ŠACH AKO METAFORA MATEMATIKY

LADISLAV KVASZ, Filosofický ústav Akademie věd České republiky; Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, ČR

KVASZ, L.: Chess as a Metaphor for Mathematics
FILOZOFIA 70, 2015, No. 2, pp. 175-187

The proponents of analytical philosophy often draw a comparison between mathematics and chess. Their metaphor is to suggest that both the result of mathematical calculation and the content of a mathematical statement are determined by the rules of "mathematical game" of some kind and independent of status quo. The steps made in a given calculation or proof arguments are game moves – and similarly to a position in chess the position in a "mathematical game" has no factual content. The aim of the article is to question the metaphor at issue and show the multiple characteristics of mathematical symbols that make them principally different from chessmen. The arguments introduced are to show that contrary to chess mathematics enables us to understand the world, discern its structure and grasp its coherence. The metaphor in question thus can be labeled as systematically misleading.

Keywords: Chess – Mathematics – Philosophy of mathematics

Analytickí filozofi zvyknú matematiku prirovnávať k šachu. M. R. Brown v knihe *Philosophy of Mathematics, an Introduction to the World of Proofs and Picures* píše: „Nikto si nemyslí, že šachové figúrky niečo označujú. Formalisti milujú nasledujúcu analógiu: Matematika je len hra, matematické objekty sú ako šachové figúrky a pravidlá matematiky sú ako arbitrárne pravidlá hry. Slávnostne by mohli dodať, že matematika je najväčšou hrou aká bola kedy hraná, ale je to napriek všetkému len hra" (Brown 1999, 63). V podobnom duchu píše aj M. Colyvan v knihe *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*: „Takzvaný *herný formalizmus* je názor, že matematika sa do veľkej miery podobá šachu. Figúrky šachovej súpravy nič nereprezentujú, sú len nezmyselnými kúskami dreva, kovu alebo čohokoľvek iného, definované pravidlami riadiacimi prípustné ťahy, ktoré s nimi možno robiť. Podľa *herného formalizmu* s matematikou je to podobne" (Colyvan 2012, 4). Týmto prirovnaním sa snažia upozorniť na to, že význam matematických symbolov je určený súborom pravidiel konkrétneho kalkulu v ktorom fungujú – podobne, ako sú vlastnosti šachovej figúrky plne určené pravidlami šachu. Matematik používajúci určitý kalkul sa preto podobá šachistovi – výsledok výpočtu, ako aj priebeh šachovej hry je určený výlučne pravidlami „hry" a nezávisí od stavu sveta. Fyzikálne teórie sú empiricky testované, ale tak, ako nemá zmysel empiricky testovať šach, bolo by absurdné empiricky testovať aj aritmetiku.[1] Predkladaný článok si kladie za cieľ ukázať,

[1] Chceli by sme sa poďakovať prof. Michaelovi Heidelbergerovi, ktorý tento argument použil na konferencii *European Philosophy of Science – Philosophy of Science in Europe and the Viennese Heri-*

že táto metafora je zavádzajúca a navodzuje pomýlenú predstavu o matematike.

1. Šach verzus matematika

Ako každé prirovnanie aj prirovnanie matematiky k šachu sa zakladá na súbore čŕt, ktoré má matematický výpočet spoločné so šachom. Aj matematika, aj šach sú ľudské aktivity riadiace sa súborom pravidiel, ktoré sú do veľkej miery konvenčné. Kroky výpočtu, resp. ťahy v šachu vyberáme z obmedzeného súboru prípustných krokov či ťahov. Pritom matematické symboly používané pri výpočte rovnako ako šachové figúrky sú do veľkej miery arbitrárne a svoj zmysel čerpajú z pravidiel príslušného kalkulu či z pravidiel šachu. Okrem týchto spoločných čŕt však existuje rad aspektov, ktorými sa matematická symbolika odlišuje od šachu. Usporiadané sú v zmysle narastajúcej vzdialenosti od šachu.[2]

I. Nekonečnosť. Šach je konečný, má konečný počet možných pozícií. Naproti tomu každý reprezentačný nástroj používaný v matematike umožňuje vygenerovať potenciálne nekonečný počet rôznych konfigurácií. Možno namietnuť, že prakticky v celej doterajšej histórii ľudstva bol použitý iba konečný počet konfigurácií akéhokoľvek reprezentačného nástroja (čísiel, polynómov, funkcií...) a toto konečné číslo je oveľa menšie než počet možných pozícií v šachu. Takže matematika nikdy prakticky nevyužije nekonečnosť možných konfigurácií svojich reprezentačných nástrojov. To je síce pravda, ale na to, aby bolo možné aspoň v princípe vytvoriť nekonečný počet rôznych konfigurácií, musia mať reprezentačné nástroje matematiky ďalšiu dôležitú vlastnosť, ktorá ich odlišuje od šachu, a to rekurzívnosť.

II. Rekurzívnosť. Reprezentačné nástroje matematiky podstatným spôsobom využívajú rekurzívnosť – ich konfigurácie sú generované z malého počtu primitívnych prvkov pomocou malého počtu jednoduchých pravidiel, ktoré sa neustále opakujú. Preto sú ich konfigurácie transparentné a ľahko pochopiteľné. Keď sa pozrieme na desatinné číslo alebo na algebraický vzorec, je ľahké skontrolovať, či je to správne vytvorený výraz jazyka aritmetiky či algebry. Naproti tomu v šachu hra prebieha striedavými ťahmi dvoch protihráčov, z ktorých každý má k dispozícii šestnásť figúr, takže v ňom vznikajú zložité a neprehľadné situácie. Keď sa pozrieme na situáciu vytvorenú na šachovnici, nevieme okamžite určiť, či je vytvorená správne, teda či je, alebo nie je výsledkom možného priebehu šachovej hry.

