotlivých stratégií hráčov s daným prvkom matice platieb vybraného hráča. V ďalších častiach ukážeme, že hore uvedená vlastnosť existencie dvoch možností výberu pre zamestnanca, ako aj pre korporáciu umožňuje zjednodušiť náš model vo veľkej miere.

3.2 Dynamizácia počtu zamestnancov

Počet zamestnancov v jednotlivých úrovniach sa rovná počtu tých, ktorí sa rozhodli zostať v danej kategórii a tých, ktorých nepovýšili, plus tých, ktorých povýšili z nižšej úrovne, resp. prijali a rozhodli sa zostať. Na základe týchto skutočností môžeme zostrojiť dynamické rovnice vyjadrujúce počet zamestnancov v jednotlivých skupinách v čase $t+1$ v závislosti od stavu zamestnancov v čase t .

$$A_{t+1} = (1 - O_H) * H_t + (1 - P_A - O_A) * A_t$$

$$B_{t+1} = P_A * A_t + (1 - P_B - O_B) * B_t$$

$$C_{t+1} = P_B * B_t + (1 - O_C) * C_t$$

Tieto dynamické rovnice vyjadrujú počet zamestnancov v jednotlivých skupinách v diskretnom čase. Napríklad počet zamestnancov v manažérskej skupine A v čase $t+1$ sa rovná počtu nových zamestnancov, ktorí sa rozhodli zostať v spoločnosti a všetkých zamestnancov v skupine A v čase t , znížených o povýšených a odídených. Ďalej, v skupine B v čase $t+1$ sa nachádzajú všetci zamestnanci, ktorých povýšili z manažérskej skupiny A v čase t a zamestnancov v skupine B , ktorých ešte nepovýšili, alebo neukončili svoj pracovný pomer. Ako vidíme, top manažment je modelovaný bez ohľadu na ich povýšenie, keďže náš model tento stav neočakáva, a preto ani hráč K nemá možnosť zvoliť stratégiu v ich prípade.

Vidíme, že počty zamestnancov v rôznych zamestnaneckých skupinách sú spájané v čase s oneskorením. My ale chceme vyjadriť ich vzájomnú súvislosť. Túto súvislosť môžeme vyčíslieť a sledovať v tvare na tom určenom, v dynamickom modeli. Dynamická rovnica má základný tvar:

$$x_{t+1} = a + b * x_t$$

kde a je ľubovoľná konštanta alebo vzťah, ktorý nemôže obsahovať závislú premennú dynamického modelu, teda premennú x ; zatiaľ čo b vyjadruje zmenu premennej x počas jedného obdobia v diskretnom čase. V našom modeli uvažujeme s diskretným rozdelením času, keďže veľké korporácie sa snažia najat' naraz čím viac zamestnancov, aby mohli zefektívniť fixné náklady tréningov a iných administratívnych výdavkov. Po tomto dátume sú prijatia nových zamestnancov vykonané iba v nevyhnutnom alebo špecifickom

prípade. Tieto udalosti nezahrnieme do nášho modelu, totiž základom našich uvažovaní je dlhodobá rovnováha.

Dynamickým modelom premennej sa sleduje jej vývoj v čase²⁸. Cieľ je nájsť bod konvergenzie premennej, teda bod, v ktorom sa ustáli hodnota premennej. Tento bod nazývame stabilným bodom dynamickej rovnice. Stabilný bod dynamickej rovnice znamená taký bod, ku ktorému konverguje dynamická rovnica po určitom čase, blížiacemu sa k nekonečnu. To znamená, že tento stabilný bod vyjadruje dlhodobú strednú hodnotu nejakého javu opísaného dynamickým vzťahom. Dostaneme ho, ak hodnotu premennej x v čase $t+1$ a v čase t nahradíme premennou x^* , potom vypočítame jej hodnotu, ktorá už nebude závislá od hodnoty tej istej premennej s oneskorením:

$$x^* = a + b * x^*$$

$$(1 - b) * x^* = a$$

$$x^* = \frac{a}{1 - b}$$

Týmto vzťahom sa dá jednoducho vypočítať stabilný bod ľubovoľnej premennej vyjadrenej dynamickou rovnicou v diskretnom čase.

Podmienkou konvergenzie je, že absolútna hodnota sklonu nemôže byť väčšia alebo rovná sa jednej, keďže vtedy by hodnota rástla do plus alebo mínus nekonečna. Touto podmienkou je zabezpečená aj možnosť výpočtu stabilného bodu, totiž v čitateli vzťahu vyjadrujúceho stabilný bod diskretného dynamického modelu je vzťah $1-b$, ktorý sa z logických dôvodov nemôže rovnať nule. Táto skutočnosť by nastala, ak by sa hodnota b , sklon premennej v čase, rovnala jednej, čo je v rozpore s podmienkou konvergenzie.

Aplikujme tieto vzťahy na hypotetickú manažérsku skupinu A:

$$A^* = (1 - O_H) * H_t + (1 - P_A - O_A) * A^*$$

$$a = (1 - O_H) * H_t; b = (1 - P_A - O_A)$$

$$A^* = \frac{(1 - O_H)}{(P_A + O_A)} H$$

A^* je rovnovážny počet zamestnancov v manažérskej skupine A. Vidíme, že v čitateli zlomku, ktorý vyjadruje stabilný počet zamestnancov v skupine A, sa nachádza pomer novo

²⁸ SHONE, R. *An introduction to economic dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. s. 1.

prijatých zamestnancov, ktorí sa rozhodli zostať v spoločnosti, kým v menovateli zlomku vidíme pomer zamestnancov, ktorých sa korporácia rozhodla povýšiť plus pomer zamestnancov zo skupiny A, ktorí sa rozhodli odísť zo spoločnosti. Tento výraz je potom násobený premennou H , ktorá je už nezávislá od času, tým aj jej indexáciu t sme opustili. Časovú závislosť sme vynechali z uvažovania, lebo hľadáme aj jej rovnovážnu hodnotu; ak by bola premenná závislá od času, v každom diskretnom období by nadobudli manažérske úrovne nové rovnovážne stavy, tým by sa zničila podstata rovnováhy, keďže by sa stále menila.

Podmienka konvergenzie je splnená, keďže výraz b je hodnota jedna znížená o pravdepodobnosť povýšenia v danej manažérskej skupine. Pokračujeme výpočtom stabilného bodu ďalšej zamestnaneckej skupiny.

$$B^* = P_A * A^* + (1 - P_B - O_B) * B^*$$

$$a = P_A * A^*; b = (1 - P_B - O_B)$$

$$B^* = \frac{P_A * A^*}{(P_B + O_B)} = \frac{P_A * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)} H$$

Do výrazu stabilného bodu skupiny B sme dosadili stabilný bod A^* , tým sme získali závislosť skupiny zamestnancov B od novo prijatých zamestnancov. Pomocou počtu týchto zamestnancov budeme vyjadrovať aj ďalšie manažérske skupiny, aby sme zdôraznili vzájomné prepojenie týchto skupín v čase, na základe postupného povýšenia individuálnych osôb.

