

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103004/I/2014/1406810110

**METÓDA MONTE CARLO V TABUĽKOVOM
PROCESORE MICROSOFT EXCEL**

Diplomová práca

2014

Bc. Tomáš Machala

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

**METÓDA MONTE CARLO V TABUĽKOVOM
PROCESORE MICROSOFT EXCEL**

Diplomová práca

Študijný program: Manažérske rozhodovanie a informačné technológie
Študijný odbor: 6258 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Vedúci záverečnej práce: Ing. Marian Reiff, PhD.

Bratislava 2014

Bc. Tomáš Machala

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som záverečnú prácu vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum:

.....

(podpis študenta)

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Ing. Marianovi Reiffovi, PhD. za ochotu, usmerňovanie, odborný dohľad a cenné rady pri vypracovávaní diplomovej práce.

ABSTRAKT

MACHALA, Tomáš: *Metóda Monte Carlo v tabuľkovom procesore Microsoft Excel*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. Vedúci záverečnej práce: Ing. Marian Reiff, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2014, 70 s.

Cieľom záverečnej práce je vytvorenie aplikácie v tabuľkovom procesore Microsoft Excel s využitím programovacieho jazyka VBA. Diplomová práca je rozdelená na 3 kapitoly a obsahuje 16 obrázkov, 1 tabuľku a 2 prílohy. V prvej kapitole je podrobne definovaný pojem simulácia, simulačného modelovania, základné pojmy pravdepodobnosti. Prvá kapitola taktiež obsahuje podrobne popísaný postup generovania náhodných čísel, ich transformáciu a najpoužívanejšie pravdepodobnostné rozdelenia. Druhá kapitola je venovaná momentálnej situácii svetových financií, trendom, zároveň je v nej vysvetlený pojem finančný systém a finančný trh. Tretia a záverečná kapitola obsahuje popísanú aplikáciu vytvorenú v MS Excel a aplikovaný Brownov pohyb, na ktorom je založená simulácia vývoja cien akcií.

Kľúčové slová:

Metóda Monte Carlo, Simulácia, Finančný trh

ABSTRACT

MACHALA, Tomáš: *Monte Carlo method in a spreadsheet Microsoft Excel*. – University of economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operations Research and Econometrics. – Supervisor of the Thesis: Ing. Marian Reiff, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2014, 70 p.

The aim of the thesis is to create an application in a spreadsheet Microsoft Excel with the use of VBA programming language. The thesis is divided into 3 chapters and contains 16 pictures, 1 chart and 1 annexes. The first chapter defines the concept of simulation, simulation modeling and basic components of probability. The first chapter also describes the procedure of generating random numbers, their transformation and the most commonly used probabilistic distribution. The second chapter is dedicated to current situation of global finance, trends and it also includes the explanation of the terms: financial system and financial markets. The third – final chapter contains the described application created in MS Excel and applied Brownian motion, on which the simulation of stock prices is based.

Key words:

Monte Carlo method, Simulation, Financial market

OBSAH

ÚVOD.....	8
1 SIMULAČNÉ METÓDY.....	9
1.1 Analytické a simulačné metódy	11
1.2 Použitie simulačných metód.....	12
1.3 Klasifikácia simulačných modelov	14
1.4 Štruktúra simulačných modelov	15
1.5 Stochastické prvky v simulačných modeloch.....	17
1.6 Základné typy náhodných premenných.....	20
1.7 Momenty a kvantily	22
1.8 Charakteristická funkcia.....	23
1.9 Generovanie náhodných čísel.....	23
1.10 Metódy transformácie náhodných čísel.....	26
1.11 Niektoré používané pravdepodobnostné rozdelenia.....	27
1.11.1 Rovnomerné rozdelenie.....	27
1.11.2 Exponenciálne rozdelenie.....	28
1.11.3 Normálne rozdelenie.....	30
1.11.4 Logaritmicko-normálne rozdelenie	31
1.11.5 Poissonovo rozdelenie	32
1.12 Slabý zákon veľkých čísel.....	35
1.13 Metóda Monte Carlo	36
2 Svetové financie a ich vývoj	42
2.1 Finančný systém.....	46
2.2 Simulácia vývoja cien akcií.....	54
2.2.1 Wienerov proces	55
2.2.2 Zovšeobecnený Wienerov proces	56
2.2.3 Modelovanie ceny akcie	58
3 Simulácia vývoju cien akcií pomocou metódy Monte Carlo	61
Záver	67
Zoznam bibliografických odkazov	68
PRÍLOHA A	70

ÚVOD

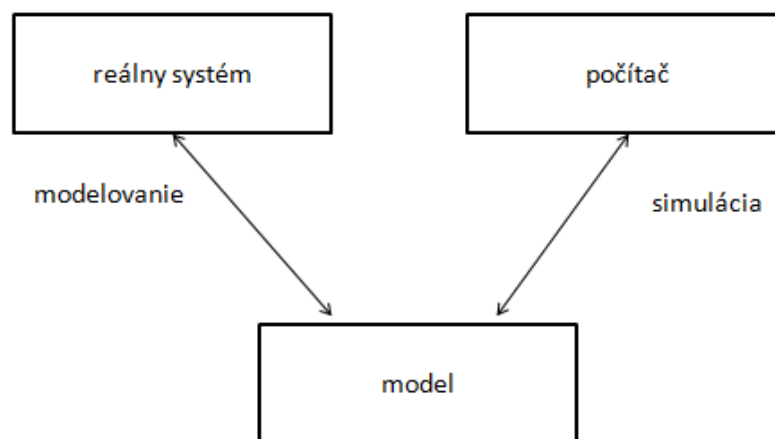
Tabuľkový procesor Excel vytvorený firmou Microsoft dnes má dominantné postavenie na trhu programov tohto typu. Jeho výhoda spočíva v množstve odborov, v ktorých ho môže používateľ využiť. Veľkou prednosťou programu Excel je možnosť programovania makier v programovacom jazyku VBA. Tento programovací jazyk poskytuje používateľom množstvo príležitostí ako zautomatizovať rutinné operácie, sťahovanie dát do programu z internetu a pod. Z tohto dôvodu som sa rozhodol pre vypracovanie tejto témy, na základe čoho som sa zoznámil s programovacím jazykom VBA a programovaním makier. Aplikovanie programovacieho jazyka sa realizovalo na analýze a simulácii cien akcií na finančnom trhu pomocou metódy Monte Carlo.

Finančné trhy sú dneska neoddeliteľnou súčasťou svetových ekonomík. Technologické novinky prinášajú do tohto sektora množstvo inovácií, ktoré skracujú čas na minimum, ktorý je potrebný na realizáciu niektorých procesov. Finančný sektor je úzko spätý s informačno-komunikačnými technológiami, ktoré v dnešnej dobe umožňujú vykonanie miliónov transakcií v reálnom čase v rámci celého sveta. Vhodnou metódou na analýzu vývoja cien akcií sa javí metóda Monte Carlo. Metóda Monte Carlo je numerická, stochastická metóda, čo znamená, že ide o sekvenciu náhodných javov. V dnešnej dobe tieto metódy nachádzajú rozsiahle uplatnenie v mnohých oblastiach, ako operačný výskum, chémia, biológia, medicína, alebo jadrová fyzika, kde existuje celý rad problémov presahujúci rámec možností teoretickej matematiky.

Čitateľ sa v prvej kapitole zoznámí s pojmami simulácia, simulačné modely, základmi pravdepodobnosti, jednotlivými pravdepodobnostnými rozdeleniami a generovaním náhodných čísel. Momentálne trendy a vo svetových financiách si čitateľ ozrejmi v druhej kapitole tento práce, kde je popísaný ako taký finančný systém a finančný trh. Sú v nej popísané aj jednotlivé typy akcií, s ktorými sa obchoduje na finančných trhoch. Záverečná tretia časť práce obsahuje popísanú aplikáciu vytvorenú v tabuľkovom procesore Excel, Brownov pohyb, na ktorom je simulácia cien akcií vykonaná.

1 SIMULAČNÉ METÓDY

Simulačné metódy potenciálne predstavujú jeden z najúčinnějších nástrojov vhodných pre analýzu a racionalizáciu riadenia zložitých procesov a systémov. Základná myšlienka simulačných metód je pomerne jednoduchá, nakoľko vychádza z priameho napodobenia skúmaného systému (reálneho alebo projektovaného). Metodológia simulačných prístupov je založená na poznatkoch štatistiky, teórie pravdepodobnosti, matematiky, programovania a teórie systémov. Niektorí autori uvádzajú, že úspech pri tvorbe simulačných modelov záleží rovnako na vede ako aj umení, nakoľko ide o tvorivú prácu. Podmienkou pre účelné využitie akejkoľvek kvantitatívnej metódy v oblasti praktického rozhodovania a riadenia je pochopenie základných predpokladov a východísk metódy a zhodnotenia možností jej použiteľnosti v konkrétnych prípadoch. Existuje viacero rozličných definícií pojmu simulácia, avšak nám postačia nasledovné dve. Podľa Shannona je simulácia proces tvorby modelu reálneho systému a vykonávania experimentov s týmto modelom za účelom dosiahnutia lepšieho pochopenia správania sa študovaného systému alebo za účelom posudzovania rôznych variant činností systému. Užšia a pre použitie v ekonomickej problematike vhodnejšia je definícia od Naylora, ktorý definuje simuláciu ako numerickú metódu, ktorá vychádza z experimentovania s matematickými modelmi reálnych systémov. Reálnym systémom z obr. 1 je chápaná určitá časť reálneho sveta, ktorý je predmetom záujmu. Tento systém môže byť prirodzený alebo umelý, už existujúci alebo práve iba projektovaný. Reálny systém je v tejto koncepcii iba zdrojom dát o správaní sa systému. Modelom rozumieme jednoznačný návod na vytváranie dát rovnakého charakteru, ako sú dáta poskytované reálnym systémom. Hoci model sám o sebe žiadne dáta negeneruje, hovorí sa často o dátach poskytovaných modelom, o správaní sa modelu. Štruktúra modelu je konkrétny tvar súboru pravidiel na vytváranie dát. Model konštruje objekt skúmania alebo riadenia tak, aby zobrazil charakteristiky objektu (vlastnosti, vzájomné väzby, štruktúrne a funkčné parametre a pod.), podstatné pre cieľ skúmania. [2, 3, 20]



Obr. 1. Vzťah medzi reálnym systémom, modelom a počítačom [3]

Pri vzťahu medzi systémom a modelom (vzťah modelovania) je veľmi dôležitým hľadiskom otázka validity modelu, to znamená ako dobre daný model reprezentuje reálny systém. Validita je posudzovaná podľa miery dosiahnutej zhody medzi dátami získanými na reálnom systéme s dátami generovanými modelom. Pokiaľ model reprodukuje dáta z reálneho systému, hovoríme že je replikatívne validný. Ak model spĺňa silnejšiu podmienku a poskytuje dáta ešte pred reálnym systémom, hovoríme že je prediktívne validný. Model je štruktúrne validný, pokiaľ je schopný nielen reprodukovat' pozorované dáta, ale aj spoľahlivo odrážať spôsob činnosti reálneho systému. [3, 20]

Pre simuláciu je dôležité presné vymedzenie dynamických systémov – ide o systémy, ktoré sú časovo závislé. V prvom rade je treba vymedziť, v ktorých momentoch môže systém existovať. Zväčša sa uvažuje o existencii systému v danej množine T , ktorá je buď intervalom (alebo zjednotením intervalov) reálnych čísel alebo spočítateľnou množinou izolovaných bodov. Dynamický atribút je usporiadaná dvojica $a = \langle n, f \rangle$, kde n , je istý text a f je zobrazenie definované na karteziánskom súčine $W \times T$, kde W je nejaká neštandardná množina (prvky sú napríklad reálne objekty) a T neprázdna množina reálnych čísel. W budeme nazývať oblasťou dynamického atribútu a T jeho existenciou. Dynamickou triedou nazveme usporiadanú množinu, trojicu $\langle P, T, G \rangle$, kde P je nejaká neštandardná množina, $T \subset E_1$ (T je podmnožina reálnych čísel) a G je množina dynamických atribútov, ktorých oblasti sú P a existencie T .

Množinu P budeme nazývať dynamické triedy, T ich existenciami a G charakteristikou triedy. Dynamický systém je potom zavedený tak, aby spĺňal nasledujúce podmienky:

- čas je chápaný v zmysle klasickej fyziky
- prvok, ktorý opustí pole dynamického systému, sa následne do neho už nemôže vrátiť
- počet atribútov v charakteristike každej triedy sa v čase nemení, nemenia asi ani ich názvy a typy
- v priebehu existencie dynamického systému nemôžu vzniknúť nové triedy.

Pri formálnom zavedení dynamických systémov sú vyššie uvedené podmienky splnené. Ak existuje k určitému systému iný systém, ktorého prvky sa správajú podobne, hovoríme o modeli. Musí existovať zobrazenie, ktoré prevádza a transformuje prvky modelovaného systému na prvky modelujúceho sa systému, a zobrazenie, ktoré prevádza vlastnosti jedného systému na vlastnosti (atribúty) druhého systému. Hovoríme o prvkovej a atribútovej zložke modelu. Simulačný model je dynamický model, v ktorom dochádza k výskytu javov v rovnakom poradí ako v modelovanom systéme. Model sa v tomto kontexte chápe ako istý vzťah medzi dvoma dynamickými systémami Z_1 a Z_2 , kde Z_1 je simulovaným systémom a Z_2 systémom simulujúcim. [2, 3, 20]

1.1 Analytické a simulačné metódy

Rozdiely medzi analytickým a simulačným prístupom je možné popísať z viacerých hľadísk. Analyticky riešené modely sa dajú často chápať ako istá realizácia alebo konkretizácia určitej teórie, pričom pri simulačných modeloch je prvotné modelové zobrazenie vlastnosťou skúmaného systému. Inak povedané, pri analyticky riešených modeloch sa snažíme vykonať priradenie definovaného systému na základe reality k určitému riešiteľnému (analyticky, numericky) modelu, pričom pri simulačných modeloch sa model vytvára spôsobom, pri ktorom nekladíme dôraz na to, či bude model analyticky riešiteľný. Pri tvorbe modelu sa využívajú hlavne dva typy informácií:

- poznatky o modelovanom systéme
- dáta získané z modelovaného systému

Analytické metódy riešenia modelov poskytujú výsledky obvykle vo forme funkčných vzťahov, v ktorých ako premenné vystupujú parametre modelov, takže riešenie špecifického modelu získame dosadením konkrétnych hodnôt do spomenutých vzťahov, teda analytické metódy poskytujú presné, exaktné riešenie. Numerické metódy poskytujú výsledky v čisto numerickej forme, takže pri každej zmene parametra je nutné zopakovať postup riešenia, čo znamená, že numerické metódy získali omnoho väčší význam pri príchode výpočtovej techniky. Simulačné metódy sa od iných metód líšia spôsobom získania riešenia, ktoré je istou transformáciou hodnôt, ktoré boli odporované z chodu modelu, pričom toto pozorovanie je obvykle zahrnuté do samotného simulačného modelu, ktoré následne poskytuje výsledky na základe informácií zhromaždených zo zmien stavov v priebehu modelového času, ktorý je celkom oddelený od času reálneho, v ktorom prebieha výpočet. V simulačných modeloch sa veľmi často vyskytujú pravdepodobnostné vzťahy. Analytické riešenie pravdepodobnostných modelov je zväčša náročnejšie ako riešenie deterministických modelov. V simulačných modeloch žiadny podstatný rozdiel v náročnosti získania riešenia pre deterministické a pravdepodobnostné prípady neexistuje, nakoľko pravdepodobnostné prvky sú v simulačných modeloch reprezentované špeciálnymi algoritmami, ktoré generujú náhodné veličiny. Jediný a podstatný rozdiel je iba vo výsledkoch, nakoľko výsledky pravdepodobnostných modelov je potrebné považovať za hodnoty náhodných veličín, ktoré boli umelo získané, takže ich spracovanie treba riešiť metódami matematickej štatistiky. [2, 3, 20]

1.2 Použitie simulačných metód

Tvorba modelov je neoddeliteľnou súčasťou metodológie počítačovej simulácie. Modely rôzneho charakteru sa používajú pre jeden alebo viacero z nasledujúcich cieľov:

- systemizácia myšlienkových pochodov,
- zľahčenie komunikácie medzi ľuďmi,
- výchova a výcvik,
- predikácia správania modelovaného systému,
- experimenty (ako náhrada za experimenty s modelovaným systémom).

Simulácia sa používa ako nástroj k dosiahnutiu niektorého z nasledujúcich cieľov (ktoré sa do istej miery prekrývajú):

- pochopenie reálneho (modelovaného) systému – napr. v zmysle tvorby a overovania hypotéz o vnútornej, nedostupnej štruktúre systému,
- parametrické skúmanie reálneho systému (aký vplyv majú zmeny jednotlivých parametrov na efektivitu systému), významným príkladom parametrického prístupu je optimalizačný prístup,
- náhrada za experimenty s reálnym systémom (táto forma realizácie ponúka efektívnejšie riešenie pokusov, pokiaľ je experimentovanie s reálnym systémom zdĺhavé, nebezpečné alebo finančne nákladné).

Ďalšie pohľady, ktoré môžu pomôcť pri rozhodovaní v situáciách, v ktorých je vhodné použiť simulácie sú napr. tieto:

- simulácia umožňuje štúdiu, ktorá skúma správanie sa systému (prostredníctvom jeho modelov) v reálnom, zrýchlenom alebo spomalenom čase. V ekonomickej problematike je najviac prospešná možnosť zrýchleného času, nakoľko väčšina ekonomických procesov je relatívne pomalá a vyžaduje dlhú dobu čakania, od okamihu zavedenia určitého zásahu až po okamih, keď je možné zásah objektívne zhodnotiť,
- simulácia je prospešná aj pri overovaní riešenia získaného inou nezávislou cestou (napríklad analytické riešenie založené na zjednodušených predpokladoch),
- analytické riešenie modelu síce existuje, ale je zložité a presahuje matematické schopnosti riešiteľského kolektívu,
- pozorovanie činností simulačných modelov môže viesť k lepšiemu pochopeniu reálneho systému. V mnohých prípadoch pri vytváraní simulačného modelu dochádza ku konfrontácii pohľadov z rôznych odvetví (matematika, štatistika, programovanie), čo môže byť v konečnom dôsledku prospešné v podobe návrhov na zlepšenie riadenia a štruktúry modelovaného systému,
- simulácia obvykle umožňuje komplexnejší pohľad na študovaný systém. Veľakrát sa stáva, že núti tvorcov a používateľov simulačného modelu prekročiť hranice svojej odbornosti, pričom sa na skúmaný systém musia pozrieť všestranným pohľadom so zreteľom na skúmaný cieľ. [3]

Simulačné metódy oplývajú aj negatívnymi stránkami, na ktoré je tiež dôležité poukázať. Medzi hlavné patria hlavne tieto:

- simulácia je pomerne nákladným prostriedkom skúmania systémov.

Okrem toho je výstavba použiteľného systému pomerne zdĺhavá, nakoľko sa nejedná a priamočiary proces a väčšinou je potrebné vytvoriť niekoľko variant modelu.