---

tage, konanej roku 2011 vo Viedni, proti nášmu empirickému výkladu matematiky. V našej práci (Kvasz 2014) sme sa pokúsili bezprostredne čeliť tomuto argumentu a teraz využívame príležitosť rozobrať danú tému systematickejšie.

[2] V nadväznosti na knihu *Patterns of Change* (Kvasz 2008) budeme matematickú symboliku označovať ako nástroj symbolickej reprezentácie. Nástroje ikonickej reprezentácie ponecháme bokom. Geometrické konštrukcie majú síce viac spoločných čŕt so šachom, ale keďže filozofi spravidla metaforu šachu vzťahujú na aritmetiku, aj my ostaneme pri analýze nástrojov symbolickej reprezentácie.

III. Redundantnosť. Jednotlivé nástroje symbolickej reprezentácie obsahujú spravidla dvojice opačných operácií (sčítanie a odčítanie; násobenie a delenie; umocňovanie a odmocňovanie; integrovanie a derivovanie), čo má za následok, že prostriedkami určitého nástroja symbolickej reprezentácie možno každú konfiguráciu vyjadriť nekonečným počtom rôznych spôsobov. Tak napríklad v aritmetike možno číslo 4 vyjadriť ako 5 – 1, 6 – 2, 7 – 3 atď. až do nekonečna, pričom z pohľadu aritmetiky sú všetky tieto výrazy ekvivalentné. Naproti tomu v šachu nie je možné rovnakú konfiguráciu vyjadriť rôznymi ekvivalentnými spôsobmi. Zdá sa, že nie je možné zmysluplne tvrdiť, že rôzne šachové pozície vyjadrujú rôznym spôsobom tú istú situáciu.

IV. Štandardnosť metód. Redundantnosť je pre matematiku dôležitá, lebo väčšina nástrojov symbolickej reprezentácie umožňuje vytvoriť štandardné úlohy tak, že sa vyžaduje ekvivalentná úprava daného výrazu na určitý tvar.[3] Pre matematiku je charakteristické, že pre širokú triedu takýchto úloh poskytuje štandardné postupy na ich riešenie. Napríklad pre sčítanie či násobenie čísel v desiatkovej sústave existujú štandardné algoritmy rovnako ako na riešenie sústav lineárnych rovníc alebo na derivovanie funkcií. V šachu, na druhej strane, musíme každú situáciu analyzovať individuálne. Neexistujú žiadne štandardné postupy, ktoré by bolo možné použiť pri riešení širokých tried šachových pozícií.

V. Zovšeobecniteľnosť metód. Pozoruhodnou vlastnosťou matematiky je to, že pre ten istý problém, či danú triedu problémov existuje celý rad metód s rôznou mierou všeobecnosti. Napríklad na riešenie polynomickej rovnice sa možno pozerať ako na úlohu nájsť vzorec zadávajúci riešenie, alebo ako na úlohu nájsť rozklad polynómu na lineárne členy, alebo ako na úlohu nájsť rezolventu danej rovnice, alebo ako na úlohu nájsť rozkladové pole, alebo ako na úlohu nájsť faktorizáciu grupy automorfizmov rozkladového poľa polynómu. Každá z týchto úloh je určitým zovšeobecnením predošlej, takže metódy jej riešenia automaticky zahŕňajú aj postup riešenia predchádzajúcej úlohy (Kvasz 2008, 199). Postupné zovšeobecňovanie metód prináša čoraz hlbšie porozumenie danému problému a zasadzuje ho do čoraz širších súvislostí. Asi netreba zdôrazňovať, že v šachu nič také ako zovšeobecniteľnosť metód neexistuje.

VI. Aproximatívnosť metód. Nástroje symbolickej reprezentácie majú ďalšiu zaujímavú vlastnosť, ktorú možno označiť ako aproximatívnosť. Keď chceme vypočítať určitý integrál nejakej funkcie, môžeme funkciu rozložiť do nekonečného radu a tento rad člen za členom integrovať. Ak vezmeme niekoľko prvých členov rozvoja, často získame dostatočne dobrú aproximáciu výsledku. Takto sme zložitý problém aproximovali jednoduchšou úlohou, ktorú dokážeme vyriešiť, a z riešenia jednoduchej úlohy môžeme spra-

[3] V bodoch I. – VI. reprezentačné nástroje chápeme ako kalkuly bez vzťahu k realite, preto príslušné úlohy chápeme ako úlohy upravovania výrazov jazyka na vyžadovaný tvar a otázku o zmysle tohto upravovania zatiaľ nekladieme. Dôležité je to, že ani len tento neinterpretovaný kalkul nemá paralelu vo sfére šachu.

vidla vyvodiť závery o riešení pôvodného problému. V šachu možnosť takejto aproximácie neexistuje. Tam je každá situácia jedinečná; má svoje zvláštnosti, ktoré môžu zásadne ovplyvniť výsledok hry. Každé aproximovanie či nahradenie zložitého problému jednoduchším je nebezpečné, pričom pojem približného riešenia šachovej pozície nedáva zmysel.

VII. Interpretatívnosť. Reprezentačné nástroje matematiky ako aritmetika, algebra či diferenciálny a integrálny počet neboli vytvorené ako neinterpretované kalkuly. Každý reprezentačný nástroj bol vytvorený na praktické účely, takže jeho výrazy prirodzene reprezentujú ten aspekt reality, na opis ktorého bol reprezentačný nástroj pôvodne vytvorený. Použitie nástroja sa neobmedzuje na aspekt reality, na opis ktorého nástroj pôvodne vznikol. Nástroj môže byť použitý aj na účely, ktoré jeho tvorcovia nemohli predvídať. Ale aj napriek tomu vždy existuje určitý aspekt skutočnosti, v medziach ktorého možno výrazy a pravidlá daného reprezentačného nástroja prirodzene interpretovať. Šachové figúrky nič podobné neumožňujú. Neexistuje nijaký aspekt skutočnosti, o ktorom by sme mohli povedať, že je podkladom prirodzenej interpretácie šachu podobne tomu, ako je pohyb hmotného bodu podkladom prirodzenej interpretácie výrazov a pravidiel diferenciálneho a integrálneho počtu.

