

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/I/2014/2726537258

**Aktuárske výpočty v systéme  
dôchodkového poistenia**

(Diplomová práca)



EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

# Aktuárske výpočty v systéme dôchodkového poistenia

(Diplomová práca)

**Študijný program:** 6258 Aktuárstvo

**Študijný odbor:** 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

**Školiace pracovisko:** Katedra matematiky a aktuárstva

**Školiteľ:** doc. RNDr. Lea Škrovánková, PhD.



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Dušan Baník  
**Študijný program:** Aktuárstvo (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii  
**Typ záverečnej práce:** Inžinierska záverečná práca  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Aktuárske výpočty v systéme dôchodkového poistenia

**Anotácia:** Práca je venovaná jednotlivým typom dôchodkového poistenia so zameraním na odlišnosť dvoch základných dôchodkových systémov, systému financovaného priebežne a fondového systému. Práca bude obsahovať aktuárske aplikácie zamerané na stochastické modely.

**Vedúci:** doc. RNDr. Lea Škrovánková, PhD.

**Oponent:**

**Katedra:** KMA FHI - Katedra matematiky a aktuárstva FHI

**Vedúci katedry:** doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc.

**Dátum zadania:** 03.11.2011

**Dátum schválenia:** 23.11.2011

doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc.  
vedúci katedry

# Abstrakt

Táto práca sa pokúša predpovedať budúci vývoj dôchodkov v rámci dvoch základných systémov financovania (priebežného a fondového). Pre určenie zmien vo vekovej štruktúre obyvateľstva je použitý všeobecný prístup k stochastickému modelovaniu úmrtnosti, kedy logitová transformácia jednoročných pravdepodobností prežitia v jednotlivých vekových skupinách je daná lineárnou kombináciou vlastne zvolených bázových funkcií, čo umožňuje priradenie zmysluplných demografických interpretácií faktorom ovplyvňujúcich úmrtnosť. Vývoj týchto faktorov v budúcnosti je potom modelovaný Brownovým pohybom. Takto určená budúca veková štruktúra umožňuje odhadnúť výšku dôchodkov plynúcich z priebežného systému financovania, resp. výšku príspevkov potrebných na zabezpečenie požadovanej úrovne dôchodkových dávok.

Následne je predstavená možnosť financovania dôchodku súčasne z priebežného a fondového systému, pričom je vykonaná citlivostná analýza výšky dôchodku jednotlivca vzhľadom na tieto činitele: dĺžka účasti v systéme (čas odchodu do dôchodku), výška mzdy, miera zhodnotenia vo фонде, výška odvodov (príspevkov) do oboch schém. Konkrétne výpočty sú realizované pre údaje o slovenskej populácii za roky 1945 až 2012.

**Kľúčové slová:** dôchodok, dôchodková schéma, priebežné financovanie, fondové financovanie, stochastický model úmrtnosti

# Abstract

This paper tries to forecast future evolution of pensions in two fundamental financing methods (pay-as-you-go and funding). General approach to stochastic mortality modelling is used to determine changes in age structure of population. Logit transformation of yearly survival probabilities in individual age groups in this model is expressed as linear combination of custom basis functions which allows for meaningful demographic interpretation of mortality factors. These factors are developing according to the Brownian motion in the future. Age structure derived in this way allows to determine pension levels that the scheme is able to provide or required payments to support desired level of pensions.

Afterwards, method of financing pension simultaneously from pay-as-you-go and funding scheme is introduced. Pension of an individual then undergoes sensitivity analysis with regard to these factors: length of membership in the scheme (time of retirement), salary, rate of returns in fund, level of payments going into both schemes. Calculations are performed using data for Slovak population from years 1945-2012.

**Keywords:** pension, pension scheme, pay-as-you-go financing, funding financing, stochastic mortality model

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Bratislava 25. apríla 2014

Dušan Baník

Ďakujem vedúcej mojej práce doc. RNDr. Lei Škrovánkovej, PhD. za jej odborné vedenie, cenné rady a pripomienky, a takisto za čas, ktorý mi venovala.



# Obsah

Zoznam obrázkov	8
Zoznam tabuliek	9
Úvod	10
<b>1 Dôchodkové systémy</b>	<b>12</b>
1.1 Najnovšie zmeny v dôchodkovom systéme . . . . .	12
1.2 Dôchodkový systém na Slovensku v číslach . . . . .	18
<b>2 Priebežne financovaný systém</b>	<b>21</b>
2.1 Charakteristika . . . . .	21
2.2 Stochastický model . . . . .	24
2.3 Simulácia . . . . .	28
2.4 Praktické príklady . . . . .	31
<b>3 Fondovo financovaný systém</b>	<b>37</b>
3.1 Kombinácia I. a II. piliera . . . . .	37
3.2 Praktické príklady . . . . .	40
3.2.1 Citlivosť na dĺžku účasti . . . . .	42
3.2.2 Citlivosť na výšku mzdy . . . . .	43
3.2.3 Citlivosť na mieru zhodnotenia . . . . .	44
3.2.4 Citlivosť na výšku odvodov . . . . .	45
<b>Záver</b>	<b>47</b>
<b>Literatúra</b>	<b>49</b>
<b>A Prílohy</b>	<b>51</b>
A.1 Fondy v DSS-kách . . . . .	52
A.2 Bilancovanie počtu obyvateľov . . . . .	53
A.3 Voľba modelu a parametrov . . . . .	56

# Zoznam obrázkov

2.1	Porovnanie skutočných a vyhladených mier pravdepodobnosti úmrtia . . . . .	26
2.2	Pravdepodobnosti prežitia pre rozšírené a vyhladené ÚT . . . . .	27
2.3	Bázové funkcie . . . . .	28
2.4	Historické hodnoty rizikových faktorov . . . . .	28
2.5	Historické hodnoty a budúce hodnoty pre jeden bez simulácie rizikových faktorov . . . . .	30
2.6	Vývoj plodnosti v rokoch 1945-2012 na Slovensku . . . . .	31
2.7	Odhadovaná distribúcia počtu obyvateľov na Slovensku v roku 2054 . . . . .	32
2.8	Odhadovaná distribúcia pomeru produktívnej zložky obyvateľstva ku poproduktívnej zložke v roku 2054 . . . . .	32
2.9	Porovnanie odhadovanej očakávanej vekovej štruktúry v roku 2054 oproti stavu z roku 2012 (naľavo muži, napravo ženy) . . . . .	32
2.10	Distribúcia priemerných dôchodkov pre roky 2013-2054 . . . . .	35
2.11	Distribúcia priemernej miery príspevkov pre roky 2013-2054 . . . . .	36
3.1	Súčasná hodnota predlehotného jednotkového dôchodku pre 65-ročnú osobu v jednotlivých rokoch ( $i = 2,5 \%$ ) . . . . .	39
3.2	Vývoj mzdy účastníka v schéme a tomu zodpovedajúca hodnota OMB . . . . .	41
3.3	Vývoj hodnoty fondu, ak si účastník sporí aj v II. pilieri . . . . .	42
3.4	Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od doby odchodu do dôchodku . . . . .	43
3.5	Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od dosahovaných príjmov . . . . .	44
3.6	Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od miery zhodnotenia úspor . . . . .	45
3.7	Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od delenia príspevkov medzi I. a II. pilier . . . . .	46
A.1	Pravdepodobnosť prežitia mužskej populácie . . . . .	53
A.2	Pravdepodobnosť prežitia pre vybrané veky . . . . .	53
A.3	Pravdepodobnosť prežitia pre vybrané veky (neorezená pravdepodobnosť) . . . . .	54
A.4	Porovnanie hodnôt BIC pre modely A, B a C (mužská populácia) . . . . .	57
A.5	Porovnanie hodnôt štvorcovej odchýlky pre modely A, B a C . . . . .	58
A.6	Závislosť celkovej štvorcovej odchýlky od parametra $a$ . . . . .	58

# Zoznam tabuliek

1.1	Počet poberateľov dôchodku za obdobie 2005 až 2013 . . . . .	19
1.2	Vývoj aktuálnej dôchodkovej hodnoty v rokoch 2004 až 2014 . . . . .	19
2.1	Dôchodkový vek . . . . .	33
3.1	Výška odvodov do II. piliera . . . . .	38
3.2	Dôchodok pre osobu odchádzajúcu do dôchodku v roku 2054 . . . . .	42
3.3	Výška dôchodkov pre osobu odchádzajúcu do dôchodku v rôznych ob- dobiach . . . . .	43
3.4	Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od ňou dosahovanou mzdy počas života . . . . .	44
3.5	Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od miery zhodnotenia v II. pilieri	45
3.6	Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od miery prispievania do II. piliera	46
A.1	Prehľad výkonnosti jednotlivých fondov dôchodkových DSS . . . . .	52
A.2	Porovnanie hodnôt TSE pre modely A, B a C . . . . .	57

# Úvod

Život človeka je typicky rozdelený do niekoľkých štádií, pričom každé má svoje špecifiká. Prvou životnou etapou je detstvo a mladosť, kedy sa jednotliviec vzdeláva a pripravuje na svoj budúci profesijný život. Ekonomicky je zväčša závislý na iných – rodičoch. Druhým stupňom je potom dospelosť, kedy človek tvorí hodnoty. Nasledujúcim a tiež posledným štádiom života je staroba, kedy ekonomická aktivita utícha.

Jedným z problémov, s ktorými sa člen spoločnosti potýka, je zabezpečenie si takého príjmu, aby mohol dôstojne žiť, pričom tento život sa spája s určitými výdavkami. Iste, sú tu aj mnohé ďalšie otázky, ktoré sa nás týkajú (bývanie, rodina, a pod.), ale vo väčšine prípadov sú tieto viac alebo menej podmienené už spomenutým problémom vytvorenia a zachovania pravidelného príjmu. Ako je to vo väčšine prípadov, výdavky (samozrejme, v rôznej výške) trvajú po celý život, zatiaľčo príjmy sú časovo podstatne obmedzenejšie. Ako teda vyriešiť tento časový nesúlad? Ako bolo spomenuté v predchádzajúcom odstavci, v čase mladosti sú výdavky financované blízkou rodinou. Pre prípad staroby vznikol v dnešnej spoločnosti inštitút starobného dôchodku, ktorého úlohou a hlavným cieľom je poskytnúť občanom v čase dôchodku pravidelný a stály finančný príjem.

Okrem starobného dôchodku existuje aj invalidný dôchodok. Jeho úlohou je nahradiť príjem občana, ktorý stratil v súvislosti so stratou alebo znížením pracovnej schopnosti.

Rovnako treba spomenúť aj výsluhový dôchodok a pozostalostný dôchodok. Výsluhová renta je charakterom veľmi blízka starobnému dôchodku, pričom sa týka niektorých vybraných profesií a nárok na ňu nevzniká dosiahnutím určitého veku ako je to pri starobnom dôchodku, ale odpracovaním (odslúžením) určitého počtu rokov. Pozostalostný dôchodok má za úlohu nahradiť príjem najbližšej rodiny, ktorý sa znížil v dôsledku úmrtia jej člena. Pozostalostný dôchodok je určený najmä pre vdovu, resp. vdovca alebo siroty.

Otázky týkajúce sa penzijného zabezpečenia sú dnes v centre ekonomických, finančných ale i politických diskusií. A ich význam sa bude v najbližších dekádach ešte viac prehĺbovať najmä z dôvodu zvyšujúcej sa dlhovekosti a celkovému zvyšovaniu priemerného veku obyvateľstva.

Početné viac-generačné rodiny v poslednom období vystriedal individuálny model, kde sa očakáva, že jednotliviec je sebestačný rovnako pred odchodom do dôchodku, tak aj po odchode. Z tohto dôvodu sa finančné plánovanie staroby stalo nutnosťou pre každého.

Dlhovekosť v posledných dekádach rástla závratným tempom, pričom nič nenaz-

načuje, že by sa tento trend mal zastaviť, nebudaj obrátiť. V minulosti bolo bežné odísť na dôchodok vo veku 55 až 60 rokov a následne prežiť ešte niekoľko rokov. Dnes a v blízkej budúcnosti bude pomerne bežným javom dožívať sa napríklad 85 a viac rokov.

Toto predstavuje obrovskú výzvu pre dôchodkové systémy, aby pri zohľadnení týchto skutočností vedeli zabezpečiť potrebné benefity pre svojich členov.

Táto práca sa sústreďí na možný budúci vývoj dôchodkového systému na Slovensku. Ako prvý je predstavený model priebežného financovania (ktorý zodpovedá I. pilieru), kde je snaha určiť, akej výšky dôchodkov by sa mohli občania v blízkej i vzdialenejšej budúcnosti dočkať. Následne je ukázaný model fondového financovania, ktorý je v slovenských reáliách reprezentovaný II. pilierom. Rovnako, ako je tomu v realite, budú oba modely skombinované a budú preskúmané možnosti financovania penzií takýmto spôsobom.

Pred tým, ako sa pristúpi k samotnému modelovaniu, budú zhrnuté niektoré najaktuálnejšie zmeny týkajúce sa penzijného systému na Slovensku.

# 1 Dôchodkové systémy

V ekonómii sa pod dôchodkom (rentou, penziou) väčšinou rozumie dlhodobejší pravidelný príjem, ktorý dostáva jednotlivec (príp. rodina, domácnosť a pod.). Môžu to byť mzdy plynúce z vykonanej práce, príjmy z podnikateľskej činnosti, rôzne iné kapitálové príjmy, dávky zo systému sociálneho zabezpečenia a pod. V praxi sa často pojem dôchodok používa ako združený pojem pre starobný dôchodok, invalidný dôchodok a dôchodok vyplácaný pozostalým. Práve tento význam dôchodku je ústrednou témou tejto práce. Dôchodok je teda finančný tok, na ktorom sa podieľajú minimálne títo traja účastníci – platiteľ príspevkov, správcovská inštitúcia a poberateľ dávok. Je zrejmé, že tento prechod od príspevku k dávke nie je okamžitý. V skutočnosti sa môže toto časové rozlíšenie pohybovať v rádoch rokov ba až dekád. Systém platenia príspevkov a pobrania dávok, práva a povinnosti a ďalšie náležitosti charakterizujú tú-ktorú penzijnú schému (penzijný systém, systém dôchodkového zabezpečenia).

Penzijná schéma môže byť definovaná ako systematický a organizovaný mechanizmus, ktorý je určený legislatívou alebo konvenciou a ktorého cieľom je zabezpečiť po odchode do dôchodku pravidelný príjem pre určenú skupinu ľudí. Táto definícia je postavená na týchto kľúčových slovách:

- *systematický* – poskytované dávky členom schémy sú určené podľa objektívnych pravidiel. Dve osoby v rovnakej situácii dostanú rovnako veľký dôchodok.
- *Organizovaný* – penzijná schéma musí byť iniciovaná nejakým sponzorom (štát, súkromná firma, a pod.), ktorý garantuje kontinuitu tohto systému.
- *Legislatíva* – v prípade, že sponzorom je štát alebo obdobná inštitúcia.
- *Konvencia* – ak sa úlohy sponzora zhostuje súkromná firma alebo zamestnávateľ.
- *Pravidelný príjem* – dávky sú najčastejšie vyplácané vo forme doživotnej anuity, existujú však aj iné formy (jednorazová výplata pri dožití sa dôchodkového veku, alebo dočasný dôchodok).
- *Skupina* – účastníci schémy sú vo všeobecnosti členovia jasne definovanej skupiny ľudí [5].

## 1.1 Najnovšie zmeny v dôchodkovom systéme

Tak ako je systém sociálneho zabezpečenia pálčivou témou, tak často dochádza k zmenám v jeho nastaveniach. Každá vládna garnitúra sa hrdo bije do prs, ako je zvýšenie blahobytu občanov jej najväčšou prioritou a zároveň odmenou. Sociálna politika má tú jedinečnú vlastnosť, že sa týka každého jedného člena spoločnosti – od novonarodeného dieťaťa v podobe príspevkov pri narodení, cez študenta, za ktorého štát platí poistné

na zdravotné poistenie, pracujúceho človeka v podobe odvodov na starobné a invalidné poistenie, až po dôchodcu v podobe vyplácaných dávok.

Táto kapitola prináša zhrnutie niektorých posledných zmien týkajúcich sa dôchodkového systému na Slovensku. Najprv sú stručne uvedené zmeny v období apríla 2012 až januára 2013 (podrobnejšie napríklad v Alexanderčíková [1]).

### **Princíp dobrovoľnosti**

Osoby, ktorým vznikla prvá účasť na dôchodkovom poistení, sa môžu rozhodnúť vstúpiť do druhého piliera až do dovŕšenia veku 35 rokov. Dovtedy boli tieto osoby povinné vstúpiť do II. piliera, pričom mali možnosť do 2 rokov svoje rozhodnutie prehodnotiť a vystúpiť z neho.

### **Zmena sadzieb odvádzaných príspevkov**

Zmenil sa pomer, v akom sa delia odvody medzi I. a II. pilier. Pôvodný pomer 9 % do Sociálnej poisťovne a 9 % do dôchodcovskej správcovskej spoločnosti bol upravený na 14 % a 4 %, pričom výška príspevku sa bude každoročne od roku 2017 znižovať, resp. zvyšovať o 0,25 p.b. až do roku 2024, kedy dosiahne úroveň 12 % a 6 %.

### **Zmena systému valorizácie**

Dôchodky sa v prechodnom období rokov 2013 až 2017 budú zvyšovať o fixnú sumu a nie o percento, ako tomu bolo do roku 2013. Dôvodom takejto zmeny je okrem ušetrených finančných prostriedkov aj uplatnenie princípu solidarity. V praxi to znamená, že dôchodca s nižšou penziou bude dostávať pomerne k jeho penzii viac ako dôchodca s vyššou penziou.

Takisto je upravený aj spôsob určenia tohto zvýšenia – vychádza sa z rastu priemernej mzdy v hospodárstve a taktiež z rastu spotrebiteľských cien. Váhy týchto dvoch faktorov sa postupne budú presúvať v prospech rastu cien. Od roku 2018 sa dôchodky budú zvyšovať o percento medziročného rastu dôchodcovskej inflácie, ktorá presnejšie vyjadruje životné náklady dôchodcov.

V roku 2013 vzrástli starobné dôchodky o sumu 11,20 eur, a v roku 2014 o sumu 9,00 eur [12].<sup>1</sup>

### **Zvýšenie veku odchodu do dôchodku**

Dôchodkový vek je všeobecne ustanovený na 62 rokov veku poistenca a platí jednotne pre mužov aj ženy. Začne sa však uplatňovať až

<sup>1</sup>V roku 2013: starobný dôchodok - 11,20 eur, predčasný dôchodok - 11,50 eur, vdovský - 7,30 eur, vdovecký - 7,30 eur, sirotsky - 3,90 eur, invalidný - 10,10 eur, čiastočný invalidný - 5,90 eur. V roku 2014: starobný dôchodok - 9,00 eur, predčasný dôchodok - 8,90 eur, vdovský - 5,60 eur, vdovecký - 4,20 eur, sirotsky - 3,00 eur, invalidný - 8,00 eur, čiastočný invalidný - 4,50 eur.

