

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo:103003/I/2023/36124048426941188

**Možnosti využitia lineárneho programovania pri riadení úverového
portfólia komerčných bánk
(bakalárska práca)**

2023

Viktor Halász

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

**Možnosti využitia lineárneho programovania pri riadení
úverového portfólia komerčných bánk
(bakalárska práca)**

Študijný program: Hospodárska informatika

Študijný odbor: Ekonómia a manažment

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Vedúci záverečnej práce: Ing. Ádám Csápai

Bratislava 2023

Viktor Halász

SÚHRN

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Študijný program: Hospodárska informatika

Autor: Viktor Halász

Bakalárska práca: Možnosti využitia lineárneho programovania pri riadení úverového portfólia komerčných bánk

Vedúci záverečnej práce: Ing. Ádám Csápai

Miesto a rok predloženia práce: Bratislava 2023

Táto bakalárska práca sa zaoberá aplikovaním lineárneho programovania na optimalizáciu úverového portfólia štyroch najväčších bánk na slovenskom trhu. Práca je rozdelená do 5 kapitol. Obsahuje 4 grafy, 33 tabuľky a jednu prílohu. Prvá kapitola je venovaná vysvetleniu problematiky úverového rizika, jej hlavné príčiny a možnosti ako jej predísť. Ďalej nasleduje charakteristika štyroch najväčších bánk na slovenskom trhu. V ďalšej časti sa charakterizuje lineárne programovanie a jeho história. Práca vysvetľuje, ako postupovať pri riešení optimalizačnej úlohy ak používame simplexovú metódu. V ďalšej kapitole aplikujeme simplexovú metódu na vybrané úvery z úverového portfólia opísaných bánk. V tejto kapitole sme opísali ako zoraďujú banky mieru úverového rizika, a aj to, ako sme dostali dáta podľa ktorých sme zostavili jednotlivé algoritmy. Nakoniec je navrhnutý a implementovaný program, ktorý pomocou tejto metódy nájde optimálne riešenie na minimalizáciu úverového rizika s danými ohraničeniami pomocou simplexovej metódy a ukáže nám aj tieto dáta graficky. Samotný program je otestovaný s dátami štyroch bánk. Výsledkom riešenia danej problematiky je, že lineárne programovanie môže byť užitočné pre vrcholový management daných bánk, ak majú dostatočné informácie o tom, ako sa môže vyvíjať trh v budúcom období. Tento algoritmus je vhodný aj na reakciu na nepredvídateľné javy trhu, kde banka, ako reakciu na takúto situáciu, musí zmeniť doterajšiu politiku.

Kľúčové slová: lineárne programovanie, simplexová metóda, úverové riziko

ABSTRACT

UNIVERSITY OF ECONOMICS IN BRATISLAVA

FACULTY OF ECONOMIC INFORMATICS

Study Program: Economic Informatics

Author: Viktor Halász

Bachelor's Thesis: Possibilities of using linear programming in the management of the loan portfolio of commercial banks.

Thesis Supervisor: Ing. Ádám Csápai

Place and Year of Submission: Bratislava 2023

This bachelor's thesis focuses on the application of linear programming to optimize the credit portfolios of the four largest banks in the Slovak market. The thesis is divided into four chapters, which include 4 graphs, 33 tables, and one appendix. The first chapter provides an explanation of credit risk issues, its main causes, and possible preventive measures. It is followed by a characterization of the four largest banks in the Slovak market. The subsequent section describes linear programming and its history. The thesis explains the process of solving optimization problems using the simplex method. In the next chapter, the simplex method is applied to selected loans from the described bank credit portfolios. This chapter describes how banks rank the level of credit risk and presents the data used to develop various algorithms. Finally, a program is designed and implemented to find the optimal solution for minimizing credit risk within given constraints using the simplex method, with graphical representation of the obtained data. The program is tested with data from the four banks. The outcome of this research is that linear programming can be beneficial for top management in banks if they have sufficient information about market developments in the future. This algorithm is also suitable for responding to unforeseen market events, where a bank may need to change its existing policies as a response to such situations.

Keywords: linear programming, simplex method, credit risk

Pod'akovanie

Chcem sa poďakovať vedúcemu záverečnej práce, ktorým bol Ing. Ádám Csápai, za odborné vedenie, dobré rady a užitočné pripomienky, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto bakalárskej práce.

Obsah

SÚHRN	5
ABSTRACT	6
Podakovanie.....	7
Úvod.....	10
1. Súčasný stav problematiky doma a v zahraničí	11
1.1. Úverové riziko	11
1.2. Možnosti na zaistenie úveru	11
1.3. Riziká hypotekárneho bankovníctva	12
1.4. Banky.....	13
1.4.1. Tatra banka, a. s.....	13
1.4.2. Všeobecná úverová banka, a. s.....	14
1.4.3. Slovenská sporiteľňa	14
1.4.4. ČSOB (Československá obchodná banka, a. s.).....	14
2. Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania	16
2.1. Lineárne programovanie.....	16
2.1.1. História	16
2.1.2. Tvary úloh v lineárnom programovaní.....	17
2.2. Simplexová metóda	19
2.2.1. Štandardný tvar	20
2.2.2. Určenie doplnkových premenných.....	20
2.2.3. Vytvorenie tabuľky	21
2.2.4. Zavedenie vedúceho prvku.....	21
2.2.5. Vytvorenie novej tabuľky	22
2.2.6. Kontrola optimality	23
2.2.7. Identifikácia optimálnych hodnôt.....	25
3. Aplikovanie Simplexovej metódy na úverové portfóliá skúmaných bank	27
3.1. Interný hodnotiaci systém.....	27
3.2. Spôsob získania dát.....	28
3.3. Výpočty Slovenská sporiteľňa	29
3.4. Výpočty ČSOB	33
3.5. Výpočty VUB	36
3.6. Výpočty Tatra banka.....	40
4. Technológie a implementácia	45
4.1. RStudio	45

4.2.	Jazyk R	45
4.3.	Implementácia	45
4.4.	Algoritmus.....	46
4.5.	Výstupy programu	48
5.	Diskusia.....	51
	Záver.....	52
	Zoznam použitej literatúry	53

Úvod

Medzinárodná úverová kríza, ktorá sa začala v Spojených štátoch amerických v roku 2006, zdôraznila zásadnú potrebu hodnotenia rizika úverových portfólií. Ako sa problémy s poskytovaním hypotekárnych úverov stali čoraz výraznejšími, tým bolo viac jednoznačné, že znalosti o hodnotení rizika boli buď ignorované, alebo ich banky ani nepoznali. Táto udalosť nám poukázala na skutočnosť, že neopodstatnené úvery môžu viesť k vysokým stratám vo finančnom sektore, ako aj na dôležitosť správneho riadenia rizík v úverových portfóliách bánk. Správne posúdenie rizika je skutočne základnou požiadavkou na vydanie akéhokoľvek úveru a hoci sa to teoreticky zdá jednoduché, v praxi často nájdeme medzery. V tejto práci sa budem orientovať na minimalizáciu straty úverového portfólia bánk, a optimalizujem úverové portfólio tak, aby miera vydaných rizikových úverov bola nízka, a banky mali zisk a nie stratu z takýchto úverov. Pre dosiahnutie tohto cieľa budeme používať lineárne programovanie. Lineárne programovanie už dlhodobo uľahčuje prácu manažérom, hlavne v takých situáciách, kde existujú nejaké ohraničenia, ktoré by mohli ovplyvniť proces rozhodovania. V rámci lineárneho programovania sa zameriam na simplexovú metódu, ktorou sa pokúsim vytvoriť flexibilný model, ktorý sa dá prispôbiť k meniacej sa úverovej politike banky. Aby banka dosiahla dlhodobý zisk, mala by sa snažiť vytvoriť diverzifikované portfólio úverov, ktoré minimalizuje riziko a maximalizuje zisky. Túto metódu použijeme pri štyroch najväčších bankách slovenského trhu. Podľa ročných výpisov bánk zistíme, v akej miere sa nachádza ich úverové portfólio u rizikových klientov a podľa týchto empirických dát aplikujeme simplexovú metódu, aby sme vedeli vytvoriť alternatívne rozdelenie úverové portfólia.

1. Súčasný stav problematiky doma a v zahraničí

1.1. Úverové riziko

Pri každom vydanom úvere banka čelí riziku, že klient nebude schopný alebo ochotný svoje záväzky platiť načas a v plnej výške. Takáto situácia môže nastať kvôli platobnej neschopnosti alebo neochoty dlžníka splatiť svoje záväzky voči banke, ktoré môžu pochádzať z úveru vrátane úrokov, cenných papierov, poskytnutých záruk, devízových obchodov na peňažnom trhu a podobne.

Poznáme niekoľko typov úverového rizika:

- **priame úverové riziko:** zlyhanie dlžníka pri klasických bankových úveroch,
- **riziko úverových ekvivalentov:** zlyhanie dlžníka pri iných finančných transakciách,
- **riziko vysporiadania:** zlyhanie systému pri transakciách vysporiadania záväzku,
- **riziko úverovej angažovanosti / riziko koncentrácie portfólia:** zlyhanie dlžníka v dôsledku zmien v prostredí, chybný rating (PINTER, 2010.)

Príčiny vzniku úverového rizika môžu byť:

- **interné príčiny:** subjektívna stránka úverového rizika, tzn. zlé rozhodnutie banky o alokácii aktív,
- **externé príčiny:** objektívna stránka úverového rizika, tzn. že banka nemôže ovplyvniť celkový vývoj ekonomiky, politickú situáciu v krajine. (PINTER, 2010.)

1.2. Možnosti na zaistenie úveru

Zmyslom zaistenia úveru je zamedziť stratám v prípade platobnej neschopnosti dlžníka. Zaistenie úveru dáva spôsob bankám uplatniť nároky voči dlžníkom alebo tretej osobe a dosiahnuť náhradu úverovej alebo úrokovej pohľadávky.

K najdôležitejším nástrojom využívaným k zaisteniu úveru patria:

- **analýza úverovej spôsobilosti klienta:** na jej základe sa banka rozhodne, či poskytne alebo neposkytne úver a ak poskytne, tak za akých podmienok,
- **limitovanie výšky úveru:** je nástrojom banky pri riadení úverového portfólia (úverových aktív), ktorého cieľom je minimalizácia dopadov úverových rizík na hospodárenie banky,

- **kontrola bankového klienta:** spočíva v tom, že sa v krátkych intervaloch opakujú skúšky hospodárskej spôsobilosti dlžníka,
- **úverové zaistenie:** tvoria ho rôzne dodatočné opatrenia, ktoré banke umožňujú úspešne uplatniť nároky voči dlžníkovi alebo voči tretej osobe a dosiahnuť úhradu úverovej a úrokovej pohľadávky (POLIDAR, 1999.)