VIII. Reprezentatívnosť. Výrazy reprezentačných nástrojov (čísla, rovnice, integrály) môžeme uviesť do vzťahu s určitým výsekom skutočnosti tak, že z výpočtov s týmito výrazmi v príslušnom kalkule možno získať informácie o niektorých aspektoch reprezentovaného výseku reality. Keď spočítam počet mincí v jednom vrecku a v druhom vrecku, výsledný počet mincí môžem zistiť sčítaním týchto čísel. Samozrejme, to je banálny príklad použitia matematiky. Musíme si však uvedomiť, že šach nič podobné neumožňuje. Nie je možné reprezentovať určitý aspekt skutočnosti pomocou konfigurácií figúrok na šachovnici a potom na základe pravidiel šachu odvodiť nejaké nové poznatky o tomto aspekte.[4] Zástancovia logického pozitivizmu radi zdôrazňovali, že výroky matematiky nevypovedajú o svete. To je pravda, pokiaľ vypovedanie o svete redukujeme na konštatovanie výskytu jedinečného, izolovaného empirického faktu, ale rovnako je pravda, že za istých okolností je možné matematické vety použiť na vyjadrenie súvislostí vo svete.

IX. Reprezentačný presah. Zástancovia logického pozitivizmu mali do istej miery pravdu, keď zvýrazňovali nezávislosť matematiky od reálneho sveta. Skutočne, jednotlivé reprezentačné nástroje žijú svojím vlastným životom, do istej miery nezávisle od reality. Jedným z pozoruhodných aspektov tohto nezávislého rozvoja matematických kalkulov je to, že často dospejú k rozšíreniu svojho súboru symbolov o nové, ktoré v pôvodnej oblasti, kde má kalkul svoju prirodzenú interpretáciu, nedávajú zmysel. Máme tu na mysli komplexné čísla, neeuklidovské geometrie, zovšeobecnené funkcie alebo to, čomu sa

---

[4] Samozrejme, šachové figúrky môžeme použiť na počítanie (podobne ako prsty či kamienky), ale takéto počítanie sa nedeje podľa pravidiel šachu, ale podľa pravidiel aritmetiky.

dnes hovorí fraktály. To všetko boli pôvodne deskripcie vytvorené vďaka porušeniu základných pravidiel syntaxe príslušného reprezentačného nástroja. A prekvapivé je to, že po určitom čase sa práve tieto deskripcie ukážu ako zásadné pre fyziku. Napríklad komplexné čísla boli zavedené ako nepochopiteľné výrazy obsahujúce odmocniny zo záporných čísel (teda ako artefakt algebraického jazyka), pričom dnes sú základným prostriedkom opisu reality v kvantovej mechanike. Zdá sa, ako keby reprezentačné nástroje matematiky občas prekročili hranice zdôvodniteľné v rámci určitej interpretácie a dodatočne sa práve tento presah stane základom opisu skutočnosti. V šachu opäť nič podobné neexistuje – systematickým porušovaním pravidiel šachu nemôže vzniknúť nič, čo by sa neskôr ukázalo ako užitočné pre poznávanie prírody.

X. Pluralita. Kým šachová hra existuje viac-menej osamotene, v matematike existuje celý rad rôznych nástrojov symbolickej reprezentácie. V knihe *Patterns of Change* sme opísali aritmetiku, algebru, diferenciálny a integrálny počet a predikátový počet. V rámci každého z uvedených nástrojov je možné odlíšiť celý rad ich variantov, z ktorých každý má trocha iné pravidlá tvorby a úpravy svojich výrazov. Napríklad v algebre môžeme rozlíšiť lineárnu algebru, polynomiálnu algebru, multilineárnu algebru, homologickú algebru... Šach naproti tomu žiadne podobné alternatívy či varianty nemá. Je to jedinečná hra.

XI. Zrkadlenie. Ďalším rysom reprezentačných nástrojov je to, že neexistujú izolovane, ale sú navzájom prepojené. Ako sme uviedli v predchádzajúcom bode, existuje celá škála reprezentačných nástrojov a keď určitý nástroj narazí na situáciu, ktorú nemôže reprezentovať, skôr alebo neskôr sa vytvorí nový nástroj, ktorý to dokáže. Keď sa zistilo, že dĺžku uhlopriečky jednotkového štvorca nemožno vyjadriť ako pomer dvoch celých čísel (t. j. keď reprezentačný nástroj elementárnej aritmetiky narazil na svoje expresívne medze), matematici vytvorili reálne čísla, pre ktoré už reprezentovať uhlopriečku štvorca nepredstavuje problém. Prirodzené čísla sú, samozrejme, časťou reálnych čísel, takže všetky výpočty s prirodzenými číslami sa zrkadlia v systéme reálnych čísel.[5] Toto zrkadlenie má zásadný význam, pretože tým, že sa pôvodný systém ocitne v bohatšom systéme, vystúpia do popredia jeho rôzne vlastnosti, a predovšetkým jeho medze. Šach na rozdiel od matematiky nič podobné neumožňuje. Nič sa v ňom nezrkadlí a on nezrkadlí žiadnu inú štruktúru.

---

[5] Hovoríme tu o zrkadlení, pretože, technicky vzaté, reálne číslo je niečo ako rez na množine racionálnych čísel, trieda ekvivalencie cauchyovských postupností či nekonečný desatinný zápis, takže operácie s reálnymi číslami sú čosi iné ako operácie s číslami prirodzenými. Napriek tomu v systéme reálnych čísel je možné vyčleniť jeho podmnožinu, ktorá je modelom čísel prirodzených. Teda aritmetiku čísel zrkadlia úplne iné objekty, patriace do univerza iného reprezentačného nástroja. Podobne sa aritmetika zrkadlí aj v syntetickej geometrii, kde môžeme zaviesť operácie s úsečkami tak, aby sa v nich zrkadlili aritmetické operácie. Descartes objavil, že syntetickú geometriu zas možno modelovať v algebre, kde pretínaniu kriviek zodpovedá spoločné riešenie rovníc, ktoré tieto krivky zadávajú.