- simulácia je numerická metóda, takže riešenie určitého problému nerieši problémy s podobnou charakteristikou, ako tomu býva u niektorých analytických metódach, kde výsledné hodnoty bývajú funkciou jedného alebo viacerých všeobecných parametrov.
- výsledky získané zo stochastických simulačných modelov sú hodnoty náhodných veličín
- výsledky vyžadujú dôkladné štatistické spracovanie
- ide iba o aproximáciu skutočných hodnôt

Z uvedeného vyplýva, že na simuláciu je treba hľadiť ako na jednu z možných variant, ktoré je možné využiť pri riešení daného problému. Rozhodnúť, v ktorých situáciách je najvhodnejšie použiť jednotlivé metódy nebýva jednoduché a preto je potrebné pri rozhodovaní brať do úvahy nasledujúce otázky:

Máme reálne predpoklady na to, že daný problém vyriešime simuláciou?

Ak áno, bude riešenie dostatočne presné?

Nie je možné rovnakého stupňa presnosti (prípadne rovnakého stupňa dosiahnutia cieľa) nadobudnúť inou, efektívnejšou metódou (analytické postupy, heuristické postupy, približné metódy a pod.)?

Nebudú náklady na riešenie vzhľadom na predpokladaný efekt príliš vysoké?

Sme schopní vytvoriť a využiť užitočný model v požadovanom čase?

Budú výsledky v takom tvare a forme, aby ich mohol použiť (napr. aby im dôveroval) ten, komu sú určené?

Odpovedať na vyššie spomínané otázky, a otázky podobné, nie je jednoduché. Ak sa ale rozhodneme pre použitie simulačných metód, je potrebné si tieto otázky stále pokladať, a to aj v čase tvorby modelu a prípadne sa včas zastaviť, pokiaľ sa zistí, že simulácia nie je vhodne zvolená metóda pre riešenie problému. [2, 3, 20]

1.3 Klasifikácia simulačných modelov

Simulačné modely možno rozdeliť podľa mnohých pohľadov. Jedným z najdôležitejších hľadísk je rozdelenie podľa spôsobu zachytenia časového faktoru v modeli. Rozdelenie je nasledovné:

- modely so spojitým časom, kde časová premenná môže nadobúdať všetky hodnoty z určitého časového intervalu,
- modely s diskretným časom, kde časová premenná môže nadobúdať iba hodnoty, ktoré sú prvkami dopredu vymedzenej spočítateľnej množiny (napr. prirodzené čísla).

Obdobne je možné rozdelenie podľa charakteru množiny hodnôt stavových veličín:

- modely so spojitými zmenami stavu,
- modely s diskretnými zmenami stavu

Na základe vyššie uvedených hľadísk je možné modely rozdeliť do štyroch hlavných kategórií, ktorým zodpovedá špecifický matematický aparát, použitý pri deklarovaní návodov na generovanie dát.

Tab. 1. Rozdelenie modelov

		Čas	
		spojitý	diskretný
Stavy	spojité	diferenciálne rovnice	diferenčné rovnice
	diskrétny	diskrétny udalosti	Markovove reťazce, diskrétny automaty

Zdroj: [3]

Modely sa často delia na modely deterministické a stochastické (pravdepodobnostné). Toto rozdelenie sa vykonáva na základe toho, či sú v modeli zahrnuté náhodné veličiny. Pri simulačných modeloch nie je toho hľadisko príliš dôležité, nakoľko náhodné veličiny sú v modeloch vyjadrené pomocou deterministických algoritmov, ktoré generujú ich hodnoty. Rozdiely medzi deterministickými a stochastickými modelmi sa prejavujú až vo fáze spracovania, vyhodnocovania a interpretácii výsledkov, pretože výsledky získané na základe stochastických modelov je potrebné považovať za hodnoty náhodných veličín. [2, 3]

1.4 Štruktúra simulačných modelov

V simulačných modeloch je možné identifikovať nasledujúce základné prvky:

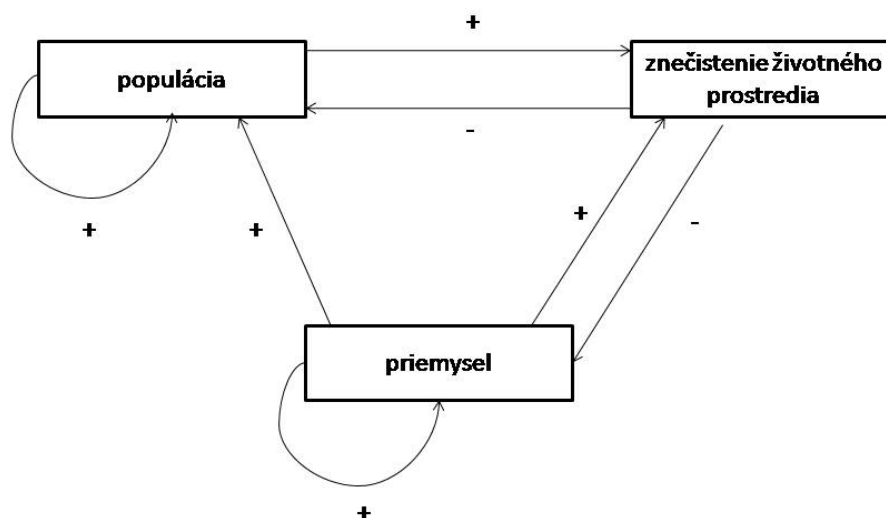
1. komponenty,
2. premenné (exogénne a endogénne),

3. parametre
4. funkčné vzťahy.

Komponentmi modelu rozumieme modelové zobrazenie jednotlivých častí modelovaného systému. Tieto časti spolu s väzbami dokopy tvoria uvažovaný systém modelu. Voľba komponent modelu väčšinou vyplýva z povahy modelovaného systému a z cieľu, ktorý modelom sledujeme, pretože ním je určená vhodná rozlišovacia úroveň modelu. Premenné sprostredkovávajú väzby medzi komponentmi navzájom a väzby komponent (alebo systému ako celku) s relevantným okolím. Parametre modelu môžeme chápať ako premenné, ktoré majú svoje hodnoty fixované a na tieto hodnoty nemajú vplyv žiadne endogénne ani exogénne premenné. Zmeny parametrov môžu byť predmetom experimentovania, ktorého cieľom je nájsť napr. optimálne hodnoty parametrov systému. Funkčné vzťahy určujú spôsob vzájomného ovplyvňovania premenných a ich pomocou sa zachycujú pravidlá vývoja modelu v čase apod.

Základy statickej štruktúry simulačných modeloch priblížime na príklade, ktorý je zjednodušením Forresterovej koncepcie tvorby komplexných „modelov svetového vývoja“. V onom modeli budeme rozlišovať:

1. komponenty – populácia, priemysel, znečistenie životného prostredia
2. premenné – hustota zaľudnenia, stupeň industrializácie, stupeň znečistenia životného prostredia atd.
3. funkčné vzťahy:
 - a. hustota populácie je kladne ovplyvňovaná stupňom industrializácie a hustotou populácie v minulom období a záporne úrovňou znečistenia životného prostredia
 - b. stupeň industrializácie je pozitívne ovplyvňovaný stupňom industrializácie v minulom období a negatívne ovplyvňovaný stupňom znečistenia okolia
 - c. úroveň znečistenia prostredia je pozitívne ovplyvňovaná rastom hustoty zaľudnenia a rastom stupňa industrializácie. [3]



Obr. 2 Forresterov model svetového vývoja [3]

1.5 Stochastické prvky v simulačných modeloch

Modely systémov, ktorých práca je ovplyvňovaná náhodnými faktormi, zväčša využívajú hodnoty náhodných hodnôt rôznych typov. Tieto veličiny je možné v niektorých prípadoch zaznamenať z reálneho sveta a následne ich použiť ako časť vstupných dát simulačného modelu. Nakoľko pre bežné simulačné modely je potrebných tisíc až desiatky tisíc takýchto hodnôt je vhodnou voľbou určiť pravdepodobnostné zákonitosti, teda určíme typ a parametre pravdepodobnostného rozdelenia na základe pozorovaných údajov, ktoré čo najviac zodpovedajú dostupným údajom. Následne si simulačný program generuje sám tieto hodnoty. Na základe tohto dôvodu je potrebné sa zaoberať nielen algoritmami, ktorých aplikáciou je možné získať nielen údaje pre najčastejšie používaných spojitých a diskretných náhodných veličín, ale aj realizáciou náhodných výberov, permutáciou prvkov a pod. Zaujímavou skutočnosťou je, že väčšinu hodnôt náhodných premenných je možné získať deterministickou transformáciou veľmi jednoduchej náhodnej veličiny – rovnomerným rozdelením na intervale (0,1). [2, 3]

Náhodné čísla rozumieme nezávislé hodnoty rovnomerného rozdelenia na intervale (0,1), alebo nezávislé náhodné hodnoty spojitej náhodnej veličiny, ktoré má hustotu pravdepodobnosti

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < 1 \\ = 0 \quad \text{inak.}$$

Distribučná funkcia F tejto náhodnej veličiny je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0, \\ x & \text{pre } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{pre } x \geq 1. \end{cases}$$

Rovnomerné rozdelenie na intervale $(0,1)$ označme $R(0,1)$ a jeho hodnoty r . Termínom náhodné dekadické číslice označme nezávislé hodnoty diskkrétnej náhodnej veličiny X , pre ktorú platí

$$P(X = i) = 1/10 \quad \text{pre } i = 0, 1, \dots, 9.$$

Analogicky je možné zaviesť pojem náhodné číslice v iných číselných sústavách, napríklad binárne, hexadecimálne náhodné číslice a pod.

Pre naše účely je celkom ekvivalentné, ak disponujeme náhodnými číslami alebo postupnosťami náhodných čísel, nakoľko je ľahké dokázať, že ak sú X_i nezávislé náhodné veličiny s vyššie uvedeným rozdelením, potom vtedy a len vtedy má

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 10^{-i}$$

rozdelenie $R(0,1)$ s hustotou vyššie spomenutou hustotou pravdepodobnosti. Inak povedané, pomocou predchádzajúceho vzťahu je možné vytvoriť náhodné číslo a naopak jednotlivé rady náhodného čísla sú náhodnými číslami. Tieto informácie nachádzajú uplatnenie v testoch náhodnosti a aj v niektorých aplikáciách. K získavaniu hodnôt v šestkovej súprave by sme mohli využiť hraciu kocku, ktorá by mala na stenách číslice 0, 1, ..., 5. Pri získavaní čísel pre binárnu sústavu môžu slúžiť nezávislé realizácie náhodných pokusov s dvoma rovnakými pravdepodobnostnými výsledkami, napríklad hody mincou. Jednou z mnohých spôsobov ako získať náhodné čísla pre riešenie problémov s malým rozsahom je možné použiť tabuľky náhodných čísel, ktorých bolo vytvorená celá rada, napríklad Tippetové alebo RAND Corp. Problémom pri použití tabuliek náhodných čísel môže byť ich rozsah. Ďalšou možnosťou je použitie fyzikálnych generátorov náhodných čísel, ktorých tvorba spočíva v technickom prepojení s počítačom, ktoré vygenerované čísla používa. Podstata fyzikálnych generátorov spočíva v registrácii charakteristík určitých pochodov, ktoré majú na základe doterajších fyzikálnych znalostí a vzhľadom na uvažovaný komplex kontrolovaných podmienok náhodný charakter. Fyzikálne generátory disponujú značným množstvom nedostatkov. Najdôležitejším je to, že nie je možné postupnosť

poskytovaných náhodných čísel reprodukovat', nakoľko fyzikálny proces nie je pod takou kontrolou, ktorá by umožňovala jeho identické opakovanie v budúcnosti. V simulačných modeloch sú v drvivej väčšine využívané aritmetické algoritmy, ktoré vytvárajú náhodné čísla pomocou jednoduchých rekurentných výpočtov, v ktorých nasledujúce vygenerované číslo deterministicky závisí na jednom alebo viacerom predchádzajúcich čísel. Ide o čísla, ktoré sú „presne vypočítané“, to znamená že z rovnakých počiatkových hodnôt dostaneme vždy rovnakú postupnosť náhodných čísel. Takže takéto čísla na základe svojho vzniku nie sú vôbec náhodné, preto sa nazývajú pseudonáhodné čísla. V súčasnej dobe však existujú algoritmy, ktoré tento podstatný nedostatok odstránili a splňajú všetky predpoklady generovania náhodných čísel, inak povedané, vykonaním viacerých štatistických testov nie je možné zamietnuť hypotézu, že ide o postupnosť nezávislých hodnôt rozdelenia $R(0,1)$. Náhodné čísla sa okrem simulačných modelov používajú aj v nasledujúcich oblastiach:

- numerická matematika – celý rad algoritmov využíva tej možnosti, že akonáhle sa nám naskytne väčšie množstvo rovnocenných možností pokračovania vo výpočte, zväčša sa vyberá jedna z možností náhodne. Metóda Monte Carlo je na realizácii náhodných pokusov priamo založená;
- programovanie a analýza algoritmov – generátory náhodných čísel môžu byť použité ako prostriedok tvorby súborov dát pre overovanie programového vybavenia, pokiaľ reálne údaje ešte nie sú k dispozícii. Takisto je možné náhodné dáta použiť k porovnaniu konkurujúcich si algoritmov či programov;
- výberový proces – náhodné čísla je možné použiť k počítačovej realizácii náhodných výberov zo základných súborov;
- rozhodovanie – napríklad pri teórii hier alebo pri štatistickom rozhodovaní majú optimálne návody na rozhodovanie pravdepodobnostný charakter, napríklad pri zmiešanej stratégii v maticových hrách, takže k realizácii takýchto postupov je potrebný nejaký takýto mechanizmus, nakoľko človek nie je vhodný generátorom náhodných čísel pri generovaní komplikovaných náhodných veličín. Niektoré smery ako umelá inteligencia, robotika, heuristické metódy taktiež využívajú princíp realizácie a vyhodnotenia náhodných rozhodnutí;
- kódovanie správ – pri dešifrovaní kódovaných správ;
- overovanie znalostí, testy – bežne sa využívajú programy, ktoré generujú príklady z matematiky, štatistiky, lineárneho programovania, štruktúrovanej analýzy,

účtovníctva apod., takže môžu slúžiť ako nevyčerpatel'ná zbierka príkladov. V súvislosti s interaktívnym využívaním výpočtovej techniky sa pre podobné smery použitia počítačov vo vzdelávaní otvárajú široké možnosti uplatnenia. Jedným z podobných smerov je vývoj manažérskych hier, ktoré sú taktiež založené na vytváraní náhodných podmienok, na základe ktorých sa účastníci musia vykonávať rozhodnutia o vedení firmy. V takýchto hrách sa často vyskytujú náhodné a nepredvídateľné situácie. [2, 3, 20]

1.6 Základné typy náhodných premenných

Náhodná premenná X sa nazýva diskretná, ak existuje postupnosť reálnych čísel $\{x_i\}$ a postupnosť nezáporných reálnych čísel $\{p_i\}$ taká, že

$$P(X = x_i) \text{ a } \sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1$$

Diskretná náhodná premenná X sa nazýva integrovateľnou, ak sa rad $\sum_i x_i p_i$ (konečný alebo nekonečný) konverguje absolútne. Stredná hodnota integrovateľnej, diskretnéj náhodnej premennej X je číslo

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

Distribučná funkcia diskretnéj premennej X má tvar

$$F(X) = P(\{\omega; X(\omega) < x\}) = \sum_{i; x_i < x} P(\{\omega; X(\omega) = x_i\})$$

Distribučná funkcia diskretnéj náhodnej premennej je jednoznačne určená postupnosťou $\{p_i\}$, kde

$$p_i = P(\{\omega; X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i)$$

Je to schodovitá funkcia, má skoky v bodoch $x_1, x_2, \dots$ a je konštantná na intervale (x_i, x_{i+1}) . Skok v bode x_i má veľkosť $p_i = P(X = x_i)$.

Náhodná premenná X sa nazýva absolútne spojitá, ak existuje taká (na R) nezáporná integrovateľná funkcia f , že pre všetky $x \in R$ platí

$$F(x) = P(\{\omega; X(\omega) < x\}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

Funkciu f nazývame hustota. Absolútne spojitú náhodnú premennú X nazývame integrovateľnou, ak existuje integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx$.

Stredná hodnota integrovateľnej, absolútne spojitaj náhodnej premennej X je číslo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Všeobecne sa stredná hodnota náhodnej premennej X definuje pomocou integrálu podľa pravdepodobnosti.

Strednou hodnotou náhodnej premennej X nazývame číslo

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_R xdF(x)$$

Kde F je distribučná funkcia X , ak existuje aspoň jeden z uvedených integrálov existuje.

Vlastnosti strednej hodnoty náhodnej premennej:

- a) nech náhodná premenná X je integrovateľná (t.j. existuje jej stredná hodnota), $c \in R$. Potom je aj cX integrovateľná a platí

$$E(cX) = cE(X)$$

- b) Nech X, Y sú integrovateľné náhodné premenné. Potom je aj súčet $X + Y$ integrovateľná náhodná premenná a platí

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- c) Ak Y je nezáporná, integrovateľná náhodná premenná, tak $E(X) \geq 0$.

- d) Nech X, Y sú integrovateľné náhodné premenné, $X \geq Y$, potom $E(X) \geq E(Y)$.

Druhou významnou charakteristikou náhodnej hodnoty je rozptyl. Rozptyl (disperzia) náhodnej premennej charakterizuje rozptyl hodnôt náhodnej premennej okolo jej strednej hodnoty.

Nech X je integrovateľná náhodná premenná. Ak je aj náhodná premenná $(X - E(X))^2$ integrovateľná, tak číslo

$$D(X) = E\{(X - E(X))^2\}$$

nazývame disperziou (rozptylom) náhodnej premennej X . Číslo $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ sa nazýva smerodajná odchýlka. [9]

Vlastnosti rozptylu náhodnej premennej:

- a) Nech X je integrovateľná diskretná náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $x_1, x_2, \dots$ s pravdepodobnosťou $p_1, p_2, \dots$. Potom X má rozptyl $D(X)$ práve vtedy, keď rad

$$\sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$$

konverguje. Pritom

$$D(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$$

- b) Nech X je integrovateľná absolútne spojitá náhodná premenná s hustotou f .
Potom má X rozptyl práve vtedy, keď existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

- c) Integrovateľná náhodná premenná X má rozptyl práve vtedy, keď je náhodná premenná X^2 integrovateľná. Pritom platí

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

[13]

1.7 Momenty a kvantily

Stredná hodnota, ktorú sme definovali v predchádzajúcej časti textu je špeciálnym prípadom skupiny parametrov, ktoré nazývame momentmi.

Ak X^k , k je prirodzené číslo, je integrovateľná náhodná premenná, tak číslo

$$v_k = E(X^k)$$

Nazývame k -tým začiatočným momentom náhodnej premennej X , a číslo $E(|X|^k)$ k -tým absolútnym momentom.

Ak X a $(X - E(X))^k$ sú integrovateľné náhodné premenné, tak číslo

$$\mu_k = E\{(X - E(X))^k\}$$

Nazývame k -tým centrálnym momentom a číslo

$$\mu'_k = E\{|X - E(X)|^k\}$$

k -tým centrálnym absolútnym momentom náhodnej premennej X .