Typy úverového zaistenia:

- **ručenie:** je typickou formou zaistenia a predstavuje záväzok ručiteľa uhradiť veriteľovi zaistenú pohľadávku, pokiaľ ju nesplatí dlžník,
- **banková záruka:** je zvláštny typ zaistenia, ktoré vzniká písomným prehlásením banky v záručnej listine, ktorá uspokojí veriteľa do výšky určitej peňažnej čiastky podľa obsahu záručnej listiny, ak dlžník nesplní určitý záväzok, alebo nebudú splnené iné podmienky stanovené v záručnej listine,
- **zmenka:** je cenný papier, na základe ktorého má jeho majiteľ právo žiadať v deň splatnosti v platobnom mieste uhradenie zmenkovej sumy dlžníkom oproti vydaniu zmenky,
- **záložné právo k nehnuteľnej veci:** nehnuteľnosťami sú pozemky a stavby spojené so zemou, teda pevným základom,
- **záložné právo k hnuťnej veci:** hnuťnosťou sa rozumie každá vec, ktorá nie je nehnuteľnosťou,
- **záložné právo k pohľadávke:** vzniká uzavretím písomnej záložnej zmluvy, kde zmluvnými stranami sú veriteľ a dlžník,
- **záložné právo k cenným papierom:** vzniká uzavretím písomnej záložnej zmluvy, pričom sa rozlišujú dematerializované cenné papiere a listinné cenné papiere. (PAVELKA, 2008)

1.3. Riziká hypotekárneho bankovníctva

Riziko pri hypotékach je hlavne kreditné riziko. Kreditné riziko má podiel na všetkých rizikách v bankovníctve až 80%. Táto situácia je pri dlhodobých hypotékach ešte významnejšia, keďže šanca na zmeny finančného stavu dlžníka sa časom zvyšujú a môže nastať situácia, že dlžník je neschopný alebo neochotný ďalej splácať uver. Tak isto sa môže stať, že nehnuteľnosť, ktorá slúžila na zabezpečenie hypotekárneho úveru, časom stratí zo svojej hodnoty. Keď táto situácia nastane, banka nie je schopná dostať naspäť hodnotu vydaného úveru od dlžníka, a nastane

strata. Pri hypotekárnom úvere je kreditné riziko zmiernené vo forme záložného práva na nehnuteľný majetok dlžníka. Pri dlhodobom raste cien nehnuteľností je to menej riziková časť z úverového portfólia banky, ale súčasne aj viac citlivá na zmenu makroekonomického prostredia. Vyhovujú jej stabilné makroekonomické podmienky a hlavne nízke úrokové sadzby. Vysoká úroková miera na kapitálovom trhu spôsobuje vysoké ceny zdrojov, ako aj samotných hypotekárnych dlhodobých úverov. (HORVÁTOVÁ, 2022)

1.4. Banky

1.4.1. Tatra banka, a. s.

V roku 1990 Tatra banka vznikla ako prvá súkromná banka na Slovensku. Názov Tatra banka bola už aj predtým dôležitým menom na Slovensku. V roku 1885 bola založená hornouhorská banka TATRA. V období po roku 1918 sa Tatra banka stala najväčšou slovenskou bankou. Počas znárodnenia v roku 1946 sa Tatra banka zlúčila so Slovenskou bankou a vytvorila sa Slovenská Tatra banka. V roku 1950 bola začlenená do centralizovanej Československej štátnej banky a uvedená do tzv. stavu pokoja. Nezanikla, ale prestala vykonávať akékoľvek bankové operácie. Novozaložená Tatra banka prevzala meno od svojho historického predchodcu. Prvú pobočku otvorila v roku 1991 na Vajanského nábreží v Bratislave. V súčasnosti patrí do RZB Group a je jednou z najúspešnejších dcérskych spoločností Raiffeisen Bank International v Strednej a Východnej Európe. Centrála Tatra banky sídli na Hodžovom námestí v Bratislave. So sieťou 80 pobočiek pôsobí na celom Slovensku. Základné imanie banky je 54 544 900 €. Podiel v kategórii úverov na bývanie podľa údajov Národnej banky Slovenska v roku 2022 mala Tatra banka na celom Slovensku 13,31%. Banka so svojimi hospodárskymi výsledkami, kvalitnými službami, úrovňou komunikácie a stabilnou štruktúrou akcionárov potvrdzuje, že ide o dlhodobu dôveryhodnú finančnú inštitúciu a silnú univerzálnu banku, ponúkajúcu špičkové finančné služby domácim aj zahraničným korporátnym a retailovým klientom. Stabilitu hospodárenia Tatra banky a jej pevnú pozíciu na trhu ohodnotilo už viacero významných nezávislých medzinárodných i domácich ekonomických periodík, od ktorých banka získala množstvo ocenení. Je modernou a univerzálnou bankou s kompletnou ponukou služieb a riešení v oblasti spravovania financií pre individuálnych aj firemných klientov. (Tatra Banka, 2023) (Csernák, 2022)

1.4.2. Všeobecná úverová banka, a. s.

Všeobecná úverová banka vznikla v roku 1990 oddelením od Štátnej banky Československej. Banka má sídlo v Bratislave a má 179 pobočiek na celom Slovensku. Jej základné imanie predstavuje 430 819 063 810 €. V súčasnosti je VÚB vzhľadom na základné imanie najväčšou bankou na Slovensku. Podľa aktuálnych dát Národnej banky Slovenska jej podiel na trhu úverov na bývanie ku koncu 2022 predstavovala 20,42 %. Banka je členom Talianskej finančnej skupiny Intesa Sanpaolo a poskytuje retailové a komerčné služby, široký rozsah produktov a služieb, od klasických bankových produktov k sofistikovanejším službám, ako sú napríklad správa portfólia, životné poistenie, fúzie a akvizície, štruktúrované financovanie pre obyvateľstvo, pre drobných a malých podnikateľov, pre veľké firmy, pre nadnárodné spoločnosti a finančné inštitúcie. (Csernák, 2022)

1.4.3. Slovenská sporiteľňa

Slovenská sporiteľňa je najväčšia komerčná banka v súčasnosti na Slovensku. Má najväčší podiel vkladov na trhu, najrozsiahlejšiu sieť vlastných komerčných obchodných miest na Slovensku a dominantné postavenie na trhu. Banka má najviac pobočiek na Slovensku, až 200 pobočiek. Jej základné imanie predstavuje 212 000 000 €. Podľa dát Národnej banky Slovenska jej podiel na trhu úverov na bývanie ku koncu 2022 predstavovala 25,26 %. V roku 2001 bola podpísaná zmluva medzi Ministerstvom financií SR a Erste Bank o predaji majoritného balíka akcií. Banka sa tak začlenila do silnej finančnej skupiny Erste Bank der Oesterreichischen Sparkassen AG. (Slovenská sporiteľňa, 2023) (Csernák, 2022)

1.4.4. ČSOB (Československá obchodná banka, a. s.)

Československá obchodná banka bola založená v roku 1964 ako súčasť Československej štátnej banky a mala v bývalom Československu zabezpečovať financovanie zahraničného obchodu a dohľad nad pôžičkami v zahraničných menách. Po revolúcii sa banka zamerala aj na poskytovanie bankových služieb aj pre fyzické osoby a pre novovznikajúce právnické osoby. V roku 1997 česká vláda vyhlásila predaj banky a v júni 1999 predala svoj akciový podiel KBC Banke z finančnej skupiny KBC Group N.V., ktorá sídli v Belgicku a je v súčasnosti 100%-ným vlastníkom Československej obchodnej banky. ČSOB začala pôsobiť ako samostatná akciová spoločnosť s vlastným predstavenstvom len od roku 2008, do konca roka 2007 pôsobila na Slovensku ako pobočka zahraničnej banky. V októbri 2021 sa ČSOB zlúčila s maďarskou

OTP Bank, ktorá svoj podiel na Slovensku predala KBC Banke. Týmto sa ČSOB dostala medzi štyri najvýznamnejšie banky na Slovensku. Jej základné imanie predstavuje 23 899 600 €. Podľa dát Národnej banky Slovenska jej podiel na trhu úverov na bývanie ku koncu roka 2022 predstavovala 14,61 %. Banka mala v roku 2022 na území Slovenska 132 pobočiek. Má široké portfólio služieb a produktov, a je zameraná hlavne na hypotéky, spotrebné úvery, sporiace a investičné produkty, bežné účty, poistenie, stavebné sporenie a lízing. (ČSOB, 2023) (Csernák, 2022)

2. Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

Cieľom tejto práce je navrhnúť alternatívne rozdelenie úverového portfólia pri skúmaných bankách tak, aby expozícia rizika bola minimálna, ale popri tom zostala zodpovedajúca doterajšej politike jednotlivých bánk. Aby sme tento cieľ dosiahli, budeme potrebovať ročné výpisy skúmaných podnikov. Z týchto dát vieme zistiť, aké sumy alokujú banky do jednotlivých úverov a aj expozíciu voči kreditnému riziku týchto úverov. V tejto práci sa zameriam na tri typy úverov: hypotekárne úvery, korporачné úvery a spotrebné úvery. Získané dáta využijeme v lineárnom programovaní, aplikujeme simplexovú metódu pre minimalizáciu úverov, alokovaných do rizikových segmentov, popri tom dodržíme zadané ohraničenia, ktoré v tejto situácii znamenajú rozhodnutia jednotlivých bánk o minimálnej sume úverov, ktoré vydajú pre kreditne rizikových klientov.

2.1. Lineárne programovanie

Lineárne programovanie je oblasť programovania, ktorá sa zaoberá hľadaním optimálneho riešenia (maxima alebo minima) matematického modelu, ktorý je reprezentovaný lineárnymi vzťahmi. Tento proces riešenia úloh vyžaduje splnenie rôznych ohraničujúcich podmienok, väčšinou v tvare nerovností, aby sa dosiahol požadovaný výsledok. V praxi sa takéto riešenie môže vyjadriť ako polyedrická množina, v ktorej sa hľadá bod, ktorý predstavuje optimálne riešenie, ak taký bod existuje. Lineárne programovanie má široké uplatnenie v rôznych odvetviach, ako sú matematika a ekonomika, ale aj telekomunikácie, doprava a energetika.

2.1.1. História

Lineárne programovanie môžeme vnímať ako súčasť veľkej revolúcie techník. Tieto techniky uľahčili človeku stavať konkrétne ciele pri praktických situáciách a ukázať podrobné rozhodnutia pre najlepšie plnenie cieľov, hlavne pre komplexnejšie situácie. Sú to nástroje a spôsoby, ktoré reálne problémy formulujú v detailných matematických termínoch (modely), techniky na riešenie týchto modelov (algoritmy) a nástroje pre vykonávanie krokov algoritmov (počítače a softvér). Koncepty lineárneho programovania boli prvýkrát navrhnuté v súvislosti s plánovacími aktivitami v armáde. Pri výpočtoch pre US Air Force v roku 1947 Dr. Dantzig vyvinul simplexov algoritmus na uľahčenie plánovania v lineárnej štruktúre. Toto umožnilo matematikom, ekonómom a iným zvažovať veľké množstvá premenných pri rozhodnutiach

týkajúcich sa výroby a alokácie lietadiel, ich súčiastok a surovín. Oblasť, ktorá vznikla, sa nazýva lineárne programovanie. Pri vytváraní simplexnej metódy sa Danzig inšpiroval prácou Wassily Leontiefva, ktorý navrhol v roku 1932 veľkú, ale jednoduchú maticovú štruktúru, ktorú nazval Medzi priemyselným modelom vstupov a výstupov amerického hospodárstva. Bol to jednoduchý koncept, ktorý mohol byť dostatočne detailne implementovaný, aby bol užitočný pre praktické plánovanie. Pre túto metódu Leontief získal v roku 1976 Nobelovu cenu. Leontiefov model však musel byť zovšeobecnený. Jeho model bol statický ale vzdušné sily potrebovali vysoko dynamický model, ktorý by bol schopný sa meniť v čase a ktorý by sa dal implementovať do čoraz populárnejších počítačov. (Dantzig, 2002)

2.1.2. Tvary úloh v lineárnom programovaní

Všeobecná forma úlohy v lineárnom programovaní môže obsahovať nerovnosť, neoznačené premenné a minimalizáciu namiesto maximalizácie. Rôzne formy úlohy v lineárnom programovaní sú však ekvivalentné v tom zmysle, že každá úloha môže byť zapísaná v kanonickej forme a naopak. Úloha zapísaná v kanonickej forme môže byť prevedená na iný problém, napríklad obsahujúci iba nemravnostné podmienky. V nasledujúcej časti sa budeme venovať podmienkam a cieľovej funkcii úlohy v lineárnom programovaní, ako aj možnosti pre transformáciu.