3.3 Stanovenie korporátnych vzťahov

Ďalší jav, ktorý musíme sledovať je takzvaná korporátna pyramída. To znamená, že na každej manažérskej úrovni sa nachádza menej zamestnancov ako na predchádzajúcej, lebo títo zamestnanci manažujú tých pod nimi a je neefektívne pre spoločnosť, ak viac ľudí dohliada na prácu na nižšej úrovni ako je počet ľudí vykonávajúcich prácu na nižšej úrovni. Preto do modelu vstupuje podmienka:

$$B^* \leq A^*$$

$$\frac{P_A * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)} H \leq \frac{(1 - O_H)}{(P_A + O_A)} H$$

$$\frac{P_A}{(P_B + O_B)} \leq 1$$

V tejto ukážkovej spoločnosti sú iba tri manažérske úrovne, teda skupina C označuje vrcholový manažment, ktorý už spoločnosť nemôže ďalej povýšiť. Kvôli tomuto faktoru oni už nemajú pridelenú pravdepodobnosť P_C ani F_C , jedine sa môžu rozhodnúť, či zostanú v spoločnosti alebo ju opustia. Model musí odzrkadliť tento jav, a preto má aj dynamická rovnica taký tvar, aký sme uviedli hore. Dlhodobý rovnovážny stav vrcholových manažérov môžeme vyjadriť takto:

$$C^* = P_B * B^* + (1 - O_C) * C^*$$

$$a = P_B * B^*; b = (1 - O_C)$$

$$C^* = \frac{P_B * B^*}{O_C} = \frac{P_A * P_B * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)O_C} H$$

Podmienka stability je opäť splnená, keďže vždy existuje určitá pravdepodobnosť odchodu manažmentu, preto je pravdepodobnosť O_C väčšia ako nula, ale menšia ako jedna. Existencia korporátnej pyramídy zase vyžaduje dodatočnú podmienku v tvare:

$$C^* \leq B^*$$

$$\frac{P_A * P_B * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)O_C} H \leq \frac{P_A * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)} H$$

$$\frac{P_B}{O_C} \leq 1$$

To znamená, že pravdepodobnosť povýšenia zamestnanca zo skupiny B musí byť menšia ako pravdepodobnosť odchodu manažéra, ak chceme, aby systém bol stabilný. Toto je odôvodnené a zároveň žiadané z dôvodu, že počet zamestnancov v skupine B je viac ako manažérov v skupine C . Ak uvažujeme, že počet manažérov je ľubovoľné kladné číslo x a ε značí ľubovoľné iné kladné číslo, o koľko je väčšia skupina B ako skupina C , potom môžeme vyjadriť rovnicou, ktorá vychádza z predpokladu, že rovnovážny stav žiada, aby počet odchádzajúcich manažérov bol doplnený počtom povýšených z manažérskej skupiny B :

$$\begin{aligned} B^* * P_B &= C^* * O_C \\ (x + \varepsilon) * P_B &= x * O_C \\ \frac{P_B}{O_C} &= \frac{x}{x + \varepsilon} \\ \frac{x}{x + \varepsilon} &\leq 1 \end{aligned}$$

V záujme toho, aby kvôli optimalizácii odchodov a povýšení neubudli, resp. nepribudli zamestnanci v spoločnosti, teda za účelom zachovania veľkosti korporácie musíme zaviesť podmienku, ktorá funguje ako ohraničenie množiny prípustných riešení. Táto podmienka zabezpečuje, aby model nehľadal riešenia, ktoré majú za následok podstatnú zmenu v počte zamestnancov počas určitého počtu rokov. Tento počet rokov je určený rozhodovateľom, ktorý môže sledovať vývoj počtu zamestnancov po r rokoch. Ďalej, ak označujeme šartovacie hodnoty počtu zamestnancov ako E_i a počet zamestnancov po sledovanom počte rokov ako T_i , kde i je index zamestnaneckej úrovne, tak môžeme definovať nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * (1 - O_H)H + (1 - P_i - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = 1 \\ E_i &= \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * P_{i-1} * E_{i-1} + (1 - P_i - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = 2, \dots, n - 1 \\ E_i &= \sum_{j=0}^{r-1} (1 - O_i)^j * P_{i-1} * E_{i-1} + (1 - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = n \end{aligned}$$

Tieto podmienky ustanovujú fixáciu počtu zamestnancov. Keďže chceme, aby počet zamestnancov na jednotlivých úrovniach ostal nezmenený, $T_i = E_i$. V prípade, ak

rozhodovateľ chce, aby sa po r rokoch menil počet zamestnancov na danej úrovni, môže definovať hodnotu T_i namiesto toho, aby sa rovnala E_i .

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * (1 - O_H)H + (1 - P_i - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = 1$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{i-1} + T_{i-1}}{2} + (1 - P_i - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = 2, \dots, n - 1$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{i-1} + T_{i-1}}{2} + (1 - O_i)^r E_i, \text{ pre } i = n$$

Zadávanie konkrétnej hodnoty namiesto fixácie počtu zamestnancov na úrovniach umožňuje analyzovať korporácii potrebné zmeny, ktoré by viedli k naplneniu jej cieľa, napr. rozšíriť korporáciu o určité percento, alebo aby mohol plánovať s potrebným počtom zamestnancov po r rokoch kvôli budúcim zmluvným povinnostiam, atď.

Na modelovanie vývoja počtu zamestnancov v jednotlivých zamestnaneckých úrovniach sme použili aproximáciu vývoja predchádzajúcich úrovní – totiž ich počet vplýva na počet zamestnancov na danej úrovni z dôvodu ich povýšenia – vo forme aritmetického priemeru štartovacej a cieľovej hodnoty. Táto aproximácia eliminuje potrebu výpočtu hodnôt jednotlivých období medzi štartovacím a konečným obdobím sledovania, a tým značne redukuje problém pri menšej miere obetovania presnosti hodnôt. Kvôli tejto aproximácii pridáme do modelu pre každú zamestnaneckú úroveň premennú s_i , ktorá predstavuje našu toleranciu rozdielu výsledku od želaných hodnôt.