- u mužov narodených v období počnúc rokom 1946, a
- u žien narodených v období počnúc rokom 1962 (u niektorých žien aj skôr, závisí to od počtu detí, ktoré žena vychovala).

Z pôvodného dôchodkového veku určeného zákonom v roku 1988, t. j. 60 rokov u mužov a 53 až 57 rokov u žien podľa počtu vychovaných detí, sa pri určení dôchodkového veku vychádza

- u mužov narodených v období rokov 1944 až 1945, a
- u žien narodených v období rokov 1947 až 1961.

U uvedených mužov a žien sa však pôvodný dôchodkový vek (60, 57, 56, 55, 54, 53) predlžuje o stanovený počet kalendárnych mesiacov v závislosti od toho, v ktorom kalendárnom roku dosiahne osoba pôvodný dôchodkový vek [20].

Od roku 2017 sa k veku odchodu do dôchodku, ktorý je dnes stanovený na 62 rokov, bude každý rok pridávať 45 až 50 dní. A tak ľudia, ktorí dosiahnu dôchodkový vek v roku 2024, by mali ísť do penzie ako 63-roční, tí, ktorí dosiahnu dôchodkový vek v roku 2032, pôjdu do penzie vo veku 64 rokov, a tí, ktorí pôjdu do penzie v roku 2040, už budú do dôchodku odchádzať ako 65-roční. Od 1. januára 2017 sa pri určovaní veku odchodu do penzie bude brať do úvahy: stredná dĺžka života vykázaná Štatistickým úradom, spoločná pre mužov a ženy, referenčný vek (dôchodkový vek v príslušnom roku zaokrúhlený na celé roky nadol), prvé referenčné obdobie (obdobie piatich po sebe nasledujúcich rokov, ktoré sa začína rokom, ktorý o sedem rokov predchádza príslušnému roku), druhé referenčné obdobie (obdobie piatich po sebe nasledujúcich rokov, ktoré začína rokom, ktorý o osem rokov predchádza príslušnému roku), príslušný rok (rok, v ktorom sa dôchodkový vek upravuje) [13].

## **Dobrovoľné príspevky**

Od januára 2013 si každý sporiteľ môže na svoj osobný dôchodkový účet posielat' aj vlastné úspory. Dobrovoľné príspevky môžu byť pravidelné alebo nepravidelné a v akejkoľvek výške. Sporiteľ si ich môže uhrádzať sám, a to buď zrážkou zo mzdy na základe dohody so zamestnávateľom, alebo priamo prevodom na účet DSS. Z týchto príspevkov si bude môcť sporiteľ uplatniť daňovú úľavu do výšky 2 % zo základu dane, a to do zdaňovacieho obdobia za rok 2016 [21].

## **Zmeny vo fondoch druhého piliera**

Pôvodné názvy fondov „konzervatívny“, „vyvážený“ a „rastový“ boli upravené a po novom sa budú označovať ako „dlhopisový“, „zmiešaný“ a „akciový“. Okrem toho vzniká nový indexový fond, ktorého hodnota sa odvíja od zvoleného trhového indexu. Názov každého z fondov bude povinne obsahovať dôvetok „garantovaný“ (iba v prípade



dlhopisového) alebo „negarantovaný“ podľa toho, či správcovská spoločnosť garantuje vopred stanovený výnos (zhodný s technickou úrokovou mierou).

DSSky majú povinnosť viesť vo svojom portfóliu najmenej dva fondy, pričom jeden z nich je garantovaný. Sporiteľ (investor) bude môcť kedykoľvek prestúpiť z jedného fondu do druhého vo svojej DSS, prípadne svoje úspory rozložiť do viacerých fondov.

## **Znovuotvorenie II. piliera**

V období medzi 1. septembrom 2012 a 31. januárom 2013 došlo k opätovnému otvoreniu II. piliera, kedy sa občania mohli rozhodnúť vstúpiť alebo vystúpiť z druhého piliera. Možnosť výstupu a presunu svojich úspor do Sociálnej poisťovne využilo bez mála 89 tisíc sporiteľov, naopak, pre vstup sa rozhodlo vyše 14,5 tisíca ľudí [16].

## **Zavedenie odvodovej úľavy**

V prípade splnenia zákonných podmienok dlhodobo nezamestnaný občan (t. j. evidovaný v evidencii uchádzačov o zamestnanie najmenej 12 mesiacov), ktorý získa prácu, sa automaticky stáva počas prvých 12 mesiacov trvania pracovného pomeru oslobodený od platenia nemocenského poistného, dôchodkového poistného, poistenia v nezamestnanosti a poistného do rezervného fondu solidarity. Táto úľava zhodne platí pre zamestnanca aj zamestnávateľa. Ďalšími podmienkami sú:

- hrubý príjem zamestnanca s odvodovou úľavou nepresahuje 67 % priemernej mesačnej mzdy v hospodárstve z pred dvoch rokov,
- kvôli zamestnaniu dlhodobo nezamestnaného nezníži zamestnávateľ počet svojich zamestnancov, a
- zamestnávateľ nie je dlžníkom Sociálnej poisťovne [17].

## **Anuita z II. piliera**

Vláda pripravila novelu zákona, ktorou je konečne určený spôsob, akým bude sporiteľovi vyplatený dôchodok pri dosiahnutí dôchodkového veku. Existuje viacero možností, ktorých dostupnosť závisí od výšky celkového priznaného dôchodku (I. a II. pilier spolu).

Tzv. programový výber, ktorý umožní postupne vyplatiť nasporenú sumu po odchode na dôchodok, bude totiž určený pre tie osoby, ktorých dôchodok z prvého piliera alebo prvého a druhého piliera spolu je viac ako štvornásobok sumy životného minima (v súčasnosti približne 800 eur).

Druhou skupinou sporiteľov, pre ktorých bude dostupný programový výber nasporenej sumy, budú tí sporitelia, ktorí vzhľadom na nízky nasporený objem prostriedkov nedostanú od životných poisťovní žiadnu ponuku na vyplácanie doživotného dôchodku.

Formou programového výberu bude vyplácať penzijné úspory úzkemu okruhu sporiteľov príslušná dôchodková správcovská spoločnosť.

Rovnaké podmienky ako pri programovom výbere majú platiť aj pri využití dočasného dôchodku. Dočasný dôchodok, ktorý má vyplácať životná poisťovňa, má byť takisto len pre tých sporiteľov, ktorých dôchodok z prvého piliera alebo prvého a druhého piliera spolu je viac ako štvornásobok sumy životného minima. Na dočasnú penziu budú mať nárok aj tí sporitelia, ktorí nedostanú od životných poisťovní ponuku na vyplácanie doživotného starobného dôchodku. Dočasný dôchodok môže poisťovňa vyplácať päť, sedem alebo desať rokov.

V návrhu sa tiež nachádza zrušenie podmienky minimálne desiatich rokov sporenia. Jedinou podmienkou pre vyplácanie prostriedkov z kapitalizačného piliera tak má byť dosiahnutie dôchodkového veku.

Ak sporiteľ požiada po dosiahnutí dôchodkového veku o vyplácanie doživotnej penzie zo životnej poisťovne, bude musieť urobiť dve rozhodnutia. Prvým je to, či bude chcieť mať svoj doživotný dôchodok pravidelne zvyšovaný o vopred dohodnuté percento, alebo mu bude životná poisťovňa vyplácať rovnakú sumu dôchodku až do jeho smrti. Percento zvyšovania dôchodkov z druhého piliera pritom stanoví Národná banka Slovenska na základe strednodobého inflačného cieľa Európskej centrálnej banky. Ak sa sporiteľ rozhodne pre tzv. indexáciu doživotného dôchodku, tak jeho prvotný dôchodok bude nižší, ako by bol dôchodok bez pravidelného zvyšovania o stanovené percento.

Ponuku na vyplácanie doživotného dôchodku zo strany životných poisťovní dostane sporiteľ v centrálnom elektronickom ponukovom systéme. Žiadať o doživotnú penziu v rámci tohto systému bude povinné pre všetkých sporiteľov. Ponuka od jednotlivých životných poisťovní bude platná 30 dní. Ak nebude mať žiadna životná poisťovňa záujem vyplácať sporiteľovi doživotný dôchodok, a to pre nízku sumu dôchodkových úspor, takýto sporiteľ bude dostávať prostriedky z druhého piliera vo forme programového výberu od príslušnej dôchodkovej správcovskej spoločnosti alebo vo forme dočasného dôchodku od životnej poisťovne [19].

### **III. pilier**

Od 1. januára 2014 platia zmenené podmienky aj v III. pilieri. Medzi najhlavnejšie zmeny patrí dátum, keby bude mať sporiteľ nárok na vyplatenie jeho úspor. Doteraz to bolo možné po dosiahnutí 55 rokov veku. Po novom to bude priznanie predčasného starobného alebo riadneho starobného dôchodku. Takže hranica je vo väčšine prípadov zhodná s dôchodkovým vekom. Došlo tiež k zrušeniu podmienky minimálnej účasti 10 rokov sporenia v III. pilieri.

Daňová úľava, ktorá bola v minulosti zrušená, bola teraz obnovená. Znamená to, že občan si bude môcť znížiť svoj základ dane o sumu, ktorú občan odviedol na svoj sporiaci účet, maximálne však do výšky 180 eur.

Ruší sa odstupné pri sporení na dôchodok v doplnkovom dôchodkovom sporení, ktoré v súčasnosti dosahuje najmenej 80 % z celkovej nasporenej sumy. Namiesto neho sa od začiatku budúceho roka zavádza tzv. predčasný výber časti nasporenej sumy. Účastník si týmto spôsobom vyberie len sumu príspevkov, ktoré sám odvedol, vrátane investičných výnosov za zákonom stanovených podmienok (raz za 10 rokov). Príspevky, ktoré mu odvedol zamestnávateľ, zostanú na účte až dotedy, kým nezačne poberať predčasný dôchodok, resp. riadny starobný dôchodok zo Sociálnej poisťovne. Toto však platí iba pre tých účastníkov, ktorí nemajú dávkové plány, čiže pre tých, ktorí pristúpia na nové podmienky účinné od 1. januára 2014, alebo uzatvoria po tomto dátume novú zmluvu.

Do zákona sa dopĺňa nové ustanovenie, ktoré ukladá doplnkovej dôchodkovej spoločnosti povinnosť zaviesť stálu a účinnú funkciu riadenia rizík a zabezpečiť vykonávanie úloh vyplývajúcich z tejto funkcie.

Novela ukladá taktiež povinnosť zaviesť, uplatňovať a dodržiavať účinné opatrenia pri konflikte záujmov medzi doplnkovou dôchodkovou spoločnosťou, účastníkmi a poberateľmi dávok alebo medzi účastníkmi. Tieto opatrenia musia byť určené v písomnej forme, musia byť primerané vzhľadom na veľkosť a organizáciu doplnkovej dôchodkovej spoločnosti a povahu, rozsah a zložitosť jej predmetu činností [22, 11].

## **Pripravované zmeny**

Zo strany zoskupenia opozičných politických strán existuje snaha zakotviť niektoré pravidlá dôchodkového systému v Ústave. Jedná sa o výšku odvodov do II. piliera a tiež naviazanie dôchodkového veku na strednú dĺžku života [18].

Vláda uvažuje aj o zvýšení minimálnej doby dôchodkového poistenia, kedy má občan nárok na priznanie starobného dôchodku. V súčasnosti je táto hranica nastavená na 15 rokov, pričom cieľom vlády bude dosiahnuť stav, aby ľudia na priznanie dôchodku pracovali aspoň 20 až 30 rokov. Argumentuje sa tým, že by to pomohlo najmä nízkopříjmovým skupinám, ktoré by si dlhším odvádzaním zabezpečili v starobe lepšie príjmy.

S 15 rokmi minimálneho poistného obdobia je Slovensko na chvoste štátov Európskej únie. V Maďarsku je hranica 20 rokov, v Poľsku 25, v Nemecku už je a v Česku to bude 35 rokov, v Holandsku či v Belgicku dokonca 45 rokov. Pred rokom 2004 bolo minimálne obdobie dôchodkového poistenia na Slovensku stanovené na 25 rokov, potom sa znížilo na 10 a v roku 2008 sa opäť zvýšilo na súčasných 15 rokov [14].

## 1.2 Dôchodkový systém na Slovensku v číslach

Kým na Slovensku sa muži v roku 2010 dožívali priemerne 71,6 roka a ženy 78,9 roka, do roku 2060 sa podľa dostupných analýz očakáva nárast strednej dĺžky dožitia u mužov o 10,6 a u žien o 8,6 roka. Muži pritom už dnes čerpajú dôchodok priemerne 16 a ženy, ktoré stále len postupne nabiehajú na platnú vekovú hranicu, až 25 rokov. Podľa výhľadu Eurostatu zároveň narastie na Slovensku do roku 2060 podiel populácie nad 65 rokov na viac ako 35 %, pričom v roku v roku 2010 to bolo 12 % [15].

### Dôchodky

Najpodstatnejšie popisné charakteristiky sa týkajú počtu poberateľov dôchodkov, výšky dôchodkov ale tiež aktuálnej dôchodkovej hodnoty (ADH), ktorá ovplyvňuje výšku novopriznaných dôchodkov.

Za obdobie posledných 9 rokov dochádzalo k postupnému zvyšovaniu počtu poberateľov starobného dôchodku, na konci roka 2013 existovalo o 6,9 % viac penzistov ako na konci roku 2005. Výrazne viac však pribúdalo invalidov – bol zaevidovaný nárast až o 28 %. Naopak poberateľiek vdovského dôchodku mierne ubudlo (2,8 % za sledované obdobie). Mužov, ktorým bol priznaný nárok na vdovecký dôchodok, pribudlo od roku 2007<sup>2</sup> 28,3 %. K takmer 20 % poklesu prišlo od roku 2005 aj v počte sirôt. Konkrétne číselné údaje sú k dispozícii v Tab. 1.1.

Výška starobných dôchodkov v období rokov 2005 až 2013 rástla medziročne v priemere o 4,8 % až dosiahla hodnotu 391 eur (vo februári 2014 po medziročnej valorizácii nadobúdala hodnotu 400 eur). Invalidný dôchodok rástol priemerne o 4 %, vdovský a vdovecký o 4,1 % a 6,2 %, a napokon sirotsky o 6,3 %. Presné výšky dôchodkov sú prehľadne zobrazené v Tab. 1.1 spolu s počtom poberateľov toho-ktorého dôchodku.

Pre ľudí, ktorí akurát dosahujú vekovú hranicu odchodu do dôchodku, je dôležitejšia informácia o aktuálnej dôchodkovej hodnote, na základe ktorej sa určí, na aký dôchodok majú nárok. V roku 2014 bola jej hodnota určená na 10,2524 eura, pričom za posledných 10 rokov rástla medziročne v priemere o 5,34 %. Údaje o výške ADH v minulých rokoch ako aj o jej raste sú znázornené v Tab. 1.2.

### Fondy a odplaty

Na Slovensku je v súčasnosti aktívnych šesť dôchodkových správcovských spoločností (AEGON, Allianz-Slovenská d.s.s., AXA, DSS Poštovej banky, ING a VÚB Generali), ktoré prevádzkujú dlhopisové, zmiešané, akciové a indexové fondy. V prílohách v Tab. A.1 je uvedený zoznam všetkých fondov spolu s ich doterajšou výkonnosťou.

---

<sup>2</sup>V prvom štvrtroku roku 2007 došlo k zmene v podmienkach, kedy si je možné tento dôchodok nárokovať, a došlo k približne zdvojnásobeniu počtu vdovcov.

Tab. 1.1. Počet poberateľov starobného, invalidného, sirotského, vdovského a vdoveckého dôchodku za obdobie 2005 až 2013

Rok (k 31.12.)	Počet poberateľov dôchodku (v tisícoch) (priemerná výška dôchodku (v eurách))				
	starobného	invalidného	vdoveckého	vdovského	sirotského
2005	924,3 (256)	180,9 x	304,4 (164)	8,5 (106)	31,9 (75)
2006	916,3 (27)3	182,9 (250)	302,4 (173)	13,6 (118)	30,2 (99)
2007	916,9 (295)	195,1 (269)	302,8 (184)	31,1 (131)	29,6 (108)
2008	923,7 (313)	200,1 (283)	303,0 (195)	33,6 (144)	29,5 (114)
2009	931,8 (340)	204,4 (305)	302,2 (210)	35,3 (158)	29,0 (123)
2010	954,7 (352)	213,8 (316)	300,4 (217)	36,4 (165)	28,0 (125)
2011	957,6 (362)	223,2 (322)	299,4 (222)	38,0 (170)	27,6 (126)
2012	980,9 (376)	227,8 (332)	297,8 (230)	39,0 (176)	26,9 (128)
2013	988,3 (391)	231,5 (342)	295,9 (237)	39,9 (183)	25,8 (130)

Zdroj: Sociálna poisťovňa: Počet vyplácaných dôchodkov (v mesiacoch), <http://www.socpoist.sk/pocet-vyplacanych-dochodkov--v-mesiacoch-/3150s>

Tab. 1.2. Vývoj aktuálnej dôchodkovej hodnoty v rokoch 2004 až 2014

Rok	Hodnota (v eurách)	Medziročný nárast
2004	6,0937	
2005	6,4831	6,38 %
2006	7,1261	9,92 %
2007	7,7179	8,31 %
2008	8,2699	7,15 %
2009	8,9955	8,77 %
2010	9,2246	2,55 %
2011	9,5756	3,81 %
2012	9,8182	2,53 %
2013	10,0098	1,95 %
2014	10,2524	2,42 %

Zdroj: Sociálna poisťovňa: Aktuálna dôchodková hodnota <http://www.socpoist.sk/slovník-pojmov/11s?&prm1=670>

Zo zákona<sup>3</sup> vyplýva DSS-kam nárok na odplatu, pričom sa rozoznávajú tri druhy odplaty:

- odplata za správu dôchodkového fondu zahŕňa, ktorej maximálna výška je 0,3 % priemernej ročnej predbežnej čistej hodnoty majetku vo fonde,
- odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu, ktorej výška nesmie presiahnuť 1 % zo sumy príspevku pripísaného na účet nepriradených platieb pred pripísaním dôchodkových jednotiek na osobný dôchodkový účet sporiteľa, a
- odplata za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde, ktorej maximálna výška je 0,1-násobok zo zhodnotenia oproti maximálnej hodnote fondu za posledné 3 roky [17].