Definícia 1.

Nech $a_{i,j}$, b_i , c_j , kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$; kde m , n sú dané čísla, n je počet rozhodujúcich premenných a m je počet ohraničení.

Nech $\bar{I} \subseteq I = \{1, \dots, m\}$ a $\bar{J} \subseteq J = \{1, \dots, n\}$.

Optimalizačná úloha na maximalizáciu funkcie

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{1.1}$$

na množine všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j < b_i \quad \text{pre } i \in \bar{I} \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i \quad \text{pre } i \in I - \bar{I} \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{pre } j \in \bar{J} \tag{1.4}$$

Sa nazýva maximalizačná úloha lineárneho programovania v **obecnom tvare**.

Definícia 2. Nech $a_{i,j}$, b_i , c_j , kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$; kde m , n sú dané čísla
Optimalizačná úloha na maximalizáciu funkcie

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

na množine všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i \quad \text{pre } i \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{pre } j \in \{1, \dots, n\}$$

Sa nazýva maximalizačná úloha lineárneho programovania v **štandardnom tvare**.

Maticový zápis takejto úlohy v lineárnom programovaní vyzerá nasledovnom tvare:

$$\max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\},$$

kde: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{b} = (b_i)$, $\mathbf{c} = (c_j)$ a $\mathbf{x} = (x_j)$.

Definícia 3. Nech $a_{i,j}$, b_i , c_j , kde $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$; kde m , n sú dané čísla

Optimalizačná úloha na maximalizáciu funkcie

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

na množine všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i \quad \text{pre } i \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{pre } j \in \{1, \dots, n\}$$

Nazýva sa maximalizačná úloha lineárneho programovania v **kanonickom tvare**.

Maticový zápis takejto úlohy v lineárnom programovaní vyzerá nasledovnom tvare:

$$\max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

kde: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{b} = (b_i)$, $\mathbf{c} = (c_j)$ a $\mathbf{x} = (x_j)$.

Tak isto sa často používa nasledovný tvar úlohy v lineárnom programovaní:

$$\max\{\mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

kde: $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{b} = (b_i)$, $\mathbf{c} = (c_j)$ a $\mathbf{x} = (x_j)$.

Funkcia $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ sa nazýva účelová funkcia. Ak zmeníme požiadavku účelovej funkcie na minimalizačnú, vytvoríme minimalizačnú úlohu lineárneho programovania. Prípustné riešenie úlohy lineárneho programovania sa nazýva vektor x , ktorý splňuje obmedzujúce podmienky. Optimálnym riešením úlohy je x^* práve vtedy, ak pre každé prípustné riešenie x^* platí $cx \leq cx^*$. **Optimálna hodnota účelovej funkcie** bude potom hodnota cx^* .

2.2.Simplexová metóda

Simplexová metóda je prístup, ako riešiť optimalizačné úlohy lineárneho programovania pomocou doplnkových premenných, tabuliek a vedúcich prvkov. Je to metóda ako dosiahnuť najlepší výsledok daného maximálneho alebo minimálneho výrazu, ktoré má viacero lineárnych ohraničení. Väčšina lineárnych programov môže byť riešená pomocou rôznych softvérov, ako napríklad MatLab alebo Rstudio. Metóda Simplex je technika na riešenie lineárnych programov ručne. Pre riešenie úlohy lineárneho programovania so Simplexovou metódou sú potrebné nasledujúce kroky:

- **Štandardný tvar**
- **Zavedenie doplnkových premenných**
- **Vytvorenie tabuľky**
- **Zavedenie vedúceho prvku**
- **Vytvorenie novej tabuľky**
- **Kontrola optimalizácie**
- **Identifikácia optimálnych hodnôt**

Tieto jednotlivé kroky teraz dôslednejšie popíšeme a ukážeme ich na nasledujúcom príklade lineárneho programovania:

$$\text{Minimize : } -z = -8x_1 - 10x_2 - 7x_3$$

$$\text{s. t. : } x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$-x_1 - 5x_2 - x_3 \geq -8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2.2.1. Štandardný tvar

Je to základný formát pre lineárne programy pred optimalizáciou. Má tri požiadavky:

- musí byť problémom v maximalizačnom tvare
- všetky lineárne ohraňovania musia byť v tvare: $\geq$, $\leq$ alebo $=$.
- všetky premenné musia byť nezáporné.

Tieto požiadavky je možné vždy splniť pomocou transformácie, ako som to už popísal v predošlej kapitole. Štandardný tvar je nevyhnutný, pretože vytvára ideálny východiskový bod pre efektívne riešenie so Simplexovou metódou a aj s inými metódami, ktoré riešia optimalizačné problémy. Ak chceme transformovať danú úlohu v minimalizačnom tvare na maximalizačnú, stačí vynásobiť obe dve strany cieľovej funkcie s hodnotou -1.

$$-1 \times (-z = -8x_1 - 10x_2 - 7x_3)$$

$$z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$$

$$\text{Maximize : } z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3$$

Transformácia lineárnych ohraňovaní $z \geq$ na $\leq$ môže byť vykonaná podobne, ako pri objektívnej funkcii, s vynásobením oboch strán nerovnosti hodnotou -1.

$$-1 \times (-x_1 - 5x_2 - x_3 \geq -8)$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8$$

Keď je model v štandardnom tvare, môžeme pridať doplnkové premenné.

2.2.2. Určenie doplnkových premenných.

Doplnkové premenné sú dodatočné premenné, ktoré sú zavedené do lineárnych ohraňovaní aby transformovali ich zo stavu nerovnosti na stav rovnosti. Ak je model v štandardnom tvare, premenné sú vždy zavedené s koeficientom +1. Doplnkové premenné sú potrebné v ohraňovaniach pre ich transformáciu na rovnosti s jednoznačným riešením, ktoré potom vieme nájsť.

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_1 = 10$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + s_2 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

Potom ako sme zaviedli doplnkové premenné môžeme začať vytvárať tabuľku.

2.2.3. Vytvorenie tabuľky

Simplexová tabuľka je používaná na to aby sme vykonali riadkové operácie a na kontrolu optimality. Tabuľka sa skladá z koeficientov lineárnych ohraničení a koeficientov cieľovej funkcie.

1. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
1	3	2	1	0	0	10
1	5	1	0	1	0	8
-8	-10	-7	0	0	1	0

Zdroj: vlastné spracovanie

Po vytvorení tabuľky môžeme začať hľadať optimálne riešenie. Optimálnym riešením maximizačného lineárneho modelu sú tie koeficienty premenných v objektívnej funkcii, ktoré vydajú najväčšiu hodnotu zeta. Optimálne riešenie graficky by mala byť na rohových bodoch celkového modelu. Aby sme našli optimálne riešenie použitím tabuľky, každá hodnota v poslednom riadku musí byť väčšia alebo rovná nule. Ak daná hodnota je menšia ako nula, daná premenná ešte nie je na optimálnej hodnote. Ako vidíme, naša tabuľka má tri negatívne čísla v poslednom riadku, čo nám naznačuje že sa nenachádzame v optimálnom stave. Teraz musíme zvoliť vedúci prvok a vytvoriť podľa jej novú tabuľku.

2.2.4. Zavedenie vedúceho prvku

Vedúci prvok sa používa na identifikovanie premennej, ktorá bude jednotkovou hodnotou, a má tak isto kľúčovú rolu pri konverzii jednotkovej hodnoty. Vedúci prvok sa môže identifikovať podľa spodného riadku tabuľky a podľa indikátora. Pokiaľ riešenie nie je v optimálnom stave, vyberieme najmenšiu zápornú hodnotu v spodnom riadku. Jedna z hodnôt stojacich v stĺpci s touto hodnotou bude vedúci prvok. Indikátor nájdeme tak, že vydelíme beta hodnoty lineárnych ohraničení s ich zodpovedajúcimi hodnotami zo stĺpca obsahujúceho možný vedúci prvok. Priesečník riadku s najmenším nezáporným indikátorom a najmenšou zápornou hodnotou v spodnom riadku sa stane vedúcim prvkom.

V uvedenom príklade je -10 najmenšia záporná hodnota v poslednom riadku. Podľa toho stĺpec x_2 sa označí ako stĺpec obsahujúci vedúci prvok. Vypočítaním indikátora získavame hodnotu $10/3$ pre prvé ohraničenie, a hodnotu $8/5$ pre druhé ohraničenie. Keďže $8/5$ je najmenší nezáporný indikátor, vedúci prvok bude v druhom riadku a bude mať hodnotu 5.

2. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b	indikátor
1	3	2	1	0	0	10	10/3
1	5	1	0	1	0	8	8/5
-8	-10	-7	0	0	1	0	

Najmenšia hodnota

Zdroj: vlastné spracovanie

Teraz, keď bol identifikovaný vedúci prvok, môžeme vytvoriť novú tabuľku na optimalizáciu premenných a nájsť nové možné optimálne riešenie.

2.2.5. Vytvorenie novej tabuľky

Nová tabuľka nám bude slúžiť na to, aby sme podľa nej určili nové optimálne riešenie. Po identifikovaní vedúceho prvku môžeme vykonať riadkové operácie aby sme optimalizovali vedúci prvok a popri tom podržali tabuľku na rovnakej hodnote. Aby sme optimalizovali vedúci prvok, musíme ho transformovať, aby bola jednotková hodnota v novej tabuľke. Aby sme ho transformovali do jednotkovej hodnoty, musíme celý riadok, v ktorom je vedúci prvok, vynásobiť recipročnou hodnotou vedúceho prvku. V našom prípade vedúci prvok má hodnotu 5, v tomto prípade vynásobíme riadok s hodnotou $\frac{1}{5}$.

3. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
	0					
1/5	1	1/5	0	1/5	0	8/5
	0					

Zdroj: vlastné spracovanie

Po determinácii jednotkovej hodnoty ostatné hodnoty v stĺpci dostanú hodnotu 0. Je to nutné preto, aby sme optimalizovali hodnotu x_2 v druhom riadku.

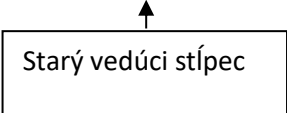
Aby sa zachovala ekvivalentnosť tabuľky, ostatné premenné, ktoré nie sú v riadku vedúceho prvku alebo v stĺpci vedúceho prvku, sa pre každú novú hodnotu vynásobíme zápornú hodnotu v starom vedúcom stĺpci, hodnotou v novom vedúcom riadku, ktorá zodpovedá vypočítanej hodnote. Potom túto hodnotu pripočítame k starej hodnote zo starej tabuľky, aby sme získali novú hodnotu pre novú tabuľku.