Výraz

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$$

nazývame koeficientom asymetrie alebo šikmost'ou náhodnej premennej X , výraz

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{D^2(X)}$$

nazývame koeficientom špicatosti alebo excesom náhodnej premennej.

Ďalšou skupinou mier polohy môžeme odvodiť z kvantilovej funkcie, ktorá je inverznou funkciou k distribučnej funkcii $F(X) = P(X < x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. Ak $F(x)$ je rýdzo rastúca a spojitá funkcia, tak k nej inverzná funkcia $F^{-1}(u)$, $0 < u < 1$ sa nazýva

kvantilovou funkciou. Ak X je diskretná náhodná premenná, tak položíme $F^{-1}(u) = x$ kde x je hodnota pre ktorú platí $P(X < x) < u \leq P(X \leq x)$.

Nech $F(x)$ je ľubovoľná distribučná funkcia. Potom kvantilovú funkciu $F^{-1}(u)$ definujeme predpisom

$$F^{-1} = \inf\{x; F(x) \geq u\}, 0 < u < 1$$

Hodnotu $F^{-1}(u)$ v bode u nazývame u -tý kvantil náhodnej premennej X . Pre niektoré hodnoty u je zavedené aj špeciálne pomenovanie, napríklad $F^{-1}(\frac{1}{2})$ je medián. [9, 11]

1.8 Charakteristická funkcia

Nech F je distribučná funkcia náhodnej premennej X . Charakteristickou funkciou náhodnej premennej X nazývame komplexnú funkciu reálnej premennej, definovanú rovnosťou

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

Keďže funkcia $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$ je spojitá a ohraničená na $\mathbb{R}$, Lebesgueov-Stieltjesov integrál existuje a je ohraničený. [9]

Ak náhodná premenná X nadobúda hodnoty x_i s pravdepodobnosťami $p_j = P(X = x_j), j = 1, 2, \dots$, tak charakteristická funkcia má tvar

$$\varphi(t) = \sum_j e^{itx_j} P(X = x_j)$$

Ak existuje hustota f náhodnej premennej X , ktorej distribučná funkcia je F , tak charakteristickú funkciu φ náhodnej premennej môžeme vyjadriť v tvare

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

[13]

1.9 Generovanie náhodných čísel

Historicky prvou metódou na získavanie náhodných čísel využitím aritmetických operácií je von Neumannova metóda prostredných radov druhej mocniny, ktorá vznikla v roku 1946. Princíp tejto metódy bol jednoduchý a pracoval nasledovne:

- zvolí sa vhodné počiatočné číslo x_0 , ktoré je zobrazené na k dvojkových miestach
- z počiatočného čísla sa vypočíta jeho druhá mocnina x_0^2 , ktorá je zobrazená na $2k$ miestach
- vyberie sa prostredných k bitov z výpočtu x_0^2 a považuje sa za ďalší prvok postupnosti, teda za x_1 , s ktorým sa predchádzajúci postup opakuje, teda vypočíta sa jeho druhá mocnina a zaznamená sa prostredných k bitov

Von Neumannova metóda mala množstvo nedostatkov, pre väčšinu počiatočných hodnôt sa vygenerované rady čísel pomerne skoro opakovali, metóda nespĺňala niektoré štatistické testy a bola pomerne pomalá.

Lehmerov princíp generovania pseudonáhodných čísel zavedený v roku 1948, ktorý patrí medzi lineárne kongruenčné generátory a je dodnes využívaný mnohými generátormi je možné vyjadriť vzťahom

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c(\text{mod } m), n \geq 0,$$

kde x_0, a, c, m sú vhodne zvolené čísla.

Pre pochopenie vzťahu je nutné uviesť základné informácie o kongruencii. Dve celé čísla sú kongruenčné podľa modulu m (alebo modulo m), kde m je taktiež celé číslo, zároveň $m \neq 0$, pokiaľ ich rozdiel je deliteľný číslom m . Platnosť tejto vlastnosti vyjadrujeme zápisom

$$a \equiv b(\text{mod } m).$$

Je ľahko dokázateľné, že platnosť vzťahu $a \equiv b(\text{mod } m)$ je ekvivalentné tomu, že zvyšky po delení číslom m sú pre čísla a, b rovnaké. Vzťah $a \equiv b(\text{mod } m)$ môže predstavovať iné zavedenie rovnosti na množine celých čísel, ako je bežné, nakoľko takto zvolená rovnosť spĺňa axiómy rovnosti R_0, R_1, R_2, R_3 :

R_0 : Pre každé dve čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov $a = b, a \neq b$.

R_1 : Reflexívnosť. Pre každé číslo a platí $a = a$.

R_2 : Symetrickosť. Ak platí $a = b$, potom taktiež platí $b = a$.

R_3 : Tranzitívnosť. Ak platí $a = b, b = c$, potom platí $a = c$.

Pri zadanom m sa množina všetkých celých čísel rozpadá na $|m|$ podmnožín tak, že v jednej podmnožine sú práve všetky čísla spolu kongruentné $\text{mod } m$. Tieto podmnožiny nazývame zvyškové triedy podľa modulu m . Ak je napríklad $m = 2$, potom rozdelenie celých čísel na zvyškové triedy predstavuje bežné rozdelenie na párne

a nepárne čísla. Kvôli podrobnejšej analýze vzťahu $x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{m}, n \geq 0$, je možné predchádzajúci vzťah prepísať do ekvivalentného vzťahu

$$x_{n+1} = ax_n + c - m \left\lfloor \frac{ax_n + c}{m} \right\rfloor, \quad n \geq 0,$$

kde $[y]$ je celá časť čísla y .

Jednotlivé prvky postupnosti $\{x_n\}$ získavané pomocou predchádzajúceho vzťahu sú zvyšky po delení číslom m , takže

$$0 \leq x_n \leq m - 1, \quad x_n \text{ celé.}$$

Transformáciou čísel x_n na hodnoty r_n ležiace na intervale $(0,1)$ (resp. $[0,1)$) dostaneme delení

$$r_n = \frac{x_n}{m}.$$

Ak označíme celú časť podielu vo vzťahu $x_{n+1} = ax_n + c - m \left\lfloor \frac{ax_n + c}{m} \right\rfloor, \quad n \geq 0$, symbolom k_{n+1} , teda

$$k_{n+1} = \left\lfloor \frac{ax_n + c}{m} \right\rfloor, \quad n \geq 0,$$

potom pre prvky postupnosti x_n postupne dostávame vzťahy:

$$x_1 = ax_0 + c - mk_1$$

$$x_2 = a^2x_0 + ac - amk_1 + c - mk_2$$

$$\begin{aligned} x_3 &= a^3x_0 + a^2c - a^2mk_1 + ac - amk_2 + c - mk_3 \\ &= a^3x_0 + c(1 + a + a^2) - m(k_3 + k_2a + k_1a^2) \end{aligned}$$

...

$$x_n = a^n x_0 + c(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) - m(k_n + k_{n-1}a + \dots + k_1a^{n-1}),$$

alebo

$$x_n = a^n x_0 + c \frac{a^n - 1}{a - 1} \pmod{m}.$$

Z predchádzajúceho vzťahu je celkom zrejmé, že pri daných číslach a, c, m je postupnosť $\{x_n\}$ určená počiatočným číslom x_0 . Štvorica čísel (a, c, m, x_0) teda plne určuje všetky vlastnosti postupnosti $\{x_n\}$ a tým aj vlastnosti postupnosti náhodných čísel $\{r_n\}$. Ak je $c = 0$, potom sa generátor založený na vzťahu $x_{n+1} \equiv ax_n \pmod{m}, n \geq 0$, nazýva multiplikatívny kongruenčný generátor, ak je $c \neq 0$, potom ide o zmiešaný kongruenčný generátor. U oboch typoch generátorov môžu premenné x_n nadobúdať iba konečného počtu rôznych hodnôt. Pre tento počet P platí $P \leq m$, číslo P sa nazýva periódou generátoru. Prirodzenou snahou je, aby perióda P bola čo možno

najväčšia a zároveň aby hodnoty $r_n = x_n/m$ boli na intervale $(0,1)$ čo najhustejšie rozmiestnené. [1, 13]

1.10 Metódy transformácie náhodných čísel

Existuje veľké množstvo štandardných pravdepodobnostných rozdelení náhodných veličín, napríklad normálne, exponenciálne, logaritmicko-normálne rozdelenie a iné. Náhodné veličiny rovnakého typu rozdelenia sa od seba líšia iba hodnotami parametrov, napríklad pri normálnom rozdelení sú to stredná hodnota a rozptyl. Ak poznáme typ rozdelenia, s ktorým máme pracovať, tak je nutné špecifikovať len hodnoty parametrov. Ak sú náhodné veličiny, s ktorými v modeli pracujeme štandardného typu, je obvykle riešenie značne uľahčené. Niekedy dokonca nie je potrebné ani vykonať simuláciu, nakoľko výsledky môžeme dostať analytickým spôsobom. Pre množstvo matematických modelov je riešenie známe vo forme všeobecných zápisov, do ktorých je postačujúce dosadiť hodnoty konkrétnych parametrov. Všetky veličiny, s ktorými sa v praxi môžeme stretnúť však nie je možné dostatočne aproximovať s niektorým zo štandardných pravdepodobnostných rozdelení. V takýchto prípadoch neostáva nič iné ako použiť empiricky zistené rozdelenie pravdepodobnosti. [3, 15]

Metóda inverznej transformácie

Majme náhodnú veličinu X , pre ktorej hustotu pravdepodobnosti platí

$$f(x) > 0 \quad \text{pre} \quad a < x < b,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{inak.}$$

Potom distribučná funkcia F je na intervale (a, b) rastúca a tento interval sa zobrazuje na intervale $(0,1)$. Ak existuje jednoznačné vzájomné priradenie medzi hodnotami $x \in (a, b)$ a $r \in (0,1)$. To znamená, že ak zvolíme číslo $r \in (0,1)$, potom je hodnota $x \in (a, b)$ jednoznačne určená predpisom

$$r = F(x).$$

Ak je možné vyčíslieť hodnoty x , tak je potrebné rovnicu $r = F(x)$ riešiť vzhľadom na x , inak povedané, je potrebné nájsť inverznú funkciu F^{-1} . Ak existuje F^{-1} v explicitnom tvare, potom je možné položiť

$$x = F^{-1}(r), \quad \text{kde } r \in (0,1).$$

Pokiaľ sú splnené uvedené predpoklady, potom vzťah $x = F^{-1}(r)$ je návodom ku generovaniu náhodných hodnôt veličiny, ktorej distribučná funkcia je F . Pre generovanie náhodných hodnôt veličiny X dostaneme nasledujúci postup:

1. generujeme náhodné číslo r ,
2. položíme $x = F^{-1}(r)$.

Hodnoty $F^{-1}(r)$ sú teda považované za hodnoty veličiny X . Právoplatnosť tohto obratu je možné dokázať, nakoľko platí

$$P[F^{-1}(r) \leq x] = P[r \leq F(x)] = F(x).$$

Prvá rovnosť vychádza z vlastností inverzných funkcií a druhá z tvaru distribučnej funkcie rovnomerného rozdelenia. [3]

1.11 Niektoré používané pravdepodobnostné rozdelenia

1.11.1 Rovnomerné rozdelenie

Rovnomerné rozdelenie je najjednoduchšie spomedzi spojitých rozdelení. Hustota pravdepodobnosti rovnomerného rozdelenia na intervale (a, b) má tvar

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in (a, b)$$

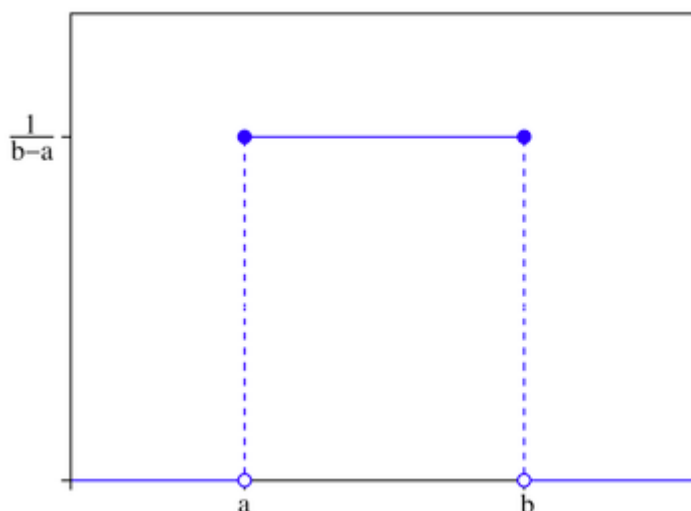
$$= \text{inak.}$$

Rovnomerné rozdelenie na intervale (a, b) označíme $R(a, b)$. Distribučná funkcia je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Stredná hodnota a rozptyl:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



Obr. 3 Hustota rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti [1]

Generovanie hodnôt rozdelenia $R(a, b)$ sa vykonáva jednoduchou transformáciou, ktorá je výsledkom použitia inverznej transformácie

$$x = a + (b - a) r,$$

kde r je náhodné číslo alebo hodnota $R(0,1)$.

Ak poznáme odhady strednej hodnoty a rozptylu, potom môžeme hodnoty parametrov a, b určiť riešením sústavou rovníc

$$E(X) = \frac{a + b}{2},$$

$$D(X) = \frac{(a - b)^2}{12},$$

z ktorej vychádza

$$a = E(X) - \sqrt{3D(X)}, \quad b = E(X) + \sqrt{3D(X)}.$$

[3, 17]

1.11.2 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne pravdepodobnostné rozdelenie takisto patrí medzi spojité rozdelenia. Je vhodné na použitie pri modeli, v ktorom vyjadrujeme dobu čakania na nejaký jav, napríklad čas medzi dvoma dopravnými nehodami a pod.. Hustota pravdepodobnosti má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x - A}{\alpha}\right), \quad x > A,$$

$$= 0, \quad x \leq A,$$

pričom pre parametre platí $-\infty < A < \infty, \alpha > 0$.

V niektorých prípadoch je možné sa stretnúť s exponenciálnym rozdelením, ktoré obsahuje jeden parameter λ s hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \\ = 0, \quad x \leq 0.$$

Exponenciálne rozdelenie s hustotou pravdepodobnosti, ktorá má dva parametre označme $E(A, \alpha)$ a exponenciálne rozdelenie s jedným parametrom zase $E(0, 1/\lambda)$.

Ak má X hustotu pravdepodobnosti s dvoma parametrami a zavedieme náhodnú veličinu Z vzťahom

$$Z = \frac{X - A}{\alpha},$$

Je zrejmé, že Z má exponenciálne rozdelenie $E(0, 1)$, ktoré sa nazýva normalizované exponenciálne rozdelenie. Na základe vzťahu $Z = \frac{X - A}{\alpha}$ pre X platí

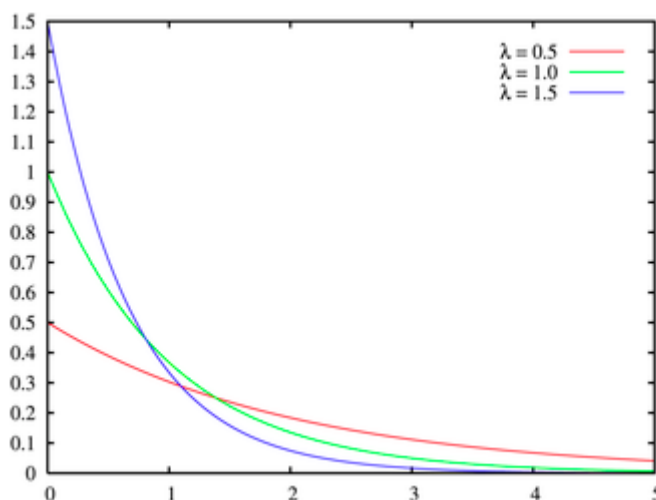
$$X = A + \alpha Z.$$

Distribučnou funkciou F náhodnej veličiny X s rozdelením $E(A, \alpha)$ je

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x - A}{\alpha}\right), \quad x > A, \\ = 0, \quad x \leq A.$$

Stredná hodnota a rozptyl:

$$E(X) = A + \alpha, \quad D(X) = \alpha^2.$$



Obr. 4 Exponenciálne rozdelenie [1]

Pri uvažovaní nad generovaním hodnôt exponenciálneho rozdelenia je možné sa obmedziť iba postup generovania hodnôt náhodnej veličiny Z s normovaným exponenciálnym rozdelením $E(0, 1)$, nakoľko hodnoty rozdelenia $E(A, \alpha)$ je možné dosiahnuť pomocou vzťahu $X = A + \alpha Z$.

Často používaná metóda generovania je založená na využití metódy inverznej transformácie, ktorú sme popísali v predchádzajúcom texte.

Pre exponenciálne rozdelenie $E(0,1)$ je distribučná funkcia F daná predpisom

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0, \\ = 0, \quad x \leq 0.$$

Ak riešime rovnicu $r = F(x)$ pre F zadanou predchádzajúcimi vzťahmi, potom postupne dostávame

$$r = 1 - e^{-x} \\ x = -\ln(1 - r).$$

Vzťah $x = -\ln(1 - r)$ je možné zjednodušiť využitím predpokladu, že r sú náhodné čísla, potom aj $1 - r$ sú taktiež náhodné čísla, takže

$$x = -\ln r.$$

[1, 3, 16]

1.11.3 Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie, nazývané aj Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti, patrí medzi spojité rozdelenia a má širokú škálu využiteľnosti, napríklad v medicíne ako výška, váha, krvný tlak a pod. Vo fyzike pri meraní pohybu častíc, ich chyby, a v neposlednom rade sa využíva aj v oblasti financií, kde sa využíva napríklad pri sledovaní pohybu kurzov akcií.