Všetkých šesť DSS-iek vo všetkých dvadsiatich prevádzkovaných fondoch sa rozhodlo uplatniť nárok na odmenu v maximálnej možnej výške.<sup>4</sup>

---

<sup>3</sup>Zákon 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení.

<sup>4</sup>Štatúty dôchodkových fondov: AEGON <<http://www.aegon.sk/sk/Home/Dochodok/Starobne-dochodkove-sporenie/Statuty-dochodkovych-fondov/>>, Allianz - Slovenská d.s.s. <<http://www.asdss.sk/>>, AXA <<https://www.axa.sk/dochodkove-sporenie/>>, DSS Poštovej banky <<http://www.dsspabk.sk/sk/dochodkove-fondy>>, ING <<https://www.ingdss.sk/fondy/>>, VÚB Generali <<https://www.vubgenerali.sk/dochodkove-fondy/>>.

## 2 Priebežne financovaný systém

Penzijné schémy možno klasifikovať na základe metódy kalkulácie dávok (benefitov) takto:

- dávkovo definovaná schéma (angl. *defined benefit, DB*) – priznaná penzia je výsledkom miezd a počtu odpracovaných rokov osoby, ktorá odchádza do dôchodku, a
- príspevkovo definovaná schéma (angl. *defined contribution, DC*) – penzia je funkciou príspevkov, ktoré do systému odviedla osoba odchádzajúca do dôchodku.

Ak by sa ako kritérium klasifikácie zvolil spôsob financovania, delenie by bolo nasledovné:

- priebežne financovaný systém (angl. *pay as you go, PAYG*) – penzie pre súčasných dôchodcov sú platené z príspevkov aktuálne pracujúcej populácie, a
- fondový systém (angl. *funding*) – penzie sú výsledkom naakumulovaných úspor vytvorených z príspevkov zamestnancov.

Na Slovensku sa v rôznej kombinácii využívajú všetky štyri typy. Prvý pilier, ktorý je zastrešovaný Sociálnou poisťovňou, je definovaný ako priebežný povinný systém dôchodkového poistenia, na ktorom sa bez výnimky podieľajú všetci občania, ktorí sú ekonomicky aktívni (zamestnanci vrátane zamestnávateľov, SZČO, brigádnici, dobrovoľne poistení). Prijaté poistné od týchto občanov slúži na výplatu dávok pre penzistov. Prvý pilier zároveň spĺňa charakteristiku dávkovo definovaného systému.

V kontraste k štátom poskytovanému systému sociálneho zabezpečenia si občania sporia<sup>1</sup> aj v tzv. II. pilieri dôchodkového systému, ktorý je charakterizovaný ako príspevkovo definovaný systém s fondovým financovaním. To znamená, že každý sporiteľ má vedený svoj individuálny dôchodkový účet v dôchodkovej správcovskej spoločnosti, kam pravidelne odvádza príspevky, a kde sa jeho nasporená suma priebežne zhodnocuje. Následne, pri dosiahnutí dôchodkového veku, si z tejto konečnej čiastky zakúpi dôchodok [10, 5].

Táto kapitola sa bude venovať I. pilieru a nasledujúca II. pilieru ako aj kombinácii oboch pilierov.

### 2.1 Charakteristika

Modelované situácie vychádzajú z podmienok aktuálne platných na Slovensku pre I. pilier. Týmto podmienkam sú podriadené aj jednotlivé výpočty v závere kapitoly, kde je

<sup>1</sup>Tiež sa dá hovoriť o investovaní, keďže výnosy sú dosahované prostredníctvom investičných nástrojov, a občan má, aj keď limitované, možnosti voľby spôsobu investovania v tom-ktorom fonde.

uvedených niekoľko modelových situácií sprevádzaných aj reálnymi číslami.

Takýto priebežne financovaný systém je vystavený najmä demografickému riziku, ktoré súvisí s obnovou obyvateľstva, t. j. či bude existovať dostatok aktívnych členov, ktorí zabezpečujú príspevky, aby to pokrylo potreby pasívnych členov, ktorí poberajú dávky. Tým, že systém okamžite prerozdeľuje prijaté poistné, tak schéma nie je vystavená trhovému riziku, inflácii ani rizikám súvisiacim s úrokovou mierou.

Aby bolo možné jednotlivé skutočnosti vyjadriť aj matematickým zápisom, je nutné zaviesť niektoré symboly a označenia. Jednou z najdôležitejších charakteristík je vekové zloženie obyvateľstva, nech veličina

$$L(x, t) \quad x = 0, 1, \dots, \omega \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

označuje počet  $x$ -ročných osôb, ktoré sú nažive na začiatku  $t$ -ho roka, pričom  $\omega$  je uvažovaný maximálny vek, ktorého sa osoba môže dožiť. Pravdepodobnosť, že  $x$ -ročná osoba sa dožije veku  $x + 1$ , je potom

$$p(x, t) = \frac{L(x + 1, t + 1)}{L(x, t)}, \quad (2.2)$$

resp. pravdepodobnosť, že počas najbližšieho roka zomrie  $q(x, t) = 1 - p(x, t)$ .

Ako je známe, mzdy sa z roka na rok zvyšujú, pokiaľ sa však uvažuje systém ako celok, je postačujúce používať vo výpočtov priemernú mzdu. Symbolom  $s(t)$  bude označená priemerná mzda v roku  $t$ .

Veličina  $\pi(t, x)$  bude vyjadrovať mieru prispievania  $x$ -ročnej osoby do schémy v  $t$ -om roku a bude určená ako percentuálna časť zo mzdy prispievateľa. Obdobne je definovaná aj výška dávok,  $d(t, x)$ .

Teraz je možné určiť niektoré agregátne veličiny:

$$S(t) = \sum_{x=x_0}^{x_R-1} s(t)L(x, t) \quad (2.3)$$

predstavuje celkové mzdy populácie v čase  $t$ ,

$$C(t) = \sum_{x=x_0}^{x_R-1} \pi(t, x)s(t)L(x, t) \quad (2.4)$$

vyjadruje celkovú výšku vyzbieraného poistného v roku  $t$  a

$$B(t) = \sum_{x=x_R}^{\omega} d(t, x)L(x, t) \quad (2.5)$$

označuje celkovú výšku vyplatených dávok všetkým penzistom v roku  $t$ . Symboly  $x_0$



a  $x_R$  v sumách reprezentujú:

$$\begin{aligned} x_0 & - \text{vek, kedy osoba začína byť ekonomicky aktívna,} \\ x_R & - \text{vek, kedy osoba odchádza do dôchodku.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pri konštantnej úrokovej miere  $i$ , možno vyjadriť retrospektívnu rezervu v čase  $t$  nasledovne:

$$V^{\text{retro}}(t) = V(0)(1+i)^t + \sum_{s=0}^{t-1} (C(s) - B(s))(1+i)^{t-s}. \quad (2.7)$$

Vhodnejší je ale pohľad do budúcnosti a pre výpočty použiť prospektívnu rezervu

$$V^{\text{prosp}}(t) = \sum_{s=t}^{\infty} B(s)(1+i)^{-(s-t)} - \sum_{s=t}^{\infty} C(s)(1+i)^{-(s-t)}. \quad (2.8)$$

V prípade DC schémy, kedy sú známe budúce príspevky, tak podľa aktuárskych princípov je možné určiť budúce dávky, obdobne v prípade DB schémy sa určia budúce príspevky na základe známych budúcich dávok.

Penzijná schéma je prijateľná (udržateľná) vtedy, ak výška rezerv vypočítaná oboma spôsobmi je rovnaká, čiže

$$V^{\text{retro}}(t) = V^{\text{prosp}}(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Potom skutočnosť, že prostriedky sú v priebežne financovanom systéme prerozdeľované bez časového rozlíšenia, možno vyjadriť ako

$$C(t) = B(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Z toho vyplýva, že výška rezervy je v každom čase nulová<sup>2</sup>,

$$V(t) = 0, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Za predpokladu, ktorý okrem iného platí aj pre slovenský dôchodkový systém, že miera príspevkov je konštantná bez ohľadu na vek  $\pi(t, x) = \pi(t)$ , pre výšku týchto príspevkov platí:

$$\pi(t) = \frac{\sum_{x=x_R}^{\omega} d(t, x)L(x, t)}{\sum_{x=x_0}^{x_R-1} s(t)L(x, t)} = \frac{B(t)}{S(t)}. \quad (2.12)$$

Tento vzťah teda predstavuje tú situáciu, keď je stanovená výška dôchodkov a je

---

<sup>2</sup>Samozrejme, inštitúcia musí tvoriť určité rezervy na preklenutie drobných rozdielov vo výbere poisťného v jednotlivých mesiacoch a výplat dávok, napríklad mzdy vykazujú sezónne výkyvy, zatiaľ čo dôchodky sú konštantné po celý rok. Pre názornosť výpočtov sú tieto rezervy zanedbané (kľudne môžu byť zaradené do bežných účtovných rezerv a poisťno-technické rezervy v tomto prípade budú oprávnené nulové).

žiadúce určiť minimálnu zodpovedajúcu výšku príspevkov, aby bola výška rezerv nezáporná. Analogicky je možné odpovedať na otázku, akú úroveň vyplácaných dôchodkov zabezpečí pevne určená výška príspevkov. Nech  $d(t)$  predstavuje priemerný dôchodok všetkých penzistov, potom jeho výšku určuje rovnica

$$d(t) = \frac{\sum_{x=x_0}^{x_R-1} \pi(t)s(t)L(x, t)}{\sum_{x=x_R}^{\omega} L(x, t)}. \quad (2.13)$$

Zvyšná časť kapitoly je zameraná najmä na modelovanie miery príspevkov a výšky dávok podľa vzťahov (2.12) a (2.13) do budúcnosti.

## 2.2 Stochastický model

Aby sa dala určiť výška príspevkov vo vzájomnom vzťahu k dávkam podľa vzťahov (2.12) a (2.13), je potrebné poznať hodnoty zvyšných veličín – počet obyvateľov spolu s ich mzdami. K určeniu budúceho vekového zloženia populácie je použitý stochastický model navrhovaný Aroovou a Pennanenom v [2]. Čo sa týka vývoja miezd, bude ukázané, že pre modelovanie priebežného systému pre celú populáciu nie je tento vývoj rozhodujúci.

Cieľom je teda modelovať hodnoty  $L(x, t)$  na základe historického vývoja počtu obyvateľov. Pre budúce roky  $t$  sa stáva premenná  $L(x, t)$  náhodnou premennou a predpokladá sa, že hodnota  $L(x + 1, t + 1)$  pri známej hodnote  $L(x, t)$  sa riadi binomickým rozdelením:

$$L(x + 1, t + 1) \sim Bi(L(x, t), p(x, t)), \quad (2.14)$$

kde  $p(x, t)$  je pravdepodobnosť prežitia.

Stochastický model úmrtnosti vznikne tak, že pravdepodobnosti prežitia  $p(x, t)$  budú modelované ako stochastické procesy. Budúce hodnoty  $L(x + 1, t + 1)$  je potom možné získať generovaním hodnôt náhodnej premennej riadiacej sa rozdelením z (2.14). Aj keby boli známe hodnoty  $p(x, t)$ , budúca veľkosť populácie by bola stále náhodná. S rastúcou veľkosťou populácie však podiel  $L(x + 1, t + 1)/(L(x, t)p(x, t))$  konverguje k hodnote 1. Tým pádom dynamika veľkej populácie je dostatočne spoľahlivo určená vzťahom  $L(x + 1, t + 1) = L(x, t)p(x, t)$ , a hlavný zdroj neurčitosti pochádza z náhodnosti hodnôt  $p(x, t)$ .

Aro navrhuje modelovať pravdepodobnosti takto:

$$\text{logit } p(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)\phi_i(x), \quad (2.15)$$

kde  $\text{logit } p(x, t) := \ln[p(x, t)/(1 - p(x, t))]$  je logistická transformácia,  $\phi_i(x)$  sú zvolené *bázové funkcie* a  $v_i(t)$  sú *stochastické rizikové faktory*, ktoré sú závislé od času.

Z vyjadrenia pravdepodobnosti

$$p(x, t) = \frac{\exp(\sum_{i=1}^n v_i(t)\phi_i(x))}{1 + \exp(\sum_{i=1}^n v_i(t)\phi_i(x))} \quad (2.16)$$

je vidno, že hodnoty  $p(x, t) \in (0, 1)$ , čo znamená, že sa naozaj jedná o pravdepodobnosti.

Podmienkou pre voľbu bázových funkcií  $\phi_i(x)$  je, aby boli navzájom lineárne nezávislé. To je splnené iba vtedy, ak jediným riešením rovnice

$$\sum_{i=1}^n v_i\phi_i(x) = 0, \quad x = 0, 1, \dots, \omega \quad (2.17)$$

je nulový vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbf{0}$ . Voľba bázových funkcií určuje, ako budú interpretované jednotlivé rizikové faktory. Takýmto spôsobom je potom možné určiť závislosť medzi rizikovým faktorom a určitým ekonomickým alebo sociálnym faktorom (napríklad napredovanie zdravotnej starostlivosti u detí do 1 roka života, výnosnosť kapitálu a pod.). Takéto závislosti hrajú významnú úlohu v správnom nastavení riadenia aktív a pasív poisťovne (*asset-liability management*) alebo oceňovaní nástrojov naviazaných na úmrtnosť.

Po zvolení bázových funkcií je potrebnú určiť vývoj jednotlivých rizikových faktorov. Historické hodnoty sú stanovené na základe hodnôt  $L(x, t)$  metódou maximálnej vierohodnosti

$$l_t(\mathbf{v}) = \sum_{x=0}^{\omega-1} \left[ L(x+1, t+1) \sum_i v_i\phi_i(x) - L(x, t) \ln(1 + e^{\sum_i v_i\phi_i(x)}) \right] + c_t, \quad (2.18)$$

$$c_t = \sum_{x=0}^{\omega-1} \ln \left( \frac{L(x, t)}{L(x+1, t+1)} \right).$$

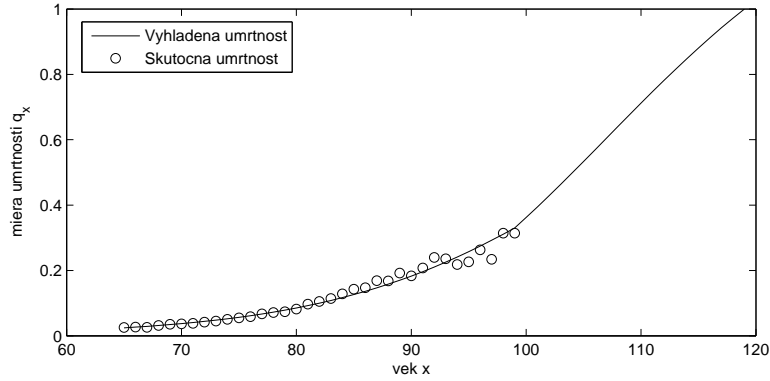
Maximum tejto funkcie je možné nájsť napríklad numerickými metódami (postup napr. v [6]). V [2] je dokázané, že funkcia vierohodnosti  $l_t$  je konvexná, a teda nájdené lokálne maximum je aj globálnym maximom. Budúci vývoj je následne modelovaný pomocou Brownovho pohybu.

## Príprava údajov

Ako údaje o populácii sa použijú historické hodnoty počtu mužov a žien na Slovensku vo vekoch 0-100 rokov v období rokov 1945–2012<sup>3</sup>. Populácia mužov a žien je modelovaná samostatne z viacerých dôvodov:

- odlišný priebeh umierania u mužskej a ženskej časti obyvateľstva,

<sup>3</sup>Štatistický úrad: Tabuľky života, <<http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=33011>>.



Obr. 2.1. Porovnanie skutočných a vyhladených mier pravdepodobnosti úmrtia  $q_x = 1 - p(x, t = 2011)$

- odlišný výskyt invalidity (priebeh invalidity je potrebné poznať z dôvodu určenia počtu ľudí, ktorí aktívne pracujú a prispievajú na starobné poistenie), a
- počet narodených osôb je možné určiť pomocou miery plodnosti namiesto ukazovateľa natality.

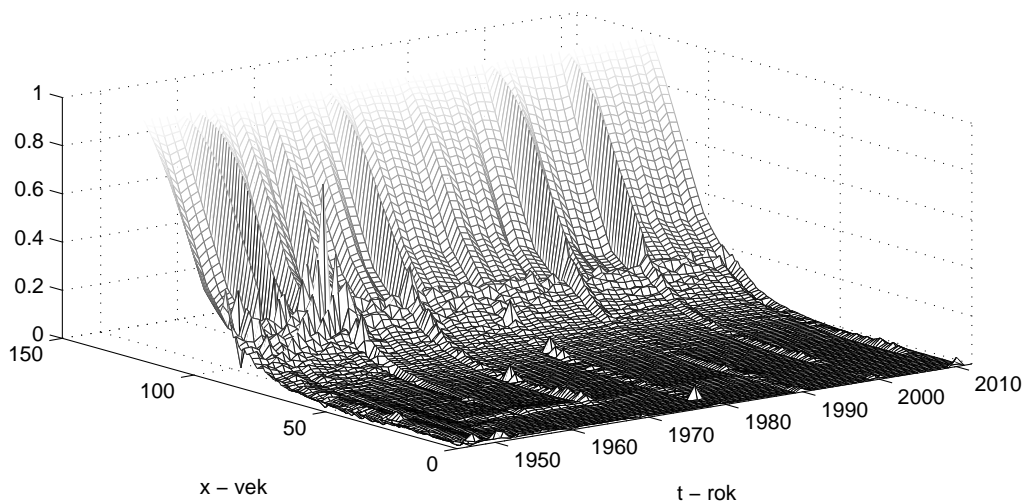
Štatistické hodnoty o počte obyvateľov vykazujú „anomáliu“, pretože v niektorých prípadoch nie je splnená podmienka  $L(x + 1, t + 1) \leq L(x, t)$ . Tento fakt je možné pripísať migrácii (údaje hovoria totiž iba o veľkosti populácie, nie o počte narodených a zomretých). V týchto prípadoch sú vo výpočte pravdepodobnosti  $p(x, t)$  postavené rovné 1.