Nová hodnota v tabuľke = (záporná hodnota v stĺpci vedúceho prvku starej tabuľky) x (hodnota v novom riadku vedúceho prvku tabuľky) + (stará hodnota v tabuľke)

Stará tabuľka:

4. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
1	3	2	1	0	0	10
1	5	1	0	1	0	8
-8	-10	-7	0	0	1	0

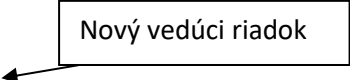


Zdroj: vlastné spracovanie

Nová tabuľka:

5. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
2/5	2	7/5	1	-3/5	0	26/5
1/5	1	1/5	0	1/5	0	8/5
-6	0	-5	0	2	1	16



Zdroj: vlastné spracovanie

Numerický príklad nám tento koncept ukáže trochu prehľadnejšie:

hodnota s_2 v prvom riadku:

Nová hodnota v tabuľke = (záporná hodnota v stĺpci vedúceho prvku starej tabuľky) *

(hodnota v riadku vedúceho prvku novej tabuľky) + (stará hodnota v tabuľke)

$$\text{Nová hodnota v tabuľke} = (-3) * \left(\frac{1}{5}\right) + 0 = -\frac{3}{5}$$

Po vytvorení novej tabuľky na nej môžeme vykonať kontrolu optimalizácie.

2.2.6. Kontrola optimality

Ako to už bolo spomenuté v kroku 4, optimálnym riešením maximalizačného modelu v lineárnom programe sú hodnoty priradené k premenným v objektívnej funkcii, ktoré nám dajú najväčšiu hodnotu zeta. Kontrolu optimalizácie je nutné vykonať v každej novej tabuľke, aby sme videli či je potrebné určiť nový vedúci prvok. Tabuľka je v optimálnom stave, ak v hodnoty v poslednom riadku nie sú negatívne čísla. V našom príklade nová tabuľka ešte stále nie je v optimálnom stave, preto musíme určiť nový vedúci prvok.

Zavedenie novej vedúcej premennej

Ako sme to už robili, zavedieme nový vedúci prvok, ktorá sa bude nachádzať v stĺpci, kde je najmenšia hodnota v spodnom riadku, a v riadku kde je najmenší indikátor.

6. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b	Indikátor
2/5	2	7/5	1	-3/5	0	26/5	$(26/5) / (2/5) = 13$
1/5	1	1/5	0	1/5	0	8/5	$(8/5) / (1/5) = 8$
-6	0	-5	0	2	1	0	



Najmenšia hodnota

Zdroj: vlastné spracovanie

S novým vedúcim prvkom môžeme vytvoriť ďalšiu tabuľku.

Vytvorenie novej tabuľky

Ako sme to už robili, vytvoríme novú tabuľku, ktorú použijeme na optimalizáciu vedúceho prvku pričom zachováme hodnotu ostatných premenných. Musíme celý riadok v ktorej je vedúci prvok vynásobiť s recipročnou hodnotou vedúceho prvku. V našom prípade vedúci prvok má hodnotu 1/5, v tomto prípade vynásobíme riadok s hodnotou 5.

7. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
1	5	1	0	1	0	8

Zdroj: vlastné spracovanie

Po determinácii jednotkovej hodnoty ostatné hodnoty v stĺpci dostanú hodnotu 0. Ostatné premenné, ktoré nie sú v riadku vedúceho prvku alebo v stĺpci vedúceho prvku, sa pre každú novú hodnotu vynásobíme zápornú hodnotu vedúceho prvku v starom stĺpci, so zodpovedajúcou hodnotou v novom riadku vedúceho prvku, ktorá zodpovedá vypočítanej hodnote. Potom túto hodnotu pripočítame k starej hodnote zo starej tabuľky, aby sme získali novú hodnotu pre novú tabuľku.

8. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
0	-2	1	1	-1	0	2
1	5	1	0	1	0	8
0	30	1	0	8	1	64

Zdroj: vlastné spracovanie

2.2.7. Identifikácia optimálnych hodnôt

Po tom čo sa preukázalo, že tabuľka je v optimálnom stave, môžeme určiť optimálne hodnoty. Určujeme ich tak, že premenné rozlíšime na základné a nezákladné. Základné premenné majú vo svojom stĺpci jednu hodnotu 1 a ostatné hodnoty sú 0. Ak premenná nespĺňa toto kritérium, považuje sa za nezákladnú. Ak je premenná nezákladná, znamená to, že optimálne riešenie tejto premennej je nulové. Ak je premenná základná, riadok, ktorý obsahuje hodnotu 1, bude zodpovedať hodnote beta. Hodnota beta bude predstavovať optimálne riešenie pre danú premennú.

9. Tabuľka vzorový príklad

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	b
0	-2	1	1	-1	0	2
1	5	1	0	1	0	8
0	30	1	0	8	1	64

Zdroj: vlastné spracovanie

Základné premenné: x_1, s_1, z

Nezákladné premenné: x_2, x_3, s_2

Pre premennú x_1 sa hodnota 1 nachádza v druhom riadku. Z toho vyplýva, že optimálna hodnota pre premennú x_1 sa nachádza v druhom riadku z hodnôt beta, čo je 8.

Premenná s_1 má v prvom riadku hodnotu 1, a v ostatných riadkoch hodnotu 0, čo ukazuje, že optimálna hodnota je 2 zo stĺpca beta. Vzhľadom na to, že premenná s_1 je doplnková premenná, nie je v skutočnosti zahrnutá do optimálneho riešenia, pretože premenná nie je obsiahnutá v účelovej funkcii.

Premenná zeta má v poslednom riadku hodnotu 1. To ukazuje, že maximálna cieľová hodnota bude 64 zo stĺpca beta.

Konečné riešenie nám ukazuje, že optimálni výsledok bude vyzerat' nasledovne:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 8 & s_1 = 2 \\ x_2 = 0 & s_2 = 0 \\ x_3 = 0 & z = 64 \end{array}$$

Maximálna optimálna hodnota je 64 a nachádza sa v bode (8, 0, 0) účelovej funkcie. (Laurel Nichols, 2015)

3. Aplikovanie Simplexovej metódy na úverové portfóliá skúmaných bank

Pri týchto výpočtoch aplikujeme simplexovú metódu na vybrané úvery z úverových portfólií opísaných bánk. Pri týchto výpočtoch som vychádzal z práci APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING MODEL TO UNSECURED LOANS AND BAD DEBT RISK CONTROL IN BANKS vydané v roku 2014 od autorov AGARANA M. C., ANAKE T. A. & ADELEKE O. J. (AGARANA M. C., 2014)

3.1. Interný hodnotiaci systém

Pre zverejnenie kvality aktív banky priradzuje každému klientovi jednu z nasledovných štyroch rizikových kategórií, ako ukážku teraz opíšem podľa čoho priradzuje jednotlivých klientov banky Slovenská sporiteľňa, ostatné banky majú podobný systém, niekedy s viacerými stupňami triedy rizík.

- **Nízke riziko:** Bežní domáci klienti s dlhodobými stabilnými vzťahmi s bankou alebo veľkí medzinárodne známi klienti. Veľmi dobrá až uspokojivá finančná pozícia s nízkou pravdepodobnosťou finančných problémov v porovnaní s trhom, na ktorom sa títo klienti nachádzajú. Retailoví klienti, ktorí majú dlhodobé vzťahy s bankou alebo klienti so širokým portfóliom bankových produktov. Klienti bez žiadnych významných oneskorených splátok v súčasnosti alebo za posledných 12 mesiacov. Nové obchody zvyčajne nachádzajú tiež v tejto kategórii.
- **Do pozornosti manažmentu:** Neretailoví klienti, ktorí sa môžu mať omeškané platby prípadne boli v minulosti v stave zlyhania alebo môžu v strednodobom horizonte čeliť problémom so splácaním svojich záväzkov voči banke. Retailoví klienti s možnými platobnými problémami v minulosti, ktoré viedli k zvýšenej starostlivosti zo strany banky. Títo klienti však majú zvyčajne dobrú históriu platieb.
- **Rizikový:** Dlžníci, ktorí sú ohrození krátkodobom negatívnym vývojom finančným a hospodárskym vývojom a vykazujú zvýšenú pravdepodobnosť zlyhania. V niektorých prípadoch už nastal proces reštrukturalizácie prípadne sa o ňom uvažuje. Tieto úvery spravujú špecializované oddelenia riadenia rizík banky.
- **Nesplácané:** Predstavujú pohľadávky banky spĺňajúce definíciu zlyhania uvedenej vyššie. Ak sa klient dostane do stavu zlyhania na jednom úvere, stav zlyhania sa mu prenesie aj na zvyšné jeho expozície. Okrem toho neperformujúce úvery zahŕňajú aj neperformujúce úvery bez stavu zlyhania. Na základe kalibrácie interných pravdepodobností zlyhania pre

regulačné účely na miery platobného zlyhania publikované ratingovými agentúrami sa za účelom zaradenia do jednotlivých rizikových kategórií použil ekvivalentný externý rating klienta. Pre agentúrne ratingy sa použili priemerné ročné miery zlyhania vychádzajúce z dlhodobých časových radov. (Slovenská sporiteľňa, 2022)

3.2. Spôsob získania dát

Pri získaní dát pre moje výpočty som vychádzal z ročných výpisoch hore uvedených bánk. Pre účelovú funkciu som vždy použil vydané hodnoty v hypotekárnych, korporátnych, a spotrebných úverov z roku 2021. Pre ohraničenie som vypočítal priemerne koľko alokuje banka zo svojho portfólia do rizikových klientov, na toto som použil tak isto ročné výpisy aj z predchádzajúcich kalendárnych rokov. V poslednom ohraničení som vychádzal z predpokladu, že banka v ďalšom roku bude alokovať viac zo svojho portfólia do rizikových segmentov ako v predchádzajúcom roku, keďže podľa ročných výpisov som videl stúpajúcu tendenciu v rizikovej expozícii. Ročné výpisy a interné zadelenie expozície úverového portfólia sa líšia medzi skúmaných bankách, môj postup bol však podobný pri získavaní dát z týchto výpisov:

Konsolidovaná účtovná závierka

Expozícia úverového rizika – finančné nástroje vo vzťahu ku kategóriám rizika

Eur tis.	Expozícia kreditného rizika				Hrubá účtovná hodnota
	Nízke riziko	Stredné riziko	Vysoké riziko	Neperformujúce úvery	
31.12.2021					
Hotovosť a peňažné ekvivalenty - ostatné neterminované vklady	9 658	-	-	-	9 658
Finančné aktíva v amortizovanej hodnote	17 319 652	1 320 524	904 006	283 935	19 828 117
Úvery a pohľadávky voči bankám	50 023	2	-	-	50 025
Úvery a pohľadávky voči klientom	13 356 735	1 320 522	904 006	283 935	15 865 198
z toho: úvery na bývanie	8 332 186	586 927	302 258	140 005	9 361 376
z toho: spotrebné úvery	1 093 989	162 783	103 984	61 420	1 422 176
z toho: korporátne úvery a ostatné	3 930 560	570 812	497 764	82 510	5 081 646
Dlhové cenné papiere	3 912 894	-	-	-	3 912 894
Pohľadávky z finančného lízingu	200 787	23 287	8 372	6 326	238 772
Pohľadávky z obchodného styku a ostatné pohľadávky	93 247	8 933	28 636	4 860	135 676
Neobchodované finančné aktíva v reálnej hodnote cez výkaz ziskov a strát - Dlhové cenné papiere	6 479	-	1 434	-	7 913
Deriváty - držané na obchodovanie	11 500	35 590	784	-	47 874
Kladná hodnota z derivátov-hedge accounting	16 454	-	-	-	16 454
Expozícia pre kreditné riziko - súvaha celkom	17 657 777	1 388 334	943 232	295 121	20 284 464
Podsúvahové položky	1 910 768	218 492	153 917	1 537	2 284 714
Spolu Expozícia za kreditné riziko	19 568 545	1 606 826	1 097 149	296 658	22 569 178