Hustota pravdepodobnosti normálneho rozdelenia má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

Pričom pre parametre platí $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Normálne rozdelenie s predchádzajúcim pravdepodobnostným rozdelením označme $N(\mu, \sigma^2)$. Ak má náhodná veličina X rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná veličina je nasledovná

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

a má rozdelenie $N(0,1)$, ktoré sa nazýva normované normálne rozdelenie. Zo vzťahu náhodnej veličiny $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ je zrejماً rovnica

$$X = \mu + \sigma Z.$$

Distribučná funkcia F náhodnej veličiny X s rozdelením $N(0,1)$ je

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

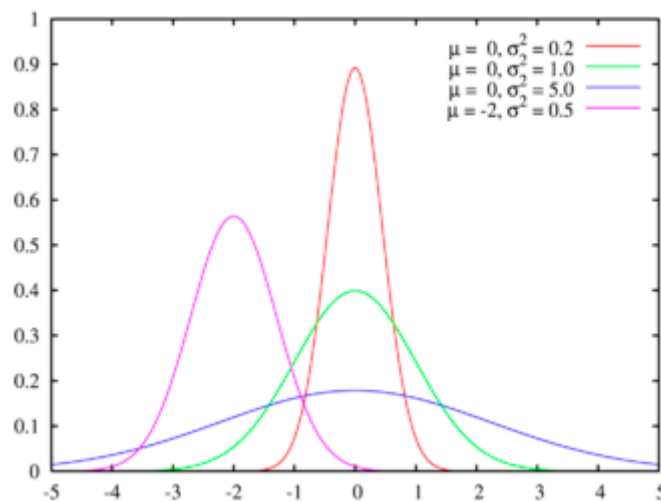
Pre distribučnú funkciu Φ normovanej veličiny X s rozdelením $N(0,1)$ platí

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

čo vyplýva zo vzťahu $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Stredná hodnota a rozptyl:

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$



Obr. 5. Normálne rozdelenie s rôznymi hodnotami parametrov [1]

Pri generovaní hodnôt normálneho rozdelenia je možné sa obmedziť iba na získanie hodnôt veličiny Z s normovaným rozdelením $N(0,1)$, nakoľko hodnoty rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ je možné získať vzťahom $X = \mu + \sigma Z$. [1, 3, 21]

1.11.4 Logaritmicko-normálne rozdelenie

S logaritmicko-normálnym rozdelením sa je možné stretnúť pri teórii spoľahlivosti, pri popise veľkosti častíc sypkých materiálov alebo pri modelovaní prietoku vody v riekach, pričom patrí medzi spojité pravdepodobnostné rozdelenia. Hustota pravdepodobnosti logaritmicko-normálneho rozdelenia je:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > 0,$$

$$= 0 \quad x \leq 0,$$

pričom pre parametre platí $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

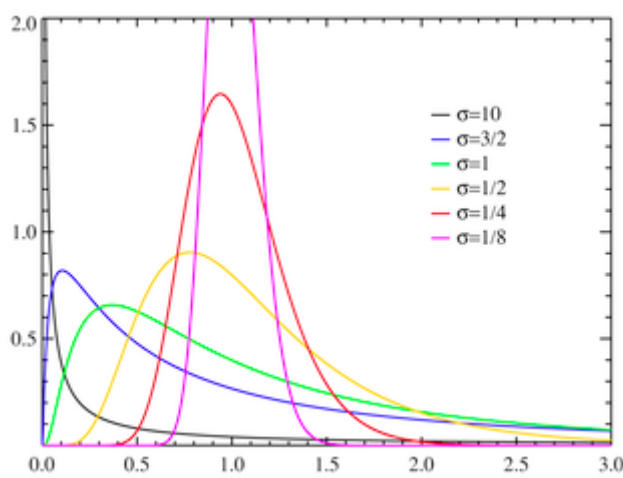
Logaritmicko-normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2 označíme $LN(\mu, \sigma^2)$. Ak má náhodná veličina X rozdelenie $LN(\mu, \sigma^2)$, potom má veličina $Y = \ln X$ rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ a veličina

$$Z = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$$

Na rozdelení $N(0,1)$.

Stredná hodnota a rozptyl:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad D(X) = E^2(X) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1].$$



Obr. 6. Logaritmicko-normálne rozdelenie s rôznymi hodnotami parametrov [1]

Generovanie hodnôt rozdelenia $LN(\mu, \sigma^2)$ je možné vykonať s využitím vzťahu

$$x = \exp(\mu + \sigma z),$$

ktorý sme dostali jednoduchou úpravou vzťahu $Z = \frac{\ln X - \mu}{\sigma}$, takže ak sú z hodnoty rozdelenia $N(0,1)$, tak x sú počítané podľa vzťahu $x = \exp(\mu + \sigma z)$ hodnoty rozdelenia $LN(\mu, \sigma^2)$. [3, 14]

1.11.5 Poissonovo rozdelenie

Poissonovo rozdelenie patrí medzi diskrétne rozdelenia a využíva sa v prípadoch s výskytom zriedkavých udalostí, napríklad výskyt smrteľných nehôd, chýbách na zvaroch a pod.

Poissonovo rozdelenie dostávame v prípade, ak pravdepodobnosť uskutočnenia javu A pri jednej realizácii Bernoulliho pokusu je veľmi malá ($p_n \rightarrow 0$) a počet opakovania pokusu je veľmi vysoký ($n \rightarrow \infty$) a pritom $np_n \rightarrow \lambda$, kde λ je kladná konštanta.

Pre náhodnú veličinu X , ktorá má Poissonovo rozdelenie s parametrom λ platí

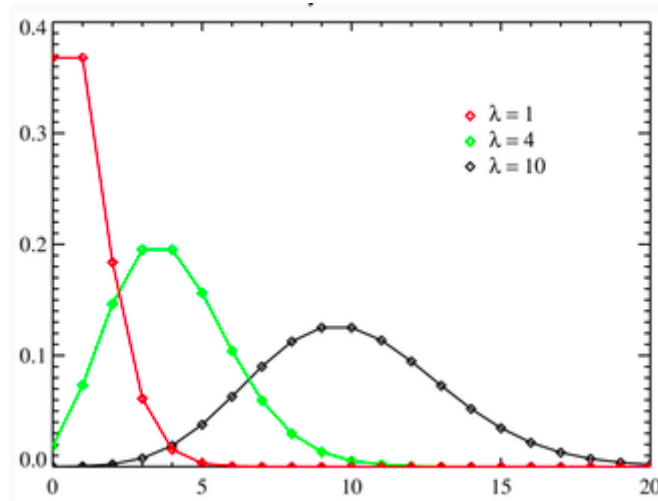
$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

$$= 0 \quad \text{inak.}$$

Poissonovo rozdelenie označme $Po(\lambda)$.

Stredná hodnota a rozptyl:

$$E(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda.$$



Obr. 7. Poissonovo rozdelenie [1]

Pre generovanie hodnôt je možné využiť vzťah medzi exponenciálnym a Poissonovým rozdelením, pretože ak sú dĺžky časových intervalov medzi po sebe nasledujúcimi výskytmi určitého javu nezávislé hodnoty exponenciálneho rozdelenia s hustotou pravdepodobnosti

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

je počet výskytov tohto javu behom časového intervalu dĺžky t nezávislé hodnoty Poissonovho rozdelenia s parametrami λt , teda

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \quad x = 0, 1, \dots$$

a veta platí aj obrátene. Priamym dôsledkom je to, že hodnoty Poissonovho rozdelenia je možné získať ako počty výskytu určitého javu v jednotkovom časovom intervale pokiaľ doby medzi výskytmi majú rozdelenie $R(0, 1/\lambda)$ s hustotou pravdepodobnosti exponenciálneho rozdelenia.

Ak sú t_i nezávislými hodnotami exponenciálneho rozdelenia, $E(0, 1/\lambda)$ potom má x Poissonove rozdelenie. Pre x platí

$$\sum_{i=1}^x t_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^{x+1} t_i.$$

Na základe vzťahu z exponenciálneho rozdelenia $x = -\ln r$ dostávame pregenerovanie hodnôt $E(0, 1/\lambda)$ transformáciu

$$t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu dostaneme

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^x \ln r_i \leq 1 < -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{x+1} \ln r_i,$$

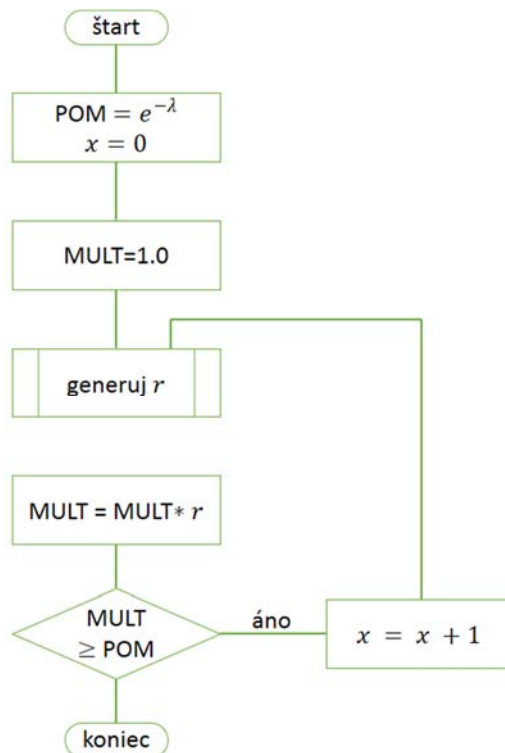
$$\sum_{i=1}^x \ln r_i \geq -\lambda > \sum_{i=1}^{x+1} \ln r_i.$$

Kvôli zvýšeniu efektívnosti rýchlosti výpočtu je vhodné upraviť predchádzajúci vzťah elementárnymi znalosťami exponenciálnej a logaritmickej funkcie

$$\ln \prod_{i=1}^x r_i \geq -\lambda > \ln \prod_{i=1}^{x+1} r_i,$$

$$\prod_{i=1}^x r_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{x+1} r_i.$$

Algoritmus generovania hodnôt $Po(\lambda)$ je založený na poslednom vzťahu, algoritmus je zároveň zobrazený na nasledujúcom vývojovom diagrame.



Obr. 8. Algoritmus generovania hodnôt Poissonovho rozdelenia [3]

Na konci algoritmu je v premennej x generovaná hodnota Poissonovho rozdelenia. Je zrejmé, že na jednu hodnotu je v priemere potrebných $\lambda + 1$ náhodných čísel. Pre $\lambda > 9$ je možné hodnoty Poissonovho pravdepodobnostného rozdelenia aproximovať hodnotami normálneho rozdelenia a generovať ich pomocou vzťahu

$$X = \max(0; [\lambda + Z^2 - 0,5]),$$

kde Z má rozdelenie $N(0, 1)$ a $[\alpha]$ je celá časť čísla α . [3, 17, 18]

1.12 Slabý zákon veľkých čísel

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (Ω, φ, P) , na ktorom sú definované náhodné premenné $X, X_1, X_2, \dots$

Hovoríme, že postupnosť náhodných premenných $\{X_n\}$ konverguje podľa pravdepodobnosti k náhodnej premennej X ($X_n \xrightarrow{P} X$), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{X_n\} | X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Nech $\{X_n\}$ je postupnosť náhodných premenných, pre ktoré existujú stredné hodnoty $E(X_n), n = 1, 2, \dots$. Hovoríme, že pre postupnosť $\{X_n\}$ platí slabý zákon veľkých čísel, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Z predchádzajúcich dvoch definícií plynie, že v prípade slabého zákona veľkých čísel ide o konvergenciu podľa pravdepodobnosti.

Veta (Čebyševova nerovnosť). Nech náhodná premenná X má strednú hodnotu $E(X)$ a konečnú disperziu $D(X)$. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$P(\{\omega; |X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Čebyševovou nerovnosťou je vhodné overiť, či pre nejakú postupnosť $\{X_n\}$ náhodných premenných platí zákon veľkých čísel. Čebyševovu nerovnosť možno zapísať aj v nasledujúcom tvare

$$P(\{\omega; |X(\omega) - E(X)| < \varepsilon\}) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Veta (Čebyševova veta). Nech $\{X_n\}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných. Nech pre disperziu $D(X_n)$ platí $D(X_n) < C, n = 1, 2, \dots$, kde C je konštanta nezávislá od n . Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \omega; \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(\omega)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

to znamená, že $\{X_n\}$ spĺňa slabý zákon veľkých čísel.

Dôkaz. Položíme

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

Potom

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i), \quad D(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \leq \frac{C}{n}$$

A podľa Čebyševovej nerovnosti

$$\begin{aligned} & P \left(\left\{ \omega; \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(\omega)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| \geq \varepsilon \right\} \right) \\ &= P(\{\omega; |Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

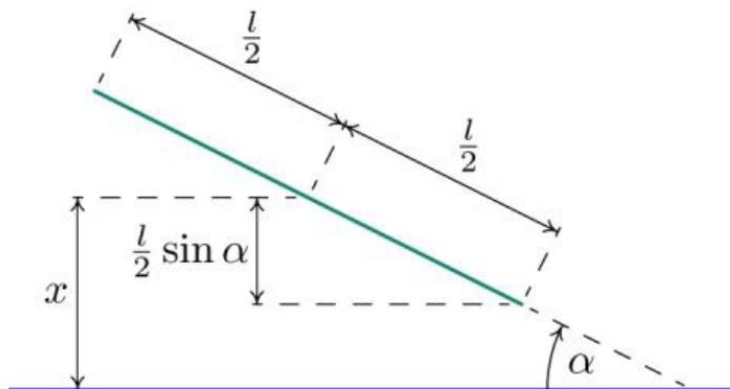
Pre $n \rightarrow \infty$ dostávame tvrdenie vety. [13]

1.13 Metóda Monte Carlo

Metóda Monte Carlo je numerická, stochastická metóda, čo znamená, že ide o sekvenciu náhodných javov. V dnešnej dobe tieto metódy nachádzajú rozsiahle uplatnenie v mnohých oblastiach, ako operačný výskum, chémia, biológia, medicína, alebo jadrová fyzika, kde existuje celý rad problémov presahujúci rámec možností teoretickej matematiky.

Základný princíp tejto metódy bol uverejnený už v roku 1777 francúzskym matematikom Georges de Buffonom, ktorý predstavil experiment pomenovaný Buffonova ihla. Jeho znenie je nasledovne: na linajkový papier sa náhodne hádže ihla, pričom sa rieši, s akou pravdepodobnosťou pretne ihla niektorú z linajok, dĺžka ihly je označená l a dĺžka vzdialenosti jednotlivých linajok je označená d , zároveň platí $l < d$. Usporiadanou dvojicou čísel $[x, \alpha]$ je možné jednoznačne popísať polohu ihly, pričom x

predstavuje vzdialenosť stredu ihly od najbližšej čiary a uhol α bude menší z uhlov, ktorý zvierá smer ihly s priamkou kolmou na rovnobežné priamky, zároveň platí $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. K tomu aby ihla pretínala jednu z linajok musí platiť $x \leq \frac{l}{2} \sin \alpha$.



Obr. 9. Buffonova ihla [9]

Z predpokladu, že každý možný dopad ihly môže nastať s rovnakou pravdepodobnosťou, vyplýva, že simuláciu uskutočníme generáciou usporiadanej dvojice náhodných čísel $[x, \alpha]$, pričom náhodná veličina x nadobúda hodnoty z rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti s hustotou

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{d}, & x \in < 0; d/2 > \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

a náhodná veličina α nadobúda hodnoty z rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti s hustotou

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \alpha \in < 0; \pi/2 > \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Pravdepodobnosť, že ihla pretne jednu z rovnobežiek je možné vyjadriť nasledovným vzťahom

$$P = \frac{2l}{\pi d} \quad \text{pre } l < d.$$

Daný vzťah je možné použiť na výpočet hodnoty Ludolfovho čísla π experimentálnou cestou pomocou realizácie n nezávislých pokusov. Ak nastane prípad keď ihla pretne priamku presne m -krát, potom početnosť m/n je odhadom P , takže pre odhad π dostávame

$$\pi \approx \frac{2l m}{d n}.$$

Prvé systematické využitie metódy Monte Carlo s reálnymi výsledkami sa uskutočnilo v roku 1930, keď taliansky fyzik ocenený Nobelovou cenou Enrico Fermi využil tento prístup ku generovaniu náhodných čísel k výpočtu vlastností novoobjavenej častice neutrónu. Ďalšie osobnosti, ktoré sú spájané s touto metódou sú Stanislaw Marcin Ulam a John von Neumann alebo Nicholas Metropolis. Prvých dvaja menovaní skúmali správanie sa neutrónu, hlavne aké množstvo neutrónu prejde rôznymi materiálmi. Napriek veľkému množstvu informácií nebol tento problém riešiteľný. Vedci Ulam a Neumann sa nechali inšpirovať ruletou, od čoho aj vznikol názov metódy. Vznik jednoduchých počítačov bolo kľúčovou udalosťou tejto numerickej metódy, nakoľko veľmi uľahčili prácu generovania náhodných javov. Metóda predtým používala označenie „statistical sampling“ – štatistický výber. Metóda Monte Carlo zohrávala aj kľúčovú úlohu pri simuláciách, ktorými sa odhadovala štiepna reakcia pri vývoji atómovej bomby počas druhej svetovej vojny v rámci utajeného projektu pod názvom Manhattan. [8, 9]

Simulácia Monte Carlo rieši určenie náhodnej veličiny, ktorá je daná ako funkcia iných náhodných veličín. Vo všeobecnosti je možné daný problém zapísať nasledujúcim vzťahom:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

kde Y predstavuje výstupnú náhodnú veličinu a $X_1, X_2, \dots, X_n$ vstupné náhodné veličiny. Z toho nám vyplýva fakt, že metóda Monte Carlo vychádza zo zákona veľkých čísel, ktorý možno popísať nasledovne: neznámu strednú hodnotu náhodnej premennej najčastejšie odhadujeme tak, že z náhodného výberu vypočítame aritmetický priemer. S rastúcim počtom výberu sa aritmetický priemer približuje strednej hodnote náhodnej premennej. [13]

Metóda Monte Carlo sa využíva pri riešení množstve numerických úloh, pričom jedna z najznámejších je výpočet určitého integrálu. Tento príklad aj podrobnejšie popíšeme:

Ak poznáme k funkcii f na intervale $< a, b >$ primitívnu funkciu F , potom môžeme určitý integrál vypočítať jednoducho vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ak sa nám nepodari nájsť primitívnu funkciu F , je potrebné vypočítať hodnotu určitého integrálu pomocou približných metód, ktorých podstatu je možné vyjadriť vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n),$$

kde koeficienty c_i a uzle $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ sa volia podľa rôznych pravidiel, napríklad Newtonovo-Cotesove vzorce, Gaussove kvadratické rovnice, ktorých jednoduchými špeciálnymi prípadmi sú dobre známe napr. lichobežníkové pravidlo alebo Simpsonovo pravidlo. Pre jednorozmerné integrály je možné dosiahnuť výsledky, ktoré sú majú požadovanú presnosť, bez toho aby počet výpočtov bol príliš veľký. V týchto prípadoch sa metódy Monte Carlo moc nevyužívajú, nakoľko k dosiahnutiu rovnakých presností zvyčajne vyžaduje viacero aritmetických operácií. Pri viacrozmerných integráloch si ale metóda Monte Carlo nachádza uplatnenie a zároveň pre implicitné funkcie $F(x, f(x)) = 0$ môže byť metóda vhodne aplikovaná, nakoľko pri mnohých prípadoch nie je potrebné počítať hodnoty f v sieti bodov, ako to vyžadujú napríklad integračné vzorce dané vzťahom $\int_a^b f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n)$. Nakoľko sa zaoberáme princípom metód Monte Carlo, budeme sa zaoberať problematiku výpočtu jednorozmerných integrálov, na ktorých sa dajú všeobecné vlastnosti metódy názorne ilustrovať. Spomenutá Buffonova úloha môže byť interpretovaná ako problém výpočtu určitého integrálu, takže je zrejmé, že je možné konštruovať pravdepodobnostný model, ktorého charakteristiky sú hodnotami istého určitého integrálu. Uvažujme integrál

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

kde f zobrazuje $< 0, 1 >$ do intervalu $< 0, 1 >$, t.j. $f(x) \in < 0, 1 >$ pre $x \in < 0, 1 >$. Tento predpoklad nie je príliš na úkor zovšeobecnenia, pretože rad integrálov $\int_a^b f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n)$ je možné substitúciou

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$

a transformáciou

$$h(x) = \frac{f(x) - A}{B - A}, \quad \text{kde } A \leq f(x) \leq B \quad \text{pre } x \in < a, b >,$$

previesť na integrál $I = \int_0^1 f(x)dx$. Použijeme metódu odhadu pravdepodobnosti.