Ďalším problémom je zakončenie tabuľky vo veku  $\omega$ , kde toto číslo v skutočnosti vyjadruje počet osôb vo veku  $\omega, \omega + 1, \dots$ . Počty takýchto dlhodožívajúcich sa ľudí postupne vzrastajú a prestávajú byť dostatočne malé na to, aby sa zanedbali. Berrieu [3] navrhuje konce úmrtnostných tabuliek vyhladiť a uzavrieť. Vyhladenie spočíva v nahradení niekoľkých posledných hodnôt vhodne zvolenou funkciou. Pod uzavretím sa rozumie to, že sú nastavené  $p(\omega - 1, t) = 0$ . Dáta pripravované pre model, ktorý je opisovaný v tejto kapitole podstúpia dve transformácie – prvou je zvýšenie maximálneho možného veku na  $\omega = 120$  rokov. Druhou úpravou je vyhladenie hodnôt ku koncu tabuľky, kde ako funkcia pre vyhladzovanie bola zvolená

$$q_x = \frac{1}{1 + e^{-\alpha x + \beta}}, \quad (2.19)$$

pričom parametre  $\alpha, \beta$  sú odhadované pre  $x = 65, 66, \dots, 99$ . Pravdepodobnosti prežitia  $p(x, \cdot)$  boli nahradené vyhladenou funkciou iba pre  $x = 90, 91, \dots, \omega$ , kde posledných 20 hodnôt bolo vhodne prenasobených, aby platilo  $p(\omega, \cdot) = 0$ . Zmena v hodnotách pre rok 2012 je ukázaná na Obr. 2.1.

Tým, že došlo k úprave pravdepodobností  $p(x, t)$ , adekvátne boli upravené aj hodnoty  $L(x, t)$ , aby aj naďalej platilo  $L(x + 1, t + 1) = p(x, t)L(x, t)$ . Na Obr. 2.2 sú



Obr. 2.2. Pravdepodobnosti prežitia pre rozšírené a vyhladené ÚT, mužská populácia

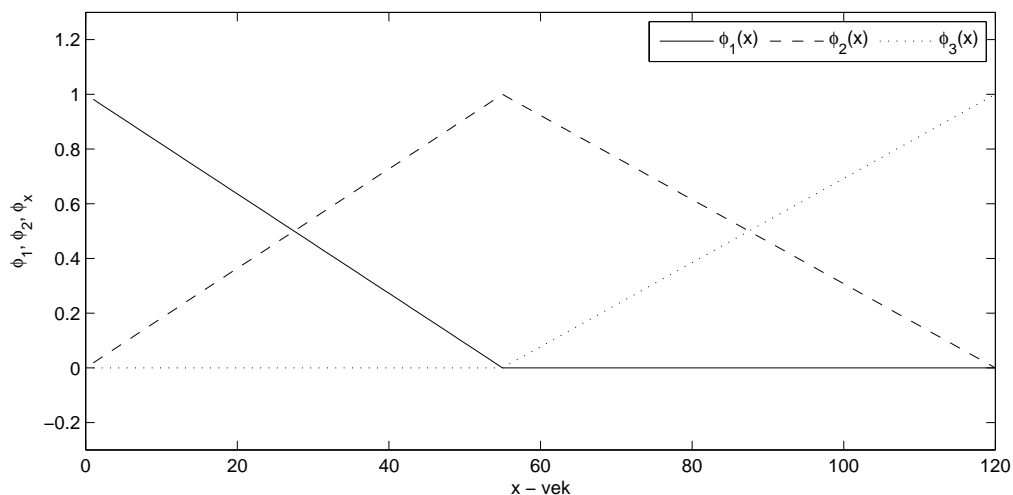
v grafickej podobe uvedené upravené pravdepodobnosti prežitia. Na tomto grafe si je možné všimnúť „výčnelky“ pravidelne opakujúce sa v čase a týkajúce sa všetkých vekových skupín. Tomuto javu venuje časť A.2 v prílohe.

Ďalším krokom je voľba vhodných bazových funkcií a odhad historických hodnôt rizikových faktorov. Ako vhodný model bol zvolený trojparametrový model s týmito bazovými funkciami (Obr 2.3):

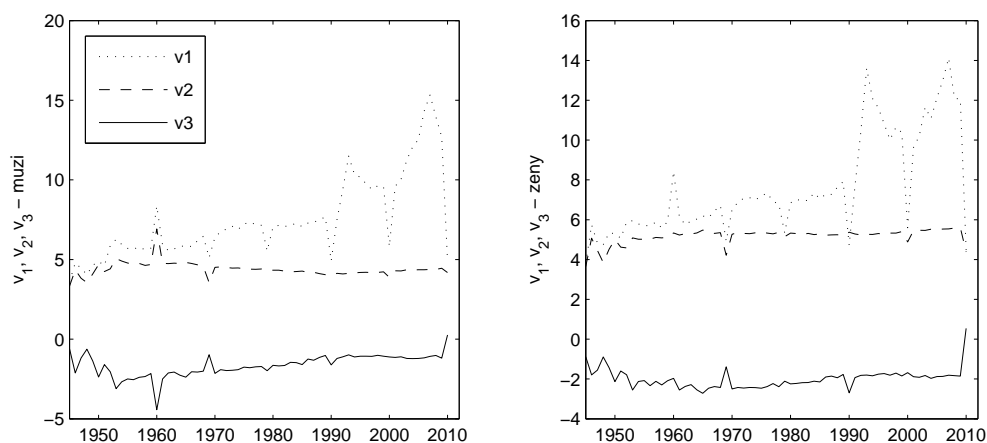
$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{x}{55} & x \leq 55 \\ 0 & x > 55, \end{cases} \\
 \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x}{55} & x \leq 55 \\ 1 - \frac{x-55}{65} & x > 55, \end{cases} \\
 \phi_3(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 55 \\ \frac{x-55}{65} & x > 55. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Takto stanovené bazové funkcie so sebou nesú istý druh interpretácie:  $\phi_1$  má klesajúci charakter v prvej časti vekovej stupnice, a predstavuje váhu, s akou vplýva prvý rizikový faktor  $v_1$  na úmrtnosť v jednotlivých vekových skupinách – na deti má veľký vplyv, pričom starších ľudí neovplyvňuje nijako. Obdobne tretí rizikový faktor  $v_3$  predstavuje vplyv na úmrtnosť v skupine občanov-dôchodcov. Jeho konkrétna interpretácia by mohla byť spojená s dostupnosťou zdravotnej starostlivosti pre starých občanov, prevenciou ochorení počas života, ale aj finančnou situáciou v starobe.

Historické hodnoty rizikových faktorov sú odhadnuté maximalizáciou vzťahu (2.18) a výsledok je viditeľný na Obr. 2.4. V prípade faktorov  $v_1$  a  $v_3$ , ktoré sa spájajú s úmrtnosťou mladých a starých občanov, vidno rastúci trend, zatiaľ čo v prípade



Obr. 2.3. Priebek bázových funkcií v závislosti od veku



Obr. 2.4. Historické hodnoty rizikových faktorov

faktora  $v_2$  spájaného so životaschopnosťou pracujúcej skupiny došlo dokonca k mier-  
nemu poklesu v minulosti, v posledných rokoch však zaznamenáva mierny rast, ktorý  
je výraznejší v prípade ženskej populácie. Rastúca tendencia týchto faktorov zodpo-  
vedá všeobecnému trendu zvyšovania dĺžky života t. j. zvyšovania pravdepodobnosti  
prežitia.

V prílohe v časti A.3 sa nachádza porovnanie niekoľko ďalších modelov s inak zvolenými bázovými funkciami.

## 2.3 Simulácia

Pre simuláciu budúcich hodnôt faktorov sa použijú hodnoty iba za posledných 40 rokov.  
Táto simulácia bude dosiahnutá pomocou viac-rozmerného Brownovho pohybu, kde

hodnoty prírastkov  $\Delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t+1) - \mathbf{v}(t)$  pochádzajú z normálneho rozdelenia<sup>4</sup>  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , pričom vektor  $\mathbf{v}$  je definovaný ako stĺpcový vektor zložený z jednotlivých rizikových faktorov pre mužov a ženy<sup>5</sup>,  $\mathbf{v} = (v_1^M, v_2^M, v_3^M, v_1^F, v_2^F, v_3^F)^T$ , premenná  $\mu$  predstavuje vektor stredných hodnôt prírastkov,

$$\mu = \mathbb{E}(\Delta \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 0,1575 \\ -0,0014 \\ 0,0239 \\ 0,1385 \\ 0,0083 \\ 0,0160 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

a premenná  $\Sigma$  je variačno-kovariančná matica zodpovedajúca týmto prírastkom,

$$\Sigma = \text{cov}(\Delta \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1,7253 & 0,0874 & 0,1176 & 1,9558 & 0,1021 & 0,0748 \\ 0,0874 & 0,0094 & 0,0008 & 0,1037 & 0,0112 & -0,0011 \\ 0,1176 & 0,0008 & 0,0282 & 0,1289 & -0,0002 & 0,0220 \\ 1,9558 & 0,1037 & 0,1289 & 2,4272 & 0,1109 & 0,0999 \\ 0,1021 & 0,0112 & -0,0002 & 0,1109 & 0,0202 & -0,0157 \\ 0,0748 & -0,0011 & 0,0220 & 0,0999 & -0,0157 & 0,0477 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Potom možno definovať budúce hodnoty prírastkov ako

$$\Delta \mathbf{v}(t) = \mu t + \Delta Z_t, \quad (2.23)$$

kde  $Z_t$  je viac-rozmerný korelovaný Brownov pohyb, ktorého prírastky sú z normálneho rozdelenia  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ .

Nech  $W_t$  je viac-rozmerný nekorelovaný Brownov pohyb s prírastkami  $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , matica  $C$  je získaná Choleskeho dekompozíciou variačno-kovariančnej matice  $\Sigma$ , čiže platí

$$\Sigma = C^T C. \quad (2.24)$$

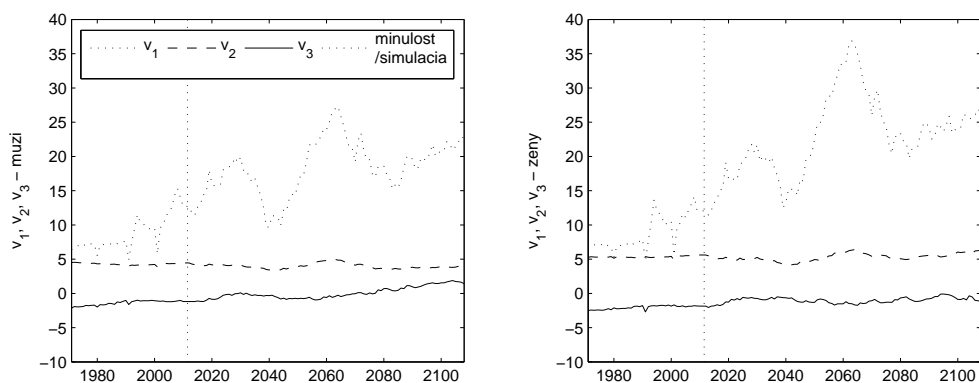
Potom premennú  $\Delta Z_t$  je možné nahradiť výrazom

$$\Delta Z_t = C^T(\Delta W_t). \quad (2.25)$$

Nájsť konkrétne hodnoty matice  $C$  väčšinou umožňuje matematický softvér a hodnoty  $\Delta W_t$  je možné získať generovaním náhodných hodnôt z normálneho rozdelenia. Viac

<sup>4</sup>Kolmogorovovým-Smirnovým testom na normalitu sa zistilo, že prírastky pre premenné  $v_2^M$  a  $v_2^F$  nepochádzajú z normálneho rozdelenia na hladine významnosti 0,05. Pre názornosť výpočtu sa ale bude predpokladať, že všetky prírastky vykazujú normalitu.

<sup>5</sup>V prípade nutnosti odlíšiť veličinu týkajúcu sa samostatne mužskej a samostatne ženskej populácie, sú použité horné indexy  $M$  a  $F$ .



Obr. 2.5. Historické hodnoty a budúce hodnoty pre jeden bez simulácie rizikových faktorov

informácií k tejto problematike poskytuje napríklad Haugh [7].

Potom pre každý beh simulácie sú zostrojené pravdepodobnosti  $p(x, t)$  podľa vzťahu (2.16). Na Obr. 2.5 sa nachádza priebeh vývoja rizikových faktorov pre jeden bez simulácie. To, čo model zatiaľ neposkytuje, je informácia o prírastkoch obyvateľstva, až s touto informáciou je možné zostrojiť tabuľky počtu žijúcich ľudí.

## Prírastky obyvateľstva

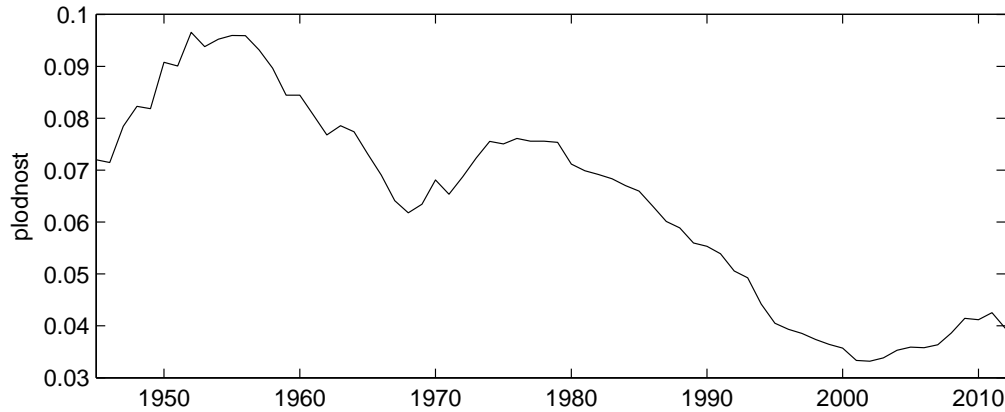
Pre simulovanie počtu narodených detí bol zvolený ukazovateľ plodnosti, ktorý lepšie vystihuje dynamiku populácie najmä v prípade neurčitého zastúpenia mužov a žien v spoločnosti v budúcnosti. Plodnosť je definovaná ako počet detí, ktoré sa narodia žene medzi 15. do 51. rokom života. Pre potreby stanovovania počtu narodených detí v jednom roku je vhodné vychádzať z pozmenenej verzie ukazovateľa, pomeru počtu narodených detí a počtu všetkých žien v plodnom veku

$$\text{fer}^{15-49}(t) = \frac{L(0, t)}{\sum_{x=15}^{49} L^F(x, t)} \quad (2.26)$$

kde  $L^F(x, t)$  je počet  $x$ -ročných žien v roku  $t$  (vývoj takejto plodnosti pre slovenské obyvateľstvo je na Obr. 2.6). Pokiaľ sa spriemerujú hodnoty od roku 1990, kedy bol vývoj relatívne stabilný, získa sa plodnosť  $\overline{\text{fer}} = 0,0404$  dieťaťa na jednu ženu v plodnom veku za rok. Takto určená plodnosť vynásobená dĺžkou uvažovaného plodného veku predstavuje v priemere 1,4123 dieťaťa na ženu, čo je konzistentné so súčasným stavom.

Pokiaľ je k dispozícii aj údaj o maskulinite detí narodených v jednom roku, je možné jednoduchým spôsobom určiť počet narodených detí z údajov o populácii v predchádzajúcom roku. Nech  $\text{mask}(t)$  predstavuje percentuálny podiel chlapcov z celkového





Obr. 2.6. Vývoj plodnosti v rokoch 1945-2012 na Slovensku

počtu 0-ročných detí v danom roku

$$\text{mask}(t) = \frac{L^M(0, t)}{L^M(0, t) + L^F(0, t)} = \frac{L^M(0, t)}{L(0, t)} \quad (2.27)$$

Toto číslo je historicky veľmi stále a drží sa okolo hodnoty  $\overline{\text{mask}} = 51,2 \%$ .

Potom počet narodených detí je určený vzťahmi:

$$\begin{aligned} L(0, t + 1) &= \overline{\text{fer}} * \sum_{x=14}^{48} L^F(x, t) \\ L^M(0, t + 1) &= L(0, t + 1) * \overline{\text{mask}} \\ L^F(0, t + 1) &= L(0, t + 1)(1 - \overline{\text{mask}}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

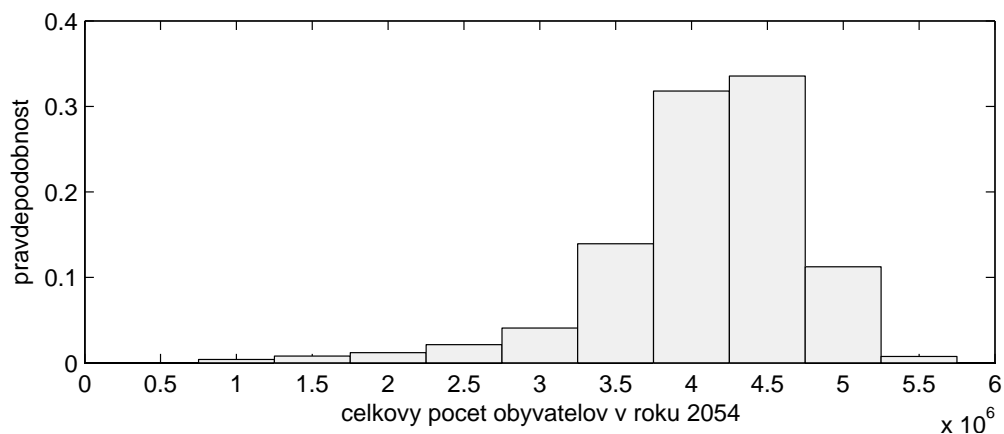
Veľkosť zvyšnej populácie mužov (žien) je určená ako

$$L^{M(F)}(x + 1, t + 1) = p^{M(F)}(x, t)L^{M(F)}(x, t). \quad (2.29)$$

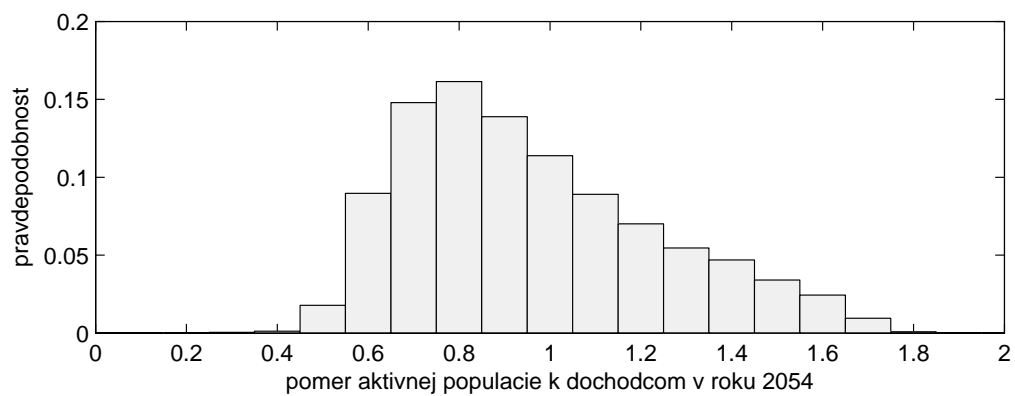
Potvrdili sa dva známe fakty, a to, že populácia starne a postupne vymiera. Spoločnými činiteľmi sú nízka plodnosť (menšia ako cca. 2,1 dieťaťa na ženu) a zvyšujúca sa priemerná dĺžka života t. j. zvyšujúca sa pravdepodobnosť prežitia. Tieto javy sú ilustrované aj priloženými grafmi distribúcie počtu obyvateľov a pomeru produktívnej zložky občanov ku poproduktívnej časti (Obr. 2.7 a 2.8). Trend starnutia je rovnako viditeľný aj z grafického zobrazenia tzv. vekovej pyramídy (Obr. 2.9).