3.4 Kvantifikácia hry korporácie

Z dlhodobých ustálených stavov sme odvodili vzájomné vzťahy jednotlivých manažérskych úrovní a závislosť ich stabilného počtu na vstupy vo forme pravdepodobností povýšenia a odchodu zamestnanca. Aby hra bola ozajstnou úlohou optimalizácie, potrebujeme veličinu, ktorá bude predmetom extremalizácie. Touto veličinou bude platba hráčov.

Definujme najprv platbu hráča K , teda korporácie. Platba hráča je určitá hodnota, ktorú sa snaží daný hráč maximalizovať, v klasických príkladoch predstavujú platby výhry, napríklad v hre kameň-papier-nožnice je výhra zastúpená hodnotou 1 , remíza hodnotou 0 a prehra hodnotou -1 .

Na začiatku kapitoly sme uviedli, že v našom uvažovaní sa snaží hráč K minimalizovať počet ľudí potrebných na prijatie (hodnota H). Vieme, že ľubovoľná minimalizačná úloha matematického programovania je ľahko zameniteľná na maximalizačnú úlohu spôsobom, že účelovú funkciu vynásobíme hodnotou -1 .

Vyjadríme vzťah na výpočet hodnoty H z ustáleného stavu vrcholového manažmentu. Túto súvislosť môžeme použiť v modelovaní, keďže sme ukázali, že postupným dosadením ustálených stavov sa dá vyjadriť počet vrcholového manažmentu z počtu ľudí, ktorí sú prijatí spoločnosťou, preto tento vzťah musí platiť aj opačne.

$$C^* = \frac{P_A * P_B * (1 - O_H)}{(P_A + O_A)(P_B + O_B)O_C} H$$
$$H = \frac{(P_A + O_A)(P_B + O_B)O_C}{P_A * P_B * (1 - O_H)} C^*$$

Keďže spoločnosť minie rovnaké množstvo peňažných prostriedkov na zaškolenie všetkých svojich nových zamestnancov, tento parameter v našej účelovej funkcii by vystupoval ako konštantný parameter, teda je nadbytočný, a preto nevstupuje do nášho modelu.

Hore uvedené vzorce sú špecifické pre prípad, v ktorom sú v sledovanej spoločnosti tri manažérske úrovne. Potrebujeme však model, ktorý sa dá použiť na ľubovoľný počet manažérskych úrovní. Tento vzťah vieme odvodiť na základe určitých pravidiel sledovateľných vo výrazoch. Uvažujeme teda, že existuje spoločnosť s počtom manažérskych úrovní $n-1$, pretože n označuje počet hráčov, z ktorých jeden je samotná korporácia a N je skupina vrcholového manažmentu. Tento vzťah je:

$$H = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} P_i} * \frac{O_n}{(1 - O_H)} * N^*,$$

kde: n – počet zamestnaneckých úrovní, prvý člen sú novo prijatí zamestnanci
a posledný vrcholový manažment,

i – množina zamestnaneckých úrovní,

N^* – počet zamestnancov v skupine vrcholového manažmentu.

Z týchto hodnôt sú v našom modeli exogénne O_n a O_H a tým aj $(1 - O_H)$. Tieto hodnoty nebudú predmetom optimalizácie, ale budú vyčíslené používateľom modelu, ktorý ich môže určiť na základe očakávaní alebo historického vývoja.

Tento stav je nestabilný v troch prípadoch: ak niektorá z pravdepodobností P_i , alebo ak výraz $(1 - O_H)$ sa rovnajú nule. Tieto prípady nastanú, ak sa korporácia rozhodne, že nikoho nepovýši z jednotlivých skupín zamestnancov, alebo ak sa každý z novo prijatých zamestnancov rozhodne opustiť spoločnosť. Obidve možnosti sú nepravdepodobné v reálnom svete.

Presne z tohto dôvodu rozširujeme podmienku nezápornosti premenných P_i a F_i o ostrú nerovnosť:

$$P_i, F_i > 0, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n - 1$$

Táto podmienka je veľmi dôležitá, keďže už nehovoríme o podmienke nezápornosti, ale o podmienke kladnosti stratégií a tým, že ani jedna zo stratégií sa nemôže rovnať nule, ukázali sme, že hra nemá riešenie v čistých stratégiách.

V predchádzajúcej časti sme definovali všeobecný tvar vzťahu, ktorý vyjadruje počet zamestnancov, ktorých by mala korporácia prijímať každý rok pri určitých pravdepodobnostiach povýšenia a odchodov zamestnancov a v závislosti od počtu vrcholových manažérov, ktorých už nemožno ďalej povýšiť. Títo vrcholoví manažéri môžu byť členovia predstavenstva v prípade akciovej spoločnosti, konatelia v spoločnosti s ručením obmedzením, alebo ostatné špecifické orgány v závislosti od riadiacej štruktúry sledovanej spoločnosti.

Táto skupina zamestnancov spoločnosti, keďže ako sme už spomínali, nemôže byť ďalej povýšená, sleduje iba vlastné stratégie Z_c a O_c , teda či zostane ďalej v spoločnosti alebo odchádza. Tieto stratégie budú v modeli zastúpené exogénne, čo znamená, že na základe

historických údajov alebo očakávaní budúceho vývoja budú zadané explicitne a nebudú subjektmi výpočtu.

Ako sme spomínali na začiatku kapitoly, korporácia ako hráč sa snaží minimalizovať počet novo prijímaných zamestnancov, aby sa mohla vyhnúť zbytočným nákladom spojeným s náborom a školením nových ľudí, s administratívou a inými nákladmi, ktoré by neprinášali úžitok, ak sa zamestnanec rozhodne opustiť spoločnosť v skúšobnom období. Keďže teória hier pracuje na základe platieb hráčov, ktoré sa snažia hráči maximalizovať, účelová funkcia hráča zastupujúceho korporáciu sa bude rovnať $-H$:

$$f(P_i, F_i): -H = -\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} P_i} * \frac{O_n}{(1 - O_H)} * N^* \rightarrow \max$$

Okrem toho, že tento vzťah vyjadruje účelovú funkciu spoločnosti, vzorec bude použitý na výpočet platieb spoločnosti, v tom istom tvare ako je uvedený hore. To znamená, že všetky prvky matice $\mathbf{K}$, ktorá vyjadruje platby hráča K v závislosti od stratégií hráčov $i=1, \dots, n-1$ budú všetky prvky K_{ij} vyjadrené vzťahom:

$$K_{ij} = -\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(P_i + O_j)}{\prod_{i=1}^{n-1} P_i} * \frac{O_n}{(1 - O_H)} * N^*$$

Funkcia platieb, ako sme opísali v tejto kapitole, je značne zjednodušená kvôli faktu, že pre každého hráča existujú iba dve stratégie, a to týmto spôsobom:

$$M_i = \left\{ \begin{array}{l} P_A * \left[\begin{array}{l} P_B * (O_A * (O_B + Z_B) + Z_A * (O_B + Z_B)) + \\ + F_B * (O_A * (O_B + Z_B) + Z_A * (O_B + Z_B)) \end{array} \right] + \\ + F_A * \left[\begin{array}{l} P_B * (O_A * (O_B + Z_B) + Z_A * (O_B + Z_B)) + \\ + F_B * (O_A * (O_B + Z_B) + Z_A * (O_B + Z_B)) \end{array} \right] \end{array} \right\} * f(P_i, F_i) = \\ = f(P_i, F_i)$$

Toto zjednodušenie platí kvôli vymeniteľnosti hocijakej stratégie ľubovoľného hráča na rozdiel od hodnoty jedna a pravdepodobnosti druhej stratégie daného hráča.