1. Obrázok ročný výpis sporiteľňa

Zdroj: (Slovenská sporiteľňa, 2022)

Tento obrázok je z ročného výpisu slovenskej sporiteľne, ako som to už písal, interné zadelenie expozície rizika sa líši medzi bankami, ale pri tejto banke bolo tieto dáta získať pomerne jednoduché. Účelová funkcia v tomto prípade bude stĺpec hrubá účtovná hodnota. Toto nám reprezentuje rozdelenie portfólia medzi skúmanými úvermi. Tieto dáta nám ukazujú doterajšiu politiku banky a že ktoré úvery boli preferované v akej miere. Pre ohraničenie som zrátal percento stredne rizikových, vysoko rizikových a nereformujúcich úverov z hrubej účtovnej

hodnoty. Aby tieto výpočty reprezentovali reálne hodnoty, zrátal som aj expozície rizika z predchádzajúceho účtovného obdobia (2020) aby som vedel banka empiricky koľko alokuje do rizikových segmentov jednotlivých úverov. V praxi samozrejme riadenie banky by sa rozhodlo že koľko percent chcú alokovať do rizikových častí. V období od 31. decembra 2020 do 31. decembra 2021 sa celkové úverové riziko zvýšilo z 21,048 miliónov Eur na 22, 569 miliónov Eur. Ide o nárast o 7,23 %, resp. 1,5 milióna Eur. (Slovenská sporiteľňa, 2022)

3.3. Výpočty Slovenská sporiteľňa

Formovanie Modelu

Rôzne označenia a premenné, ktoré budú použité pri vytváraní modelu, sú definované nasledovne:

Definícia rozhodovacích premenných

Rozhodovacie premenné sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke:

10. Tabuľka Skúmané úvery Slovenská sporiteľňa

	Typ úveru	Zdroj úveru	Rizikové
1	hypotekárni úver	Slovenská sporiteľňa	x_1
2	Korporačné úvery	Slovenská sporiteľňa	x_2
3	spotrebné úvery	Slovenská sporiteľňa	x_3

Zdroj: vlastné spracovanie

Kde:

x_1 je percento rizikových úverov alokované v rizikových hypotekárnych úverov.

x_2 je percento rizikových úverov alokované v rizikových korporáčnych úverov.

x_3 je percento rizikových úverov alokované v rizikových spotrebných úverov.

11. Tabuľka Množstvo peňažného kapitálu v danom type úveru

	Zdroj úveru	Typ úveru	Hrubá účtovná hodnota	Rizikové
1	Slovenská sporiteľňa	hypotekárni úver	9 361 376 000	x_1
2	Slovenská sporiteľňa	spotrebné úvery	1 422 176 000	x_2
3	Slovenská sporiteľňa	Korporačné úvery	5 081 646 000	x_3

Zdroj: (Slovenská sporiteľňa, 2022)

Kde:

Banka Slovenská sporiteľňa v roku 2021 mala vo svojom kreditnom portfóliu alokovaných 9 361 376 000€ v hypotekárnych úveroch, 1 422 176 000€ v spotrebných úveroch a 5 081 646 000€ v korporáčnych úveroch.

Formácia účelovej funkcie:

Keďže chceme aby čo najmenej z tohto portfólia bolo alokované u rizikových klientov, naša účelová funkcia bude v minimalizačnom tvare a bude v nasledovnom tvare:

$$\text{Minimize } Z = 9\,361\,376\,000x_1 + 1\,422\,176\,000x_2 + 5\,081\,646\,000x_3$$

Formácia ohraničení:

Účelová funkcia bude subjektom nasledovných ohraničení:

- Podľa empirických dát, banka necháva aspoň 11% hypotekárnych úverov aby bola vydaná pre kreditne rizikových klientov.
 $x_1 \geq 1\,029\,190\,000$ (11% z 9 361 376 000) (Slovenská sporiteľňa, 2022)
- Podľa empirických dát banka alokuje najmenej 23% zo svojich zdrojov v spotrebných úveroch do rizikových klientov.
 $x_2 \geq 328\,187\,000$ (23% z 1 422 176 000) (Slovenská sporiteľňa, 2022)
- Aby firmy mali dostupné zdroje na investíciu, najmenej 23% Korporáčnych úverov sú vydané pre firmy ktoré sú klasifikované ako kreditne rizikové.
 $x_3 \geq 1\,151\,086\,000$ (23% z 5 081 646 000) (Slovenská sporiteľňa, 2022)
- Predpokladáme že banka pokračuje v tendencii a alokuje viac do rizikových segmentov ako v minulom roku, a dá 2 600 000 000€ zo svojich zdrojov do rizikových segmentov. (Slovenská sporiteľňa, 2022)
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\,600\,000\,000$

S týmito ohraničeniami naša funkcia zatiaľ vyzerá nasledovne:

$$\text{Minimize } Z = 9\,361\,376\,000x_1 + 1\,422\,176\,000x_2 + 5\,081\,646\,000x_3$$

$$s. t.: x_1 \geq 1\,029\,190\,000$$

$$x_2 \geq 328\,187\,000$$

$$x_3 \geq 1\,151\,086\,000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\,600\,000\,000$$

Štandardný tvar

Keďže pre simplexovú metódu potrebujeme tento model v maximalizačnom tvare, vytvoríme duál tohto modelu, po formovaní tento model bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 1\,029\,190\,000u_1 + 328\,187\,000u_2 + 1\,151\,086\,000u_3 + 2\,600\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 \leq 9\,361\,376\,000$$

$$u_2 + u_4 \leq 1\,422\,176\,000$$

$$u_3 + u_4 \leq 5\,081\,464\,000$$

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, u_4 > 0$$

Určenie doplnkových premenných.

Aby sme mohli vytvoriť prvú tabuľku, pridáme doplnkové premenné. s_1, s_2, s_3 . Aby sme dostali ohraničenia do stavu rovnosti. Náš model bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 1\,029\,190\,000u_1 + 328\,187\,000u_2 + 1\,151\,086\,000u_3 + 2\,600\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 + s_1 = 9\,361\,376\,000$$

$$u_2 + u_4 + s_2 = 1\,422\,176\,000$$

$$u_3 + u_4 + s_3 = 5\,081\,464\,000$$

Vytvorenie tabuľky

12. Tabuľka iniciálna simplexová tabuľka Slovenská sporiteľňa

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	0	1	1	0	0	9 361 376 000
0	1	0	1	0	1	0	1 422 176 000
0	0	1	1	0	0	1	5 081 464 000
-1029190000	-328187000	-115086000	-2 600 000 000	0	0	0	0

Zdroj: vlastné spracovanie

13. Tabuľka druhá simplexová tabuľka Slovenská sporiteľňa

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-1	0	0	1	-1	0	7939200000
0	1	0	1	0	1	0	1 422 176 000
0	-1	1	0	0	-1	1	3659288000
-1029190000	-2271813000	-1151086000	0	0	2600000000	0	3697657600000000000

Zdroj: vlastné spracovanie

14. Tabuľka tretia simplexová tabuľka Slovenská sporiteľňa

u_1	u_2	u	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-1	0	0	1	-1	0	7939200000
0	1	0	1	0	1	0	1422176000
0	-1	1	0	0	-1	1	3659288000
-1029190000	1120727000	0	0	0	1448914000	1151086000	7909812786768000000

Zdroj: vlastné spracovanie

15. Tabuľka Konečná simplexová tabuľka Slovenská sporiteľňa

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	-1	0	0	1	-1	0	7939200000
0	1	0	1	0	1	0	1422176000
0	-1	1	0	0	-1	1	3659288000
0	91537000	0	0	1029190000	419724000	1151086000	16080758034768000000

Zdroj: vlastné spracovanie

Identifikácia optimálnych hodnôt

Výsledky duálneho modelu vidíme v stĺpci vpravo, nás však zaujímajú doplnkové premenné tejto funkcie, ich hodnoty sú výsledkom originálnej funkcie.

Kde: $x_1 = 1029190000$

$x_2 = 419724000$

$x_3 = 1151086000$

Keď tieto výsledky vložíme do primárnej funkcie, dostaneme : $9\,361\,376\,000 \cdot 1029190000 + 1\,422\,176\,000 \cdot 419724000 + 5\,081\,646\,000 \cdot 1151086000 = 16080758034768000000$ čo nám ukazuje že maximálna hodnota P sa rovná minimálnej hodnote z. Toto nám ukazuje že môžeme uznať výsledky duálnej funkcie ako korektné.

Interpretácia výsledkov

Výsledky nám ukazujú že ak sa banka rozhodne podľa týchto kritérií rozdeliť svoje portfólio mala by vydať 1029190000€ hypotekárnych úverov pre kreditne rizikových klientov. Tak isto nám ukazuje že banka by mohla uľahčiť kritériá na vydanie spotrebných úverov, keďže doterajšia politika ju ustanovila okolo 328187000€ ako sumu v rizikovom segmente. Algoritmus však pri daných plánoch nám ukazuje že optimálna suma v rizikovom segmente by bolo 419724000€. Optimálna hodnota pre Korporačných úverov u rizikových klientov bude 1151086000€. Banka aby spĺňala svoje zadané ciele v takomto prípade by mala alokovať do rizikových segmentov: 11% hypotekárnych úverov, 29,5% spotrebných úverov a 23% z Korporačných úverov.

3.4. Výpočty ČSOB

Formovanie Modelu

Rôzne označenia a premenné, ktoré budú použité pri vytváraní modelu, sú definované nasledovne:

Definícia rozhodovacích premenných

Rozhodovacie premenné sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke:

16. Tabuľka Skúmané úvery ČSOB

	Typ úveru	Zdroj úveru	Rizikové
1	hypotekárni úver	ČSOB	x_1
2	Korporačné úvery	ČSOB	x_2
3	spotrebné úvery	ČSOB	x_3

Zdroj: vlastné spracovanie

Kde:

x_1 je percento rizikových úverov alokované v rizikových hypotekárnych úverov.

x_2 je percento rizikových úverov alokované v rizikových korporáčnych úverov.

x_3 je percento rizikových úverov alokované v rizikových spotrebných úverov.

17. Tabuľka Množstvo peňažného kapitálu v danom type úveru ČSOB

	Zdroj úveru	Typ úveru	Hrubá účtovná hodnota	Rizikové
1	ČSOB	Hypotekárni úver	4 883 909 000	x_1
2	ČSOB	Korporačné úvery	2 035 901 000	x_2
3	ČSOB	Spotrebné úvery	298 277 000	x_3

Zdroj: (Československá obchodná banka, 2022)

Kde:

Československá obchodná banka, a. s. v roku 2021 mala vo svojom kreditnom portfóliu alokovaných 4 883 909 000€ v hypotekárnych úveroch, 2 035 901 000€ v Korporačných úveroch a 298 277 000€ v spotrebných úveroch.