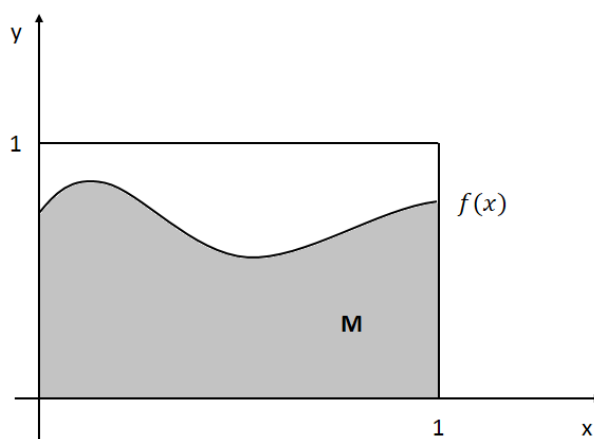
V tomto prípade k úlohe stanovenia určitého integrálu $I = \int_0^1 f(x)dx$ môžeme za

uvedených predpokladov kladených funkciou f hodnotu I chápať ako obsah oblasti, do ktorej patria body (x, y) , ktoré spĺňajú podmienky

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq f(x).$$

Ide o uzavretú množinu M , ktorá je ohraničená osami x a y , priamkou $x = 1$ a grafom funkcie f .



Obr. 10. Určitý integrál [3]

Úloha výpočtu určitého integrálu $I = \int_0^1 f(x)dx$ je ekvivalentná k úlohe výpočtu šedej plochy M na obrázku č. 10. Teraz môžeme prejsť k pravdepodobnostnej úvahe: Aká bude pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod (x, y) z jednotkového štvorca $< 0,1 > \times < 0,1 >$ patrí do M ? Z geometrického poňatia pravdepodobnosti je zrejmé, že táto pravdepodobnosť je rovná podielu plošných obsahov M a jednotkového štvorca, to znamená že môžeme napísať rovnosti

$$\begin{aligned} P\{(x, y) \in < 0,1 > \times < 0,1 >, (x, y) \in M\} &\equiv \\ &\equiv \text{plocha } M / \text{plocha jednotkového štvorca} = \text{plocha } M = \\ &= \int_0^1 f(x)dx, \end{aligned}$$

Takže problém výpočtu určitého integrálu $I = \int_0^1 f(x)dx$ je ekvivalentný úlohe stanovenia pravdepodobnosti výskytu určitého javu. Túto pravdepodobnosť odhadneme pomocou relatívnej frekvencie m/n výskytu javu v sérii n nezávislých náhodných pokusov. Následne ešte musíme špecifikovať, čo budeme rozumieť náhodne zvoleným bodom z jednotkového štvorca $< 0,1 > \times < 0,1 >$. V kapitole o stochastických prvkoch sme ukázali, že tieto body môžeme nadobúdať generovaním dvojíc náhodných

čísel, teda nezávislé hodnoty rovnomerného rozdelenia $R(0, 1)$. Body (x, y) patriace do M musia spĺňať podmienku

$$y \leq f(x),$$

takže pri realizácii metódy stačí overovať splnenie relácie $y \leq f(x)$. [3]

2 SVETOVÉ FINANČIE A ICH VÝVOJ

Ekonomické procesy vo svetovom hospodárstve ako celku, podnikoch majú sa skladajú z dvoch stránok, z finančnej a vecnej.

Finančná stránka interpretuje peňažnú obsluhu vecných procesov, obsahuje všetky transakcie peňazí potrebných k tomu, aby sa služby a výrobky v trhovej ekonomike zhotovovali čo najefektívnejšie a zároveň aby sa dostali od producentov k spotrebiteľom. Vecná stránka vyjadruje všetky aktivity spojené s produkciou služieb a výrobkov, ktoré pozostávajú z činnosti obstarania výrobných subjektov, následne ich spájania, transformácie, zámeny produktov a služieb až po ich spotrebu a miznutie v spotrebe. Finančie teda vychádzajú z vecnej stránky ekonomických procesov, zahŕňajú ju ale majú na ňu aj značný vplyv, pričom ich existencia sa javí ako relatívne samostatný celok. Odborné odhady uvádzajú, že globálne transakcie finančných zdrojov päťdesiatnásobne presahujú hodnotu celosvetových produktov a služieb. Zmeny ekonomického sveta vychádzajú z vývoju finančných orgánov, foriem a nástrojov ich vplyvu na hospodársky systém. Významnou udalosťou, ktorá sa udiala v prvej polovici sedemdesiatych rokov a dlhodobo ovplyvnila vlastnosti týchto procesov bol zánik brettonwoodskeho menového systému. Jej následky boli značné hlavne začiatkom osemdesiatych rokov, mnohými finančníkmi označené ako finančná revolúcia. Hlavné rysy, ktoré vychádzajú zo spomínanej udalosti môžeme vyjadriť pojmami ako globalizácia, intelektualizácia, nové technológie, deregulácia, vývoj finančných inovácií a problémy verejných financií. Globalizáciu vo financiách charakterizuje najmä zintenzívnenie procesov presunu financií a kapitálu vychádzajúcich z expanzie produktov a služieb, rastu medzinárodných spoločností a hlavne rozvoja prepojenia medzi krajinami pomocou peňažných tokov. [6, 11, 19]

Konkrétne sú to nasledujúce prvky:

- Vznik a upevňovanie rôznych medzištátne oblastné inštitúcie ako Európska únia, v severnej Amerike je to Nafta, južnej Amerike Mercosur, v Ázii je to Asean. Celkovo bolo takýchto dohôd uzavretých 153 a to od roku 1948, pričom skoro polovica až po roku 1990.
- Bankové úvery medzi bankovými a nebankovými subjektami, ktoré majú medzinárodný charakter zaznamenali značný rozvoj.
- Spoločná európska mena euro.

- Zvyšujúci sa počet emisií dlhopisov a akcií, umiestňovaných na zahraničných trhoch a zvyšujúca sa aktivita cudzozemských klientov na oných trhoch, čomu značnou mierou prospela miera privatizácie v osemdesiatych rokoch vo vyspelých krajinách a následne privatizácia v postkomunistických krajinách.
- Vznik Európskej centrálnej banky v roku 1999.
- Fúzie podnikov na medzinárodnej úrovni, zároveň presun finančných prostriedkov do zahraničia formou strategických a portfóliových investícií.

Globalizačná politika samozrejme ovplyvňuje jednotlivé finančné pomery v jednotlivých štátoch, pričom sa postupne presadzujú snahy o centralizáciu kapitálových trhov čo má viesť k posilneniu jednotlivých štátnych trhov prostredníctvom koordinácie politiky organizátorov štátnych kapitálových trhov. Tieto kroky vedú k zvýšenej konkurencii v bankových sektoroch, čo vedie k fúzii menších bánk, čím sa zvýši ich kapitálová sila, zväčší sa ponuka produktov a služieb jednotlivých bánk nielen v bankovom sektore, ale aj v oblasti poisťovníctva, poradenstva a sprostredkovania. Zároveň nefinančné podniky začínajú ponúkať služby vo finančnej sfére. Pre firemný sektor to naznačuje vznik nových príležitostí získania kapitálu, zároveň sa podmienky na jeho získavanie medzinárodne zjednocujú, ďalšou možnosťou sú zahraničné investície v podobe priamych investícií alebo finančného investovania. Dereguláciou rozumieme faktor, ktorý je súčasťou v globalizácie. Charakterizuje ho liberácia právnych podmienok, ktoré sa týkajú finančných transakcií v rámci štátov. Ide predovšetkým o predpisy modifikujúce nadnárodný presun kapitálu, zámenu devíz a valút, harmonizáciu colných a daňových predpisov. Ak by sa štátna sféra rozhodla ku regulačným zákrokom, mohlo by to viesť k izolácii v oblasti medzinárodnej finančnej komunity, čo je v rozpore so súčasnou politikou finančných sektorov a bánk. Tie preto vyvíjajú na vlády tlak, ktoré vedú ku krokom liberalizačného charakteru. Pre podniky to znamená slobodnejšie finančné rozhodovanie a menšie zásahy od štátnych inštitúcií. Pre podniky je to vyhovujúca skutočnosť s ktorou zároveň rastie zodpovednosť vrcholového manažmentu na rozhodnutiach. Intelktualizácia vo finančníctve znamená, že úspech už nezáleží len na nadobudnutých skúsenostiach a trhovom inštinkte ale aj na teoretických znalostiach a príprave. Obzvlášť to platí pre kapitálové trhy, kde úspech nezáleží len na množstve finančných prostriedkov, ale predovšetkým na znalostiach, vedomostiach a ich využití. Dôsledkom sú hlavne dva fakty:

- finančná sféra je čoraz komplikovanejšia a jej podmienky sa rýchlo menia
- ekonomická teória nadobúda komplexnejší charakter a lepšie celkovo vyjadruje ekonomickú realitu

Technologické novinky prinášajú do tohto sektora množstvo inovácií, ktoré skracujú čas na minimum, ktorý je potrebný na realizáciu niektorých procesov. Finančný sektor je úzko spätý s informačno-komunikačnými technológiami, ktoré v dnešnej dobe umožňujú vykonanie miliónov transakcií v reálnom čase v rámci celého sveta. Problémy v oblasti verejných financií je nasledujúci znak momentálnej situácie vo finančnej sfére. Rozpočtová politika má flexibilnejší charakter a zároveň je riskantnejšia. Množstvo štátov funguje na princípe schodkových, deficitných rozpočtov, čo znamená, že výdaje sú vyššie ako príjmy, následkom toho je zvyšujúca sa zadlženosť štátu. Ručenie za takýto schodok má dosah na ekonomiku vo viacerých smeroch:

- krytie schodku sa vykoná úverovým spôsobom, čo znamená priame znižovanie schopnosti poskytovania úverov firmám a obyvateľstvu,
- vedomé inflačné krytie rozkladá ekonomiku
- zadlženosť u zahraničných inštitúcií znamená oslabenie meny
- rastúci štátny dlh núti vlády k zvyšovaniu daní a vytvára tak tlak na firmy a obyvateľstvo, zároveň sú vlády nútené k znižovaniu verejných investícií.

Všetky procesy, ktoré charakterizujú finančnú revolúciu sa dejú naraz a vzájomne na seba pôsobia, čo vedie k nestabilnému a rýchlo meniacemu sa ekonomickému prostrediu. Dôsledkom toho je vznik a existencia nových postupov, ktoré majú mať vlohu takýmto situáciám čeliť. Najvýznamnejšie finančné inštitúcie sa zhodujú v presvedčení, že je nevyhnutná makroekonomická regulácia svetových financií, problémom je nejednoznačný pohľad na danú vec, teda ako má vzniknúť a ako má vyzeráť. Vhodný systém by mal sledovať nasledujúce smery:

- výhody globálneho kapitálového trhu,
- centrálny dohľad a riadenie finančných trhov,
- rešpektovanie suverenity jednotlivých štátov.

Kombinácia všetkých troch smerov nie je možná, preto sa označujú ako „nezlučiteľná trojica“, preto sa skôr verí v postupne nadobudnutých medzištátnych krokoch.

Nestále ekonomické prostredie vedie ku rôznym, opakujúcim sa, finančným krízam na odlišných oblastiach sveta, následne rozdielne miery inflácie v jednotlivých štátoch čo vedie k nestabilným kurzom mien, diferentným úrokovým mieram. [11 ,19]

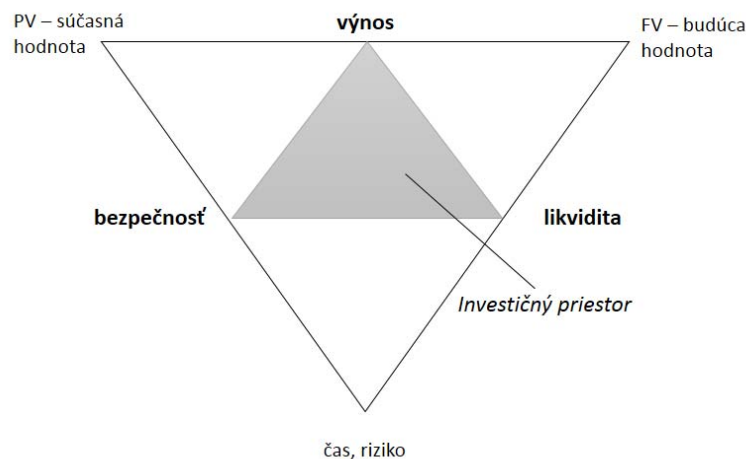
Finančné inžinierstvo

Značný vývoj v oblastiach ekonomiky, finančných stratégií si vynucuje vedecké predpovedanie nasledujúceho vývoja. Následok toho je vznik finančnej disciplíny, ktorej názov je finančné inžinierstvo. Tomuto okruhu sa predpovedá sľubná budúcnosť, vďaka širokým možnostiam uplatnenia a aj napriek jej náročnosti. Vyvíja sa z poznatkov, ktoré pochádzajú z existencie a pôsobenia na jestvujúcich finančných trhoch. Finančné inžinierstvo je disciplína, ktorá sa na základe poznatkov finančnej vedy zaoberá sústred'ovaním, hodnotením, teoretickým zovšeobecňovaním a rozvíjaním poznatkov získaných pri tvorbe, rozširovaní a využívaní finančných inovácií, najmä finančných derivátov, a pri tvorbe stratégií finančného investovania. [15]

Skoro všetky rozhodnutia vykonané firmami sa týkajú ekonomickej stránky, teda financií nakoľko sú časovo prepojené náklady a výnosy. Finanční odborníci sa zapodieávajú nasledujúcimi aktivitami:

- plánovanie, rozpočtovanie, cenová politika spoločnosti, analýza akvizícií;
- zaistenie dostatočnej úrovne kapitálu podľa potrieb spoločnosti;
- manažment finančných prostriedkov, riadenie pohľadávok a záväzkov, správa investičného portfólia spoločnosti;
- interný audit, účtovníctvo, príprava výkazov pre daňové účely;
- vzťahy s investormi, poistenie aktív, komunikácia s akcionármi;
- riadenie a spracovanie elektronických dát

Pojem investičný trojuholník je veľmi rozšírený, nakoľko každú investíciu je potrebné prehodnotiť aspoň tohto princípu, ktorý opisuje prepojenie medzi rozhodujúcimi veličinami, ktoré majú pri rozhodovaní hlavnú váhu.



Obr. 11. Investičný trojuholník [11]

Investičný trojuholník obsahuje nasledujúce tri veličiny:

- výnos – výška výnosu z investície
- riziko – neistota týkajúca sa výšky budúcich výnosov
- likvidita – schopnosť premeniť aktíva na peniaze v potrebnom čase a bez straty.

Cieľom všetkých finančných inštitúcií je dosiahnuť maximum na všetkých troch veličinách, pričom takýto výsledok je veľmi ťažko dosiahnuteľný, preto sa hľadá čo najlepší pomer výnosov, likvidity a bezpečnosti. [11]

2.1 Finančný systém

Finančný systém môžeme charakterizovať ako systém ekonomických vzťahov, prostriedkov a inštitúcií, ktorý sa vyvinul do dnešnej podoby svetových vyspelých ekonomík. Je jedinou možnosťou pre zhromažďovanie, rozmiestňovanie a prerozdeľovanie disponibilných nástrojov medzi jednotlivými ekonomickými subjektami na základe dopytu a ponuky. Zabezpečuje prenos finančných prostriedkov od tých strán, kde sa nejavia produktívne investičné príležitosti k tým, ktoré produktívne možnosti majú, čo prospieva ku globálnemu ekonomickému celku. Finančný systém sa skladá zo základných prvkov ako finančný trh, sprostredkovatelia, finančné inštitúcie. Finančné trhy sú lokalizované buď podľa svetových finančných centier, napríklad New York, Londýn, Singapur, alebo bez ohľadu na to, kde majú fyzickú lokalitu, pričom spájajú dealerov, banky alebo klientov informačno-komunikačnými prostriedkami. [5, 11, 19]

Medzi základné toky financií môžeme popísať tie, ktoré putujú od finančníkov s prebytkom prostriedkov k účastníkom s deficitom.

Za predpokladu že finančný systém pracuje korektne, pričom jestvujú medzi najvyspelejšími trhmi určité rozdiely, môžeme funkcie finančného systému zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1. Transfer zdrojov v čase a priestore – zo znamená, že medzi krajinami a podnikateľskými odvetviami, aby investori finančníci docielili čo najväčší zisk za predpokladu rovnakého rizika.
2. Riadenie rizík – pomocou určitých inštitúcií (poisťovne), alebo pomocou niektorých finančných nástrojov (deriváty) doceliť zníženie rizika jeho presunom na investorov, ktorí sú ochotní toto riziko podstúpiť za určitú odmenu.
3. Vysporiadanie vzájomných záväzkov a pohľadávok – zaistenie mechanizmu a štruktúr, ktoré dohliadnu na vzájomné záväzky a pohľadávky aby boli uzmierené.
4. Zhromažďovanie zdrojov – úlohou je zabezpečiť upokojenie dopytu po voľných zdrojoch, finanční sprostredkovatelia agregujú jednotlivé zdroje, ktoré je možné následne investovať.
5. Poskytovanie informácií – finančný systém poskytuje informácie, ktoré sú požadované pre vhodné umiestňovanie voľných financií.
6. Politická funkcia – vo vyspelých krajinách zohrávajú finančné trhy dôležitú úlohu pri vykonávaní politiky a stabilizovania ekonomiky.

Definícií, ktoré definujú finančný trh je mnoho, my si vystačíme s nasledujúcou definíciou od amerického ekonóma F. Mishkina, ktorá definuje finančný trh ako systém ekonomických nástrojov, inštitúcií a vzťahov, ktorý prerozdeľuje peňažné prostriedky medzi ekonomické subjekty na základe ponuky a dopytu. Rozdelenie jednotlivých finančných trhov je možné pomocou mnohých kritérií, napríklad podľa času na peňažný a kapitálový, podľa použitia jednotlivých nástrojov na akciový, derivátový, dlhopisový, podľa toho či sú prostriedky verejné alebo súkromné, ďalej napríklad na primárny a sekundárny. [5, 10, 11]

Peňažný trh je trh, na ktorom pôsobia krátke pôžičky alebo peniaze, ktorých splatnosť nie je dlhšia ako jeden rok a operácie presunu tohto typu sa javia ako proces stáleho vzniku a úhrady pohľadávok a záväzkov v rozličnej forme. Tento trh poskytuje možnosti ekonomickým činiteľom vyrovnať sa s likviditou, financovať prevádzkový

kapitál firiem, poskytuje fondy na špekulatívny nákup cenných papierov a zásob a umožňuje štátu krátkodobé fondy do spratnosti dní.

Kapitálový trh charakterizujú mechanizmus a inštitúcie, kde sa stretáva ponuka a dopyt po stredne a dlhodobo uvoľnenom kapitále. Prvoradou funkciou je rozmiestňovanie dlhodobých financií do takých činností, ktoré produkujú najlepší efekt. Na tomto trhu sa predovšetkým obchoduje s cennými papiermi splatnými v dlhšej dobe ako jeden rok.