Keďže hráč K má presne dve stratégie pre každú manažérsku úroveň a platí podmienka súčtu stratégií, ktoré sa rovnajú jednej, spolu už so spomínanou podmienkou kladnosti, môžeme použiť vzorec platieb bez uvedenia nezávislej premennej F_i , totiž stratégie F_i sú v modeli závislé od prislúchajúcich stratégií P_i , ktoré sú zase vyjadrené

v modeli. To znamená, že ak výpočet smeruje k zníženiu pravdepodobnosti stratégie P_i , automaticky sa uprednostňuje a zvýši sa podiel stratégie F_i , ktorá prislúcha k zníženej pravdepodobnosti povýšenia určitej manažérskej úrovni.

3.5 Modelovanie motivácie zamestnanca

Predpokladajme, že zamestnanci všetkých manažérskych úrovní sú si vedomí stratégie hráča *K* a snažia sa zlepšiť svoju situáciu. Motiváciu zamestnanca sa snaží každá spoločnosť zlepšiť rôznymi spôsobmi. Je to jednou z najviac skúmaných otázok personálneho manažmentu v dnešnom svete.

Motiváciu zamestnanca zabezpečia spoločnosti finančnými a nefinančnými odmenami. Finančné odmeny sú bonusy, lepší plat, teda prvky odmeňovania, ktoré priamo vplyvajú na peňažnú sumu, ktorú dostane zamestnanec k dispozícii. Nefinančné odmeny sú spôsoby motivácie, ktoré nepriamo vplyvajú na bohatstvo zamestnanca alebo odmeňujú zamestnanca na základe humánnych faktorov, napr. zelené prostredie, oddychová zóna, škôlka pre deti zamestnancov zariadená priamo v budovách spoločnosti, skupinové aktivity, atď.

Všeobecne môžeme tvrdiť, že na každého človeka vplyvajú finančné a nefinančné benefity spoločne, ale v rôznom pomere. Niektorí dokážu ďalej tolerovať toxické pracovisko kvôli lepšej finančnej odmene a niektorí sú ochotní pracovať aj za výrazne nižšiu výplatu za priateľské prostredie. Ďalšou možnosťou, ktorou môže zamestnávateľ motivovať svojich zamestnancov je aplikácia flexibilného pracovného času, teda zamestnanec si môže sám určiť, kedy odpracuje požadovaný počet hodín, nemusí začať prácu každý deň v tom istom čase.

Rozšírením a častým doplnkom tohto režimu určenia pracovného času je práca z domu, čo znamená, že zamestnanec môže vykonávať prácu pomocou informačných technológií a internetu z vlastného domova, bez prítomnosti na pracovisku. Toto riešenie je výhodné aj pre zamestnávateľa – z dôvodu, že ak nie každý zamestnanec je prítomný na pracovisku, môže zmenšiť rozlohu prenajatých priestorov, alebo ak vlastní administratívnu budovu, môže prebytočné miesta prenajať iným zamestnávateľom (súčasný príklad: <https://www.hubhub.com/sk/bratislava-nivy-tower-2> - iniciatíva HUBHUB od spoločnosti HB REAVIS, ktorý umožňuje menším, novo vzniknutým spoločnostiam, takzvaným Startupom prenajať malý počet sedacích miest pre svojich zamestnancov) – aj pre zamestnanca, ktorý nemusí podstatnú časť svojho dňa stráviť cestovaním do práce a dodatočne si môže užívať pohodlie svojho vlastného domova.

Motivácia zamestnancov je zložitý sociologický a psychologický problém, ktorý riešilo množstvo prác v minulosti aj dnes (Johnson 2005, Adams 1963, Hackmann a Porter

1968, Porter a Lawler 1968, Locke a Latham 2002, Mohsen et al. 2004)²⁹. Existujú rôzne prístupy, ktoré sú použité v rôznych situáciách, napríklad prístup vytvorený na motiváciu výkonových pracovníkov vo výrobnnej sfére nemožno efektívne aplikovať na motiváciu duševných pracovníkov a naopak. Ďalej pracovné prostredie, v ktorom sa cíti dobre pracovník vykonávajúci manuálnu prácu by vo výraznej miere znížil produktivitu kreatívnych zamestnancov, napríklad grafikov, umelcov.

Vyčíslenie motivácie je zložitý proces a jeho súčasťou je veľa aproximácií a očakávaní, ktoré sú určené rozhodovateľovi. Ďalej, zovšeobecnenie vnútorných motivácií zamestnancov je chybné kvôli faktu, že každý zamestnanec má iné očakávania, iné limity a rôzne doby, ktoré očakáva alebo plánuje pracovať v určitej korporácii. Zamestnancom však môžu nastať rôzne mimoriadne udalosti v súkromnom živote, napr. nehoda, choroba, kvôli čomu musí opustiť svoje pracovné miesto. V našom modeli abstrahujeme od týchto mimoriadnych udalostí, keďže sú nepredvídateľné a neovplyvniteľné v dlhodobom horizonte.

Ak uvažujeme z pohľadu zamestnanca, ktorý sa správa ako hráč v teórii hier, teda racionálne a je si vedomý úmyslov korporácie znížiť počet ľudí potrebných na prijatie, môžeme zistiť na základe vzťahu uvedeného v predchádzajúcich častiach, ktorý vyjadruje počet ľudí potrebných na prijatie v závislosti od počtu vrcholových manažérov, že pre korporáciu by vyhovovalo povýšiť čím najmenší podiel zamestnancov v každej manažérskej kategórii, že povýšenia sa konajú primárne kvôli nahradeniu odchádzajúcich zamestnancov, pre individuálneho zamestnanca je ale lákavá predstava kariérneho rastu. Z tohto dôvodu uvažujeme, že funkcia, ktorú chce minimalizovať každá manažérska úroveň, je pomer medzi pravdepodobnosťou povýšenia a odchodov. Táto veličina je tým menšia, čím viac zamestnancov sa rozhodne odísť zo spoločnosti v pomere k pravdepodobnosti povýšenia spoločnosťou. Dôvodom je, že s vyššou pozíciou sú spojené, okrem dodatočných právomocí, aj väčšie množstvá úloh, povinností a zodpovednosti. Ak je veľká šanca, že zamestnanca, ktorý sa cíti dobre na aktuálnej pracovnej pozícii povýšia, môže sa rozhodnúť, že radšej si nájde inú spoločnosť, kde môže svoje skúsenosti a vedomosti zužitkovať bez dodatočnej zodpovednosti, ale s možnosťou významnejšieho odmeňovania.