## 2.4 Praktické príklady

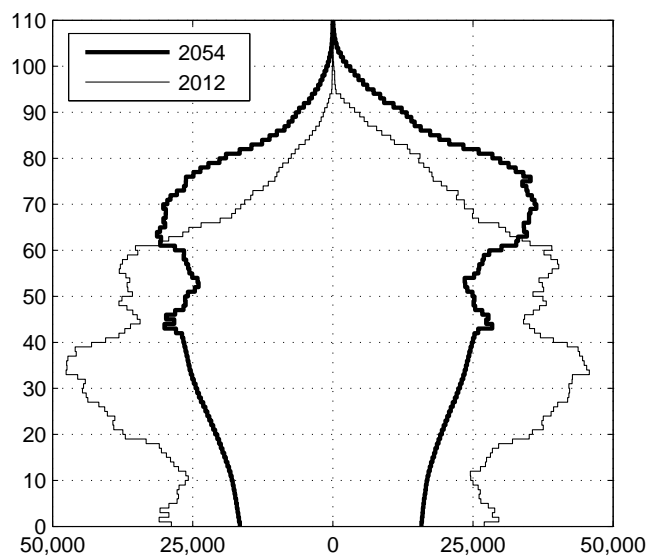
Tým, že je známy očakávaný vývoj populácie v budúcnosti, je možné pristúpiť k praktickým aktuárskym výpočtom týkajúcich sa starobných dôchodkov. Vo vzťahoch (2.12)



Obr. 2.7. Odhadovaná distribúcia počtu obyvateľov na Slovensku v roku 2054



Obr. 2.8. Odhadovaná distribúcia pomeru produktívnej zložky obyvateľstva ku produktívnej zložke v roku 2054



Obr. 2.9. Porovnanie odhadovanej očakávanej vekovej štruktúry v roku 2054 oproti stavu z roku 2012 (naľavo muži, napravo ženy)

a (2.13) na určenie veľkosti príspevkov  $\pi(t)$ , resp. dávok  $d(t)$  sa nachádza ešte jedna neznáma veličina, ktorou je priemerný plat  $s(t)$ . Pokiaľ je však postačujúce udávať hodnoty dôchodkov ako pomernú časť priemernej mzdy v hospodárstve, môže sa položiť priemerný plat rovný jednej,

$$s(t) = 1, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Toto zjednodušenie je akceptovateľné pre potreby priebežne financovaného systému, čiže I. piliera, a pokiaľ sa výpočet zaoberá populáciou ako celkom. V prípade modelovania zohľadňujúceho aj II. pilier alebo modelovanie finančných tokov konkrétneho jedinca, je už potrebné poznať vývoj mzdových podmienok<sup>6</sup>.

V spomínaných vzťahoch sa pre výpočet používa počet obyvateľov buď v produktívnom veku ( $x_0 \leq x < x_R$ ) alebo poproduktívnom veku ( $x_R \leq x \leq \omega$ ). Hodnotu, kedy človek začína byť ekonomicky aktívny je možné zvoliť konštantnú pre celé sledované obdobie, pre potreby tejto práce bude platiť

$$x_0 = 21 \text{ rokov.} \quad (2.31)$$

V prípade dôchodkového veku  $x_R$  je situácia mierne komplikovanejšia, keďže tento vek sa postupne zvyšuje. Aby model čo najviac zohľadňoval podmienky na Slovensku, bude sa vychádzať z aktuálne platných hraníc dôchodkového veku<sup>7</sup>, ktoré sú uvedené v Tab. 2.1.

Tab. 2.1. Dôchodkový vek (občan odchádza do dôchodku po dosiahnutí daného veku)

Narodení do	1945	1955	1961	1968	neskôr
<b>Muži</b>	60	62	63	64	65
<b>Ženy</b>	55*		63	64	65

\* 53 až 57 rokov v závislosti od počtu vychovaných detí

Zdroj: Zákon 252/2012 Z. z., ktorým sa mení a dopĺňa zákon 461/2003 Z. z. o sociálnom poistení

<sup>6</sup>Aj v tomto prípade existuje možnosť vyhnúť sa „dollar-amount“ hodnotám. Ak je známa úroveň rastu miezd, je dostatočné udávať mzdu ako násobok mzdy vo zvolenom referenčnom roku.

<sup>7</sup>Ako je uvedené v časti 1.1 dôchodkový vek sa bude zvyšovať aj v závislosti od predlžujúcej sa strednej dĺžky života. Tento fakt je zanedbaný, keďže zatiaľ nie sú presne definované pravidlá, ako sa bude táto veková hranica zvyšovať. Toto zjednodušenie vplýva na model takým spôsobom, že podhodnuceje výsledky – v skutočnosti bude dôchodkový vek takmer určite vyšší ako modelovaný, tým pádom v realite bude menej dôchodcov a viac pracujúcich v porovnaní s projektovanými hodnotami, a teda dôchodky budú vyššie, resp. príspevky nižšie.

## Invalidita a nezamestnanosť

Ďalšími aspektami, ktoré treba zahrnúť, sú invalidita a nezamestnanosť. Je zrejmé, že nie všetci, ktorí sú v produktívnom veku, aj naozaj pracujú a prispievajú na starobné poistenie<sup>8</sup>. Prvým krokom je vylúčenie skupiny invalidných občanov.

Pre určenie miery invalidity v každom veku života sa použijú údaje z [8]. Táto miera sa pre zjednodušenie bude považovať za závislú od veku, nie od času. Opiera sa tu o predpoklad, že invalidita spojená najmä s pracovnými úrazmi bude v budúcnosti na ústupe z dôvodu stále zvyšujúcich sa bezpečnostných štandardov, avšak tento efekt bude v negatívnej miere vyrovnaný zvyšujúcim sa výskytom rôznych civilizačných ochorení, ktoré dlhodobo znižujú pracovnú schopnosť a ktoré sa v minulosti vyskytovali len ojedinele. Čiastočné zníženie pracovnej schopnosti nie je vzaté v úvahu, keďže osoby môžu stále vykonávať zárobkovú činnosť, a tým pádom aj prispievať na systém starobného zabezpečenia.

Miera nezamestnanosti je odhadnutá takýmto spôsobom: stredná hodnota pomeru priemerného dôchodku a priemernej mzdy sa za obdobie rokov 2002–2012 rovná 44,9 % (št. odchýlka 0,92 %),

$$\mathbb{E}_t \left[ \frac{\text{Ødôchodok}(t)}{\text{Ømzda}(t)} \right] = 0,449. \quad (2.32)$$

Zrejme platí

$$L^R(t) * \text{Ødôchodok}(t) = L^A(t) * \text{Øpoistné}(t) * \text{zam}(t), \quad (2.33)$$

$$L^R(t) * 0,449 * \text{Ømzda}(t) = L^A(t) * \pi(t) * \text{Ømzda}(t) * \text{zam}(t), \quad (2.34)$$

kde  $L^R = \sum_{x=x_R}^{\omega} L(x, t)$  a  $L^A = \sum_{x=x_0}^{x_R-1} L(x, t)$  predstavujú počet dôchodcov a počet aktívnych ľudí, poistné zodpovedá priemernej výške odvodov,  $\text{zam}(t)$  vyjadruje úroveň zamestnanosti, t. j. aká časť aktívnej populácie pracuje. Vyjadrením sa získa zamestnanosť

$$\text{zam}(t) = \frac{L^R(t) 0,449}{L^A(t) \pi(t)}, \quad (2.35)$$

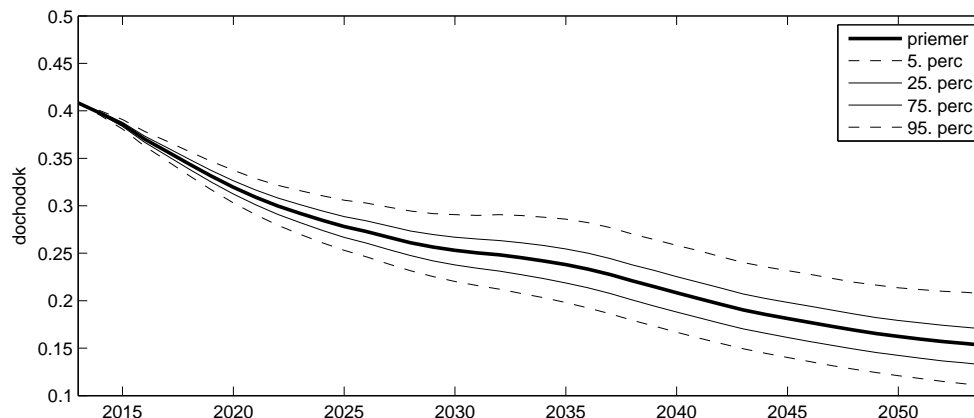
Pri konštantnej úrovni príspevkov  $\pi(t) = 18 \%$  potom pre priemernú zamestnanosť  $\text{zam}$  platí:

$$\text{zam} = \mathbb{E}_t[\text{zam}(t)] = 0,5439, \quad (2.36)$$

teda z potenciálne práceschopného obyvateľstva (už po vylúčení invalidnej populácie) pracuje a prispieva na dôchodkové poistenie 54,42 %. Predpokladom modelu je, že tento pomer ostane dlhodobo zachovaný.

---

<sup>8</sup>Abstrahuje sa tu od tých situácií, kedy občan síce má príjem, ale z rôznych dôvodov odvody neodvádza. Takíto ľudia sú zaradení medzi nepracujúcimi, pričom pojem nezamestnaný a nepracujúci sú považované za totožné.



Obr. 2.10. Distribúcia priemerných dôchodkov pre roky 2013 až 2054 (stredná hodnota a vybrané kvantily pre  $N = 10000$  simulácií)

## Dôchdok

Teraz je už možné pristúpiť k odhadu vývoja dôchodkov v najbližšom časovom horizonte. Ponúkajú sa dve otázky, na ktoré je možné hľadať odpovede:

- aký dôchodok zabezpečí daná úroveň príspevkov, a
- akú úroveň príspevkov treba stanoviť na dosiahnutie želaného dôchodku.

Ak sa predpokladá zachovanie súčasnej odvodovej povinnosti, kde pre príspevok na starobné poistenie platí  $\pi(t) = 18\%$ , celkové vyzbierané poistné je podľa (2.4) a s ohľadom na (2.30)

$$C(t) = \pi(t)L^A(t) * zam(t). \quad (2.37)$$

Potom pre dôchodok ako percentuálnu časť priemernej mzdy možno písať na základe (2.5) a (2.10)

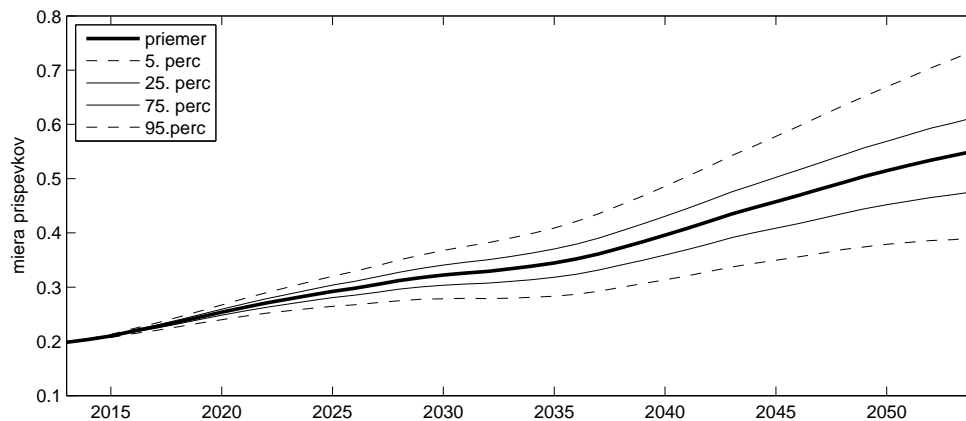
$$d(t) = \frac{B(t)}{L^R(t)} = \frac{L^A(t)}{L^R(t)}\pi(t) * zam(t). \quad (2.38)$$

Priebeh vývoja priemerného dôchodku je zobrazený na Obr. 2.10. Napríklad, v roku 2054 by priemerný dôchodok dosahoval úroveň 15,27 % z priemernej mzdy oproti hodnote 41,74 % dosiahnutej v roku 2012 (za predpokladu financovania iba z I. piliera a zohľadnenia demografického vývoja pri stanovovaní výšky dôchodkov).

Naopak, pre úroveň príspevkov pri stanovenej požadovanej úrovni dôchodkov platí

$$\pi(t) = \frac{L^R(t)}{L^A(t)} \frac{d(t)}{zam(t)}. \quad (2.39)$$

Obr. 2.11 zobrazuje požadovanú mieru príspevkov na to, aby mohol byť dôchodcom vyplácaný priemerný dôchodok vo výške 45 % aktuálnej priemernej mzdy. Napríklad, v roku 2054 by bolo potrebné odvádzať 55,14 % zo mzdy, aby to pokrylo náklady na vyplácanie dôchodkov v požadovanej miere.



Obr. 2.11. Distribúcia priemernej miery príspevkov pre roky 2013 až 2054 (stredná hodnota a vybrané kvantily pre  $N = 10000$  simulácií)

Tieto výsledky potvrdzujú, že financovanie penzií priebežným systémom je naozaj neudržateľné v prostredí v súčasnosti prebiehajúcich demografických zmien populácie. Spôsob, akým by sa vyvíjali dôchodky, príp. príspevky, je totiž spoločensky neprijateľný. V nasledujúcej kapitole je popísaný fondový systém financovania penzií, ktorý sa snaží vyriešiť niektoré problémy s klesajúcou úrovňou dôchodkov financovaných iba z priebežného systému.

# 3 Fondovo financovaný systém

Alternatívou pre priebežne financovanú schému je tu tzv. fondové financovanie. Princíp spočíva v tom, že pracujúca osoba počas svojho života odvádza príspevky v určitej výške na špeciálny účet, kde sú jeho príspevky akumulované a priebežne zhodnocované. Potom, pri odchode do dôchodku, mu je z konečného zostatku vyplácaný dôchodok. Na rozdiel od priebežného systému, kedy dávky dôchodcom boli financované z odvodov pracujúcej vrstvy, dôchodok občana vo fondovej schéme je financovaný výlučne z prostriedkov naakumulovaných ním samým počas jeho života.

Na Slovensku existuje tento systém v podobe II. piliera, pričom sa jedná o príspevkovo definovaný systém, t. j. výška dôchodku závisí od výšky odvedených príspevkov na osobný dôchodkový účet sporeteľa, ktorý je spravovaný dôchodkovou správcovskou spoločnosťou (DSS).

Konkrétna realizácia prebieha takým štýlom, že časť odvodov tých občanov, ktorí sa rozhodli vstúpiť do II. piliera je prevedená Sociálnou poisťovňou na účet sporeteľa v DSS. Tým pádom príspevky, ktoré „ostávajú“ v Sociálnej poisťovni (čiže I. pilieri), sú nižšie a aj priznaný dôchodok v budúcnosti bude adekvátne nižší. Toto zníženie má byť kompenzované práve dôchodkom plynúcim z nasporených úspor v druhom pilieri. Táto kapitola sa bližšie pozrie práve na priebeh výšky zostatku na sporeteľov účte počas doby sporenia a tiež uvedie niekoľko názorných príkladov, ako by mohol vyzeráť dôchodok kombinovane financovaný z I. a II. piliera.

Úspory vo fonde (súčte všetkých členských účtov) sú priebežne zhodnocované úrokovou mierou  $i(t)$ , ktorá je konštantná na časovom intervale  $t \in (t - 1, t]$ , príspevky sú platene pravidelne. Pre zjednodušenie sa predpokladá, že obnos príspevkov je splatný jednorazovo v strede roka. Potom hodnota fondu na konci  $t$ -ho roka je

$$F(t) = F(t - 1)(1 + i(t)) + c(t) \left( 1 + \frac{i(t)}{2} \right), \quad (3.1)$$

kde  $c(t)$  predstavuje veľkosť ročného príspevku do fondu a pre počiatočnú hodnotu platí  $F(0) = 0$ .

## 3.1 Kombinácia I. a II. piliera

V kontexte legislatívneho rámca účinného na Slovensku je nutné vo výpočtoch uvažovať o súčasnom efekte oboch pilierov. Je zbytočné uvažovať druhý pilier osamote, keďže nie je možné si individuálne sporiť na účet vedený v DSS bez povinnej účasti v I. pilieri. Pre tieto potreby sa zavedie nová veličina  $\pi^{\text{II}}(t)$ , ktorá predstavuje mieru príspevkov do

Tab. 3.1. Výška odvodov do II. piliera

<b>Rok</b>	2014	2015	2016	2017	2018
<b>Odvod</b>	4 %	4,25 %	4,5 %	4,75 %	5 %
<b>Rok</b>	2019	2020	2021	2022 a neskôr	
<b>Odvod</b>	5,25 %	5,5 %	5,75 %	6 %	

Zdroj: Zákon 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení

II. piliera (do I. piliera sa teda prispieva  $\pi(t) - \pi^{\text{II}}(t)$ ). Hodnoty, ktoré nadobúda  $\pi^{\text{II}}(t)$ , sú uvedené v Tab. 3.1. Aby bolo možné určiť výšku príspevkov v jednotlivých obdobiach je potrebné poznať výšku platu nie ako pomernú časť priemernej mzdy ale v jej peňažnom vyjadrení, nech teda  $w(t)$  predstavuje mesačnú mzdu daného zamestnanca. Potom pre výšku príspevku z (3.1) platí:

$$c(t) = \pi^{\text{II}}(t)w(t) \quad (3.2)$$

Na určenie priebehu mzdy zamestnanca sa použije platová stupnica z [9], ktorá udáva výšku platu danej osoby v danom roku ako násobok jej nástupného platu.