Na devízovom trhu sa obchoduje predovšetkým s devízami, čo vyplýva z investícií spoločností na medzinárodnej úrovni. Firmy preto potrebujú buď nakupovať alebo predávať cudziu menu. Trhy so zlatom a inými drahými kovmi funguje na základe obchodovania s týmito komoditami. Na peňažnom a kapitálovom trhu sa vykonávajú obchody prostredníctvom primárneho a sekundárneho trhu. Na primárny trh sa uvádzajú spoločnosťami alebo vládnymi agentúrami nové emisie cenných papierov prvotným kupcom. Uvedenie emisie na trh sa vykonáva formou verejnej aukcie, ponuky, tendra alebo formou súkromnej emisie. Všetky spôsoby uvedenia emisie majú vlastné vlastnosti ako cenu, riziko a likviditu. Obchodovanie sa vykonáva za určité ceny. Môžu nastať rôzne prípady. Ak nastane parita, teda rovnovážna cena, tak to znamená, že sa nominálna cena zhoduje s trhovou cenou. Druhou možnosťou je to, že nominálna cena je väčšia ako trhovú cenu, následne sa trhovú cenu predáva na primárnom trhu so zľavou – s emisným disáziom. Posledný prípad, teda nominálna cena je nižšia ako trhovú cenu, rozdielom je emisné ážio – prémia. Na sekundárnom trhu sa vykonávajú obchody s už existujúcimi, teda vydanými cennými papiermi. Tieto trhy poskytujú transakcie finančných nástrojov za aktuálne peňažné prostriedky, zároveň určuje ceny cenných papierov, ktoré firmy uvádzajú na primárny trh. Platí pravidlo, že čím vyššie sekundárne trhy oceňujú spoločnosť, tým bude cena, ktorú získa emitent na primárnom trhu, za cenné papiere vyššia. Sekundárny trh môže byť charakterizovaný ako burza alebo mimoburzový trh. [4, 6, 11]

V predchádzajúcom texte sme sa zaoberali finančným systémom a popísali jeho dôležité jednotlivé úlohy vo svete ekonomiky. Základným prvkom finančných trhov sú akcie a dlhopisy. Na Slovensku kapitálový trh stále nezohráva odpovedajúcu dôležitú funkciu ako je to v iných svetových ekonomikách, čo je hlavne získavanie kapitálu pre spoločnosti a investovanie voľných peňazí. Akcia je cenný papier, ktorého hodnota spočíva v tom, že tento cenný papier predstavuje podiel na kapitále spoločnosti, respektíve akcie sú cenné papiere, ktoré svojmu vlastníčkovi zaručujú podiel na

celkovom majetku spoločnosti. Akcie môže vlastníť hocikto, kto by vlastnil papier s obsahom, že je majiteľom akcie určitej spoločnosti a nominálnou hodnotou akcie. Obchod s akciami javí ľuďom ako proces s množstvom čísel a presunom veľkého množstva peňazí, kde každý obchodník koná za účelom čo najväčšieho zisku. Všeobecne platí pravidlo kde jeden získa, tak druhý stráca. [7, 11, 21]

Emisia akcií – IPO (Initial public offering)

Niektoré úspešné spoločnosti pri svojej expanzii a za účelom čo najviac uspokojiť potreby zákazníkov vykonajú emisiu. Tieto zámy si občas vyžadujú množstvo investícií, na ktorých zisk sa preberajú dve principiálne možnosti, respektíve ide o vlastné a cudzie zdroje. Akcie predstavujú kapitál spoločnosti, ktorý je v nej viazaný bez časového obmedzenia. Ďalej sa predpokladá, že ak sú veritelia roztrúsení, znamená to rozdielny prístup k ich právam ako pri úvere. Ak firma nezaznamená úspech v tomto roku, tak sa naskytuje možnosť odložiť vyplácanie dividend do ďalších rokov a pod. Popíšeme prvú emisiu spoločnosti inak nazývanú ako Initial Public Offering. Z anglického názvu je zrejmé, že spoločnosť ide emitovať po prvý krát. Po tomto rozhodnutí je spoločnosť nútená nájsť sprostredkovateľa (underwriter), s ktorým vypracujú náležitosti vychádzajúce z právnych predpisov. V USA ide o registration statement, teda registračné vyhlásenie, za pomoci ktorého sa snažia získať emisiu od Securities and Exchange Commission, na Slovensku je podávaná žiadosť spolu aj finančnými výkazmi a prospektom obsahujúce potrebné údaje. Emisné povolenie je udelené Ministerstvom Financíí. Ak sa dané orgány rozhodnú pozitívne, potom upisovateľ musí nájsť spoločnosť investorov. Tí v prvom kroku kúpia akcie spoločnosti a následne ich predávajú verejnosti. V tomto kroku sú dve možnosti:

- Najlepšia snaha – best efforts – cieľom je predať čo najviac akcií, pričom sa tie nepredané sa vrátia späť spoločnosti, ktorá ich emitovala.
- Všetko alebo nič – all-or-none – buď sa predajú všetky akcie alebo žiadnu, ak nastane druhý prípad tak sa akcie vrátia spoločnosti.

Sprostredkovateľov zárobok pochádza z toho, že predáva akcie za cenu, ktorá je vyššia ako tá za ktorú akcie kúpil. Tento rozdiel sa volá rozpätie alebo spread. Ďalšou možnosťou je dohoda medzi eminentom a sprostredkovateľom, ten dostane od spoločnosti waranty alebo opcie na nákup akcií za nižšiu cenu. Strategickým plánom sprostredkovateľov je cielené mierne podcenenie akcií, čím sa dosiahne to, že

záujemcovia akcií rýchlo akcie nakúpia, čo v konečnom dôsledku znamená, že cena akcií následne porastie a tým vznikne priestor pre ich zisk. Kladná stránka upísania akcií spočíva v niekoľkých výhodách, napríklad zníženie nákladov na kapitál, firma je známejšia, vrcholový manažment je možné motivovať odmenou vo forme upísania akcií, respektíve opciách a pre firmu vznikne nový nástroj na vyhodnocovanie fungovania spoločnosti. [7, 10, 11]

Akcie možno diferencovať podľa mnohých kritérií, pričom si popíšeme tie najpoužívanejšie. Jedným z kritérií je spôsob vyjadrenia spoluvlastníctva:

- Akcie znejúce na pevnú sumu – sú oveľa viac rozšírené ako podielové akcie, zároveň majú stanovenú nominálnu hodnotu, napríklad 3000 €. Táto cena je na cennom papieri priamo uvedená.
- Podielové akcie – sú menej obľúbené ako akcie s pevnou sumou. Podielové akcie nemajú uvedenú pevnú sumu, ale majú uvedený podiel, napríklad 1 / 500, k vlastnému imaniu spoločnosti.

Ďalším spôsobom rozdelenia je spôsob označenia majiteľa. Označenie akcie na doručiteľa znamenajú väčšie možnosti, kde pri predávaní a nakupovaní ide o bežný predaj/kúpu cenného papiera z rúk do rúk. Ak sa jedná o akcie na meno, ide o komplikovanejšiu operáciu. Ak chceme s akciou obchodovať, musí sa každá operácia zapísať do knihy akcionárov príslušnej spoločnosti a následne sa vystaví rubopis. Zároveň, ak je to v štatúte spoločnosti, spoločnosť bude viazať prevod akcií na súhlas predstavenstva, čo znamená komplikovanejší spôsob obchodovania ako pri akciách na doručiteľa. Nasledujúcim kritériom rozdelenia je forma, akou sú akcie vydané. Listinné akcie sú vydané v bežnej papierovej forme, pričom zaknihované akcie majú nehmotnú podstatu a sú zaznamenané v centrálnej evidencii. Akcionári vlastnia iba výpis, ktorý potvrdzuje to, že sú vlastníkami náležitých akcií. Na Slovensku má úlohu evidencie na starosti Stredisko Cenných Papierov. Najdôležitejším rozdelením akcií je podľa rozsahu práv a povinností. Prvým typom akcií podľa týchto kritérií sú kmeňové akcie. Tento typ umožňuje akcionárom najvyšší podiel na riadení spoločnosti. Títo vlastníci by mali mať najväčší podiel na správnom riadení a existencii firmy. Motiváciou je premenlivá výška dividendy, ktorá je úmerná prospechu firmy v onom roku. Najvyšším orgánom firmy je valné zhromaždenie akcionárov, na ktorom sa zároveň odsúhlasuje dozorná rada danej spoločnosti, schvaľuje sa účtovná závierka, rozdeľuje sa zisk spoločnosti a rieši sa tu aj strategická stránka spoločnosti. Volenie dozornej rady je vykonávané dvomi spôsobmi,

tradičným hlasovaním a kumulatívnym hlasovaním. Tradičné hlasovanie udeľuje každému akcionárovi dať jeden hlas každému kandidátovi. Tradičné hlasovanie je nevýhodné pre menšinových vlastníkov spoločnosti, nakoľko im potláča možnosť obsadenia miest v dozornej rade. Je to dôsledkom toho, že ak sa majoritní vlastníci rozhodnú hlasovať ako blok a majú 70% majoritu a minoritní len 30%, tak majoritní vlastníci môžu pre každého kandidáta dať 70% hlasov a tým zamedziť účasť minoritným vlastníkovi v dozornej rade. Na základe tohto sa menšinoví vlastníci pretlačiť voľby dozornej rady kumulatívnym spôsobom. Tento princíp umožňuje akcionárovi udeliť kandidátovi toľko hlasov, koľko vlastní akcií. Majme predchádzajúce rozdelenie majoritných 70% vlastníkov a minoritných 30% vlastníkov, počet všetkých akcií je tisíc a kandidátov do dozornej rady je päť. Z toho vyplýva, že majoritná skupina má k dispozícii 3500 hlasov (700 akcií x 5 kandidátov) a minoritná skupina má k dispozícii 1500 hlasov (300 x 5). Ak by nastala obdobná situácia a majoritní vlastníci by hlasovali v blokoch pre piatich majoritných kandidátov a tí by dostali po 700 hlasov, pričom ak minoritný akcionári nominujú napríklad dvoch kandidátov, tak sú im schopní dať po 750 hlasoch, čo im zaručuje zastúpenie v dozornej rade. Nakoľko sú akcionári vlastníkmi spoločnosti, tak majú právo aj na rozhodnutie o zárobkoch spoločnosti. Tieto výnosy sú rozdelené buď v podobe dividend alebo sa ponechávajú v spoločnosti. Ak si tieto prostriedky firma nechá, akcionárovi sa tým zvýši investícia v spoločnosti, nakoľko imanie spoločnosti je väčšie, ktoré sa v niektorých situáciách vzťahuje k účtovnej hodnote podniku (book value). Účtovná hodnota podniku je rozdiel medzi aktívami a pasívami, cudzími zdrojmi vo firme a predstavuje akcionárske investície do podniku. Vlastné imanie predelené počtom predaných akcií, dostaneme kurz alebo jednotkovú cenu akcie. V prípade že firma dosiahne zisk a tento zisk si ponechá, účtovná hodnota podniku vzrastie. Ak je firma prosperujúca, tak je schopná vyplácať dividendy a zároveň navyšovať účtovnú hodnotu podniku. Medzi nasledujúce práva vlastníkov kmeňových akcií patria, právo na podiel z likvidačného výnosu pri likvidácii spoločnosti, právo na zachovanie pôvodného podielu na majetku firmy. Naopak medzi úlohy vlastníkov kmeňových akcií patrí zaplatiť spoločnosti úplnú hodnotu akcií, ktoré upísal a ručiť za záväzky spoločnosti do výšky ešte nesplatennej hodnoty akcií. Prioritné akcie slúžia na získavanie vlastného kapitálu z vonkajších zdrojov vydávaním svojich akcií, pričom na Slovensku môžu takéto akcie predstavovať až 50% z celkového základného imania. Tieto akcie prinášajú investorovi priamy výnos,

ktorý sa vypláca vlastníkovi akcií po zdanení zisku, takže ak spoločnosť v danom období nevykáže zisk, tak akcionár prichádza o svoju dividendu. Dividenda môže byť kumulatívna, to znamená že ak sa úloha vyplatenia dividendy hneď neruší ale prenáša sa do ďalšieho účtovného obdobia. Prioritné akcie predstavujú zdroj financovania podniku, ktorý má spoločnosť trvale k dispozícii, preto sa firma nemusí zaoberať ich splatením, čo môže byť výhodou aj nevýhodou. Nakoľko tento typ akcií firma nemusí odkúpiť, nie je potrebné akumulovať financie na ich splatenie a podnik môže tieto zdroje využiť iným spôsobom, napríklad investíciami do spoločnosti. Nevýhodou je, ak by spoločnosť chcela zmeniť kapitálovú politiku a rozhodla by sa nahradiť prioritné akcie financovaním z cudzích zdrojov. V tom prípade by došlo k umoreniu prioritných akcií, pričom ich spoločnosť môže kúpiť na sekundárnom trhu za podmienok, že by poskytla doterajším vlastníkom atraktívnu cenu. Ak by mala spoločnosť záujem o kontrolu nad prioritnými akciami, spoločnosť má možnosť emitovať akcie spolu s právom na spätné odkúpenie. Toto právo obsahuje niekoľko vlastností, prvou je, že odkúpenie akcií je právo, nie povinnosť, druhou vlastnosťou je že je cena vopred určená a po tretie môže firma povinná uhradiť penalizáciu vo forme ročnej dividendy. Štvrtou vlastnosťou je to, že zaniká právo na dividendu po uplatnení odkúpeného práva. Daktoré emisie môžu obsahovať povinný umorovací fond. Znamená to, že spoločnosť musí každoročne umoriť časť emisie. Takýto typ emisií je podobný dlhopisom, ktoré sú dočasným zdrojom kapitálu pre potreby podniku. Prioritné akcie majú v porovnaní s kmeňovými akciami určité výhody. Prvou výhodou je to, že dividendy z prioritných akcií sa vyplácajú pred dividendami z kmeňových akcií, to značí že dividendy z kmeňových akcií sa nesmú vyplatiť pokiaľ neboli vyplatené dividendy z prioritných akcií. Zároveň ďalšou výhodou môže byť to, že dividendy z prioritných akcií majú pevnú výšku percentuálneho výnosu, čo je výhodné ak spoločnosť v danom období nevykazuje zisk. Je zrejmé, že ak spoločnosť vykazuje väčší zisk tak je výhodnejšie vlastniť kmeňové akcie. Ak nastane likvidácia spoločnosti, tak sa najskôr uspokojujú požiadavky vlastníkov prioritných akcií. Spomenuté výhody sú kompenzované tým, že vlastníci prioritných akcií nemajú rozhodovacie práva. Emisia prioritných akcií sa dávajú spoločnosti možnosť získania kapitálu, ich cena je vyššia ako cena pri dlhodobom úvere, ale nemusia v danom termíne platiť určitú sumu zároveň si „netrúsia“ volebné právo vlastníci kmeňových akcií. [7, 10, 15]

Prioritné akcie sú rizikovejšie ako dlhopisy, teda ak firma nie je schopná platiť obligácie pri dlhopisoch, veritelia môžu podať na súd návrh na konkurz firmy. Pri prioritných akciách nie je firma zákonom nútená platiť dividendy. Ďalším rozdielom je to, že nominálna hodnota dlhopisov musí byť splatená, čo neplatí pre prioritné akcie. Jedinou formou ako získať späť svoje investície je ich predaj na sekundárnom trhu. Zároveň trhové ceny prioritných akcií sú menej stále ako ceny dlhopisov. Nasledujúcim rozdielom medzi prioritnými akciami a dlhopismi je iná miera výnosu. Vyššie riziko pri prioritných akciách je kompenzované vyšším výnosom oproti dlhopisom. Pri prioritných akciách nepôsobí daňový štít, preto je tento spôsob financovania pre firmy drahší. V USA sa zdaňuje len 30% príjmov z dividend, preto investičné spoločnosti uprednostňujú investície do prioritných akcií. Investorom sú vyplácané dividendy z prioritných akcií, preto je vhodná analýza schopnosti podniku tieto záväzky uplatňovať. Dividendy zväčša vychádzajú zo zisku spoločnosti po zdanení, zároveň spoločnosť môže dividendy vyplácať aj keď v danom období vykazuje stratu. Tento krok môže znamenať, že spoločnosť je finančne stabilná a ide iba o dočasné komplikácie. Schopnosť spoločnosti vyplácať dividendy z prioritných akcií môže zisťovať na základe pomerových ukazovateľov likvidity. Čím má spoločnosť viacero likvidných prostriedkov, tým je schopnosť vyplácania dividend lepšia. Nevýhodou prioritných akcií je spomínaná vyššia rizikovosť, hlavne ak nie je kompenzovaná značným výnosom. Investorom síce prinášajú pravidelný zdroj príjmu, ale takisto ako každé iné cenné papiere neochraňuje ho pred ich infláciou. Jej nárast zapríčiňuje pokles reálnej hodnoty vyplatených dividend. Všeobecne sa prioritné akcie považujú za menej obchodovateľné, čo môže mať za následok rozdiel medzi požadovanou a ponúkanou cenou. [6, 7, 11]

Za účelom zatraktívniť prioritné akcie, pridelujú im emisie ďalšie práva:

- hlasovacie právo, ak firma nie je schopná vyplatiť dividendy, pridelí sa hlasovacie právo prioritným akciám za tým účelom, aby sa ich vlastníci mohli podieľať na riadení firmy;
- pohyblivý výnos, ktorý je stanovený podľa úrokovej miery v hospodárstve. Nakoľko sa táto hodnota mení, mení sa aj výnos príslušnej emisie prioritných akcií. Ďalším spôsobom ako určiť pohyblivý výnos je právo participácie, ktoré hovorí, že sa vlastníci prioritných akcií môžu podľa stanoveného kľúča podieľať

na vyššej dividende, pokiaľ sa kmeňovým akcionárom vyplácajú vysoké dividendy;

- právo premieňať prioritné akcie za kmeňové. Pri emisii sa stanovuje termín, dokedy je možné túto transformáciu vykonať. Takéto akcie môžu mať menší výnos ako bežné prioritné akcie, čo je dôsledok toho, že ich vlastníci majú nádej na dodatočný zisk, pokiaľ budú mať kmeňové akcie pred transformáciou vyšší kurz.

Akciová spoločnosť teda emituje svoje akcie buď pri svojom vzniku alebo za účelom získať kapitál. Ak je verejne vlastnená akciová spoločnosť, k emisii dochádza na primárnom trhu. Najviac obchodov s akciami sa uskutočňuje ale na sekundárnom trhu, kde jednotliví finančníci kupujú a predávajú za účelom zisku. Z obchodov uzatvorených na sekundárnom trhu spoločnosť nezískava priamy kapitál. Najväčšou takouto burzou je New York Stock Exchange. [11, 13, 21]

2.2 Simulácia vývoja cien akcií

Markov proces je zvláštny typ stochastického procesu, kde iba aktuálna hodnota premennej je relevantná pre predikciu budúcnosti. Ceny akcií sa obvykle predpokladajú Markovym procesom. Predpokladajme, že cena akcií IBM je teraz 100 \$. Ak cena akcií nasleduje Markov proces, naša predikcia budúcnosti by nebola ovplyvnená cenou akcie v minulosti. Jedinou relevantnou informáciou je iba to, že cena akcie je teraz 100 \$. Ceny akcií v budúcnosti sú neisté a musia byť vyjadrené v pravdepodobnostných rozdeleniach. Markova vlastnosť je v súlade s vývojom cien akcie, teda má slabú trhovú efektivitu. To znamená, že súčasná cena akcie konfiguruje všetky informácie obsiahnuté v zázname historických cien. Ak by slabá efektivita trhu nebola pravda, potom by technický analytici dosahovali nadpriemerné zisky na základe interpretácie grafov historických cien. Slabá efektivita trhu vychádza z konkurencie na jednotlivých trhoch, na ktorom veľa investorov sleduje dianie na trhu. Predpokladajme, že by investori vynášli patent, ktorý by im s 65% pravdepodobnosťou zaistil strmý nárast cien. Investori by sa následne pokúsili o kúpenie týchto akcií, čo by automaticky viedlo k rastu ceny konkrétnej akcie. Tento fakt zároveň vylučuje výhody spomínaného patentu.