Formácia účelovej funkcie:

Keďže chceme aby čo najmenej z tohto portfólia bolo alokované u rizikových klientov, naša účelová funkcia bude v minimalizačnom tvare a bude vyzeráť nasledovne:

$$\text{Minimize } Z = 4\,883\,909\,000x_1 + 2\,035\,901\,000x_2 + 298\,277\,000x_3$$

Formácia ohraničení:

Účelová funkcia bude subjektom nasledovných ohraničení:

- Podľa empirických dát, banka necháva aspoň 36% hypotekárnych úverov aby bola vydaná pre kreditne rizikových klientov. (Československá obchodná banka, 2022)
 $x_1 \geq 1\,758\,207\,240$ (36% z 4 883 909 000)
- Aby firmy mali dostupné zdroje na investíciu, najmenej 77% Korporačných úverov sú vydané pre firmy ktoré sú podľa banky klasifikované ako rizikové. (Československá obchodná banka, 2022)
 $x_2 \geq 1\,567\,643\,770$ (77% z 2 035 901 000)
- Podľa empirických dát banka alokuje najmenej 63% zo svojich zdrojov v spotrebných úveroch do rizikových klientov. (Československá obchodná banka, 2022)
 $x_3 \geq 187\,914\,510$ (63% z 298 277 000)
- Predpokladáme že banka pokračuje v tendencii a alokuje viac do rizikových segmentov ako v minulom roku, a dá 4 000 000 000€ zo svojich zdrojov do rizikových segmentov. (Československá obchodná banka, 2022)
 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 4\,000\,000\,000$

S týmito ohraničeniami naša funkcia zatiaľ vyzerá nasledovne:

$$\text{Minimize } Z = 4\,883\,909\,000x_1 + 2\,035\,901\,000x_2 + 298\,277\,000x_3$$

$$\text{s. t.: } x_1 \geq 1\,758\,207\,240$$

$$x_2 \geq 1\,567\,643\,770$$

$$x_3 \geq 187\,914\,510$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4\,000\,000\,000$$

Štandardný tvar

Keďže pre simplexovú metódu potrebujeme tento model v maximalizačnom tvare, vytvoríme duál tohto modelu, po formovaní tento model bude vyzeráť nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 1\,758\,207\,240u_1 + 1\,567\,643\,770u_2 + 187\,914\,510u_3 + 4\,000\,000\,000u_4$$

$$\text{s. t.: } u_1 + u_4 \leq 4\,883\,909\,000$$

$$u_2 + u_4 \leq 2\,035\,901\,000$$

$$u_3 + u_4 \leq 298\,277\,000$$

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, u_4 > 0$$

Určenie doplnkových premenných

Aby sme mohli vytvoriť prvú tabuľku, pridáme doplnkové premenné s_1, s_2, s_3 . Aby sme dostali ohraničenia do stavu rovnosti. Náš model bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 1\,758\,207\,240u_1 + 1\,567\,643\,770u_2 + 187\,914\,510u_3 + 4\,000\,000\,000u_4$$

$$s.t.: u_1 + u_4 + s_1 = 4\,883\,909\,000$$

$$u_2 + u_4 + s_2 = 2\,035\,901\,000$$

$$u_3 + u_4 + s_3 = 298\,277\,000$$

Vytvorenie tabuľky

18. Tabuľka iniciálna simplexová tabuľka CSOB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	0	1	1	0	0	4883909000
0	1	0	1	0	1	0	2035901000
0	0	1	1	0	0	1	298277000
-1758207240	-1567643770	-187914510	-4000000000	0	0	0	0

Zdroj: vlastné spracovanie

19. Tabuľka druhá simplexová tabuľka ČSOB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4585632000
0	1	-1	0	0	1	-1	1737624000
0	0	1	1	0	0	1	298277000
-1758207240	-1567643770	3812085490	0	0	0	4000000000	1193108000000000000

Zdroj: vlastné spracovanie

20. Tabuľka tretia simplexová tabuľka ČSOB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4585632000
0	1	-1	0	0	1	-1	1737624000
0	0	1	1	0	0	1	298277000
0	-1567643770	2053878250	0	1758207240	0	2241792760	9255599382375680000

Zdroj: vlastné spracovanie

21. Tabuľka konečná simplexová tabuľka ČSOB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4585632000
0	1	-1	0	0	1	-1	1737624000
0	0	1	1	0	0	1	298277000
0	1	486234480	0	1758207240	1567643770	674148990	11979574820578160000

Zdroj: vlastné spracovanie

Identifikácia optimálnych hodnôt

Výsledky duálneho modelu vidíme v stĺpci vpravo, nás však zaujímajú doplnkové premenné tejto funkcie, ich hodnoty sú výsledkom originálnej funkcie.

Kde: $x_1 = 1758207240$

$x_2 = 1567643770$

$x_3 = 674148990$

Keď tieto výsledky vložíme do primárnej funkcie, dostaneme : $4\,883\,909\,000 \cdot 1758207240 + 2\,035\,901\,000 \cdot 1567643770 + 298\,277\,000 \cdot 674148990 = 11979574820578160000$ čo nám ukazuje že maximálna hodnota P sa rovná minimálnej hodnote z. Toto nám ukazuje že môžeme uznať výsledky duálnej funkcie ako korektné.

Interpretácia výsledkov

Výsledky nám ukazujú že ak sa banka rozhodne podľa týchto kritérií rozdeliť svoje portfólio mala by vydať 17582072400€ v hypotekárnych úverov pre kreditne rizikových klientov. Optimálna suma v rizikovom segmente Korporačných úverov bude 1567643770€. Tak isto nám ukazuje že banka by mohla uľahčiť kritériá na vydanie spotrebných úverov, keďže doterajšia politika ju ustanovila okolo 187914510€ ako sumu v rizikovom segmente. Algoritmus však pri daných plánoch nám ukazuje že optimálna suma v rizikovom segmente by bolo 674148990€.

3.5.Výpočty VUB

Formovanie Modelu

Rôzne označenia a premenné, ktoré budú použité pri vytváraní modelu, sú definované nasledovne:

Definícia rozhodovacích premenných

Rozhodovacie premenné sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke:

22. Tabuľka Skúmané úvery VUB

	Typ úveru	Zdroj úveru	Rizikové
1	hypotekárni úver	VUB	x_1
2	Korporačné úvery	VUB	x_2
3	spotrebné úvery	VUB	x_3

Zdroj: vlastné spracovanie

Kde:

x_1 je percento rizikových úverov alokované v rizikových hypotekárnych úverov.

x_2 je percento rizikových úverov alokované v rizikových korporačných úverov.

x_3 je percento rizikových úverov alokované v rizikových spotrebných úverov.

23. Tabuľka Množstvo peňažného kapitálu v danom type úveru VUB

	Zdroj úveru	Typ úveru	Hrubá účtovná hodnota	Rizikové
1	VUB	Hypotekárni úver	8 613 914 000	x_1
2	VUB	Korporačné úvery	5 189 319 000	x_2
3	VUB	Spotrebné úvery	1 359 558 000	x_3

Zdroj: (VÚB, 2022)

Kde: Všeobecná obchodná banka, a. s. v roku 2021 mala vo svojom kreditnom portfóliu alokovaných 8 613 914 000€ v hypotekárnych úveroch, 5 189 319 000€ v Korporačných úveroch a 1 359 558 000€ v spotrebných úveroch. (VÚB, 2022)

Formácia účelovej funkcie:

Keďže chceme aby čo najmenej z tohto portfólia bolo alokované u rizikových klientov, naša účelová funkcia bude v minimalizačnom tvare a bude v nasledovnom tvare:

$$\text{Minimize } Z = 8\,613\,914\,000x_1 + 5\,189\,319\,000x_2 + 1\,359\,558\,000x_3$$

Formácia ohraničení:

Účelová funkcia bude subjektom nasledovných ohraničení:

- Podľa empirických dát, banka necháva aspoň 11% hypotekárnych úverov aby bola vydaná pre kreditne rizikových klientov. (VÚB, 2022)

$$x_1 \geq 947\,530\,540 \text{ (11\% z } 8\,613\,914\,000\text{)}$$

- Aby firmy mali dostupné zdroje na investíciu, najmenej 53% Korporačných úverov sú vydané pre firmy ktoré sú kategorizované ako rizikové. (VÚB, 2022)

$$x_2 \geq 2\,750\,339\,070 \text{ (53\% z } 5\,189\,319\,000\text{)}$$

- Podľa empirických dát banka alokuje najmenej 21% zo svojich zdrojov v spotrebných úveroch do rizikových klientov. (VÚB, 2022)

$$x_3 \geq 285\,507\,180 \text{ (21\% z } 1\,359\,558\,000\text{)}$$

- Predpokladáme že banka v budúcom roku plánuje alokovať 4 200 000 000€ zo svojich zdrojov do rizikových segmentov. (VÚB, 2022)

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4\,200\,000\,000$$

S týmito ohraničeniami naša funkcia zatiaľ vyzerá nasledovne:

$$\text{Minimize } Z = 8\,613\,914\,000x_1 + 5\,189\,319\,000x_2 + 1\,359\,558\,000x_3$$

$$s. t.: x_1 \geq 947\,530\,540$$

$$x_2 \geq 2\,750\,339\,070$$

$$x_3 \geq 285\,507\,180$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4\,200\,000\,000$$

Štandardný tvar

Keďže pre simplexovú metódu potrebujeme tento model v maximalizačnom tvare, vytvoríme duál tohto modelu, po formovaní tento model bude vyzeráť nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 947\,530\,540u_1 + 2\,750\,339\,070u_2 + 285\,507\,180u_3 + 4\,200\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 \leq 8\,613\,914\,000$$

$$u_2 + u_4 \leq 5\,189\,319\,000$$

$$u_3 + u_4 \leq 1\,359\,558\,000$$

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, u_4 > 0$$

Určenie doplnkových premenných

Aby sme mohli vytvoriť prvú tabuľku, pridáme doplnkové premenné s_1, s_2, s_3 . Aby sme dostali ohraničenia do stavu rovnosti. Naš model bude vyzeráť nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 947\,530\,540u_1 + 2\,750\,339\,070u_2 + 285\,507\,180u_3 + 4\,200\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 + s_1 = 8\,613\,914\,00$$

$$u_2 + u_4 + s_2 = 5\,189\,319\,000$$

$$u_3 + u_4 + s_3 = 1\,359\,558\,00$$

Vytvorenie tabuľky

24. Tabuľka iniciálna simplexová tabuľka VUB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	0	1	1	0	0	8613914000
0	1	0	1	0	1	0	5189319000
0	0	1	1	0	0	1	1359558000
-947530540	-2750339070	-285507180	-4200000000	0	0	0	0

Zdroj: vlastné spracovanie

25. Tabuľka druhá simplexová tabuľka VUB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	8613914000
0	1	-1	0	0	1	-1	5189319000
0	0	1	1	0	0	1	1359558000
-947530540	-2750339070	3914492820	0	0	0	4200000000	5710143600000000000

Zdroj: vlastné spracovanie

26. Tabuľka tretia simplexová tabuľka VUB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	7254356000
0	1	-1	0	0	1	-1	3829761000
0	0	1	1	0	0	1	1359558000
-947530540	0	1164153750	0	0	2750339070	1449660930	1624328490706227000 0

Zdroj: vlastné spracovanie

27. Tabuľka konečná simplexová tabuľka VUB

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	7254356000
0	1	-1	0	0	1	-1	3829761000
0	0	1	1	0	0	1	1359558000
0	0	216623210	0	947530540	2750339070	502130390	2311700876509451000 0

Zdroj: vlastné spracovanie

Identifikácia optimálnych hodnôt

Výsledky duálneho modelu vidíme v stĺpci vpravo, nás však zaujímajú doplnkové premenné tejto funkcie, ich hodnoty sú výsledkom originálnej funkcie.

Kde: $x_1 = 947530540$

$x_2 = 2750339070$

$x_3 = 502130390$

Keď tieto výsledky vložíme do primárnej funkcie, dostaneme : $8\,613\,914\,000 \cdot 947530540 + 5\,189\,319\,000 \cdot 2750339070 + 1\,359\,558\,000 \cdot 502130390 = 23117008765094510000$ čo nám ukazuje že maximálna hodnota P sa rovná minimálnej hodnote z. Toto nám ukazuje že môžeme uznať výsledky duálnej funkcie ako korektné.