XII. Otvorenosť. Matematika je otvorená – vznikajú v nej neustále nové formálne systémy, zavádzajú sa nové symboly podliehajúce novým súborom pravidiel. Také čosi je, pokiaľ ide o šach, nemysliteľné. Predstava, že by niekto zaviedol na šachovnici novú figúrku, nedáva zmysel.

2. O syntetickom charaktere matematiky

Reprezentačné nástroje matematiky sú interpretované, reprezentatívne, majú reprezentatívny presah, vytvárajú pluralitu a navzájom sa zrkadlia, takže obohacujú naše poznanie. Tento zoznam prejdeme odzadu a ***začneme javom zrkadlenia***. Napríklad algebra zrkadlí euklidovskú geometriu. To znamená, že v rámci jazyka algebry je možné opísať univerzum syntetickej geometrie, a predovšetkým presne charakterizovať jeho medze. Skutočne, z toho, že žiaden koreň ireducibilného polynómu tretieho stupňa s racionálnymi koeficientmi nie je možné vytvoriť postupnosťou kvadratických rozšírení poľa racionálnych čísel, vyplýva, že pravidelný sedemuholník nemôže byť zostrojený pomocou pravítka a kružidla. Týmto spôsobom ***algebra vytýčila hranice jazyka syntetickej geometrie, a tak obohatila naše vedomosti***. Môžeme s istotou tvrdiť, že nikomu sa nemôže podariť skonštruovať pomocou pravítka a kružidla pravidelný sedemuholník. To možno považovať za poznatok o svete. Teda nie ***konkrétny matematický fakt***, ktorý je bezpochyby analytický, ale pochopenie medzí určitého nástroja je poznatok, ktorý má syntetický charakter.[6]

Okrem zrkadlenia ďalšou možnosťou matematiky obohacovať naše poznanie je otvorenie určitej alternatívy ***vďaka pluralite reprezentačných nástrojov***. Neeuklidovská geometria vznikla ako alternatíva geometrie euklidovskej. Avšak vďaka nej si Gauss uvedomil, že náš reálny, fyzikálny priestor nemusí byť euklidovský, a pustil sa do premeriavania súčtov uhlov vo veľkých trojuholníkoch (kde je šanca objaviť odchýlky od euklidovskej geometrie). Samozrejme, toto jeho počínanie bolo čisto empirické. Ale umožnené bolo tým, že sa zrodila alternatíva euklidovskej geometrie. Až vtedy, keď existuje alternatíva, má vôbec zmysel položiť otázku, či je reálny priestor euklidovský. Pokým existuje jediný druh geometrie, geometria euklidovská, nemá zmysel overovať, či priestor je euklidovský. A aj keby sa našiel nejaký hyperkritický empirik, bez znalosti neeuklidovskej geometrie by asi sotva vedel, čo má merať, v ktorých parametroch sa euklidovská geometria rozchádza s neeuklidovskými geometriami. Takže matematika, ktorá je vďaka svojej pluralite schopná vytvoriť určitú alternatívu bežných „návykových“ systémov poznatkov, a tým formulovať otázku, obohacuje naše poznanie.

---

[6] Aj slávne Gödelove vety o neúplnosti aritmetiky majú charakter ***vytýčenia medzí*** určitého reprezentačného nástroja, v tomto prípade Peanovej aritmetiky. A nemožno poprieť, že vďaka Gödelovi sme sa niečo dôležité dozvedeli, teda že Gödel obohatil naše poznanie. Gödelove vety, rovnako ako väčšina viet vytyčujúcich hranice určitého reprezentačného nástroja (ako je Galoisova veta pre algebru), majú syntetický charakter. Umožňujú nám pochopiť niečo zásadné.

Tretí spôsob, ako matematika môže obohacovať naše poznanie, pramení z ***reprezentačného presahu***. Už sme uviedli príklad komplexných čísel ako umelo vytvorených matematických objektov, ktorým spočiatku chýbala akákoľvek interpretácia. Nakoniec však fyzici začali komplexné čísla používať a dnes sú základným nástrojom reprezentácie v kvantovej mechanike. Príbeh Riemannovej geometrie bol podobný: vnútromatematické pohnútky viedli k vytvoreniu určitého nástroja symbolickej reprezentácie, ktorý sa dodatočne ukázal ako zásadný nástroj pre všeobecnú teóriu relativity.[7] Celkovo možno povedať, že existuje celý rad prípadov, keď matematici, vedení čisto vnútromatematickou motiváciou, vypracovali reprezentačné nástroje, ktoré zohrali rozhodujúcu úlohu v neskoršom rozvoji prírodných vied.

Okrem reprezentačného presahu (pri ktorom ide o pôvodne neinterpretované objekty) matematika obohacuje naše poznanie aj vďaka svojej reprezentatívnosti. Rozvoj určitého reprezentačného nástroja často prináša ***možnosť vyjadrenia*** určitých súvislostí, ktoré sú bez neho nevyjadriteľné. Typickým príkladom je Hamiltonova mechanika, ktorá priniesla možnosť reprezentovať súčasne všetky možné pohyby daného mechanického systému, a tým zaviesť pojem fázového toku. To umožnilo Liouvillovi objaviť, že pri fázovom toku sa zachováva fázový objem. Liouvillova veta je určite dôležitým poznatkom o svete, poznatkom, ktorý nebolo možné objaviť bez zavedenia fázového toku. Vytváraním prostriedkov, ktoré umožňujú reprezentovať určitý aspekt skutočnosti, teda matematika prispieva k nášmu poznaniu. Ale rovnako ako v predošlom bode ani tentoraz neprispieva k nemu odvodením nejakej teorémy, ale vytvorením nástroja, ktorý umožňuje reprezentovať niečo, čo bolo dovtedy nevyjadriteľné.