²⁹ AL-MADI, F. N. – ASSAL, H. – SHRAFAT, F. – ZEGLAT, D. The Impact of Employee Motivation on Organizational Commitment [online]. In: European Journal of Business and Management. International Institute of Science, Technology & Education, roč. 9, č. 15, s. 134. Dostupné na: <<https://iiste.org/Journals/index.php/EJBM/issue/view/2989>>

3.6 Zápis hry

Po určení úžitkovej funkcie každého hráča môžeme zapísať hru fluktuácie modifikáciou hry dvoch hráčov.

V hre dvoch hráčov sa určí platba jednotlivých hráčov násobením matice platieb vektormi zvolených stratégií. V hre n hráčov je použiteľná obdoba tejto metódy, najmä z dôvodu zjednodušenia súčinu stratégií na hodnotu jedna, ako sme uviedli v podkapitole 3.4. Ak označíme stratégie hráča i ako x_i , kde i je počet hráčov; pričom hodnoty p a k sa tiež rovnajú počtu hráčov, tak nasledujúca funkcia bude funkciou platieb hry $n = k = p$ hráčov:

$$\max f(x_{i_k}^k) = \sum_{p=1}^n \left\{ \left[\sum_{i_1=1}^{s_1} \dots \sum_{i_n=1}^{s_n} \left(a_{i_1, \dots, i_n}^p \prod_{k=1}^n x_{i_k}^k \right) \right] - u_p \right\}$$

pri ohraničeníach:

$$\frac{\partial f(x_{i_p}^p)}{\partial x_{i_p}^p} - u_p \leq 0, \text{ pre } i_p = 1; \dots; s_p, p = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i_p=1}^{s_p} x_{i_p}^p = 1, \text{ pre } p = 1, \dots, n$$

$$\forall x_{i_p}^p \geq 0$$

kde: n – počet hráčov,

i_p – index stratégií p -tého hráča,

s_p – počet stratégií p -tého hráča,

$a_{i_p}^p$ – platba p -tého hráča v závislosti od vlastných stratégií a stratégií ostatných hráčov,

$x_{i_k}^k$ – pravdepodobnosť výberu stratégie i_k hráčom k ,

u_p – hodnota hry pre hráča p .

Podobný zápis hry n hráčov používali dvaja autori v roku 2016 pre potreby optimalizačných problémov v rámci softvérových riešení³⁰.

³⁰ HUANG, Z.-H. – Qi L. Formulating an n-person noncooperative game as a tensor complementarity problem. [online] In: Computational Optimization and Applications, roč. 24. č. 66, s. 557 – 576, ISSN 1573-2894. Dostupné na internete: <<https://www.polyu.edu.hk/ama/staff/new/qilq/HQ.pdf>> s. 559

Keďže v našej hre každý hráč disponuje presne dvomi stratégiami, $s_p = 2$ pre všetkých hráčov, a tým aritmetické súčty v hranatej zátvorke možno vynechať z našich výpočtov. Finálna rozsiahla forma hry optimalizujúcej počet potrebných nových prijatí v korporácii je:

$$\max f(P_i, O_i) = -\frac{(P_A + O_A)(P_B + O_B)O_C}{P_A * P_B * (1 - O_H)} - \frac{P_A}{O_A} - \frac{P_B}{O_B} - u_A - u_B - v_A - v_B$$

pri ohraničeníach:

$$\frac{O_A(P_B + O_B)O_C}{P_A^2 * P_B * (1 - O_H)} - \frac{1}{O_A} - u_A \leq 0$$

$$\frac{O_B(P_A + O_A)O_C}{P_A * P_B^2 * (1 - O_H)} - \frac{1}{O_B} - u_B \leq 0$$

$$-\frac{(P_B + O_B)O_C}{P_A * P_B * (1 - O_H)} + \frac{1}{O_A^2} - v_A \leq 0$$

$$-\frac{(P_A + O_A)O_C}{P_A * P_B * (1 - O_H)} + \frac{1}{O_B^2} - v_B \leq 0$$

$$P_i + F_i = 1, \text{ pre } i = A, B$$

$$O_i + Z_i = 1, \text{ pre } i = A, B$$

$$\frac{P_A}{P_B + O_B} \leq 1$$

$$\frac{P_B}{O_C} \leq 1$$

$$T_A = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_A - O_A)^j * (1 - O_H)H + (1 - P_A - O_A)^r E_A + d_A$$

$$T_B = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_B - O_B)^j * P_A \frac{E_A - T_A}{2} + (1 - P_B - O_B)^r E_B + d_B$$

$$T_C = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - O_C)^j * P_B \frac{E_B - T_B}{2} + (1 - O_C)^r E_C + d_C$$

$$d_i \leq 3, \text{ pre } i = A, B, C$$

$$P_i, F_i, O_i, Z_i > 0 \text{ pre } i = A, B$$

Na testovanie našej hypotézy sme využili údaje získané od jednej existujúcej korporátnej spoločnosti. Táto korporácia má štyri zamestnanecké úrovne pod vrcholovým

manažmentom. Pomocou trojročného priemeru pravdepodobností povýšení a odchodov porovnáme výsledky tejto spoločnosti s optimálnym stavom získaným našim modelom. Nad rámec pomeru povýšených a odchádzajúcich zamestnancov na celkový počet jednotlivých zamestnaneckých úrovní sme prijali aj údaje o novo prijatých zamestnancoch, pravdepodobnosť odchodu zamestnanca počas prvého roka v spoločnosti a pomer odchádzajúcich vrcholových manažérov. Pre zápis tohto modelu budú jednotlivé zamestnanecké úrovne označené číslami 1 až 4 namiesto písmen.