Majme premennú, ktorá má vlastnosti Markovho stochastického procesu. Predpokladajme, že jej momentálna hodnota je 10 a jej zmena v priebehu jedného roku

je $\mathcal{O}(0, 1)$, kde $\mathcal{O}(\mu, \sigma)$ označuje normálne pravdepodobnostné rozdelenie so stredovou hodnotou μ a štandardnou odchýlkou σ . Aké je pravdepodobnostné rozdelenie zmeny hodnoty premennej po dobu dvoch rokov? Zmena hodnoty premennej v dvoch rokoch je suma dvoch normálnych rozdelení, pričom každé ma stredovú hodnotu 0 a štandardnú odchýlku 1. Ak majú premenné Markovovu vlastnosť, potom majú pravdepodobnostné rozdelenia vzájomne nezávislé. Takže ak spočítame dve normálne pravdepodobnostné rozdelenia, dostávame normálne rozdelenie so stredovou hodnotou, ktorá je sumou jednotlivých stredových hodnôt a odchýlka je sumou odchýlok. Takže zmena premennej po dvoch rokoch je $\mathcal{O}(0, \sqrt{2})$, nakoľko rozptyl je mocninou smerodajnej odchýlky. Predpokladajme, že chceme zistiť zmenu po dobu 6 mesiacov. Potom bude rozdelenie nasledovné $\mathcal{O}(0, \sqrt{0,5})$. [4]

2.2.1 Wienerov proces

Proces, ktorým sme sa zapodievali je známy ako Wienerov proces. Ide o určitý typ Markovho stochastického procesu, niekedy označovaný ako Brownov pohyb. Brownov pohyb pomenovaný po anglického botanika Roberta Browna, ktorý v roku 1827 pod mikroskopom pozoroval neustály a náhodný pohyb veľmi malých peľových zrníkov vo vode. Zároveň zistil, že čím sú zrnká menšie, tým je pohyb zrníkov živší. Brown sa domnieval, že tento pohyb je zapríčinený životom častíc. Túto domnienku vyvrátilo jeho ďalšie pozorovanie, keď sledoval pohyb častíc farbiva. Štatistickú teóriu spísal v roku Marian Smoluchowski a nezávisle po ňom v roku 1905 Albert Einstein v *Annalen der Physik*. Albert Einstein si z počiatku vôbec neuvedomoval súvislosť s Brownovým pohybom. Častice mikrometrických rozmerov vykonávajú trhavý, úplne nepravidelný pohyb, ktorý je spôsobený molekulami vody, pričom vlastnosť pohybu vôbec nezávisí na ich chemickom zložení ani na vonkajších podmienkach. Rozmanitosť pohybu závisí od veľkosti častíc a od teploty prostredia. Smer častíc sa veľmi rýchlo mení, bežne asi 10^{12} krát za sekundu. Pohyb častíc je spôsobený tým, že v okolí zrnka je niekoľko molekúl vody. V niektorom okamihu prevažuje náraz z jednej strany a výsledná sila posunie zrnko určitým smerom. V ďalšom momente prevažuje náraz z druhej strany a výsledná sila posunie zrnko zase inam. [4, 12]

Formálne vyjadrené, premenná z vykonáva Wienerov proces ak spĺňa dve nasledujúce vlastnosti:

Zmena Δz počas krátkej časovej periódy Δt je

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

kde ϵ má štandardizované normálne rozdelenie $\emptyset(0,1)$, zároveň hodnoty Δz pre akékoľvek dva krátke časové intervaly Δt sú nezávislé.

To vychádza z prvej vlastnosti, že Δz má vlastné normálne rozdelenie so stredovou hodnotou $\Delta z = 0$

štandardnou odchýlkou $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$

rozptylom $\Delta z = \Delta t$

Druhá vlastnosť vychádza z toho, že z má vlastnosti Markovho procesu.

Predpokladajme, že zmena hodnoty z počas relatívne dlhej časovej periódy je T . Môžeme to označiť ako $z(T) - z(0)$. Môžeme to pokladať ako sumu zmien hodnôt premennej z v N krátkych časových intervaloch s dĺžkou Δt , kde

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Takže

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

kde ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) s rozdelením $\emptyset(0,1)$. Z druhej vlastnosti Wienerovho procesu vieme, že ϵ_i sú vzájomne nezávislé. Následne zo vzťahu $z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$

vieme, že $z(T) - z(0)$ má normálne rozdelenie so

stredovou hodnotou $[z(T) - z(0)] = 0$

rozptylom $[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T$

štandardnou odchýlkou $[z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$. [4]

2.2.2 Zovšeobecnený Wienerov proces

Stredná hodnota zmeny za určitú časovú jednotu v stochastickom procese sa označuje ako výnos a rozptyl v určitej časovej jednotke ako variance rate. Základný Wienerov proces predpokladá nulový výnos a variance rate 1. Nulový výnos znamená, že v budúcnosti očakávame práve terajšiu hodnotu premennej z . Variance rate 1 znamená, že rozptyl premennej z časovom intervale s dĺžkou T sa rovná T . Zovšeobecnený Wienerov proces pre premennú x môže byť definovaný ako

$$dx = a dt + b dz$$

kde a a b sú konštanty. V predchádzajúcom vzťahu $a dt$ reprezentuje očakávaný výnos premennej x za jednu časovú jednotku. Pokiaľ z predchádzajúceho vzťahu vynecháme $b dz$ dostaneme, $dx = a dt$, čo znamená že $dx/dt = a$. Integráciou podľa času dostaneme

$$x = x_0 + at$$

kde x_0 je hodnota x v čase 0. V časovej perióde s dĺžkou T , premenná x narastá o hodnotu aT . Druhá časť vzťahu $b dz$ označuje prídanie premenlivosti. Hodnota tejto premenlivosti je b krát Wienerov proces. Wienerov proces má štandardnú odchýlku 1. To znamená, že b krát vykonaný Wienerov proces má štandardnú odchýlku b . V krátkom časovom intervale Δt , zmena Δx je daná vzťahmi $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ a $dx = a dt + b dz$, kde ϵ je ako aj predtým štandardizované normálne rozdelenie. Takže Δx má štandardizované normálne rozdelenie so

stredovou hodnotou $\Delta x = a\Delta t$

štandardnou odchýlkou $\Delta x = b\sqrt{\Delta t}$

rozptylom $\Delta x = b^2\Delta t$.

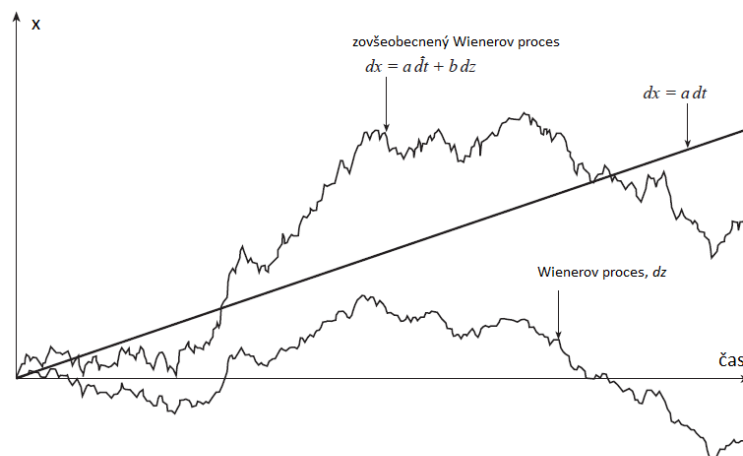
Podobné argumenty dané Wienerovým procesom ukazujú, že zmena v premennej x v rôznom časovom intervale T má normálne rozdelenie s

Stredovou hodnotou zmeny $x = aT$

Štandardnou odchýlkou zmeny $x = b\sqrt{T}$

Rozptylom zmeny $x = b^2T$

Z toho vyplýva, že Wienerov proces daný vzťahom $dx = a dt + b dz$ má očakávaný výnos a a variance rate b^2 . [3]



Obr. 12. Zovšeobecnený Wienerov proces s parametrami $a = 0,3$ a $b = 1,5$ [4]

2.2.3 Modelovanie ceny akcie

Bolo by lákavé, ak by ceny akcií nasledovali Wienerov proces, to by znamenalo, že by bol konštantný očakávaný výnos aj variance rate. Avšak, tento model nedokáže zachytiť kľúčové atribúty, ktoré ovplyvňujú ceny akcií. To znamená, že očakávaný výnos pre investorov nezávislý od cien akcií. Ak investori očakávajú ročný 14% zisk pokiaľ je cena akcií 10\$, potom *ceteris paribus*, takisto očakávajú ročný 14% zisk pokiaľ je cena akcií 50\$. Je zrejmé, že konštantný očakávaný výnos je nevhodný a je potrebné ho nahradiť za predpokladu, že očakávaný výnos je konštanta. Pokiaľ je S cena akcie v čase t , potom očakávaný výnos pre S by mal byť predpokladaný ako μS kde μ je konštantný parameter. To znamená, že v krátkom časovom intervale Δt , očakávaný nárast ceny akcie S je $\mu S \Delta t$. Parameter μ je očakávaný rate akcie vyjadrený v decimálnom tvare. Pokiaľ je volatilita akcie vždy nulová, potom môžeme tento model implikovať vzt'ahom

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Ak je limita $\Delta t \rightarrow 0$,

$$dS = \mu S dt$$

alebo

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Integráciou medzi časom 0 a časom T dostaneme

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

kde S_0 a S_T je cena akcie v čase 0 a v čase T . Predchádzajúci vzt'ah ukazuje, že pokiaľ je variance rate nula, tak cena akcie rastie kontinuálne o μ za jednu časovú jednotku. V skutočnosti ale ceny akcií poukazujú určitú volatilitu. Rozumným predpokladom je to, že rozptyl percentuálneho zisku v krátkej časovej perióde Δt je rovnaký bez ohľadu na cenu akcie. Inak povedané, investor má neistý percentuálnu návratnosť, pokiaľ je cena akcie 50\$ alebo 10\$. Z toho vyplýva, že štandardná odchýlka zmeny v krátkej časovej perióde Δt je závislá od ceny akcie, z čoho vychádza model

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

alebo

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz.$$

Posledný model sa všeobecne používa na modelovanie správania sa cien akcií. Premenná σ je volatilita ceny akcie. Premenná μ je očakávaný návrat. Tento model sa nazýva geometrický Brownov pohyb. Tento model v diskrétnom čase je nasledovný

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

alebo

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

Premenná ΔS je zmena ceny akcie S , v malom časovom intervale Δt a ϵ má štandardizované pravdepodobnostné rozdelenie. Parameter μ je očakávaný návrat za jednotkovú časovú jednotku a parameter σ je volatilita ceny akcie. Ľavá strana rovnice nám poskytuje návrat akcie v krátkej časovej perióde Δt . Členy $\mu \Delta t$ označujú očakávanú hodnotu návratu a $\sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}$ je stochastický komponent modelu. Rozptyl stochastickej časti je $\sigma^2 \Delta t$. Model geometrického Brownovho pohybu nám hovorí, že $\Delta S/S$ má normálne rozdelenie so stredovou hodnotou $\mu \Delta t$ a štandardnou odchýlkou $\sigma \sqrt{\Delta t}$. Inak povedané

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

Definujeme

$$G = \ln S$$

a keďže

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

čo vychádza z rovnice

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

znamená, že proces nasledujúci G je

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz.$$

Keďže μ a σ sú konštanty, táto rovnica ukazuje, že $G = \ln S$ vychádza zo zovšeobecneného Wienerovho procesu. Má konštantný výnos $\mu - \sigma^2/2$ a konštantu variance rate σ^2 . Zmena v $\ln S$ medzi časom 0 a časom T má normálne rozdelenie, so stredovou hodnotou $(\mu - \sigma^2/2)T$ a rozptyl $\sigma^2 T$. To znamená, že

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

kde S_T je cena akcií v budúcom čase T . S_0 je začiatková cena akcie v čase 0 a $\mathcal{N}(m, s)$ označuje normálne rozdelenie so stredovou hodnotou m a štandardnou odchýlkou s . [4]

3 SIMULÁCIA VÝVOJU CIEN AKCIÍ POMOCOU METÓDY MONTE CARLO

3.1 Simulácia vývoju cien akcií v MS Excel

V tejto kapitole je popísaný priebeh aplikácie, v ktorej som aplikoval metódu Monte Carlo na simuláciu cien akcií jednotlivých spoločností. Používateľ má na titulnom hárku s názvom Parametre v programe Excel možnosť pridávať skratky (tickere) jednotlivých spoločností, ktoré sú predmetom jeho záujmu. Zároveň zadá časové obdobie, teda počiatočný a konečný dátum v ktorom sa majú dané informácie o obchodovaní stiahnuť. Tieto informácie sa sťahujú zo serveru <http://finance.yahoo.com/>. Nakoľko v modeli, na základe ktorého budeme simulovať ceny akcií v budúcnosti pracujeme na dennej frekvencii, tak aj dáta stiahnuté zo serveru v tejto forme.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4	Parametre					
5	Začiatočný dátum	2013-01-01				
6	Konečný dátum	2013-12-31				
7	Frekvencia (d=denná)	d				
8						
9						
10						
11	Zadaj skratky spoločností					
12	MSFT					
13	HPQ					
14	AAPL					
15	WMT					
16						

Spustiť

Obr. 13. Úvodný hárok s názvom Parametre [vlastné spracovanie]

Po stlačení tlačidla „Spustiť“ sa spustí makro Sub StiahniData(), kde sme si definovali nasledujúce premenné

Dim frekvencia As String

Dim poslednyRiadok As Integer

Dim skratkaAkcie As String

Dim ws As WorkSheet

kde frekvencia je String, inak textový reťazec, a vloží sa do neho obsah bunky B7, z obrázku 13 je zrejmé, že to bude „d“. Premenná poslednyRiadok je typu Integer, čo je

formát pre celé čísla. Do tejto premennej vložíme hodnotu reprezentujúcu posledný riadok v stĺpci A, kde je posledný ticker. Túto premennú využijeme pri cykle, ktorý si nasledujúcim texte popíšeme. Premenná skratkaAkcíe je typu String a budeme do nej vkladať tickere, čo sú skratky identifikujúce spoločnosť, ktorej sa akcie týkajú. Premenná ws je typu hárok.

Po deklarácii premenných sme použili tri príkazy, ktorými sme vyplili upozornenia, automatické výpočty a automatické aktualizovanie obrazovky.

Vykoná sa cyklus pre všetky hárky v súbore, v ktorom je podmienka, ak sa názov momentálneho hárku nerovná názvu Parametre alebo model, tak sa hárok vymaže. Týmto cyklom zabezpečíme, aby nám nevznikalo veľké množstvo hárkov a mali sme vždy iba hárky pre konkrétne spoločnosti, úvodný hárok Parametre a hárok model.

Nasleduje cyklus, ktorý začína na hodnote ticker = 12 a končí na hodnote poslednyRiadok. Do premennej skratkaAkcíe sa načíta ticker, ak je obsah tejto bunky prázdny, tak sa prejde na koniec cyklu a pokračuje sa ďalšou iteráciou. Označí sa hárok model, zavolá sa procedúra vymaz, ktorá vymaže obsah stĺpcov A až F hárka model. Ďalej sa zavolá procedúra StiahniCenyAkcii s parametrami

StiahniCenyAkcii(skratkaAkcíe, Worksheets("Parametre").Range("\$b\$5"),
Worksheets("Parametre").Range("\$b\$6"), frekvencia),

premenná skratkaAkcíe obsahuje ticker, druhý atribút načíta z hárku parametre začiatočný dátum pre stiahnutie dát, tretí naopak konečný dátum a posledný, frekvencia, obsahuje frekvenciu s akou sa majú dáta stiahnuť. Táto procedúra najskôr rozdelí celý začiatočný a konečný dátum na jednotlivé dni, mesiace a roky. Toto sa vykoná z dôvodu spôsobu zadávania URL adresy na server Yahoo Finance. Tento dotaz je nasledovný

`http://ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s=" + skratkaAkcíe + "&a=" + ZacMesiac + "&b=" + ZacDen + "&c=" + ZacRok + "&d=" + KonMesiac + "&e=" + KonDen + "&f=" + KonRok + "&g=" + freq,`

kde do s= sa vloží ticker, do a= začiatočný mesiac, b= začiatočný deň, c= začiatočný rok, d= konečný mesiac, e= konečný deň, f= konečný rok a g= frekvencia dát. Stiahnuté dáta sa vložia do riadkov aktívneho hárku, počnúc bunkou A1. Všetky tieto dáta sú vložené do po dňoch do jednotlivých riadkov stĺpca A. Preto je ich potrebné upraviť a to rozdelením do stĺpcov. Tento krok vykonáme príkazom TextToColumns.

Do bunky J8 sa vloží hodnota odpovedajúca počtu dní, za ktoré sa stiahli dáta. Napríklad z nášho príkladu sme zadali dátum od 1.1.2013 do 31.12.2013. V tomto roku sa obchodovalo 252 dní, čo je hodnota obsiahnutá v bunke J8 práve pre tento príklad.

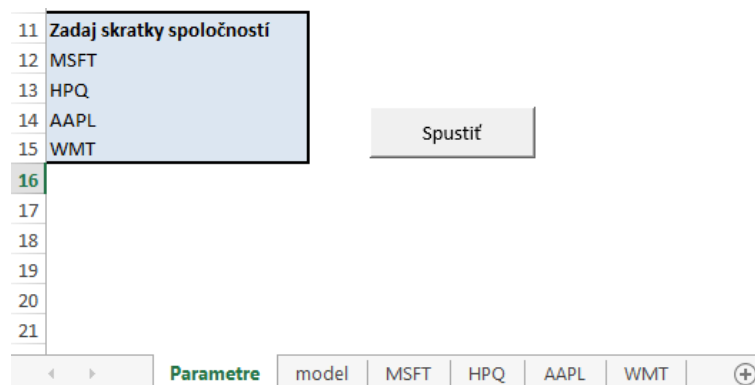
Do bunky J3 sa vypočíta výnos za celé obdobie vzťahom $\text{Sheets("model").Range("j3").Value} = \text{Cells}(2, 5) / \text{Cells}(\text{riadok}, 5) - 1$, čo je podiel uzatváracej ceny konečného dňa ku dňu počiatočného dňa mínus jedna.

Príkazom $\text{ActiveCell.FormulaR1C1} = "=STDEV(R[-0]C[-5]:R[" \& \text{riadok} - 2 \& "]C[-5]) / AVERAGE(R[-0]C[-5]:R[" \& \text{riadok} - 2 \& "]C[-5])"$ sa vypočíta volatilita za celé obdobie pomocou funkcie STDEV s rozsahom od buniek (R[-0]C[-5]:R[" & riadok - 2 & "]C[-5]). Tieto atribúty sa počítajú zo zatváracej ceny akcií za celé obdobie. Nakoľko sa nachádzame v bunke J2, tak sme sa museli posunúť o 0 riadkov a -5 stĺpcov až po posledný riadok a -5 stĺpcov.