Podľa nás hlavný omyl logického pozitivizmu i Wittgensteinov omyl pri interpretácii matematiky spočíva v tom, že sa na ňu pozerajú ako na hotový systém, teda ignorujú prácu matematikov spojenú s vytváraním ***nových reprezentačných nástrojov***. Matematiku vnímajú iba lokálne, vidia v nej manipulovanie s danými, konvenčne zavedenými symbolmi podľa vopred daných pravidiel. Samozrejme, aj to je súčasťou matematiky. Ale pri tomto lokálnom pohľade sa stráca globálny obraz. Možno povedať, že ***matematika je lokálne analytická***, teda každý výpočet či dôkaz možno rekonštruovať ako manipuláciu s vopred danými symbolmi podľa vopred daných pravidiel. Ale okrem tejto lokálne úrovne má matematika aj globálnu rovinu, na ktorej dochádza k objavovaniu nových pojmov a k vytváraniu nových reprezentačných nástrojov na ich formálne zachytenie (v rámci ktorých potom dochádza k oným symbolickým manipuláciám). Na globálnej úrovni sa zavádzajú rámce, vo vnútri ktorých sa odohráva analytické odvodzovanie. Chceli by sme vysloviť tézu, že ***na globálnej úrovni je matematika syntetická***, obohacuje naše poznanie tým, že umožňuje vidieť súvislosti a rozpoznávať pravidelnosti. Skúsenosť nie je iba

[7] Vždy je ťažké jednoznačne rekonštruovať podnety vedúce k určitému objavu. Každopádne Riemann v úvode svojej habilitačnej práce, v ktorej zavádza to, čo dnes nazývame diferencovateľnou varietou a metrickým tenzorom, uvádza epistemologické príklady, pričom žiadne konkrétne fyzikálne použitie neuvádza. Zdá sa, že fyzika potrebovala zhruba päťdesiat rokov na to, aby dospela do štádia, keď dokázala Riemannove myšlienky plne oceniť.

zbierkou singulárnych faktov. Aj to, že niečo nie je možné (Gödel) alebo že je to možné vďaka niečomu (Liouville), je poznaním. Matematika prispieva k nášmu poznaniu práve týmto odomykaním horizontov a vytyčovaním medzí.

3. Šachová figúrka verzus matematický symbol

V prvej časti článku sme ukázali, že šach ako celok sa nepodobá matematike, lebo na rozdiel od matematiky šachu chýba celý rad vlastností počínajúc nekonečnosťou a rekurzívnosťou a končiac zrkadlením a otvorenosťou. Ešte stále však ostáva ***úroveň jednotlivých figúrok***. Prirovnanie matematiky k šachu sa často chápe tak, že šachová figúrka ilustruje určitú podstatnú vlastnosť matematického symbolu, menovite, že vlastnosti symbolu sú *určené pravidlami hry*, a nie mimojazykovou realitou. Šachová figúrka nemá zmysel mimo šachovej hry a jej význam je konštituovaný samotnou hrou[8] a podobne sa zdá, že ani matematický symbol nemá zmysel mimo samotnej matematiky a že jeho význam je konštituovaný až príslušnou (jazykovou) hrou. To je síce pravda, ale iba do istej miery.

Niektoré rozdiely spočívajú v tom, že matematika neobsahuje jednu sadu symbolov, ale je tvorená celou sériou kalkulov, akými sú aritmetika, algebra, diferenciálny a integrálny počet či výroková a predikátová logika. Jednotlivé symboly, napríklad číselné symboly spolu s pravidlami sčítania či násobenia, ***vstupujú do väčšiny uvedených kalkulov (napríklad*** v úlohe stupňa umocňovania či rádu derivácií). Preto keby sme v matematike chceli *nahradiť figúrku koňa kúskom gumy*,[9] museli by sme zasiahnuť do veľkého množstva rôznych kalkulov a urobiť veľký počet paralelných nahradení. Prakticky by to nefungovalo, prinajmenšom by to narazilo na mnoho problémov. Matematické symboly nevystupujú iba v jednej jazykovej hre, ale vstupujú do celého radu jazykových hier, pričom tieto hry určitým spôsobom koordinujú, takže paralela so šachom prestáva platiť.

Ďašie rozdiely spočívajú v tom, že matematický symbol je spravidla výsledkom dlhého historického vývinu určitého kalkulu, ktorý nadväzuje na vývoj predošlých kalkulov a vytvára predpoklady pre zrod nasledujúcich. V dôsledku toho majú matematické symboly ***rad aspektov***, ktoré v šachovej hre nemajú analógiu. Aby sme predviedli bohatstvo aspektov matematických symbolov, zoberieme jeden konkrétny symbol – symbol pre odmocninu – a opíšeme jeho históriu.[10]

---

[8] To sa ukáže napríklad vtedy, keď zo šachovej sady stratíme figúrku koňa – môžeme vziať prakticky ľubovoľný predmet primeranej veľkosti (napríklad gumu), prehlásiť ho za koňa a hra môže bez problémov začať.

[9] T. j. nahradiť určitý symbol nejakým iným.