$$\max f(P_i, O_i) = -\frac{\prod_{i=1}^4 (P_i + O_i)}{\prod_{i=1}^4 P_i} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} - \sum_{i=1}^4 \frac{P_i}{O_i} - \sum_{i=1}^4 (u_i + v_i)$$

pri ohraničeníach:

$$\frac{\prod_{k=1}^4 (P_k + O_k)}{\prod_{k=1}^4 P_k} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} * \frac{O_i}{P_i(P_i + O_i)} - \frac{1}{O_i} - u_i \leq 0, \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

$$-\frac{\prod_{k=1}^4 (P_k + O_k)}{\prod_{k=1}^4 P_k} * \frac{O_5}{(1 - O_H)} * \frac{1}{(P_i + O_i)} + \frac{1}{O_i^2} - v_i \leq 0, \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

$$P_i + F_i = 1, \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

$$O_i + Z_i = 1, \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

$$\frac{P_i}{P_{i+1} + O_{i+1}} \leq 1, \text{ pre } i = 1, \dots, 3$$

$$\frac{P_4}{O_5} \leq 1$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * (1 - O_H)H + (1 - P_i - O_i)^r E_i + d_i, \text{ pre } i = 1$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - P_i - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{t-1} - T_{t-1}}{2} + (1 - P_i - O_i)^r E_i + d_i, \text{ pre } i = 2, 3, 4$$

$$T_i = \sum_{j=0}^{r-1} (1 - O_i)^j * P_{i-1} \frac{E_{t-1} - T_{t-1}}{2} + (1 - O_i)^r E_i + d_i, \text{ pre } i = 5$$

$$d_i \leq 5, \text{ pre } i = 1, \dots, 5$$

$$P_i, F_i, O_i, Z_i > 0, \text{ pre } i = 1, \dots, 4$$

Trojročný priemer odchodov prvoročných zamestnancov je 0,2 a pravdepodobnosť odchodu vrcholového manažmentu vychádzajúc z trojročného priemeru ich odchodov je 0,1067. Priemerný počet novo prijatých zamestnancov za toto obdobie je 49.

Za predpokladu, že spoločnosť má siedmich manažérov, ktorých nie je možné ďalej povýšiť a vo vlastníctve informácií o aktuálnom počte zamestnancov v rôznych zamestnaneckých úrovniach je počet zamestnancov v nultom období sledovania na najnižšej úrovni 187, na ďalších úrovniach v hierarchickom poradí 122, 60 a 28. Ak sa tendencia posledných troch rokov nemení, po troch obdobiach, pri konštantnom počte novo prijatých zamestnancov a všetkých podmienkach nezmenených, klesne počet pracovníkov na najnižšej úrovni o 51 % na 91, na druhej najnižšej úrovni o 23 % na 94, na ďalšej úrovni už vidíme 30 % nárast počtu zamestnancov zo 60 na 78 a na druhej najvyššej úrovni je pozorovateľný 25 % nárast na 35, pôsobiaci všeobecný pokles celkového počtu zamestnancov o 99, t. j. o 25 %. Aby spoločnosť predišla konštantnému poklesu počtu zamestnancov, potrebovala by prijať 92 zamestnancov každý rok ako náhradu za odchádzajúcich zamestnancov.

Po zadaní uvedeného modelu do programu GAMS³¹ a spustení maximalizácie hodnoty účelovej funkcie sme získali výstup, kde nájdeme optimálne pomery povýšení a odchodov zamestnancov rozdelené podľa zamestnaneckých úrovní. Ak aplikujeme tieto pravdepodobnosti na dynamický model, ktorým sme predikovali vývoj zamestnancov, môžeme si všimnúť, že náš model nespôsobil žiadne významné zmeny v počte zamestnancov počas sledovanej periódy.

Ak model spustíme bez podmienky stability počtu zamestnancov, dostaneme model, ktorý síce zachová pôvodnú štruktúru zamestnaneckých úrovní, ale spôsobí obrovský pokles počtu zamestnancov celkovo, a to z dôvodu, že odchody zamestnancov nie sú dostatočne penalizované pre korporáciu. Bez hore uvedenej podmienky stálosti počtu zamestnancov, t. j. aplikácie nerovnosti medzi počtom zamestnancov potrebných k prijatiu a súčtom odchádzajúcich zo spoločnosti, každé spúšťanie výpočtu a následná aplikácia výsledkov viedla k výraznému poklesu veľkosti spoločnosti. Teda, všeobecná funkcia, ktorá bola odvodená z dynamických ustálených stavov v podkapitole 3.3 nevypočíta potrebný počet nových zamestnancov na zachovanie počtu zamestnancov v korporácii, ale skôr počet novo prijatých zamestnancov, ktorými sa dá zachovať nejaký dlhodobý stály stav, ktorý je určený súčasnými pravdepodobnosťami. Pridanie podmienky zachovania počtu zamestnancov určuje pravdepodobnosti, pri ktorých sa dá zachovať aktuálna štruktúra dlhodobu.

Cieľové hodnoty predstavovali zaokrúhlenie počtov zamestnancov na prvý násobok desiatich nahor. Tolerancia bola definovaná na úrovni piatich zamestnancov. Východiskové údaje a výsledky získané dynamickým modelom sú v ďalšej podkapitole.

³¹ Príloha č. 1

3.7 Výsledky dynamického modelu

Trojročný priemer pravdepodobnosti povýšenia po jednotlivých zamestnaneckých úrovniach vstupujúci do modelu:

Tabuľka č. 1: Aktuálne vstupné pravdepodobnosti v sledovanej spoločnosti

	1	2	3	4
P(i)	0,276816	0,160731	0,096983	0,033333
O(i)	0,226667	0,246667	0,100000	0,106667

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Aktuálny počet zamestnancov po zamestnaneckých úrovniach, vstupujúci do modelu vo forme začiatkových stavov:

Tabuľka č. 2: Súčasný počet zamestnancov po zamestnaneckých úrovniach

	1	2	3	4
E(i)	187	122	60	28

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Ďalšia tabuľka obsahuje trojročný priemer počtu novo prijatých zamestnancov, aktuálny počet najvyšších manažérov, trojročný priemer fluktuácie najvyššieho manažmentu a pravdepodobnosť odchodu zamestnanca v prvom roku:

Tabuľka č. 3: Ostatné vstupné údaje sledovanej spoločnosti

H=	49
E(5)=	7
O(5)=	0,106667
O(H)=	0,200000

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Dynamický vývoj počtu zamestnancov s aktuálnymi pravdepodobnosťami z dynamického modelu, ktorý aplikuje vstupné pravdepodobnosti po úrovniach podľa dynamických rovníc v podkapitole 3.2 je zobrazený v ďalšej tabuľke:

Tabuľka č. 4: Dynamický vývoj spoločnosti s aktuálnymi vstupnými údajmi

Obdobie	1	2	3	4	5	Spolu:
0	187	122	60	28	7	404
1	132	124	68	30	7	361
2	105	110	75	32	7	329
3	91	94	78	35	7	305
4	84	81	78	38	7	288
5	81	71	76	40	8	276
6	79	64	72	42	8	265
7	78	60	68	43	9	258
8	78	57	64	44	9	252
9	78	55	61	44	10	248
10	78	54	58	44	10	244