Interpretácia výsledkov

Výsledky nám ukazujú že ak sa banka rozhodne podľa týchto kritérií rozdeliť svoje portfólio mala by vydať 947530540€ v hypotekárnych úverov pre kreditne rizikových klientov. Optimálna suma v rizikovom segmente Korporačných úverov bude 2750339070€. Tak isto nám ukazuje že banka by mohla uľahčiť kritériá na vydanie spotrebných úverov, keďže doterajšia politika ju ustanovila okolo 285507180€ ako sumu v rizikovom segmente. Algoritmus však pri daných plánoch nám ukazuje že optimálna suma v rizikovom segmente by bolo 502130390€. Banka aby splňala svoje zadané ciele v takomto prípade by mala alokovať do rizikových segmentov: 11% hypotekárnych úverov, 53% z Korporačných úverov a 36% spotrebných úverov.

3.6. Výpočty Tatra banka

Formovanie Modelu

Rôzne označenia a premenné, ktoré budú použité pri vytváraní modelu, sú definované nasledovne:

Definícia rozhodovacích premenných

Rozhodovacie premenné sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke:

28. Tabuľka skúmané úvery Tatra

	Typ úveru	Zdroj úveru	Rizikové
1	hypotekárni úver	Tatra	x_1
2	Korporátne úvery	Tatra	x_2
3	spotrebné úvery	Tatra	x_3

Zdroj: vlastné spracovanie

Kde:

x_1 je percento rizikových úverov alokované v rizikových hypotekárnych úverov.

x_2 je percento rizikových úverov alokované v rizikových korporáčných úverov.

x_3 je percento rizikových úverov alokované v rizikových spotrebných úverov.

29. Tabuľka Množstvo peňažného kapitálu v danom type úveru Tatra

	Zdroj úveru	Typ úveru	Hrubá účtovná hodnota	Rizikové
1	Tatra	Hypotekárni úver	5 147 770 000	x_1
2	Tatra	Korporátné úvery	4 598 255 000	x_2
3	Tatra	Spotrebné úvery	768 909 000	x_3

Zdroj: (Tatra, 2022)

Kde: Tatra banka, a. s. v roku 2021 mala vo svojom kreditnom portfóliu alokovaných 5 147 770 000€ v hypotekárnych úveroch, 4 598 255 000€ v Korporáčných úveroch a 768 909 000€ v spotrebných úveroch. (Tatra, 2022)

Formácia účelovej funkcie:

Keďže chceme aby čo najmenej z tohto portfólia bolo alokované u rizikových klientov, naša účelová funkcia bude v minimalizačnom tvare a bude v nasledovnom tvare:

$$\text{Minimize } Z = 5\,147\,770\,000x_1 + 4\,598\,255\,000x_2 + 768\,909\,000x_3$$

Formácia ohraničení:

Účelová funkcia bude subjektom nasledovnými ohraničeniami:

- Podľa empirických dát, banka necháva aspoň 10% hypotekárnych úverov aby bola vydaná pre kreditne rizikových klientov. (Tatra, 2022)
 $x_1 \geq 514\,777\,000$ (10% z 5 147 770 000)
- Aby firmy mali dostupné zdroje na investíciu, najmenej 50% Korporátných úverov sú vydané pre firmy ktoré banka posúdila ako rizikové. (Tatra, 2022)
 $x_2 \geq 2\,299\,127\,500$ (50% z 4 598 255 000)
- Podľa empirických dát banka alokuje najmenej 20% zo svojich zdrojov v spotrebných úveroch do rizikových klientov. (Tatra, 2022)
 $x_3 \geq 153\,781\,800$ (20% z 768 909 000)
- Predpokladáme že banka v budúcom roku plánuje alokovať 3 200 000 000€ do hore uvedených rizikových segmentov. (Tatra, 2022)

S týmito ohraničeniami naša funkcia zatiaľ vyzerá nasledovne:

$$\text{Minimize } Z = 5\,147\,770\,000x_1 + 4\,598\,255\,000x_2 + 768\,909\,000x_3$$

$$s. t.: x_1 \geq 514\,777\,000$$

$$x_2 \geq 2\,299\,127\,500$$

$$x_3 \geq 153\,781\,800$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\,200\,000\,000$$

Štandardný tvar

Keďže pre simplexovú metódu potrebujeme tento model v maximalizačnom tvare, vytvoríme duál tohto modelu, po formovaní tento model bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 514\,777\,000u_1 + 2\,299\,127\,500u_2 + 153\,781\,800u_3 + 3\,200\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 \leq 5\,147\,770\,000$$

$$u_2 + u_4 \leq 4\,598\,255\,000$$

$$u_3 + u_4 \leq 768\,909\,000$$

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 > 0, u_4 > 0$$

Určenie doplnkových premenných

Aby sme mohli vytvoriť prvú tabuľku, pridáme doplnkové premenné s_1, s_2, s_3 . Aby sme dostali ohraničenia do stavu rovnosti. Náš model bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Maximize } P = 514\,777\,000u_1 + 2\,299\,127\,500u_2 + 153\,781\,800u_3 + 3\,200\,000\,000u_4$$

$$s. t.: u_1 + u_4 + s_1 \leq 5\,147\,770\,000$$

$$u_2 + u_4 + s_2 \leq 4\,598\,255\,000$$

$$u_3 + u_4 + s_3 \leq 768\,909\,000$$

Vytvorenie prvej tabuľky

30. Tabuľka iníciaľna simplexová tabuľka Tatra

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	0	1	1	0	0	5147770000
0	1	0	1	0	1	0	4598255000
0	0	1	1	0	0	1	768909000
-514777000	-2299127500	-153781800	-3200000000	0	0	0	0

Zdroj: vlastné spracovanie

31. Tabuľka druhá simplexová tabuľka Tatra

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4378861000
0	1	-1	0	0	1	-1	3829346000
0	0	1	1	0	0	1	768909000
-514777000	-2299127500	3046218200	0	0	0	3200000000	2460508800000000000

Zdroj: vlastné spracovanie

32. Tabuľka tretia simplexová tabuľka Tatra

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4378861000
0	1	-1	0	0	1	-1	3829346000
0	0	1	1	0	0	1	768909000
-514777000	0	747090700	0	0	2299127500	900872500	1126466349561500000 0

Zdroj: vlastné spracovanie

33. Tabuľka konečná simplexová tabuľka Tatra

u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	RHS
1	0	-1	0	1	0	-1	4378861000
0	1	-1	0	0	1	-1	3829346000
0	0	1	1	0	0	1	768909000
0	0	232313700	0	514777000	2299127500	386095500	1351880042461200000 0

Zdroj: vlastné spracovanie

Identifikácia optimálnych hodnôt

Výsledky duálneho modelu vidíme v stĺpci vpravo, nás však zaujímajú doplnkové premenné tejto funkcie, ich hodnoty sú výsledkom originálnej funkcie.

Kde: $x_1 = 514777000$

$x_2 = 2299127500$

$x_3 = 386095500$

Keď tieto výsledky vložíme do primárnej funkcie, dostaneme : $5\,147\,770\,000 \cdot 514777000 + 4\,598\,255\,000 \cdot 2299127500 + 768\,909\,000 \cdot 386095500 = 1351880042461200000$ čo nám ukazuje že maximálna hodnota P sa rovná minimálnej hodnote z. Toto nám ukazuje že môžeme uznať výsledky duálnej funkcie ako korektné.

Interpretácia výsledkov

Výsledky nám ukazujú že ak sa banka rozhodne podľa týchto kritérií rozdeliť svoje portfólio mala by vydať 514777000€ v hypotekárnych úverov pre kreditne rizikových klientov. Optimálna suma v rizikovom segmente Korporátnych úverov bude 2299127 500€. Tak isto

nám ukazuje že banka by mohla uľahčiť kritériá na vydanie spotrebných úverov, keďže doterajšia politika ju ustanovila okolo 153781800€ ako sumu v rizikovom segmente. Algoritmus však pri daných plánoch nám ukazuje že optimálna suma v rizikovom segmente by bolo 386095500€. Banka aby spĺňala svoje zadané ciele v takomto prípade by mala alokovať do rizikových segmentov: 10% hypotekárnych úverov, 50% z Korporátnych úverov a 50% spotrebných úverov.

4. Technológie a implementácia

V tejto časti práce opíšeme jednotlivé technológie, ktoré sme na implementáciu programu potrebovali a využívali. Existuje množstvo programovacích jazykov v ktorých by sa dalo tento program napísať. Ja som si vybral jazyk R a prostredie R studio, s ktorým som sa zoznámil počas môjho štúdia.

4.1. RStudio

RStudio je integrované vývojové prostredie (IDE), ktoré bolo vyvinuté pre programovanie v jazyku R. R je bezplatné a open source softvérové prostredie, ktoré umožňuje analýzu štatistických dát, tvorbu grafiky a vizualizácií, spracovanie dát, strojové učenie a simulácie. RStudio umožňuje písanie, editovanie a vykonávanie R kódu v jednom rozhraní. Program ponúka rad užitočných funkcií, ako napríklad automatické dopĺňanie kódu, automatické formátovanie, ladenie kódu, vizualizácie dát a tvorbu interaktívnych dokumentov. RStudio je jednoduché na používanie a ľahko prispôsobiteľné, takže vyhovuje pre náš cieľ. RStudio je veľmi populárny nástroj v akademickom svete a aj v priemysle mnoho odborníkov ho používa na efektívnu analýzu dát a modelovanie.

4.2. Jazyk R

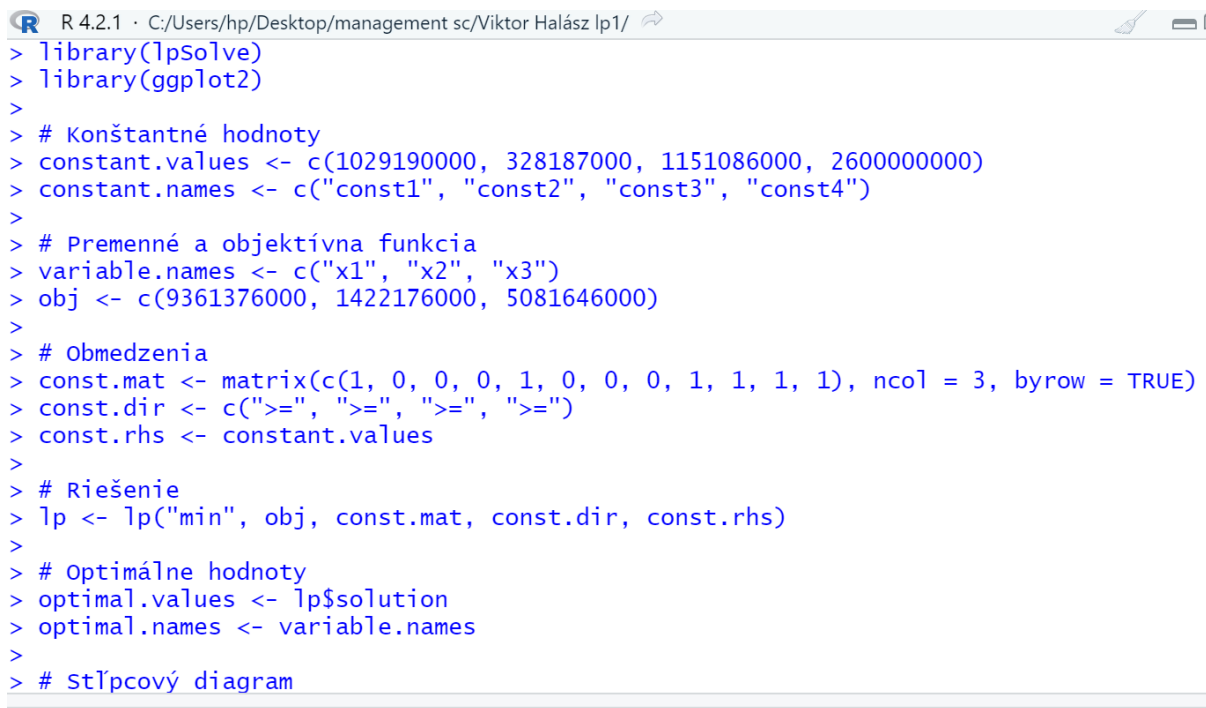
R je open-source programovací jazyk a programovacie prostredie, ktoré bolo navrhnuté špeciálne pre štatistickú a analýzu dát. Jazyk je veľmi populárny v komunite analytikov a má mnoho výhod, ako napríklad veľké množstvo rozšírených knižníc, skvelé grafické schopnosti a interaktívne analýzy. Jazyk R umožňuje spracovanie a manipuláciu s dátami, štatistické modelovanie a vizualizáciu. Použitím R môžu používatelia čítať a zapisovať mnoho rôznych formátov dát, vrátane CSV, XLS a SQL databáz. R a RStudio spolu tvoria silný a flexibilný nástrojový kufr pre analýzu dát a modelovanie.