Účastník na doplnkovom starobnom sporení má možnosť si zvoliť z viacerých fondov, kde chce ukladať svoje prostriedky. Tieto sú charakteristické rôznym výnosom a rôznou rizikovosťou. Zákonný rámec však ukladá povinnosť posledných 5+9 rokov pred odchodom do dôchodku účastníka povinne preradiť do bezrizikového fondu s najnižším výnosom, aby sa predišlo významnej strate hodnoty v prípade výskytu neočakávaného poklesu trhovej hodnoty aktív, ktoré daný fond drží. Posledných 5 rokov je celá hodnota majetku občana v garantovanom fonde a medzi 14. až 6. rokom pred koncom sporenia musí byť splnená podmienka že postupne sa nachádza pomerná časť majetku v garantovanom fonde (v 14. roku aspoň 10 %, v 13. roku 20 %, až v 6. roku aspoň 90 %, v 5. a nasledujúcich rokoch celých 100 %).<sup>1</sup>

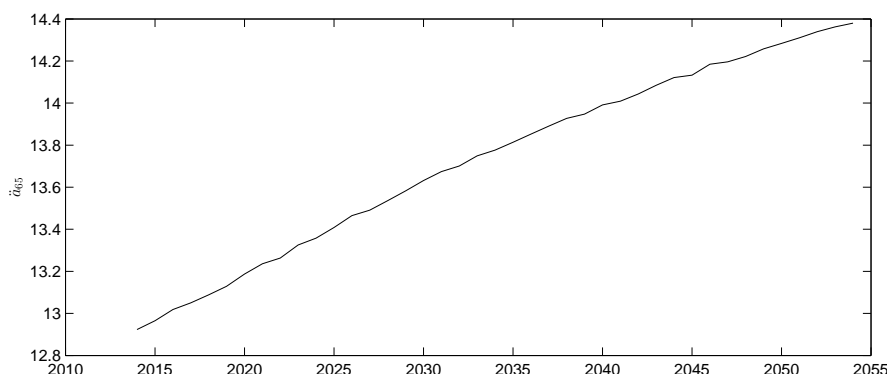
Tým pádom pre dané úrokové miery a daný vývoj mzdy účastníka je možné určiť konečnú hodnotu fondu v čase odchodu do dôchodku. Občan si z tejto sumy potom musí<sup>2</sup> zakúpiť doživotnú anuitu v niektorej zo životných poisťovní. Výška dôchodku pre osobu, ktorá si začala sporiť vo veku  $x$  rokov a do dôchodku odchádza ako  $(x+t)$ -ročná, vyplývajúceho z II. piliera je

$$d^{\text{II}}(t) = \frac{F(t)}{\ddot{a}_{x+t}}, \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>Zákon 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení.

<sup>2</sup>V prípade, že konečná hodnota je príliš nízka a žiadna poisťovňa nie je ochotná poskytnúť za túto sumu dôchodok, môže dôjsť k jednorazovému vyrovnaniu. Podobne, aj v prípade dostatočne vysokej sumy, je možné zakúpiť si anuitu iba za časť konečnej hodnoty a zvyšok vyriešiť jednorazovým vyrovnaním. Model hľadá odpovede na najvšeobecnejšiu otázku o výške dôchodku a v každom prípade bude uvažovať iba tú situáciu, kedy si účastník bude kupovať doživotný dôchodok za nasporenú sumu.





Obr. 3.1. Súčasná hodnota predlehotného jednotkového dôchodku pre 65-ročnú osobu v jednotlivých rokoch ( $i = 2,5 \%$ )

kde  $\ddot{a}_{x+t}$  predstavuje hodnotu doživotného jednotkového dôchodku pre osobu v čase odchodu do dôchodku. Tým, že zo simulácie je známe očakávané vekové zloženie obyvateľstva, je známa aj distribúcia budúcej dĺžky života  $x$ -ročnej osoby  $K_x$ . Potom výška anuity  $\ddot{a}_{x+t}$  je daná vzťahom

$$\ddot{a}_{x+t} = \mathbb{E}[\ddot{a}_{\overline{K_{x+t}}}], \quad (3.4)$$

kde  $\ddot{a}_{\overline{n}}$  predstavuje súčasnú hodnotu istého jednotkového dôchodku s platbami trvajúcimi  $n$  rokov a  $\mathbb{E}[\cdot]$  označuje strednú hodnotu náhodnej premennej. Pre ilustráciu sú na Obr. 3.1 zobrazené prítomné hodnoty doživotného jednotkového dôchodku pre 65-ročnú osobu v čase nákupu.

Ešte ostáva určiť, na aký dôchodok bude mať účastník nárok z I. piliera. Vo všeobecnosti je výška priznaného dôchodku určená ako

$$d^I(t) = \text{ADH} * \text{POMB} * \text{ODP}. \quad (3.5)$$

Výška osobného mzdového bodu OMB je daná pomerom ročnej mzdy poisteného voči 12-násobku priemernej mzdy v tom ktorom roku. Pre príliš vysoké alebo nízke hodnoty OMB je aplikovaný princíp solidarnosti, ktorý upravuje tieto hodnoty smerom k 1 – konkrétne týmto spôsobom<sup>3</sup>:

$$\text{OMB} := \begin{cases} 1,25 + (3 - 1,25) * 0,6 & \text{OMB} \geq 3 \\ 1,25 + (\text{OMB} - 1,25) * 0,6 & \text{OMB} \geq 1,25 \\ \text{OMB} & \text{OMB} \geq 1 \\ \text{OMB} + (1 - \text{OMB}) * 0,22 & \text{OMB} < 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Doteraz nebolo potrebné sledovať vývoj priemernej mzdy, keďže sa výpočet vždy

<sup>3</sup>Platí pre dôchodky priznané od roku 2018 <<http://www.socpoist.sk/slovník-pojmov/11s?&prm1=614>>.

týkal iba 1 konkrétneho roku. Od tohto je nutné upustiť a odhadnúť do budúcnosti aj výšku miezd. Minulý vývoj plátov<sup>4</sup> vykazuje vysokú lineárnosť vo svojom vývoji, preto sa na odhad jeho budúcich hodnôt použijú prostriedky lineárnej regresie a priemerná mzda sa bude riadiť predpisom

$$s(1991 + t) = 96,9387 + 34,5865t. \quad (3.7)$$

Vývoj aktuálnej dôchodkovej hodnoty bude kopírovať vývoj inflácie. Toto tvrdenie sa dá vysvetliť nasledujúcou úvahou. Z princípu zásluhovosti vyplýva aj to, že dve osoby v rovnakej situácii majú nárok na rovnako vysoký dôchodok. Nech prvá osoba odchádza do dôchodku v čase  $T$  a druhá o rok neskôr v čase  $T + 1$  a obe osoby odpracovali rovnaký počet rokov a dosiahli rovnaký priemerný osobný mzdový bod. Ak sú dôchodky valorizované takým spôsobom, že sa zvýšia o určité percento medzi dvoma za sebou idúcimi rokmi, čiže platí

$$d^l(T + 1) = (1 + f)d^l(T), \quad (3.8)$$

a spomínané dve osoby majú mať rovnako veľký dôchodok (prvá osoba po valorizácii, druhá aktuálne priznaný), zrejme platí

$$ADH(T + 1) * POMB * ODP = (1 + f) * ADH(T) * POMB * ODP, \quad (3.9)$$

$$ADH(T + 1) = (1 + f) * ADH(T). \quad (3.10)$$

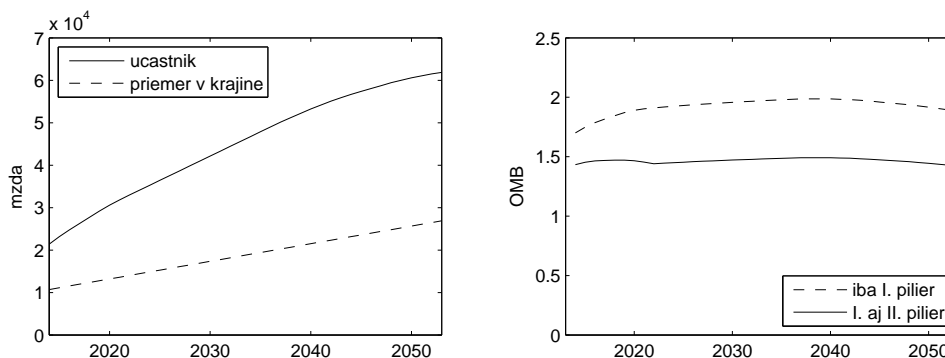
Z toho vyplýva, že aktuálna dôchodková hodnota je valorizovaná rovnakou mierou ako aj samotné dôchodky. Na Slovensku momentálne dochádza v systéme valorizácie k presunu od používania rastu miezd k použitiu dôchodcovskej inflácie (určený spotrebným košom typickým pre dôchodcov). Model bude uvažovať už iba nový model valorizácie pomocou inflácie.

## 3.2 Praktické príklady

V tejto časti bude uvedených niekoľko názorných ukážok, ako by sa mohla vyvíjať výška dôchodku pre rôzne osoby (odlišný vek, výška miezd) a pre rôzne vstupné parametre (inflácia, úroková miera, odvodové podmienky).

---

<sup>4</sup>Ministerstvo práce, sociálnych vecí a rodiny: Vývoj minimálnej mzdy a priemernej mzdy, <<http://195.49.189.3/index.php?SMC=1&id=15854>>.



Obr. 3.2. Vývoj mzdy účastníka v schéme a tomu zodpovedajúca hodnota OMB

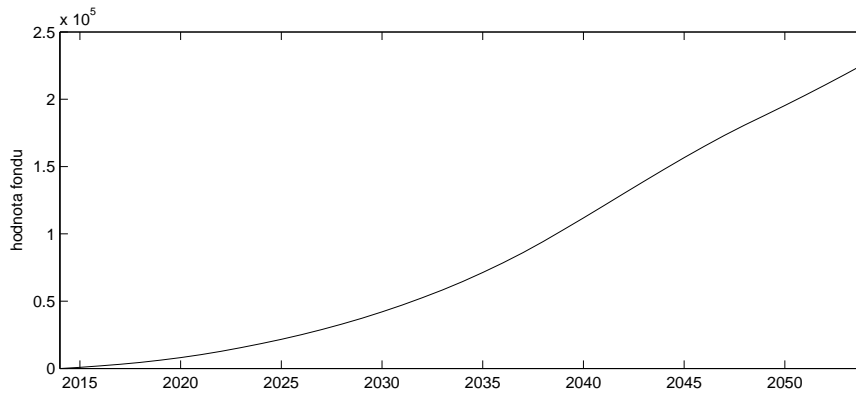
## Príklad

Nech je predmetom úvah osoba, ktorá v roku 2014 ako 25-ročná začala pracovať. Pravidelne si plní svoju povinnosť voči systému sociálneho zabezpečenia a zaujíma ju, akého dôchodku by sa mohla v budúcnosti dočkať. Predpoklady platia nasledovné:

- jej nástupný plat je rovný 2-násobku priemernej mzdy v roku 2014,
- jej plat rastie podľa platovej stupnice,
- bude nepretržite pracovať 40 rokov, až do dôchodkového veku 65 rokov,
- je účastníčkou aj druhého piliera, kde si pre svoje úspory zvolila indexový fond, kde očakáva pravidelný 6 % výnos, pričom posledných 10 rokov bude zaradená v dlhopisovom fonde s garantovaným výnosom 2 %,
- hospodárstvo bude vystavené 2 % inflácii každým rokom, a
- keď si bude kupovať dôchodok od životnej poisťovne, táto bude kalkulovať s technickou úrokovou mierou 2,5 %.

Aby bolo možné určiť, na aké dôchodkové plnenie bude mať nárok, treba určiť dva časové rady – vývoj jej osobného mzdového bodu a hodnotu fondu v dôchodkovej správcovskej spoločnosti. Obr. 3.2 znázorňuje vývoj celoročnej mzdy sporiteľa spolu s očakávanou priemernou mzdou v hospodárstve a tiež hodnotu osobného mzdového bodu v situácii, kedy by osoba odvádzala odvody iba do I. piliera alebo časť odvodov by smerovala aj do II. piliera. Obr. 3.3 potom vyobrazuje priebeh hodnoty fondu, keď si sledovaná osoba sporí aj v II. pilieri.

V situácii, kedy by všetky odvody smerovali iba do I. piliera, osoba by získala nárok na dôchodok vo výške 76,57 %. V prípade, že by sa osoba účastnila kombinovane v oboch pilieroch, jej dôchodok by sa skladal z dvoch častí, prvá časť poskytnutá štátom vo výške 58,32 % priemernej mzdy v čase výpočtu a druhá časť poskytnutá životnou poisťovňou vo výške 54,67 % (hodnoty sú prehľadne zobrazené aj v Tab. 3.2). Vidno teda, že takýto kombinovaný dôchodok vo výške 112,99 % je vyšší v porovnaní so stavom, keby by celý penzia bola financovaná iba zo Sociálnej poisťovne. Treba tu však poznamenať, že valorizovaná bude iba prvá časť dôchodku; ak by mal dôchodca



Obr. 3.3. Vývoj hodnoty fondu, ak si účastník sporí aj v II. pilieri

Tab. 3.2. Dôchodok pre osobu odchádzajúcu do dôchodku v roku 2054 ako pomerná časť priemernej mzdy v roku 2054

Vek v 2014	Rok odchodu do dôchodku	I. pilier	II. pilier	Spolu	Iba I. pilier
25	2054	58,32 %	57,70 %	116,02 %	76,57 %

záujem o valorizáciu aj druhej časti, musel by si zvoliť tzv. indexovaný dôchodok od životnej poisťovne. V tom prípade by na začiatku dostával menšiu čiastku a tá by sa pravidelne zvyšovala (súčasná hodnota oboch týchto variantov by bola, samozrejme, totožná).

### 3.2.1 Citlivosť na dĺžku účasti

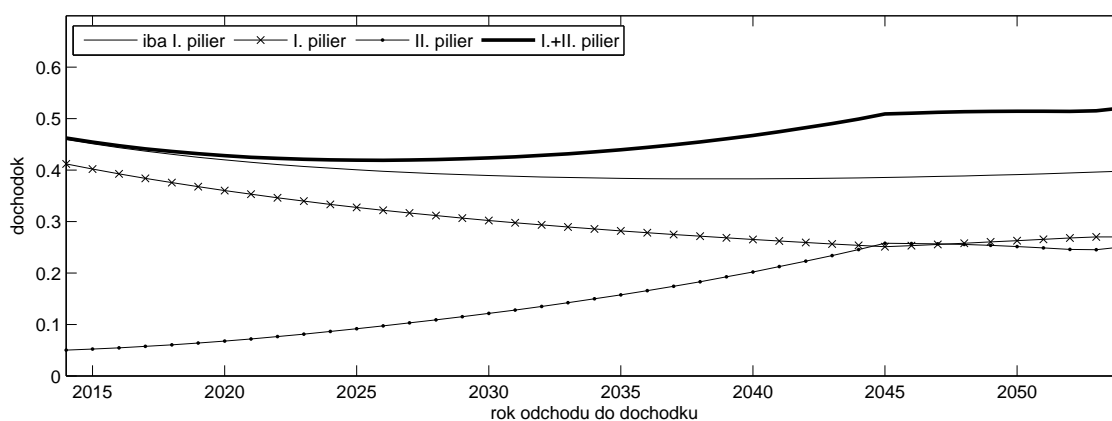
Tento príklad si kladie za úlohu zistiť vplyv dĺžky účasti v II. pilieri, a to takým spôsobom, že sa budú uvažovať v súčasnosti rôzne staré osoby, ktoré sa v tomto roku stanú členmi II. piliera. Do dôchodku budú odchádzať postupne, a tým pádom bude aj doba sporenia odlišná. Predpoklady oproti úvodnému príkladu sa mierne pozmenia:

- plat je počas celej doby rovný priemernej mzde (t. j.  $POMB = 1$ ), a
- odlišný vek a odlišná doba odchodu do dôchodku (stále však ostáva v platnosti, že daná osoba odpracovala plných 40 rokov).

Výsledky sú graficky zobrazené na Obr. 3.4, je k dispozícii variant, kedy by si osoba financovala dôchodok iba z I. piliera a tiež variant kombinácie oboch pilierov. „Zlom“ okolo roku 2045 je spôsobený tým, že tie osoby, ktoré pôjdu do dôchodku do roku 2045 si sporili do II. piliera istý čas až 9 %, zatiaľ čo osoby odchádzajúce do dôchodku až po tomto roku si sporili iba v rozmedzí 4 až 6 %. Niektoré odhadnuté hodnoty sú prehľadne zobrazené aj v Tab. 3.3. Z vypočítaných údajov sa dá konštatovať, že čím dlhšie boli úspory vystavené zhodnocovanie v kapitalizačnom II. pilieri, tým vyššiu životnú úroveň

Tab. 3.3. Výška dôchodkov pre osobu odchádzajúcu do dôchodku v rôznych obdobiach ako pomerná časť priemernej mzdy v roku 2054

Vek v 2014	Rok odchodu do dôchodku	I. pilier	II. pilier	Spolu	Iba I. pilier
25	2054	27,02 %	25,07 %	52,09 %	39,79 %
35	2044	25,37 %	24,55 %	49,92 %	38,49 %
45	2034	28,57 %	14,98 %	43,55 %	38,47 %
55	2024	33,34 %	8,65 %	41,99 %	40,37 %
65	2014	41,21 %	5,01 %	46,22 %	45,95 %



Obr. 3.4. Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od doby odchodu do dôchodku

si vie občan zabezpečiť na dôchodku. Tiež ale vidno, že osoby, ktoré pôjdu do penzie do roku cca. 2024 pocítia benefity II. piliera málo alebo vôbec – dôchodky získané z kombinácie účasti v oboch pilieroch sú približne na tej istej úrovni, ako keby bola celá renta financovaná výlučne štátom.

### 3.2.2 Citlivosť na výšku mzdy

Podobným postupom sa dá skúmať, aký efekt na dávky v starobe má výška mzdy a s ňou spojené príspevky počas života osoby. Modelová situácia opäť vychádza z úvodného príkladu, kde je tentoraz zmenený tento predpoklad:

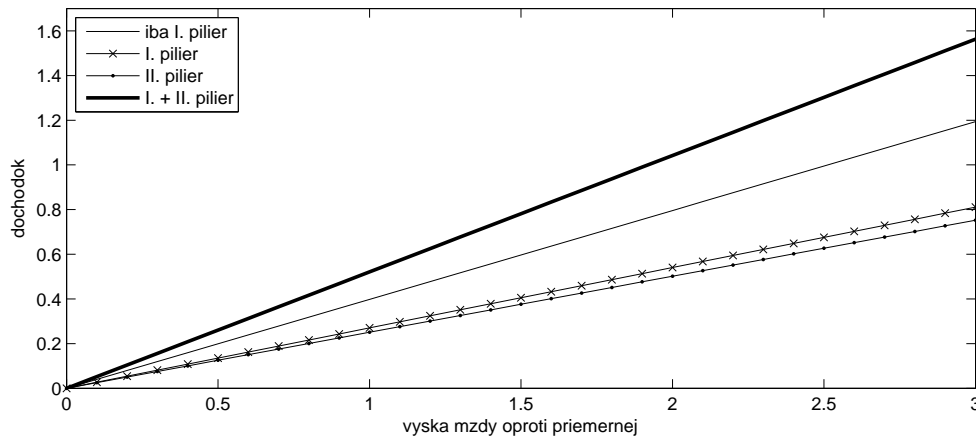
- plat je počas celej doby rovný niekoľkonásobku priemernej mzdy.