[10] Podrobnejšie výklad vývinu algebraickej symboliky opisujem v práci (Kvasz 2012). Čitateľovi by sa mohlo zdať, že aj v prípade šachových figúrok by bolo možné opísať podobný vývin. Určite inak vyzerali figúrky používané v starovekom Iráne, inak v stredovekej Európe a inak vyzerajú figúrky používané dnes. Ale to nie je analógia vývinu, o akom píšeme. Samozrejme, v algebre možno sledovať aj takýto vývin, veď aj matematiku zasiahol vývin písma, takže zbežný pohľad na stránku textu často umožní odhadnúť storočie, v ktorom bol text vytlačený. V prípade vývinu matematickej symboliky ide však o nie-

I. Identita symbolu. Znak, pomocou ktorého zapisujeme odmocninu, by v princípe mohol byť celkom ľubovoľný. Ľubovoľný však nie je. Je odvodený od prvého písmena latinského slova ***radix*** (*koreň*).[11] Symbol pre odmocninu zaviedol v 15. storočí Regiomontanus a vypracoval pravidlá na počítanie s týmto symbolom. *Z aritmetickej operácie odmocňovania (t. j. procesu) spravil odmocninu (t. j. objekt)*. Regiomontanus označoval odmocninu veľkým písmenom ***R***, takže $\sqrt{8}$ písal ako ***R de 8*** a $\sqrt[3]{7}$ ako ***R cubica de*** *7*. Roku 1544 vydal Michael Stifel knihu *Arithmetica integra*, v ktorej na označenie odmocniny použil ***malé štylizované písmeno r*** v tvare $\sqrt{\ }$, ktoré používame podnes. Druhú odmocninu písal ako $\sqrt{z}$ (*radix zensi*), tretiu ako $\sqrt{c}$ (*radix cubica*), štvrtú ako $\sqrt{zz}$ (*radix zenso di zensi*).

II. Funkcionalita symbolu. Symbol pre odmocninu je funkcionálny symbol; treba ho doplniť o argument. Funkcionalita bola spočiatku vyjadrená verbálne, nie symbolicky. Regiomontanus používal slovko ***de***, vo výraze ***R de 8***, teda odmocnina ***z 8***. Stifel už slovko *de* nepoužíval a argument písal priamo za symbol odmocniny, takže tretiu odmocninu z 325 písal ako $\sqrt{c}325$ (*radix cubica* 325). U Stifela môžeme rozpoznať ďalšiu revolučnú ideu, ktorá sa nakoniec presadila na vyjadrenie funkcionality symbolu odmocniny, totiž ***vnorenie symbolu do symbolu***. Je pozoruhodné, že Stifel toto vnorenie nepoužíval na zápis argumentu, ale pod znak odmocniny písal písmeno udávajúce jej stupeň (*cubus* je tretia mocnina, takže *radix cubica* je tretia odmocnina).[12] Ale zásadná idea bola na svete. Možnosť vnorenia bola dôvodom, prečo Stifel prešiel od Regiomontanovho veľkého *R* k malému *r* ako symbolu odmocniny. Konvencia písať pod znak odmocniny číslo, ktoré odmocňujeme, a tým fixovať funkcionalitu symbolu pre odmocninu, pochádza od Descarta z jeho *Geometrie* (Descartes 1637).

čo iné. Keby sme vzali figúrky zo starého Iránu, mohli by sme (keby nám to správa múzea dovolila) s nimi hrať takú istú hru, akú hráme dnes. Keď zoberieme Cardanovu symboliku, nie je v nej možné zapísať všetky úpravy dnešnej algebry. Cardanova symbolika obsahuje iba časť pravidiel dnešnej algebry.

[11] Podobne symbol pre integrál pochádza z prvého písmena latinského slova ***suma***. Aj keď v princípe možno zvoliť na označenie určitej operácie ľubovoľný symbol, v praxi sa často používa prvé písmeno termínu označujúceho príslušnú operáciu. Je to pochopiteľné, lebo na rozdiel od šachu, ktorý má 6 druhov figúrok, pričom šesť ľubovoľne zvolených symbolov sa ešte dá zapamätať (a vlastne ani šach nepoužíva celkom ľubovoľné figúrky), ak je symbolov 60, tak ich úplnú ľubovoľnosť už obhájime len ťažko. Poukázaním na veľké množstvo matematických symbolov nechceme spochybniť správnosť tézy o slobode pri výbere matematického symbolu, chceme však vysvetliť dôvody, prečo sa matematika touto tézou neriadi.

[12] Dosť často sa stáva, že objaviteľ princípu, ktorý sa nakoniec prijme ako riešenie určitého problému, nespozná význam svojho objavu a používa ho spôsobom marginálnym, až bizarným. Napríklad Stifel nespoznal význam svojej myšlienky vnorenia ďalšieho symbolu do symbolu odmocniny, ktorú dnes používame na zápis argumentu (t. j. odmocňovaného čísla), a namiesto toho pod znak odmocniny písal index udávajúci rád odmocniny.

III. Iterabilita symbolu. Keď Descartes premenil Stifelovu ideu vnorenia symbolu do symbolu a použil ju na vyjadrenie funkcionality, otvorila sa možnosť symbolického vyjadrenia iterability odmocňovania, teda možnosť vytvárať výrazy ako $\sqrt{6+\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ a, samozrejme, vynára sa aj s tým spojený súbor pravidiel na úpravu týchto výrazov.

IV. Indikácia rozsahu symbolu. Roku 1545 vydal Girolamo Cardano knihu *Ars Magna Sive de Regulis Algebracis*, ktorá obsahovala riešenie rovníc tretieho stupňa. Cardano svoj postup ilustroval na rovnici *cubus a šesť vecí je rovný dvadsať* (t. j. $x^3 + 6x = 20$) a riešenie uviedol v tvare

RV: cub: R: 108 p: 10 m: RV: cub: R: 108 m: 10 (1)

R je Regiomontanov znak pre odmocninu, ***RV*** je ***radix universalis*** a písmená *p* a *m* označujú operácie sčítania a odčítania. V našej symbolike má (1) tvar $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Porovnaním týchto dvoch zápisov odhalíme ***nejednoznačnosť symbolu RV***. Každopádne je to jeden z prvých pokusov vyjadriť rozsah pôsobenia symbolu odmocniny. Nicolas Chuquet dokončil roku 1484 rukopis knihy *De triparti en la science des nombres*, v ktorej používal na označenie odmocniny písmeno *R*, podobne ako Regiomontanus. Jeho inováciou bolo to, že rozsah odmocňovania vyznačil ***podčiarknutím***, takže naše $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ písal v tvare *R* $\underline{14\ p\ R\ 180}$. Idea použiť vodorovnú čiaru ako indikátor rozsahu odmocňovania sa nakoniec presadila. K jej presadeniu došlo zároveň so Stifelovou myšlienkou funkcionality symbolu odmocniny. Kvôli spojeniu týchto dvoch myšlienok bolo ***podčiarkovanie nahradené nadčiarkovaním*** a čiara indikujúca rozsah odmocniny bola spojená s hornou nožičkou písmena *r*. Keď Descartes začal písať pod symbol odmocniny argument, bol na svete náš symbol, ktorý sme použili napríklad vo výraze $\sqrt{14+\sqrt{180}}$.