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Počet potrebných zamestnancov na prijatie podľa nášho modelu je ročne 37. Dynamický vývoj počtu zamestnancov s aktuálnymi pravdepodobnosťami s týmto dlhodobým optimálnym počtom novo prijatých zamestnancov zachovávajúcim štruktúru zamestnaneckých úrovní je takýto:

Tabuľka č. 5: Dynamický vývoj spoločnosti s modifikovaným počtom nových zamestnancov

Obdobie	1	2	3	4	5	Spolu:
0	187	122	60	28	7	404
1	122	124	68	30	7	351
2	90	107	75	32	7	311
3	74	88	77	35	7	281
4	66	73	76	38	7	260
5	62	62	73	40	8	245
6	60	54	69	41	8	232
7	59	49	64	42	9	223
8	59	45	59	42	9	214
9	59	43	55	42	9	208
10	59	42	51	41	9	202

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Začiatkový a želaný počet zamestnancov po zamestnaneckých úrovniach nášho prípadového štúdia, za okolnosti opísaných v podkapitole 3.6:

Tabuľka č. 6: Začiatkové a želané počty zamestnancov po zamestnaneckých úrovniach

	1	2	3	4
E(i)	187	122	60	28
T(i)	190	130	60	30

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Počet rokov sledovania vývoja je päť. Do výpočtu vstúpili aj exogénne údaje z tabuľky č. 3: začiatkový počet najvyšších manažérov, ktorý sa rovná aj ich želanému počtu, ich pravdepodobnosť odchodu, ďalej pravdepodobnosť odchodu nového zamestnanca v prvom roku, kým dlhodobý optimálny počet zamestnancov potrebných na prijatie je súčasťou výstupu výpočtu. Výsledok optimalizácie vo forme pomerov povýšení a odchodov po zamestnaneckých úrovniach je takýto:

Tabuľka č. 7: Pravdepodobnosti potrebné na dosiahnutie želaného výsledku

	1	2	3	4
P(i)	0,030	0,015	0,016	0,023
O(i)	0,029	0,015	0,015	0,023

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Z týchto údajov sme vypočítali optimálny počet potrebných nových zamestnancov každý rok pomocou vzorca v podkapitole 3.4 a určili sme tento počet v hodnote 14,2256. Tento počet sme zadali do dynamického modelu, ktorý sme použili na výpočet údajov v tabuľkách č. 4 a 5 a výsledný vývoj je zobrazený v tabuľke č. 8.

Tabuľka č. 8: Päťročný vývoj počtu zamestnancov za optimálnych podmienok vypočítaných pomocou modelu teórie hier

Obdobie	1	2	3	4	5	Spolu:
0	187	122	60	28	7	404
1	187	124	60	28	7	406
2	188	126	60	27	7	408
3	188	128	60	27	7	410
4	188	130	60	27	7	412
5	189	130	60	27	7	413

Zdroj: vlastné spracovanie, údaje z korporátnej spoločnosti

Z tabuľky je zrejmé, že želané počty zamestnancov sa splňali pomocou tohto modelu za určitých podmienok vypočítaných modelom teórie hier, v rámci tolerancie definovanej na úrovni piatich zamestnancov na každej zamestnaneckej úrovni. Zaznamenali sme ale mierny pokles v počte zamestnancov na štvrtej úrovni, ktorý je ale v rámci preddefinovanej tolerancie akceptovateľný.

4 Diskusia a záver

Najprv upresníme, že v tomto modeli je úžitková funkcia limitovaná na vzťahy medzi pomermi odchodov a povýšení v rámci jednej spoločnosti a že vzorec neobsahuje určité exogénne premenné, ktoré majú významný vplyv na rozhodnutia spoločnosti, napríklad finančné krízy, štátne regulácie, prípadné kauzy spoločnosti alebo všeobecne pozitívne vnímanie spoločnosti atď.

Účelom diplomovej práce bola aplikácia teórie hier na medziľudské vzťahy v korporácii takým spôsobom, aby odhalila prípadné nedostatky v stratégii spoločnosti korporátneho typu z dlhodobého hľadiska, a to práve dynamizovaním počtu zamestnancov jednotlivých úrovní. Do modelu sme zabudovali dve dôležité podmienky, ktoré prispôbili v zásade všeobecnú sústavu vzťahov na korporátne prostredie: potrebu postupného zníženia počtu zamestnancov na každej vyššej manažérskej úrovni a potrebu náhrady odchádzajúcich zamestnancov. Tieto podmienky sú zakladané na dlhodobých rovnovážnych vzťahoch, a preto nastane konvergencia, teda ustálenie počtu zamestnancov v jednotlivých kategóriách až po piatich až desiatich obdobiach.

Náš model možno použiť vo všetkých spoločnostiach, ktoré majú črty korporátneho prostredia. Menšie modifikácie v účelovej funkcii, alebo pridanie koeficientu rastu k počtom novo prijatých zamestnancov sú potrebné podľa účelov týchto rozhodovateľov.

Prínos určenia dlhodobých rovnováh je, že s využitím pravdepodobností odchodov a povýšení je možné vyjadriť aj pomer počtu zamestnancov na manažérskych úrovniach, ako aj určiť, koľko nových zamestnancov potrebuje spoločnosť, aby nahradila jedného vyššie postaveného zamestnanca, ktorý sa rozhodol opustiť daný korporát.

Pravdepodobnosti povýšení alebo odchodov určené modelom nie sú záväzné pre spoločnosť, totiž pomer odchodov nie je možné presne odhadnúť, a preto je potrebné rozhodovanie prispôbiť vždy k danej situácii. Táto pomôcka ale slúži ako podklad podporujúci rozhodnutia manažmentu, ktorá im ukáže aj dlhodobé efekty ich súčasnej snahy riešiť situácie.

Manažment tiež môže využiť vzťahy pomerov medzi jednotlivými úrovňami zamestnancov na určenie potreby povýšení v závislosti od náhlej zmeny odchodov. Ak personálne oddelenie zostavuje dynamický model počtu zamestnancov na základe hore uvedených vzťahov, čo môžeme vidieť aj v podkapitole 3.6 tejto diplomovej práce, môžu experimentovať s prípadnými stratégiami a sledovať ich dlhodobý efekt.