Závery sú zobrazené v textovej podobe v Tab. 3.4 a v grafickej podobe na Obr. 3.5. Prekvapivým záverom je, že časť dôchodku financovaná z kapitalizačného piliera je v porovnaní s tou časťou, ktorá je financovaná Sociálnou poisťovňou, rovnaká bez ohľadu na výšku dosahovaných príjmov počas života. Dalo by sa totiž očakávať, že časť dôchodku plynúca z II. piliera bude výraznejšia s vyšším platom z toho dôvodu,

Tab. 3.4. Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od ňou dosahovanej mzdy počas života (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

Mzda ako násobok priem. mzdy	I. pilier	II. pilier	Spolu	Iba I. pilier
0,5	13,51 %	12,54 %	26,05 %	19,89 %
0,75	20,27 %	18,81 %	39,08 %	29,84 %
1,0	27,02 %	25,07 %	52,09 %	39,79 %
1,5	40,53 %	37,61 %	76,14 %	59,68 %
2,0	54,04 %	50,15 %	104,19 %	79,57 %
3,0	81,07 %	75,22 %	156,29 %	119,36 %

že osobný mzdový bod je systematicky znižovaný pre vyššie príjmy z dôvodu solidarity, zatiaľ čo odvody do II. piliera rastú lineárne s platom.



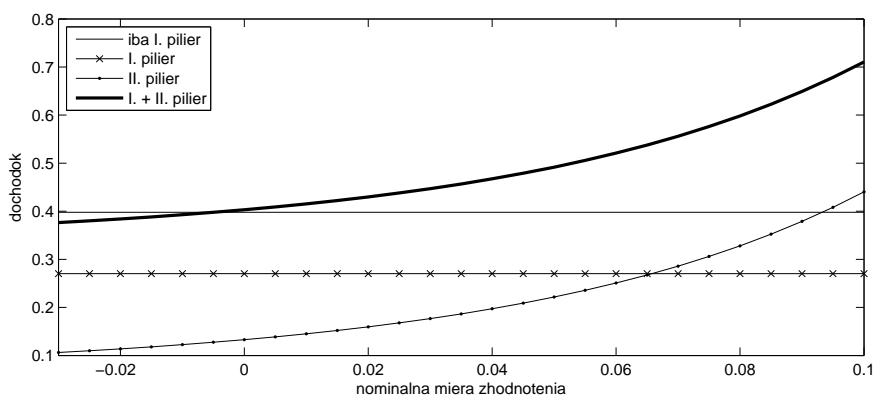
Obr. 3.5. Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od dosahovaných príjmov (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

### 3.2.3 Citlivosť na mieru zhodnotenia

Nepochybne má na dôchodok vplyv aj miera zhodnotenia úspor v II. pilieri. Zmenené predpoklady oproti úvodnému príkladu sú tieto:

- plat je počas celej doby rovný priemernej mzde, a
- miera zhodnotenia v II. pilieri bude nadobúdať rôzne hodnoty (zhodnotenie v ochrannej dobe poslednej päťročnice a čiastočne aj desiatich rokov pred tým ostáva i naďalej rovné 2 %).

Z Obr. 3.6 vyplýva zaujímavá skutočnosť, a to, že ak by bola nominálna úroková miera v sledovanom fonde blízka nule (to znamená, že reálna miera z(ne)hodnotenia by bola veľmi blízka inflácii), účastníkovi by to zabezpečilo približne rovnaký dôchodok,



Obr. 3.6. Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od miery zhodnotenia úspor (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

Tab. 3.5. Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od miery zhodnotenia v II. pilieri (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

Zhodnotenie		I. pilier	II. pilier	Spolu	Iba I. pilier
vo fonde	posl. 5 r.				
8 %	2 %	27,02 %	32,80 %	59,82 %	39,79 %
6 %	2 %	27,02 %	25,07 %	52,09 %	39,79 %
4 %	2 %	27,02 %	19,71 %	46,73 %	39,79 %
2 %	2 %	27,02 %	15,96 %	42,98 %	39,79 %
2 %	1 %	27,02 %	14,62 %	41,64 %	39,79 %
1 %	1 %	27,02 %	13,31 %	40,33 %	39,79 %

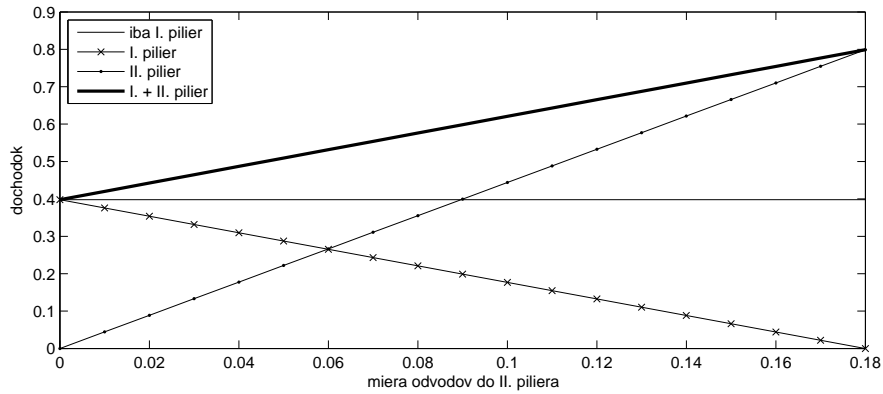
ako keby platil poistné iba do I. piliera. Opäť však platí, že valorizácia by časom hrala v „neprospech“ občana, ktorý si sporil aj v II. pilieri.

Tab. 3.5 uvádza hodnoty priznaného dôchodku vychádzajúceho zo zvolených mier zhodnotenia v II. pilieri.

### 3.2.4 Citlivosť na výšku odvodov

Pomerne závažným prvkom ovplyvňujúcim celý penzijný systém je aj miera participácie v tom či onom pilieri. V prvopočiatoch II. piliera na Slovensku bola stanovená miera delenia príspevkom do oboch pilierov v pomere 9 % : 9 %. Tento pomer bol nedávno zvýšený na 14 % : 4 % v prospech Sociálnej poisťovne a do roku 2022 by sa mali tieto čísla dostať na úroveň 12 % : 6 %. Aký vplyv na dôchodok by však malo iné delenie? Jednoduchou simuláciou za týchto predpokladov:

- plat je počas celej doby rovný priemernej mzde, a
- miera odvodov na starobné poistenie je rovná 18 %, rôzny je pomer, v akom sa prispieva do jednotlivých pilierov,



Obr. 3.7. Hodnota dávok a ich členenie podľa zdroja v závislosti od delenia príspevkov medzi I. a II. pilier (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

Tab. 3.6. Výška dôchodkov pre osobu v závislosti od miery prispievania do II. piliera (dôchodkový vek dosiahnutý v roku 2054)

Výška odvodov do		I. pilier	II. pilier	Spolu	Iba I. pilier
I. piliera	II. piliera				
14%	4%	30,95 %	17,76 %	48,71 %	39,79 %
12%	6%	26,52 %	26,63 %	53,15 %	39,79 %
9%	9%	19,89 %	39,95 %	59,84 %	39,79 %
6%	12%	13,26 %	53,27 %	66,53 %	39,79 %
3%	15%	6,63 %	66,58 %	73,21 %	39,79 %
0%	18%	0 %	79,90 %	79,90 %	39,79 %

sa dá dopracovať aj k týmto hodnotám, čo je vidno na Obr. 3.7 a v Tab. 3.6.

Už pri odvodovej záťaži 6 % do II. piliera a 12 % do prvého je za dostatočne vysokej miery zhodnotenia dôchodok priznaný z oboch pilierov približne rovnaký.



# Záver

V práci bol popísaný priebežne financovaný penzijný systém a bolo ukázané, že zo spoločenského hľadiska je použitie iba tohto systému na financovanie penzií nepoužiteľné – demografický vývoj populácie by mal v krajných situáciách za následok buď výrazné znižovanie priznávaných penzií vzhľadom na vtedajšiu priemernú mzdu v hospodárstve (pri zachovaní súčasnej odvodovej povinnosti), alebo postupné zvyšovanie odvodového zaťaženia pracujúcej vrstvy (pre splnenie cieľa zachovať súčasnú úroveň priznávaných dôchodkov).

Konkrétne, v prípade zachovania súčasnej miery príspevkov (18 % z hrubej mzdy), čo dnes postačuje na priznanie dôchodku približne vo výške 40 % z aktuálnej priemernej mzdy<sup>5</sup>, by výška dôchodku postupne klesala až na úroveň približne 16 % v roku 2054.

Naopak, ak sa vychádza z predpokladu zachovania výšky dôchodku voči vtedajšej platovej situácii v hospodárstve, je evidentné, že výška príspevkov do systému sociálneho zabezpečenia by musela s postupom času čast' – z dnešných 18 % až na približne 55 % v roku 2054.

Samozrejme, reálne opatrenia by boli kombináciou oboch – jednak by došlo k zníženiu dôchodkov (resp. spomaleniu ich rastu), jednak k zvýšeniu záväzkov občanov voči žijúcim penzistom.

Ďalším čiastkovým riešením sa javí byť zvyšovanie veku odchodu do dôchodku, čo znamená menší počet penzistov. Takéto opatrenie možno rieši problém s výplatami dôchodkov, avšak prináša problémy v iných oblastiach. Je úsmevné, ak niekto očakáva, že väčšina populácie bude schopná vykonávať svoje povolanie v 65 rokoch (či už po fyzickej alebo psychickej stránke). Akékoľvek predĺženie vekového intervalu, kedy by mal človek pracovať, je potom skôr výsmechom a urážkou týchto ľudí. Technologický rast by mal práveže viesť k skracovaniu počtu odpracovaných rokov.

Následne bola pozornosť prenesená na fondovo financovaný systém (II. pilier), ktorý by mal riešiť nedostatky spojené s priebežným systémom (I. pilierom). Vo všetkých uvažovaných prípadoch (rôzna doba odchodu do dôchodku, rôzna výška dosahovanej mzdy toho-ktorého občana, rôzna miera prispievania do I. a II. piliera, rôzna miera zhodnotenia úspor) sa ukázalo, že financovanie dôchodku kombináciou I. a II. piliera je pre občana výhodnejšie ako financovanie iba z priebežného systému. Aj voči týmto výsledkom treba zachovať určitú dávku obozretnosti – sporenie/investovanie v II. pilieri podlieha všetkým trhovým rizikám, a či bude skutočnosť, že trh v dlhodobom horizonte aj napriek výkyvom rastie, zachovaná aj v najbližších povedzme 40 až 50 rokoch, je prinaajmenšom otázna.

---

<sup>5</sup>Dôchodok v tomto prípade znamená priemer všetkých poberaných starobných dôchodkov.

Pre podanie komplexného obrazu o možnom budúcom vývoji na Slovensku by bolo žiadúce prácu rozšíriť a okrem starobného dôchodku sa venovať aj zvyšným druhom dávok plynúcich zo systému dôchodkového zabezpečenia. Menovite sa jedná o invalidné dôchodky, pozostalostné (vdovské, vdovecké a sirotské) a výsluhové dôchodky. Na rozdiel od starobnej penzie sa invalidita týka výrazne menšej časti populácie a oveľa viacej zodpovedá charakteristika systému zabezpečenia dávok v prípade invalidity poisteniu – malá pravdepodobnosť nastatia udalosti a veľký dopad na poisteného v prípade nastatia udalosti. Predsa len, v dnešnej dobe nemožno považovať dožitie sa dôchodku za riziko (výnimočný stav je skôr úmrtie ešte pred odchodom do dôchodku). Jediným rizikom je riziko dlhovekosti a môže nastať situácia, že občan si dopredu zabezpečí živobytie na menej rokov, ako sa v skutočnosti dožije.

# Literatúra

- [1] ALEXANDERČÍKOVÁ, JANA: *Aktuárske metódy v penzijnom poistení*. Diplomová práca. Bratislava : Ekonomická univerzita, 2013.
- [2] ARO, HELENA – PENNANEN, TEEMU: *A user-friendly approach to stochastic mortality modelling*. In: *European Actuarial Journal*, 1(2011). Springer, 2011, s. 151-167
- [3] BARRIEU, PAULINE – BENSUSAN, HARRY, ET AL.: *Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges*. In: *Scandinavian Actuarial Journal*, 3(2012), str. 203-231
- [4] CAIRNS, ANDREW J. G. – BLAKE, DAVID – DOWD, KEVIN: *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty*. In: *Journal of Risk and Insurance*, 4/73(2006), str. 687-718
- [5] DEVOLDER, PIERRE – JANSSEN, JACQUES – MANCA, RAIMONDO: *Stochastic Methods for Pension Funds*. New Jersey : John Wiley, 2012. ISBN 978-1-84821-204-6
- [6] GELETU, ABEBE: *Solving Optimization Problems using the Matlab Optimization Toolbox - a Tutorial*. Illmenau : University of Technology, 2007
- [7] HAUGH, MARTIN *The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables*. New York : Columbia University, 2004.
- [8] MALEH, JOHANNA – BALDWIN, ROBERT – SCHULTZ, JASON: *A Death and Disability Life Table for Insured Workers Born in 1993*. In: *Actuarial Note*, 6(2013/14). Maryland : Social Security Administration, 2004
- [9] ŠKROVÁNKOVÁ, LEA: *Zdravotné a nemocenské poistenie*. Bratislava : Vydavateľstvo Ekonóm, 2013. ISBN 978-80-225-3590-8
- [10] ŠKROVÁNKOVÁ, LEA – ŠKROVÁNKOVÁ, PETRA: *Dôchodkové poistenie*. Bratislava : Vydavateľstvo Ekonóm, 2011. ISBN 978-80-225-3187-0
- [11] FEDORÁKOVÁ, DENISA – ŠUPLATA, IVAN: *Čo všetko sa v III. pilieri zmení? Od januára bude opäť daňovo zvýhodnený!*. [online] 19. 9. 2013. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.cas.sk/clanok/260859/co-vsetko-sa-v-iii-pilier-i-zmeni-od-januara-bude-opat-danovo-zvyhodneny.html>
- [12] HUDECOVÁ, DOROTA: *Valorizácia? Dôchodky budú rásť menej*. [online] 10. 9. 2013. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://peniaze.pravda.sk/dochodok/clanok/292427-valorizacia-penzii-dochodky-budu-rast-menej/>

- [13] HUDECOVÁ, DOROTA: *Čo sa v penziách mení od januára 2013*. [online] 22. 8. 2012. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://peniaze.pravda.sk/dochodok/clanok/64778-co-sa-v-penziach-meni-od-januara-2013/>
- [14] PACHEROVÁ, SOŇA: *Na penziu bude treba pracovať dlhšie, možno až 37 rokov*. [online] 9. 2. 2014. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://spravy.pravda.sk/domace/clanok/307991-na-penziu-bude-treba-pracovat-dlhsie-mozno-az-37-rokov/>
- [15] PACHEROVÁ, SOŇA: *Vek odchodu do dôchodku sa nezvýši ešte štyri roky*. [online] 18. 4. 2012. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://spravy.pravda.sk/domace/clanok/174076-vek-odchodu-do-dochodku-sa-nezvysi-este-styri-roky/>
- [16] *Druhý pilier sa otriasol, potrebuje ústavný zákon*. [online] 11. 2. 2013. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://hn.hnonline.sk/ekonomika-a-firmy-117/druhy-pilier-sa-otriasol-potrebuje-ustavny-zakon-539235>
- [17] *Odvodová úľava pri zamestnaní dlhodobo nezamestnaného*. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/odvodova-ulava-pri-zamestnani-dlhodobonezamestnaneho.html>
- [18] *Opozícia chce ústavným zákonom zastabilizovať dôchodkový systém*. [online] 28. 2. 2014. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.teraz.sk/ekonomika/opozicia-dochodok-zakon-ustava/75564-clanok.html>
- [19] *Peniaze na ruku z II. piliera dostanú len penzisti s vysokým dôchodkom*. [online] 26. 2. 2014. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/309848-k-penziazom-z-ii-piliera-sa-dostanu-len-penzisti-s-vysokym-dochodkom/>
- [20] *Sociálne poistenie a dôchodkový systém*. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.employment.gov.sk/sk/socialne-poistenie-dochodkovy-system/>
- [21] *Vstup, sporenie, výstup*. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.asdss.sk/2938>
- [22] *Zmeny v zákone o doplnkovom dôchodkovom sporení od 1. 1. 2014*. [online] 17. 10. 2013. [citované 20. 3. 2014]. Dostupné na <http://www.mzdovecentrum.sk/clanok-z-titulky/zmeny-v-zakone-o-doplňkovom-dochodkovom-sporení-od-1-1-2014.htm>

# A Prílohy

## A.1 Fondy v DSS-kách

Tab. A.1. Prehľad výkonnosti jednotlivých fondov dôchodkových správcovských spoločností

Fond	Vznik	AHDJ	Zhodnotenie	NAV	Podiel
<b>Dlhopisové</b>					
AEGEON	22.3.2005	0,041 947	2,62 % p.a.	525 010 950	9,01 %
Allianz-Slovenská d.s.s.	22.3.2005	0,040 728	2,29 % p.a.	1 737 572 235	29,81 %
AXA	2.4.2007	0,040 784	1,90 % p.a.	1 354 916 886	23,25 %
DSS Poštovej banky	22.3.2005	0,042 433	2,75 % p.a.	267 253 498	4,59 %
ING	22.3.2005	0,041 061	2,40 % p.a.	538 066 015	9,23 %
VÚB Generali	23.3.2005	0,042 474	2,76 % p.a.	810 204 255	13,90 %
<b>Spolu</b>				5 233 023 842	89,78 %
<b>Zmiešané</b>					
DSS Poštovej banky	22.3.2005	0,038 694	1,71 % p.a.	13 536 941	0,23 %
ING	22.3.2005	0,038 406	1,64 % p.a.	20 949 181	0,36 %
VÚB Generali	23.3.2005	0,040 549	2,24 % p.a.	21 105 587	0,36 %
<b>Spolu</b>				55 591 710	0,95 %
<b>Akciové</b>					
AEGEON	22.3.2005	0,036 909	1,18 % p.a.	46 296 025	0,79 %
Allianz-Slovenská d.s.s.	22.3.2005	0,039 129	1,83 % p.a.	159 173 685	2,73 %
AXA	2.4.2007	0,038 285	0,73 % p.a.	148 564 398	2,55 %
DSS Poštovej banky	22.3.2005	0,038 305	1,59 % p.a.	39 386 474	0,68 %
ING	22.3.2005	0,038 056	1,54 % p.a.	60 866 807	1,04 %
VÚB Generali	23.3.2005	0,040 380	2,19 % p.a.	42 784 233	0,73 %
<b>Spolu</b>				497 071 624	8,53 %
<b>Indexové</b>					
AEGEON	24.4.2012	0,040 224	10,30 % p.a.	2 981 159	0,05 %
AXA	10.4.2012	0,041 076	11,26 % p.a.	20 350 456	0,35 %
DSS Poštovej banky	18.4.2012	0,042 365	13,14 % p.a.	2 396 784	0,04 %
ING	13.4.2012	0,045 261	17,67 % p.a.	9 933 579	0,17 %
VÚB Generali	2.4.2012	0,039 206	8,59 % p.a.	7 097 352	0,12 %
<b>Spolu</b>				42 759 332	0,73 %
<b>Spolu všetky fondy</b>				5 828 446 509	100,00 %

AHDJ = aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky

NAV = čistá hodnota majetku vo fonde

Pozn.: údaje sú k 10.4.2014 (k 10.3.2014 v prípade ING) a zhodnotenie je počítané od vzniku fondu.