V. Indikácia rádu symbolu. Už Regiomontanus zaviedol odmocniny vyšších rádov, pričom rád odmocniny označoval samostatným slovom – druhú odmocninu označoval *R*, tretiu *R cubica*. Označenie rádu odmocniny nebolo súčasťou symbolu pre odmocninu. Tou sa stalo až u Stifela, ktorý druhú odmocninu písal ako $\sqrt{z}$, tretiu ako $\sqrt{c}$, štvrtú ako $\sqrt{zz}$, teda označenie rádu zahrnul do symbolu ako jeho vnorený index. Počínajúc Stifelom je označenie rádu trvalou súčasťou symbolu odmocniny. Descartes navrhol používať miesto vnoreného indexu ľavý horný index, takže namiesto Stifelových $\sqrt{z}$, $\sqrt{c}$ a $\sqrt{zz}$ písal $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ a $\sqrt[4]{\ }$. Táto zmena je dôležitá, lebo presunutím indexu na ľavú hornú pozíciu sa uvoľnilo miesto pod odmocninou, kam Descartes začal písať argument. Ale základnú Stifelovu ideu, že symbolom odmocniny má byť ***zložený symbol*** obsahujúci index udávajúci rád odmocniny, Descartes zachoval.

VI. Aritmetizácia rádu. Na Descartovej symbolike pre odmocninu je pozoruhodný ďalší posun: Namiesto písmen označujúcich rád odmocniny pomocou prvého písmena príslušného termínu (*zensus*, *cubus*, *zenso di zensi*, *cubo di zensi*... – ako bolo bežné v algebre 16. storočia) Descartes používa čísla. Myšlienka aritmetizácie postupnosti mocnín nie je Descartov originálny vynález; použil ju už Chuquet. Na označenie odmocniny Chuquet používal písmeno *R*, podobne ako Regiomontanus, ale rád odmocniny vyjadroval namiesto celého slova pravým horným indexom, takže napríklad $\boldsymbol{R^2}$ **30** znamenalo $\sqrt{30}$. Descartovou zásluhou bolo spojenie tejto Chuquetovej idey aritmetizácie rádu odmocniny so zmenou indexu z pravého horného na ľavý horný index.[13]

VII. Zovšeobecnenie na neceločíselné hodnoty indexu. Aritmetizácia rádu odmocniny umožnila zjednotenie pojmu mocniny a odmocniny. Odmocnina bola pôvodne zavedená ako inverzná operácia mocniny. Pritom ***index n*** bol ako v prípade mocniny x^n, tak aj v prípade odmocniny $\sqrt[n]{x}$ vnímaný ako ***počet*** opakovaní operácie. V priebehu 17. storočia došlo v prácach Wallisa a Newtona k zovšeobecneniu pojmu mocniny na prípad ***neceločíselného*** exponentu. Ako príklad možno uviesť $x^{2,4}$. Číslo 2,4 už nemožno chápať ako index, lebo nemá zmysel tvrdiť, že číslo *x* vynásobíme samé sebou 2,4 krát. To bol zásadný krok, lebo sa ukázalo, že rád odmocniny ***nie je indexom***, t. j. číslom udávajúcim, ***koľkú*** odmocninu máme na mysli. Wallis a Newton objavili súvis medzi umocňovaním a odmocňovaním vo forme $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, teda to, že odmocnina je mocnina „prevráteného rádu". To umožnilo preniesť neceločíselnosť z mocnín aj na odmocniny. Takto môžeme vytvoriť napríklad $\sqrt[2,4]{x}$. Tu číslo 2,4 nehovorí, koľká je to odmocnina (teda koľkokrát musíme toto číslo vynásobiť samé sebou, aby sme dostali *x*), ale iba to, o odmocninu akého rádu ide. Z indexu sa stal parameter (a neskôr sa z parametra zrodil argument).[14]

VIII. Strata identity symbolu. Prepojenie odmocniny a mocniny pomocou vzťahu $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ malo za následok stratu významu znaku pre odmocninu. Ten používame vtedy, keď chceme zvýrazniť určitý aspekt skúmaného vzťahu, ale praktickejšie je pracovať so

[13] Použitie čísel ako indexov označujúcich rád odmocniny, rád derivácie, rád integrálu... je ďalším príkladom zrkadlenia, ktoré sme opísali v bode VII. predchádzajúcej časti. Takéto zrkadlenie nemá v šachu obdobu.

[14] Mohlo by sa zdať, že tento prechod od celočíselného indexu k neceločíselnému je zvláštnosťou odmocniny, ktorá nemôže mať medzi inými symbolmi paralelu. Opak je však pravdou. Podobný posun nastal v prípade derivácie, keď matematici najprv symbol pre deriváciu obohatili o index, ktorý označoval, o koľkú deriváciu ide. Mali sme prvú deriváciu (v prípade rýchlosti), druhú (v prípade zrýchlenia), tretiu, štvrtú... Potom prišiel Abel s myšlienkou neceločíselnej, teda napríklad 2,4-tej derivácie. Zdá sa, že zabudovanie indexu do symbolu a následná premena tohto indexu na parameter je všeobecnou vlastnosťou vývinu matematických symbolov.

symbolom mocniny s racionálnou hodnotou exponentu, t. j. s $x^{\frac{1}{n}}$. Tak sa symbol odmocniny nakoniec stráca v symbolike pre mocniny.