Aktívny hárok sa uloží za všetky existujúce hárky a prideli sa mu názov podľa tickera. Vykoná sa procedúra formatovanie, ktorá upraví formátovanie stiahnutých dát. Cyklus sa následne opakuje pre ďalší ticker.

Po vykonaní všetkých cyklov sa opätovne zapne upozorňovanie, aktualizácia obrazovky a automatizácia výpočtov. Celý zdrojový kód je priložený v prílohe B.

Druhý hárok s názvom model slúži ako model pre generujúce sa hárky jednotlivých spoločností. Ak by používateľ chcel alebo potreboval vykonať určité zmeny pri výpočte, doplnení niektorých informácií, zmeniť graf poprípade iné detaily, je potrebné vykonať úpravu v tomto hárku. Program spracuje tak, že sa hárok model skopíruje pre každú jednu spoločnosť, vymaže sa obsah predchádzajúcich stiahnutých údajov a následne sa do neho vložia údaje pre konkrétnu spoločnosť. Po kompletnom vykonaní cyklu pre vytvorenie jednotlivých hárkov, v hárku model ostávajú údaje poslednej spoločnosti, z obr. 13. je zrejmé, že to budú údaje spoločnosti WMT, teda Wal-mart Stores Inc.



Obr. 14. Hárky programu [vlastné spracovanie]

Do jednotlivých hárkov sa stiahnu údaje zodpovedajúce zadaným parametrom. Do jednotlivých stĺpcov sa vkladajú nasledujúce hodnoty: Date, Open, High, Low, Close, Volume, Adj Close. Je zrejmé, že Date je Dátum, Open je otváracia cena akcie, High je maximálna cena akcie, Low je minimálna cena akcie, Close je zatváracia cena akcie a Volume je celkový počet uzatvorených kontraktov priebehu dňa. Adj close je upravená cena, kvôli dividendám a rozdeleniam akcií. S týmto údajom nebudeme pracovať a preto vymažeme celý stĺpec G v jednotlivých hárkoch konkrétnych spoločností. Údaje sa do hárkov vkladajú od najnovších dát po najstaršie, takže najvyššie v hárku budú údaje odpovedajúce konečnému dňu. Ak používateľ zadá konečný deň, v ktorý sa neobchodovalo, stiahnu sa údaje len pre dni, ktoré sa obchodovalo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	
2	31.12.2013	78.66	78.87	78.35	78.69	3859100	78.19	
3	30.12.2013	78.61	78.88	78.43	78.63	3086500	78.13	
4	27.12.2013	78.6	78.93	78.3	78.47	3050000	77.97	
5	26.12.2013	78.06	78.52	77.97	78.39	2778200	77.89	
6	24.12.2013	77.95	78.24	77.63	78.01	2094900	77.51	
7	23.12.2013	77.73	77.99	77.37	77.87	4491900	77.37	
8	20.12.2013	77.28	77.88	77.25	77.43	9568800	76.93	
9	19.12.2013	77.67	77.83	77.2	77.24	5955400	76.74	
10	18.12.2013	77.28	77.98	76.81	77.94	10633700	77.44	
11	17.12.2013	77.74	77.89	77.22	77.25	5765400	76.75	
12	16.12.2013	78.25	78.5	77.6	77.74	6146900	77.24	
13	13.12.2013	78.73	78.77	77.93	78.08	4981200	77.58	
14	12.12.2013	79.11	79.26	78.4	78.5	5691600	78	
15	11.12.2013	79.1	79.72	79.05	79.09	5998800	78.58	
16	10.12.2013	79.72	79.8	79.05	79.08	6285700	78.57	
17	9.12.2013	80.24	80.43	79.7	79.95	4491600	79.44	
18	6.12.2013	79.71	80.23	79.64	79.94	5088100	79.43	
19	5.12.2013	79.72	79.77	78.87	79.44	6450000	78.93	
20	4.12.2013	80.64	81.37	79.91	80.22	7641200	79.71	

Obr. 15. Ukážka formátu stiahnutých dát [vlastné spracovanie]

V ďalšom krokom sa prechádza ku simulácii. Ako prvá sa vypočíta percentuálna volatilita akcií za celé obdobie. Volatilita sa vypočíta nasledujúcim vzťahom

$$\frac{stdev(T)}{average(T)},$$

čím dostaneme percentuálnu volatilitu za celé obdobie stiahnutých dát. V druhom kroku sa vypočíta drift za celé obdobie vzťahom

$$\frac{S_T}{S_0} - 1$$

kde S_T je uzatváracia cena akcie v konečnom dátume a S_0 je cena akcie v začiatočnom dátume. Ďalšiu premennú, ktorú potrebujeme pre model, je denná volatilita, ktorá sa vypočíta vzťahom

$$\frac{\sigma}{\sqrt{T}},$$

kde σ je volatilita za celé obdobie a T je počet dní celého obdobia. Ďalšou premennou je denný výnos vypočítaný vzťahom

$$\frac{\mu}{T},$$

kde μ je výnos za celé obdobie a T je počet dní. Nasledujúcou premennou je stredný výnos, ktorý dostaneme vzťahom

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2},$$

kde μ je denný výnos a σ denná volatilita.

Použitím modelu

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

simulujeme vývoj akcie na nasledujúcich 20 dní. Následne je vytvorená dátová tabuľka s tisícami cenami akcií na základe simulovanej ceny akcie v 20. dni. Z týchto 1000 tisíc simulovaných cien sa vypočíta, aritmetický priemer, smerodajná odchýlka a medián.

I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	ALZ
volatilita za celé obdobie	4.23%									
drift za celé obdobie	13.65%									
volatilita denná	0.2657114%									
drift denný	0.0541594%									
drift - stredná hodnota	0.0538038%									
pociatočná cena pre simuláciu	\$ 78.69									
počet dní	252									

Simulácie cien akcií na 20 dní			
Číslo iterácie	N(0,1)	% zmena	Cena
1	-0.14	0.02%	\$ 78.70
2	-0.71	-0.13%	\$ 78.60
3	-0.71	-0.14%	\$ 78.49
4	0.61	0.22%	\$ 78.66
5	-1.72	-0.40%	\$ 78.34
6	-0.85	-0.17%	\$ 78.21
7	-1.03	-0.22%	\$ 78.03
8	1.16	0.36%	\$ 78.32
9	0.45	0.17%	\$ 78.45
10	0.23	0.11%	\$ 78.55
11	0.74	0.25%	\$ 78.74
12	-0.50	-0.08%	\$ 78.68
13	-0.88	-0.18%	\$ 78.54
14	1.08	0.34%	\$ 78.81
15	-1.02	-0.22%	\$ 78.63
16	0.08	0.08%	\$ 78.69
17	-0.51	-0.08%	\$ 78.63
18	0.46	0.18%	\$ 78.77
19	-0.23	-0.01%	\$ 78.76
20	0.01	0.06%	\$ 78.80

Dátová tabuľka s 1000 iteráciami					
Číslo iterácie	1	2	3	4	1000
\$ 78.80	\$ 79.88	\$ 78.88	\$ 79.19	\$ 79.08	\$ 78.83

priemerná hodnota	\$ 79.55
medián	\$ 79.53
smerodajná odchýlka	\$ 0.98

Obr. 16. Simulácia v MS Excel [vlastné spracovanie]

Pri práci s programom vytvoreným v tabuľkovom procesore Excel je zrejmé, že každým vykonaním simulácie dostaneme iné výsledné hodnoty pri simulácii ceny akcie na 20 dní. Vďaka tomuto, sme vytvorili dátovú tabuľku s tisícom takýchto pozorovaní a vypočítali priemernú hodnotu a medián. Na základe tohto by sa investori mohli rozhodnúť či do akcie investovať alebo nie. Predikcia konkrétnej ceny nie je možná, skôr je prípustná alternatíva predpovedania trendu. Toto nám samozrejme vychádza zo spomínaného očakávaného výnosu, ktorý je vypočítaný z historických údajov. Ak má investor akékoľvek utajené informácie o budúcom konaní spoločnosti, môže tento fakt zohľadniť pri očakávanom návrate do investície.

ZÁVER

V záverečnej práci som sa venoval popisu simulácii ako takej. Sú v nej uvedené definície simulácie, simulačných modelov, generovanie náhodných čísel a jednotlivé pravdepodobnostné rozdelenia. Rozvoj simulačných modelov je úzko spätý s vývojom informačných technológií, ktoré veľmi zjednodušujú vykonávať simulácie ako také, nakoľko sú založené na veľkom množstve opakovaní simulácií s náhodnými javmi s určitou pravdepodobnosťou. Informačné technológie uľahčili pri simulačných modeloch práve tento proces.

V druhej kapitole sa čitateľ dozvie o fungovaní svetovej ekonomiky. Popísal som v nej jednotlivé typy trhov, na ktorých sa v dnešnej dobe obchoduje a jednotlivé typy akcií, vydávaných spoločnosťami za účelom ich rastu. Taktiež je tu charakterizovaný postup emisie akcie a porovnané typy akcií. Zároveň táto kapitola podrobne popisuje model Brownovho pohybu na ktorom je založená simulácia Monte Carlo pri predikcii vývoja cien akcií.

V záverečnej kapitole je charakterizovaný postup práce vytvorenej aplikácie ako aj návod pre používateľa ako pracovať s týmto programom. Zistili sme, že predikcia budúcej ceny akcie nie je prakticky možná a je možné skôr predpovedať trend na základe niektorých charakteristík vychádzajúcich z historických dát.

Pri vypracovávaní práce som zistil, že tabuľkový procesor Microsoft Excel je vhodným programom na vykonávanie simulácií Monte Carlo, zároveň som sa spoznal a naučil pracovať s programovacím jazykom VBA.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

- [1] DAMODARAN, A. *Statistical Distributions*. [online]. [cit. 2014.1.30]. Dostupné na internete:
<http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/StatFile/statdistns.htm>.
- [2] HNILICA, J – FOTR, J. 2009. *Aplikovaná analýza rizika ve finančním managementu a investičním rozhodování*. Praha : Grada, 2009. 264 s. ISBN 978-80-247-2560-4.
- [3] HUŠEK, R. – LAUBER, J. 1987. *Simulační modely*. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1987. 352 s.
- [4] HULL, J. 2005. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 6. vydanie. New Jersey : Prentice Hall, 2005. 816 s. ISBN 978-0131499089.
- [5] HRVOLOVÁ, B. 2001. *Analýza finančných trhov*. Bratislava : Sprint vfra, 2011. 373 s. ISBN 80-88848-86-5.
- [6] JEŽEK, T. 2002. *Peníze a trh*. Praha : Portál, 2002. 148 s. ISBN 80-7178-685-3.
- [7] JÍLEK, J. 1995. *Termínované a opční obchody*. Praha : Grada, 1995. 288 s. ISBN 80-7169-183-6.
- [8] KALOS, M. – WHITLOCK, P. 2008. *Monte Carlo Methods*. 2. vydanie. Weinheim : Wiley-VCH, 2008. 215 s. ISBN 978-3-527-40760-6.
- [9] KNEŽO, D. 2014. O metóde Monte Carlo a možnostiach jej aplikácií. In *Transfer inovácií*. [online]. 2012, 24. [cit. 2014.1.15]. Dostupné na internete:
<<http://www.sjf.tuke.sk/transferinovacii/pages/archiv/transfer/24-2012/pdf/178-181.pdf>>.
- [10] KOHOUT, P. 2008. *Investiční strategie pro třetí tisíciletí*. 5. vydanie. Praha : Grada, 2008. 288 s. ISBN 978-80-247-2559-8.
- [11] KOMORNÍK, J. – MAJERČÁKOVÁ, D. – HUSOVSKÁ, M. 2011. *Finančný manažment*. Bratislava : KARTPRINT, 2011. 253 s. ISBN 978-80-88870-97-5.
- [12] KRÁLOVÁ, M. *Brownův pohyb*. [online]. [cit. 2014.4.15]. Dostupné na internete:
<http://www.techmania.cz/edutorium/art_exponaty.php?xkat=fyzika&xser=4d6f6c656b756c6f76e12066797a696b61h&key=292>.
- [13] LAMOŠ, F. – POTOCKÝ, R. 1989. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Bratislava : Alfa, 1989. 344 s. ISBN 80-05-00115-0.
- [14] PAVLÍK, J. a kol. 2005. *Aplikovaná statistika*. Praha : VŠCHT, 2005. 172 s. ISBN 80-7080-569-2.
- [15] RÉNYI, A. 1972. *Teorie pravděpodobnosti*. Praha : Academia, 1972. 512 s.

- [16] ROST, M. *Exponenciální rozdělení*. [online]. [cit. 2014.3.25]. Dostupné na internete:
<<http://www2.ef.jcu.cz/~rost/courses/stata/data/exponencialni%20rozdeleni.pdf>>.
- [17] ŘEZANKOVÁ, H. – MAREK, L. – VRABEC, M. 2001. *Interaktivní učebnice statistiky*. [online]. [cit. 2014.2.21]. Dostupné na internete: < <http://iastat.vse.cz/>>.
- [18] SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE. *Diskrétné rozdelenia pravdepodobnosti*. [online]. [cit. 2014.4.5]. Dostupné na internete: < http://slovak.evilm.stuba.sk/elearning/elearning_files/Rozd_pravd_dikr_nah_premi.pdf>.
- [19] VLACHYNSKÝ, K. – MARKOVIČ, P. 2001. *Finančné inžinierstvo*. Bratislava : Edícia Ekonómia, 2001. 387 s. ISBN 80-89047-08-4.
- [20] WALTER, J. a kol. 1973. *Operační výzkum*. Praha : SNTL, 1973. 192 s.
- [21] ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI. *Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti*. [online]. [cit. 2014.2.13]. Dostupné na internete:
<<http://home.zcu.cz/~patrke/WWW-KMA/ZTI/DVvU%20-%20Normalni%20rozdeleni.pdf>>.

PRÍLOHA A

Príloha A – Priložené CD obsahuje diplomovú prácu vo formáte pdf a vytvorený program v MS Excel.

PRÍLOHA B

Príloha B – Zdrojový kód.

```
Sub vymaz()  
    Columns("A:F").Clear  
End Sub
```

```
Sub formatovanie()  
    Columns("A:A").Select  
    Selection.NumberFormat = "dd/mm/yy;@"  
    Range("B:B,C:C,D:D,E:E,G:G").Select  
    Range("G1").Activate  
    Selection.NumberFormat = "0.00"  
    Columns("F:F").Select  
    Selection.NumberFormat = "#,##0"  
    Columns("G").Clear  
    Range("A2").Select  
End Sub
```

```
Sub StiahniCenyAkcii(ByVal skratkaAkcii As String, ByVal  
ZaciatocnyDatum As Date, ByVal KonecnyDatum As Date, ByVal  
freq As String)
```

```
Dim qurl As String  
Dim ZacMesiac, ZacDen, ZacRok, KonMesiac, KonDen, KonRok As  
String  
ZacMesiac = format(Month(ZaciatocnyDatum) - 1, "00")  
ZacDen = format(Day(ZaciatocnyDatum), "00")  
ZacRok = format(Year(ZaciatocnyDatum), "00")
```

```
KonMesiac = format(Month(KonecnyDatum) - 1, "00")  
KonDen = format(Day(KonecnyDatum), "00")  
KonRok = format(Year(KonecnyDatum), "00")
```

```

url = "URL;http://ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s=" +
skratkaAkcje + "&a=" + ZacMesiac + "&b=" + ZacDen + "&c=" +
ZacRok + "&d=" + KonMesiac + "&e=" + KonDen + "&f=" +
KonRok + "&g=" + freq
Application.DisplayAlerts = False
On Error GoTo ErrorHandler:
With ActiveSheet.QueryTables.Add(Connection:=url,
Destination:=Range("A1"))
    .FieldNames = True
    .RowNumbers = False
    .FillAdjacentFormulas = False
    .RefreshOnFileOpen = False
    .BackgroundQuery = True
    .RefreshStyle = xlInsertDeleteCells
    .SavePassword = False
    .SaveData = True
    .AdjustColumnWidth = True
    .Refresh BackgroundQuery:=False
End With
ErrorHandler:
ActiveWorkbook.Connections(1).Delete
End Sub

```

```

Sub StiahniData()

```

```

Dim frekvencia As String
Dim poslednyRiadok As Integer
Dim skratkaAkcje As String
Dim ws As Worksheet

```

```

Application.DisplayAlerts = False
Application.Calculation = xlCalculationManual
Application.ScreenUpdating = False

```

```

poslednyRiadok      =      ActiveSheet.Cells(Rows.Count,
"a").End(xlUp).Row
frekvencia = Worksheets("Parametre").Range("b7")

For Each ws In Worksheets
    If ws.Name <> "Parametre" And ws.Name <> "model" Then
ws.Delete
Next

For ticker = 12 To poslednyRiadok

    Sheets("Parametre").Select
    skratkaAkcie  =  Worksheets("Parametre").Range("$a$" &
ticker)

    If skratkaAkcie = "" Then
        GoTo DalsiaIteracia
    End If

    Sheets("MODEL").Select
    Call vymaz
    Call          StiahniCenyAkcii(skratkaAkcie,
Worksheets("Parametre").Range("$b$5"),
Worksheets("Parametre").Range("$b$6"), frekvencia)
    Columns("a:a").TextToColumns Destination:=Range("a1"),
DataType:=xlDelimited, _

TextQualifier:=xlDoubleQuote, ConsecutiveDelimiter:=False,
Tab:=True, _

                                Semicolon:=False,
Comma:=True,          Space:=False,          Other:=False,
FieldInfo:=Array(Array(1, 1), Array(2, 1), Array(3, 1),
Array(4, 1), Array(5, 1), Array(6, 1), Array(7, 1))

```

```

    Sheets("model").Columns("A:G").ColumnWidth = 10
    Sheets("model").Columns("F").ColumnWidth = 13
    poslednyRiadok = Sheets("model").UsedRange.Row - 2 +
Sheets("model").UsedRange.Rows.Count
    Sheets("model").Range("j8").Value =
ActiveSheet.Cells(Rows.Count, "a").End(xlUp).Row - 2
    riadok = ActiveSheet.Cells(Rows.Count,
"a").End(xlUp).Row - 1
    Sheets("model").Range("j3").Value = Cells(2, 5) /
Cells(riadok, 5) - 1
    Range("j2").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "=STDEV(R[-0]C[-5]:R[" &
riadok - 2 & "]C[-5]) / AVERAGE(R[-0]C[-5]:R[" & riadok - 2
& "]C[-5])"
    Sheets("model").Select
    Sheets("model").Copy After:=Sheets(Sheets.Count)

If Left(skratkaAkcie, 1) = "^" Then
    ActiveSheet.Name = Replace(skratkaAkcie, "^", "")
Else
    ActiveSheet.Name = skratkaAkcie
End If

Call formatovanie
DalsiaIteracia:

Next ticker

ErrorHandler:
Worksheets("Parametre").Select
Application.ScreenUpdating = True
Application.Calculation = xlCalculationAutomatic
Application.DisplayAlerts = True
End Sub

```