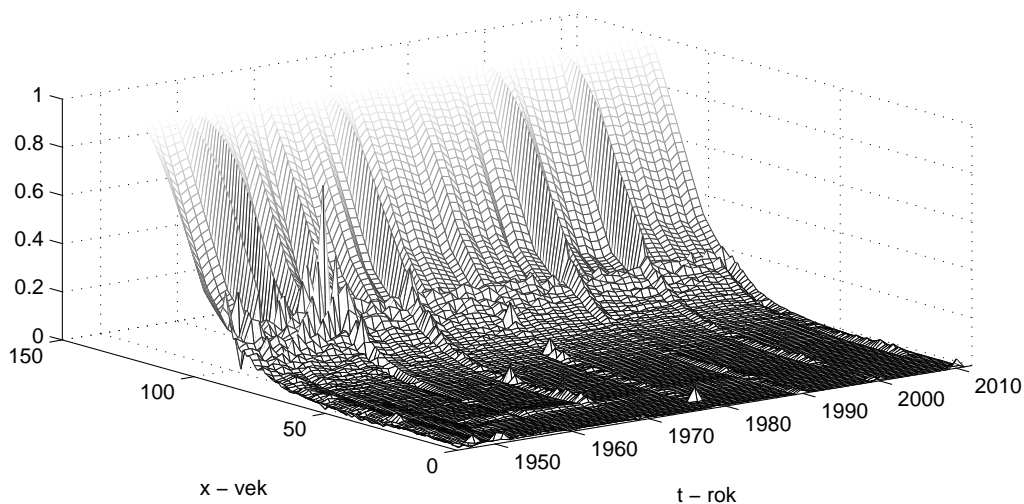
Zdroje:

NBS: Aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky <http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-dochodkovym-sporenim/starobne-dochodkove-sporenie/ahdj-a-chm-v-df>

Asociácia dôchodkových správcovských spoločností: Týždenné údaje o fondoch <http://www.adss.sk/Default.aspx?CatID=60>

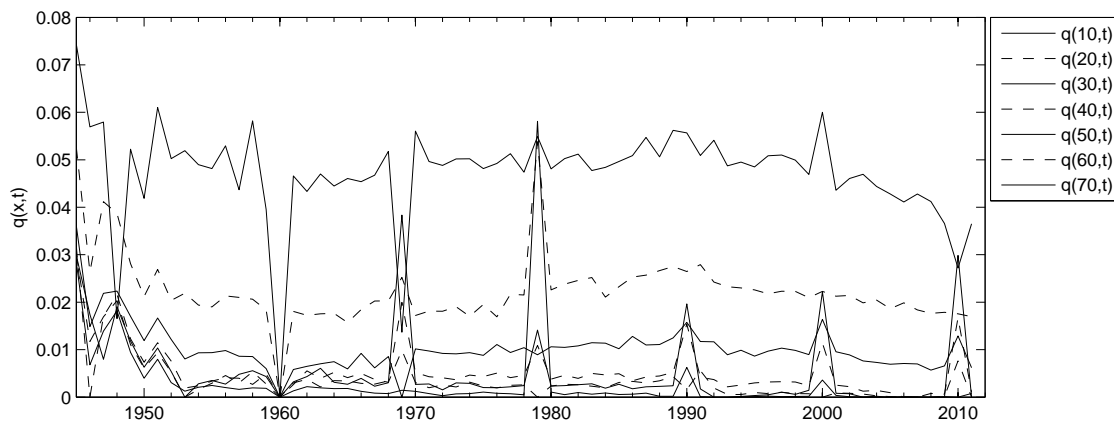
## A.2 Bilancovanie počtu obyvateľov

Údaje týkajúce sa historického počtu obyvateľov alebo z nich odvodené vykazujú určité „skoky“ alebo „výčnelky“, ktoré sú viditeľné napríklad na Obr. A.1, A.2 alebo A.3 (približne v rokoch 1960, 1969, 1979, 1990, 2000 a 2010). Tieto skoky sa vyskytujú v pravidelných intervaloch a majú priamy súvis so sčítaním obyvateľov.

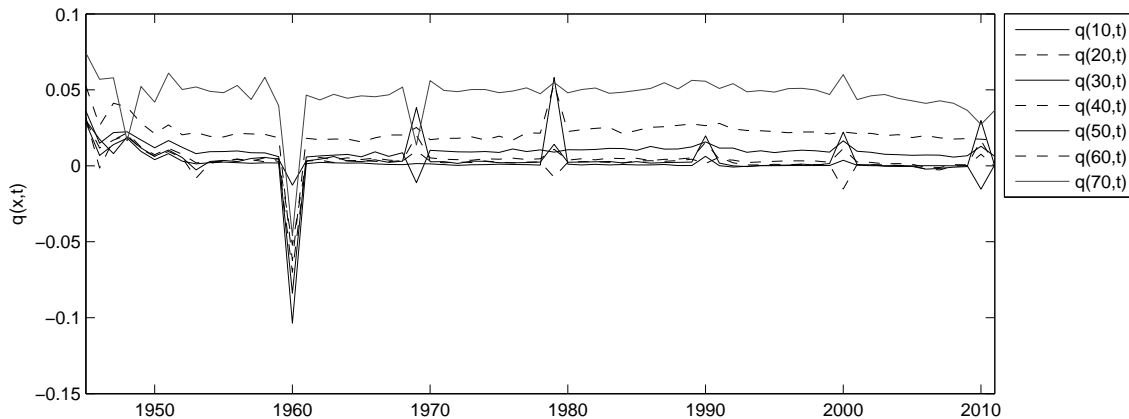


Obr. A.1. Pravdepodobnosť prežitia mužskej populácie

Základom bilancie obyvateľstva (podľa pohlavia a veku) sú údaje z realizovaného sčítania obyvateľov, domov a bytov, na ktoré nadväzujú dáta z pravidelného demografického zisťovania o prirodzenom (narodení, zomretí) a mechanickom pohybe obyvateľstva (pristťahovaní, vystťahovaní). Tieto údaje sa aktualizujú každých 10 rokov sčítaním obyvateľstva. Aktualizácia sa vykonáva bilančnou metódou na základe došlých štatistických hlásení Obyv 1/5-12 o živonarodených a zomretých osobách a o obyva-



Obr. A.2. Pravdepodobnosť prežitia pre vybrané veku



Obr. A.3. Pravdepodobnosť prežitia pre vybrané veki (neorezená pravdepodobnosť)

teľoch, ktorí zmenili trvalý pobyt.

V roku realizácie sčítania (každých desať rokov) spracovanie údajov prebehne tak, že údaje zistené pri sčítaní sa spätne rebilancujú k 1. januáru a potom sa realizuje štandardný proces bilancovania z údajov o pohybe obyvateľstva. Nasledujúcich desať rokov sa každoročne bilancuje už len na základe zisťovania demografickej štatistiky o pohybe obyvateľstva. To znamená, že v roku sčítania sú k 1. januáru vybilancované dva údaje. Tak to bolo aj v roku 2011, v ktorom sa uskutočnilo doteraz posledné sčítanie obyvateľov. K dátumu 1. 1. 2011 bol vybilancovaný:

- štandardný koncoročný výstup z bilancovania obyvateľstva v roku 2010 záväzný pre podporu procesov v oblasti verejnej správy, a
- nový výstup (vznikol rebilanciou od 21. mája 2011, rozhodujúceho okamihu sčítania), ktorý sa štandardne používa v štatistickej praxi ako počiatočný stav bilancovania obyvateľstva od roku sčítania.

Údaje zo zisťovaní však môžu vykazovať neúplnosť, keďže nie všetci obyvatelia si splnia spravodajskú povinnosť pri sčítaní, takisto sa nezapočítajú tí, ktorí si nespĺnili spravodajskú odhlasovaciu povinnosť pri vystaňovaní v medzicenzálnom období.

História sčítaní na území Slovenskej republiky<sup>1</sup>:

- 1784 – súpisy v Uhorsku sa začali v roku 1784 a opakovali sa v dvojročných obdobiach,
- 1857 – prechod od feudálnych súpisov k moderným sčítaniam ľudu.
- 1869 – prvé moderné sčítanie ľudu, pokračovalo v 10 ročných intervaloch.
- 15. február 1921 – prvé československé sčítanie ľudu a bytov.
- 1921, 1930, 1946, 1950
- 1961 – začína sa nová etapa československých populačných cenzov. Toto sčítanie

<sup>1</sup>Štatistický úrad: Sčítanie obyvateľov, domov a bytov – História, <<http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=58428>>.



sa uskutočnilo k 1. marcu 1961 a jeho výsledky sú po prvý raz v histórii sčítaní výsledkami integrovaného cenzu so vzájomným prepojením údajov o obyvateľstve, domácnostiach, bytoch a domoch. Toto spojenie prinieslo celkom novú kvalitu údajov a výrazne rozšírilo možnosti ich využitia.

- 1. december 1970, 1. november 1980
- 1991 – posledné z československých sčítaní, pri spracovaní a publikovaní jeho výsledkov bola použitá moderná výpočtová technika. Uložené primárne údaje na pamäťových médiách umožnili realizovať prepočet výsledkov z tohto sčítania na zmenenú územnú organizáciu SR.
- 26. máj 2001 – údaje aktuálne k tomuto dátumu sa zisťovali metódou samosčítania, to znamená, že do sčítacích formulárov ich zapisovali sami obyvatelia.
- 21. máj 2011 – všetky členské štáty Európskej únie boli povinné usporiadať v roku 2011 sčítanie s využitím rovnakých, resp. podobných definícií zisťovaných údajov. Sčítanie po prvý raz v histórii uskutočnilo aj elektronicky.

## A.3 Voľba modelu a parametrov

Výber bázových funkcií  $\phi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$  a najmä ich počet výrazne ovplyvňujú predikčné schopnosti modelu. Pre vzájomné porovnanie rôznych modelov boli zvolené dve štatistiky: Bayesovské informačné kritérium a (celková) štvorcová chyba.

Celková štvorcová chyba

$$TSE = \sum_x (\hat{x} - x)^2, \quad (\text{A.1})$$

kde  $\hat{x}$  je odhadnutá hodnota a  $x$  je skutočná hodnota sledovaného javu, podáva hrubú predstavu o tom, ako veľmi sa modelované hodnoty odlišujú od tých skutočných. Táto charakteristika je užitočná pre hľadanie konkrétnych hodnôt parametrov potom, čo bol zvolený počet a funkčný tvar jednotlivých parametrov modelu.

Bayesovské informačné kritérium je definované ako

$$BIC = -2l + k(\ln N + \ln(2\pi)), \quad (\text{A.2})$$

kde  $l$  je hodnota logaritmu funkcie vierohodnosti,  $k$  počet parametrov modelu a  $N$  počet pozorovaní. Ako vidno, zohľadňuje sa aj počet parametrov – vo všeobecnosti totiž platí, že pridaním ďalšieho parametra (vysvetľujúcej premennej) do modelu sa zníži jeho odchýlka od skutočných hodnôt. Takéto pridávanie parametrov však nesie riziko, že model bude príliš zložitý, ťažko alebo dokonca vôbec interpretovateľný, a s veľkou pravdepodobnosťou nebudú viaceré vysvetľujúce premenné popisovať realitu. BIC kritérium preto penalizuje každú novú nezávislú premennú – s rastom  $k$  rastie aj BIC. S rastom vierohodnosti, naopak, hodnota BIC klesá. Tým pádom platí, že spomedzi viacerých modelov je preferovaný ten s nižšou hodnotou Bayesovského informačného kritéria.

Bude sa vyberať spomedzi troch modelov:

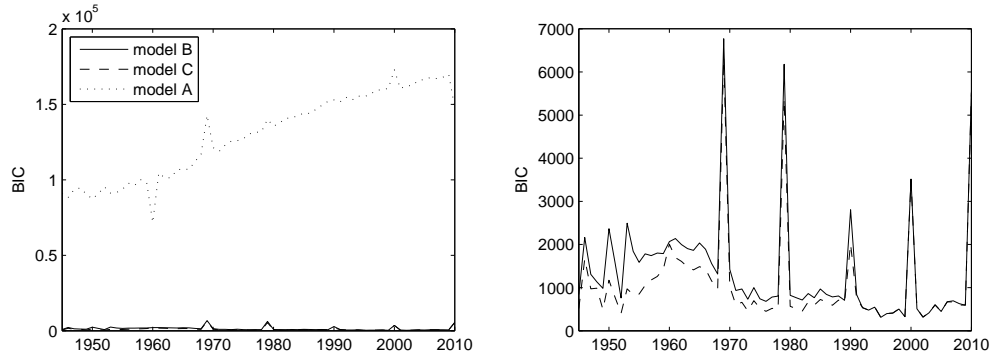
- jedno-parametrický (model A) s bázovou funkciou

$$\phi_1(x) = x, \quad (\text{A.3})$$

ktorá hovorí, že rizikový faktor má väčší vplyv na schopnosť prežitia vo vyšších vekoch,

- dvoj-parametrický model (B) Cairns-Black-Dowd z [4], ktorý je definovaný ako

$$\text{logit } q(t, x) = A_1(t) + A_2(t)x, \quad (\text{A.4})$$



Obr. A.4. Porovnanie hodnôt BIC pre modely A, B a C (mužská populácia)

Tab. A.2. Porovnanie hodnôt TSE pre modely A, B a C

Model	TSE
A	848,89 %
B	207,07 %
B	98,94 %

pričom  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$  sú stochastické procesy. Bázové funkcie budú mať potom tvar

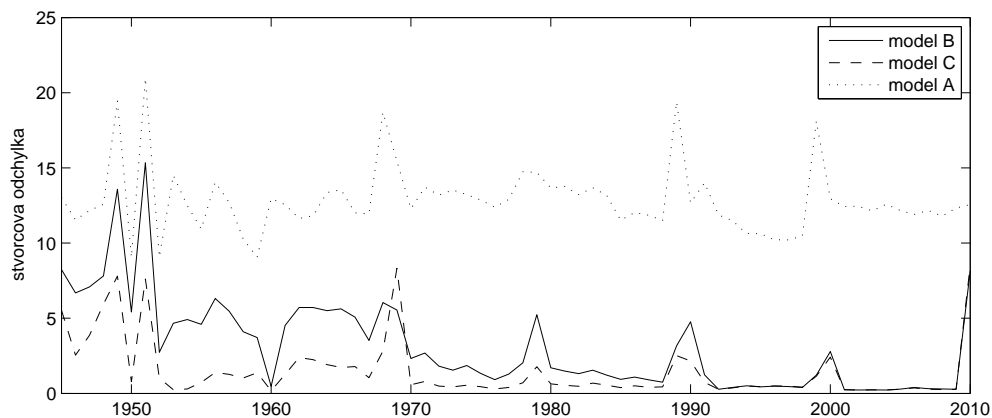
$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= -1 \\ \phi_2(x) &= -x,\end{aligned}\tag{A.5}$$

- troj-parametrický model (C) určený takto:

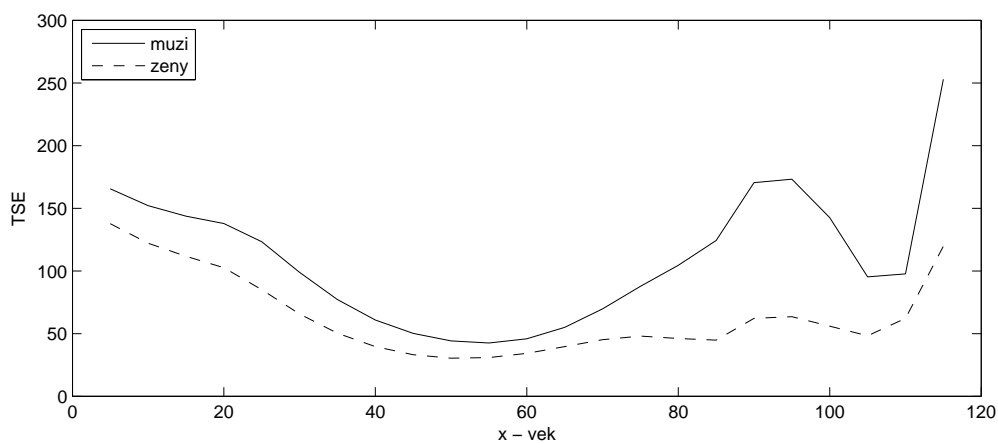
$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{x}{30} & x \leq 30 \\ 0 & x > 30, \end{cases} \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x}{30} & x \leq 30 \\ 1 - \frac{x-30}{90} & x > 30, \end{cases} \\ \phi_3(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 30 \\ \frac{x-30}{90} - 1 & x > 30. \end{cases}\end{aligned}\tag{A.6}$$

Obr. A.4 znázorňuje hodnoty BIC a vidno, že model s troma parametrami sa javí ako najlepší. K podobnému záveru sa dá dospieť aj z porovnania štvorcovej chyby (Obr. A.5 a Tab. A.2).

Nasledujúcim krokom je nájsť najvhodnejšie hodnoty parametrov. Pokiaľ bázové



Obr. A.5. Porovnanie hodnôt štvorcovej odchyľky pre modely A, B a C



Obr. A.6. Závislosť celkovej štvorcovej odchyľky od parametra  $a$

funkcie (A.6) prejdú do tvaru

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & x \leq 30 \\ 0 & x > 30, \end{cases} \\
 \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{x}{a} & x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{120-a} & x > a, \end{cases} \\
 \phi_3(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{120-a} & x > a. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

s parametrom  $a$ , minimalizáciou celkovej chyby sa dá nájsť ideálna hodnota tohto parametra. Obr. A.6 vyobrazuje závislosť celkovej štvorcovej odchyľky modelu od reality v závislosti od parametra  $a$ . Za výslednú hodnotu bol zvolený vek 55 rokov.