Keď sa z hľadiska uvedených ôsmich aspektov pozrieme na šachovú figúrku, vidíme, že okrem identity nedisponuje ani jedným z nich. Šachová figúrka nemá funkcionalitu (nie je možné aplikovať ju na argument) ani iterativitu (nie je možné aplikovať ju na ňu samu), nemá indikátor rozsahu ani indikátor rádu, nie je možné ju zovšeobecniť či zahrnúť ako špeciálny prípad všeobecnejšej figúrky. Podobne ako v prvej časti aj tu vidíme, že matematická symbolika je nepomerne zložitejší a bohatší systém než šach.

4. Záver. Uviedli sme dve skupiny argumentov, ktoré podľa nás ukazujú, že analógia medzi šachom a matematikou je veľmi obmedzená, až zavádzajúca. Táto analógia sa niekedy formuluje ako ilustrácia pojmu jazykovej hry, pričom sa zdôrazňuje, že matematické symboly rovnako ako šachové figúrky sú určené pravidlami hry. A skutočne, aspekty ako funkcionalita či iterativita symbolu možno na prvý pohľad vnímať ako aspekty konštituované pravidlami používania príslušného symbolu. Existuje tu však zásadný rozdiel medzi šachom a matematikou v tom, že matematické symboly sa postupne vyvíjajú, pričom dochádza k ich premenám a zovšeobecneniu. V prípade odmocniny tento vývin siahal od Regiomontana po Newtona a trval takmer tristo rokov. To, čo sa v tomto období udialo, možno opísať ako proces, v priebehu ktorého sa implicitné pravidlá jazykovej hry stávajú plne explicitnými. Napríklad Regiomontanus označoval mocniny neznámej písmenami *r*, *z* a *c* (od *res*, *zensus* a *cubus*). Identita neznámej však v jeho symbolike bola iba implicitná, teda užívateľ musel vedieť, že ak *r* sa rovná 3, tak *z* sa rovná 9 a *c* sa rovná 27. Je to *implicitné pravidlo*, ktoré symboly neindikujú. S nápadom vyjadriť explicitne identitu neznámej prišiel Viète, keď namiesto *r*, *z* a *c* začal písať *A-longitudo*, *A-plano* a *A-solido*. Tu už je identita neznámej explicitne vyjadrená, teda pravidlo, ktoré bolo pôvodne implicitným pravidlom jazykovej hry, je vyjadrené v jazyku. To je osud väčšiny matematických symbolov – v snahe o jednoznačnosť sa postupne pravidlá používania symbolu zabudovávajú do syntaxe. V tom sa matematika odlišuje od šachu, ako aj od väčšiny jazykových hier.

V počiatočných štádiách rozvoja určitého reprezentačného nástroja (my sme ako ilustráciu zvolili algebru, pričom sme sledovali jej jediný symbol, a to symbol pre odmocninu) sú mnohé pravidlá implicitné, teda dajú sa iba ukázať. Postupne, ako sa pravidlá jazykovej hry stávajú explicitne vyjadrenými, sa aj identita, funkcionalita, iterativita, rozsah i stupeň symbolu stávajú plne explicitnými. Proces zabudovávania formy (teda toho, čo zostáva implicitné a čo sa iba ukazuje, ale čo nie je možné v jazyku vyjadriť) do jazyka je dôležitým aspektom vývinu matematiky. Túto dynamiku sme opísali v knihe *Patterns of Change* na príklade syntetickej geometrie a algebry. Šach nič podobné nepozná, neexistuje v ňom žiadne zabudovávanie formy jazyka do jazyka. Preto je šach ako metafora matematickej symboliky zavádzajúca.

Literatúra

BROWN, J. R. (1999): *Philosophy of Mathematics, an Introduction to the World of Proofs and Picures*. London: Routledge.

CARDANO, G. (1545): *Ars Magna, or the Rules of Algebra*. MIT Press 1968.

COLYVAN, M. (2012): *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

DESCARTES, R. (1637/2010): *Geometria*. Praha: OIKOYMENH.

KVASZ, L. (2008): *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel: Birkhäuser.

KVASZ, L. (2012): *Jazyk a zmena. Ako sme menili jazyk matematiky a ako jazyk matematiky zmenil nás*. Praha: Filosofia.

KVASZ, L. (2013): *Zrod vedy ako lingvistická udalosť. Galileo, Descartes a Newton ako tvorcovia jazyka fyziky*. Praha: Filosofia.

KVASZ, L. (2014): Mathematics and Experience. In: M. C. Galavotti – E. Nemeth – F. Stadler (eds.): European Philosophy of Science – Philosophy of Science in Europe and the Viennese Heritage. *Vienna Circle Institute Yearbook*, 17, Dordrecht: Springer, 117-129.

STIFEL, M. (1544/2007): *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik*. Würzburg: Konigshausen& Neumann.

STRUIK, D. (1969): *A source book in mathematics, 1200-1800*. Cambridge (Mass): Harvard UP.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1980): *A History of Algebra, from al-Khwarizmí to Emmy Noether*. Berlin: Springer.

VIÈTE, F. (1591/1983): *Introduction to the Analytical Art*. Kent: The Kent State University Press.

WITTGENSTEIN, L. (1956/1991): *Bemerkungen uber die Grundlagen der Mathematik*. Suhrkamp, Frankfurt am Main. Český preklad J. Fiala in: *Scientia et Philosophia 5*, Praha 1992.

WITTGENSTEIN, L. (1958/1988): *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Stať vznikla v rámci programu *Fellowship Jana Evangelisty Purkyně* vo Filozofickom ústave AV ČR.

Ladislav Kvasz
Filosofický ústav AV ČR
Jilská 1
11000 Praha 1
Czech Republic
e-mail: ladislavkvasz@gmail.com