Účelová funkcia zamestnaneckých úrovní je iba zjednodušením modelovania správania sa zamestnanca ako jednotlivca, projektovaná na celú skupinu jeho kolegov

na manažérskej úrovni. Predpokladáme, že vzhľadom na súčasný stav trhu práce a nízku nezamestnanosť, práve táto oblasť, určenie odchádzajúcich a minimalizácia neželanej fluktuácie bude predmetom skúmania viacerých štúdií v akademickom aj v profesionálnom prostredí.

Nižší počet narodených detí a súčasný odchod tzv. baby-boomer generácie do dôchodku v západnom svete priniesli za následok oveľa silnejšie postavenie zamestnanca voči zamestnávateľovi. Presne z tohto dôvodu musia firmy rátať s neustále rastúcimi nákladmi na zamestnanie ľudí a optimalizáciou korporátnej štruktúry spojenej s minimalizáciou potrebných nových zamestnancov, čo každý rok môže priniesť značné úspory v spoločnosti.

Zoznam použitej literatúry

Tlačené zdroje:

- [1] BAZARAA, M. – GOODE, J. – SHETTY, C. Optimality Criteria in Nonlinear Programming without Differentiability. In *Operations Research*. Maryland : 1971, roč. 19, č. 1, s. 77-86. ISSN 0030-364X.
- [2] BERNADELLI, H. The End of the Marginal Utility Theory? In: *Économica*, roč. 5, č. 18, s. 192-212, 1938. ISSN 0013-0427.
- [3] BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačná analýza v podnikovej praxi*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2014, 280 s. ISBN 978-80-225-4012-4.
- [4] De MONTMORT, P. R. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris : 1708, 188 s.
- [5] DLOUHÝ, M. – FIALA, P. *Teorie ekonomických a politických her*. Praha : Nakladatelství Oeconomica, 2015, 170 s. ISBN 978-80-245-1609-7.
- [6] GOGA, M. *Teória hier*. Bratislava : IURA Edition, 2013, 140 s. ISBN 978-80-8078-613-7.
- [7] HANSON, Morgan A. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Cambridge : Academic Press, 1981, roč. 22, č. 80, 618 s. ISSN 0022-247X.
- [8] KEENEY, R. L. – RAIFFA H. *Decision Analysis with Multiple Conflicting Objectives. Preferences and Value Tradeoffs*. Laxenburg : International Institute for Applied Systems Analysis, 1975, 744 s.
- [9] KUHN, H. W. – TUCKER, A. W. Nonlinear Programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, California : University of California Press,. 1951, s. 481-492.
- [10] LUCE, R. D. – RAIFFA, H. *Games and Decisions – Introduction & Critical Survey*. Dover : Dover Publications, 1989, 544 s. ISBN 978-04-866-5943-5.
- [11] OSBORNE, M J. – RUBINSTEIN, A. *A course in Game Theory*. Cambridge, MA : The MIT Press, 1994, 368 s. ISBN 978-0262-150-415.
- [12] SHONE, Ronal. *An introduction to economic dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003, 224 s. ISBN 0-521-80478-7.
- [13] VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1944, 739 s. ISBN 978-0-691-13061-3.

Internetové zdroje:

[1] AL-MADI, F. N. – ASSAL, H. – SHRAFAT, F. – ZEGLAT, D. The Impact of Employee Motivation on Organizational Commitment. In: European Journal of Business and Management. International Institute of Science, Technology & Education, roč. 9, č. 15, s. 134 – 145. ISSN 2222-2839. Dostupné na internete: <<https://iiste.org/Journals/index.php/EJBM/issue/view/2989>>.

[2] GRÜNE, T. The Problems of Testing Preference Axioms with Revealed Preference Theory. In: Analyse & Kritik. Stuttgart : Lucius & Lucius, 2004. roč. 26 č. 2. s. 382 - 397. ISSN 2365-9858. Dostupné na internete: <<https://people.kth.se/~gryne/papers/Revealed%20Preferences%20A&K.pdf>>.

[3] Historické čísla nezamestnanosti, prvýkrát klesla pod 5 percent. In: Pravda.sk. Bratislava : 2019. ISSN 1335-4050. Dostupné na internete: <<https://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/512728-historicke-cisla-nezamestnanosti-prvykrat-klesla-pod-5-percent/>>.

[4] ManPower Group: Fluktuácia zamestnancov v SR je v rozmedzí 14 – 16 %. Bratislava : Camit.sk, 2018. Dostupné na internete: <https://camit.sk/sk/novinky/13067_manpowergroup-fluktuacia-zamestnancov-v-sr-je-v-rozmedzi-14-16>.

[5] MARTIŠKOVÁ, M. Budúcnosť pracujúcich v automobilovom priemysle na Slovensku. Bratislava : Stredoeurópsky inštitút pre výskum práce, 2018. Dostupné na internete: <<http://library.fes.de/pdf-files/bueros/slowakei/15459.pdf>>.

[6] MATIJEK, P. 50 firiem tvorí 60 percent HDP Slovenska. To je rebríček Forbes Top 50. In: Forbes Slovensko. Bratislava : 2018. ISSN 1338-2527. Dostupné na internete: <<https://www.forbes.sk/50-firiem-60-percent-hdp-slovenska-to-je-rebricek-forbes-top-50/>>.

[7] NOVOTNÝ, P. Hlavnou hrozbou je automatizácia. In: Hospodárske noviny (Online). Bratislava : 2018. ISSN 1336-1996. Dostupné na internete: <<https://finweb.hnonline.sk/ekonomika/1798599-hlavnou-hrozbou-je-automatizacia>>.

[8] OPTIMISING HUMAN CAPITAL: Evolving strategies for skills, space and service. CBRE, 2019. Dostupné na internete: <http://cbre.vo.llnwd.net/grgservices/secure/EMEA_Occupier_Survey_2019.pdf?e=1580565250&h=293bedab838cf7494860ab0481aaff50>.

[9] Priemyselná výroba a jej postavenie v hospodárstve SR. Bratislava : Odbor priemyselného rozvoja na Ministerstve hospodárstva Slovenskej republiky, 2018. Dostupné na internete: <<https://www.economy.gov.sk/uploads/files/ezNh8gXF.pdf>>.

[10] SAPORTA, I. – FARJOUN, M. The Relationship Between Actual Promotion and Turnover Among Professional and Managerial-Administrative Occupational Groups. In: Work and Occupations. Nashville : Vanderbilt University, USA, 2003, roč. 30, č. 3, s. 255-280. ISSN 0730-8884. Dostupné na internete: <https://www.researchgate.net/publication/249690527_The_Relationship_Between_Actual_Promotion_and_Turnover_Among_Professional_and_Managerial-Administrative_Occupational_Groups>.

Právne normy:

- [1] Zákon č. 513/1991 Zb. Obchodný zákonník
- [2] Zákon č. 311/2001 Z. z. Zákonník práce

Príloha