4.3. Implementácia

Implementácia programu bola realizovaná pre dáta banky Slovenská sporiteľňa, Navrhnutý program rieši zadané úlohy simplexovou metódou, pričom používa balík lpSolve, ktorý umožňuje používanie knižnice Lineárneho Programovania. Táto knižnica poskytuje funkcie na riešenie lineárnych programov a celočíselných lineárnych programov. Balík ggplot2 slúži

na vizualizáciu dát pomocou rôznych druhov grafov, napríklad stĺpcových grafov alebo bodových grafov

4.4.Algoritmus



```
R 4.2.1 · C:/Users/hp/Desktop/management sc/Viktor Halász lp1/
> library(lpSolve)
> library(ggplot2)
>
> # Konštantné hodnoty
> constant.values <- c(1029190000, 328187000, 1151086000, 2600000000)
> constant.names <- c("const1", "const2", "const3", "const4")
>
> # Premenné a objektívna funkcia
> variable.names <- c("x1", "x2", "x3")
> obj <- c(9361376000, 1422176000, 5081646000)
>
> # Obmedzenia
> const.mat <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), ncol = 3, byrow = TRUE)
> const.dir <- c(">=", ">=", ">=", ">=")
> const.rhs <- constant.values
>
> # Riešenie
> lp <- lp("min", obj, const.mat, const.dir, const.rhs)
>
> # Optimálne hodnoty
> optimal.values <- lp$solution
> optimal.names <- variable.names
>
> # Stĺpcový diagram
```

2. Obrázok algoritmus 1.

Zdroj: Vlastné spracovanie

- Riadky `library(lpSolve)` a `library(ggplot2)` funkcie načítavajú do pracovného prostredia R dva balíky s názvami `lpSolve` a `ggplot2`. Balík `lpSolve` obsahuje rôzne funkcie na riešenie lineárnych a celočíselných programov pomocou simplexového algoritmu a algoritmu celočíselného programovania. Balík `ggplot2` poskytuje funkcie pre vizualizáciu dát v R.
- V nasledujúcich riadkoch program definuje vektory `constant.values` a `constant.names`, ktoré obsahujú dané ohraničenia účelovej funkcie.
- Nasledujúci krok je definovať objektívnu funkciu modelu. Premenné sú definované vektorom `variable.names`, ktorý obsahuje názvy premenných "x1", "x2" a "x3". Objektívna funkcia modelu je definovaná vektorom `obj`, ktorý obsahuje koeficienty jednotlivých premenných v objektívnej funkcii, a to v poradí "x1", "x2" a "x3".
- `const.mat` vytvára maticu, ktorá obsahuje koeficienty premenných x1, x2 a x3 v každom z ohraničení. Parameter `ncol` určuje počet stĺpcov matice a v tomto prípade je

nastavený na hodnotu 3, pretože máme tri premenné x_1 , x_2 , x_3 . Parameter `byrow` nastavuje, že prvky matice sú usporiadané riadkovo. To znamená, že prvých 3 prvkov bude tvoriť prvý riadok matice, ďalších 3 prvkov druhý riadok a tak ďalej, až kým sa nenaplní celá matica.

- `const.dir` určuje typ ohraničenia pre každý riadok zodpovedajúci vektor `const.mat`. V tomto prípade sú všetky ohraničenia typu "väčšie alebo rovné" (" $\geq$ ").
- `const.rhs` obsahuje hodnoty na pravej strane každého ohraničenia. Tento vektor obsahuje hodnoty z konštantných hodnôt definovaných v prvom riadku a definuje, aká hodnota by mala byť aspoň pre každé ohraničenie., aby bolo splnené.
- Funkcia `lp()` z balíka `lpSolve` je funkcia, ktorá umožňuje riešiť lineárne programovanie. Jej základným účelom je nájsť optimálne hodnoty pre objektívnu funkciu, za predpokladu, že sú splnené všetky ohraničenia. Funkcia `lp()` vytvára objekt lineárneho programu a rieši ho s cieľom minimalizovať objektívnu funkciu (" $\min$ "). `lp()` prijíma argumenty `obj` (hodnoty objektívnej funkcie), `const.mat` (maticu koeficientov ohraničení), `const.dir` (vektor smerov ohraničení) a `const.rhs` (vektor pravých strán ohraničení). Tento riadok vráti výsledky riešenia vo forme objektu. algoritmus potom priradí výsledky riešenia problému do premenných. `lp$solution` obsahuje optimálne hodnoty premenných, ktoré minimalizujú objektívnu funkciu, a `variable.names` sú názvy týchto premenných. Tieto hodnoty a názvy sa priradia do premenných `optimal.values` a `optimal.names`.

```
> # Optimálne hodnoty
> optimal.values <- lp$solution
> optimal.names <- variable.names
>
> # Stĺpcový diagram
> df <- data.frame(variables = c(constant.names, optimal.names),
+                   values = c(constant.values, optimal.values))
>
> ggplot(df, aes(x = variables, y = values, fill = variables)) +
+   geom_col(show.legend = FALSE) +
+   geom_text(aes(label = values), vjust = -0.3) +
+   xlab("Premenné") +
+   ylab("Hodnoty") +
+   ggtitle("Optimálne hodnoty") +
+   theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
> |
```

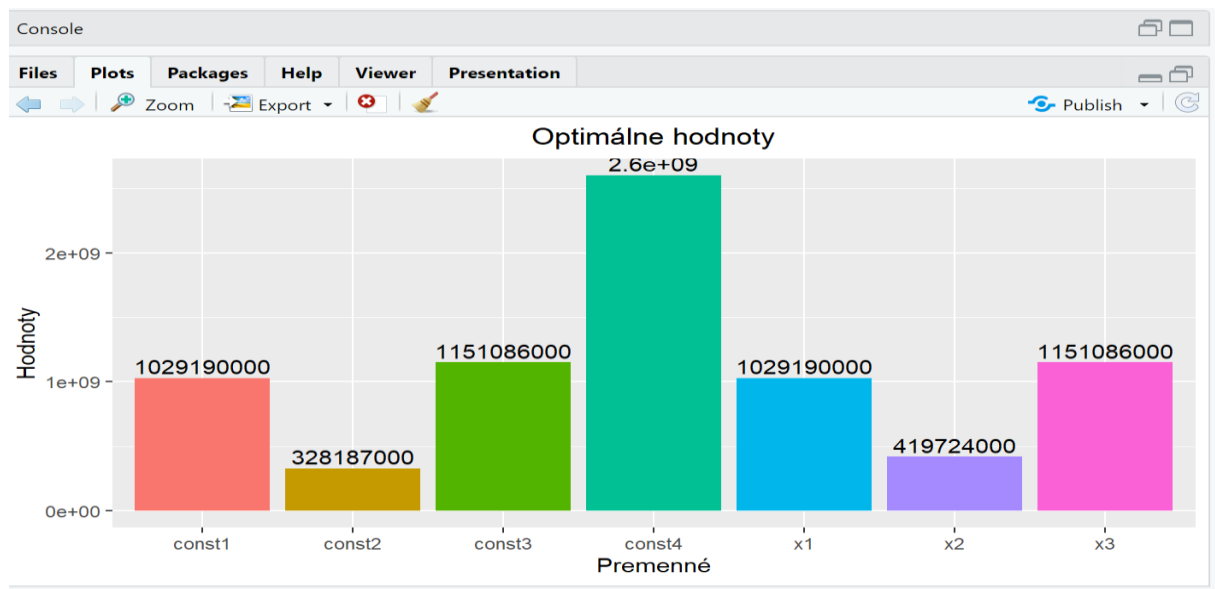
Files	Plots	Packages	Help	Viewer	Presentation	
-------	-------	----------	------	--------	--------------	--

3. Obrázok algoritmus 2.

Zdroj: vlastné spracovanie

- Potom ako algoritmus našiel optimálne hodnoty premenných, chceme ich aj graficky zobrazit'. Funkcia `data.frame` vytvára dátový rámec `df` s dvoma stĺpcami - "variables" a "values". V prvom stĺpci sa nachádzajú názvy konštánt a premenných, v druhom stĺpci sa nachádzajú hodnoty týchto konštánt a premenných. Funkcia `ggplot` nastavuje základný grafický objekt, ktorý bude neskôr modifikovaný pomocou ďalších funkcií. V tejto funkcii je definovaná dátová rámec `df` ako zdroj dát pre graf, ktorý bude vytvorený. Funkcia `aes` slúži na mapovanie stĺpcov v dátovom rámci na estetické premenné (ako sú farba, veľkosť, atď.) v grafe. Tu je premenná "variables" mapovaná na osu x, "values" na osu y a "variables" zároveň definuje farebné skupiny (fill). Funkcia `geom_col` vytvára stĺpcový graf, kde každá premenná má svoj stĺpec s výškou, ktorá zodpovedá jej hodnote. Funkcia `geom_text` pridáva popisy hodnôt do grafu, kde každá premenná má stĺpec. Táto funkcia zobrazuje hodnoty v stĺpci vyššie o 0,3 jednotky (vjust = -0,3). Funkcie `xlab` a `ylob` nastavujú popis osí x a y. Funkcia `ggtitle` nastavuje názov grafu. Funkcia `theme` definuje celkový vizuálny štýl grafu. V tomto prípade nastavuje horizontálne zarovnanie názvu grafu na stred (hjust = 0,5).

4.5. Výstupy programu



4. obrázok výstup programu Slovenská spor.
Zdroj: vlastné spracovanie

Ako vidíme program nám graficky ukáže že s danými ohraňčeniami kedy bude účelová funkcia v optimálnom stave. Daný program sa vykonal s dátami Slovenskej sporiteľne.

Tento program vychádza z primárnej funkcie :

$$\text{Minimize } Z = 9\,361\,376\,000x_1 + 1\,422\,176\,000x_2 + 5\,081\,646\,000x_3$$

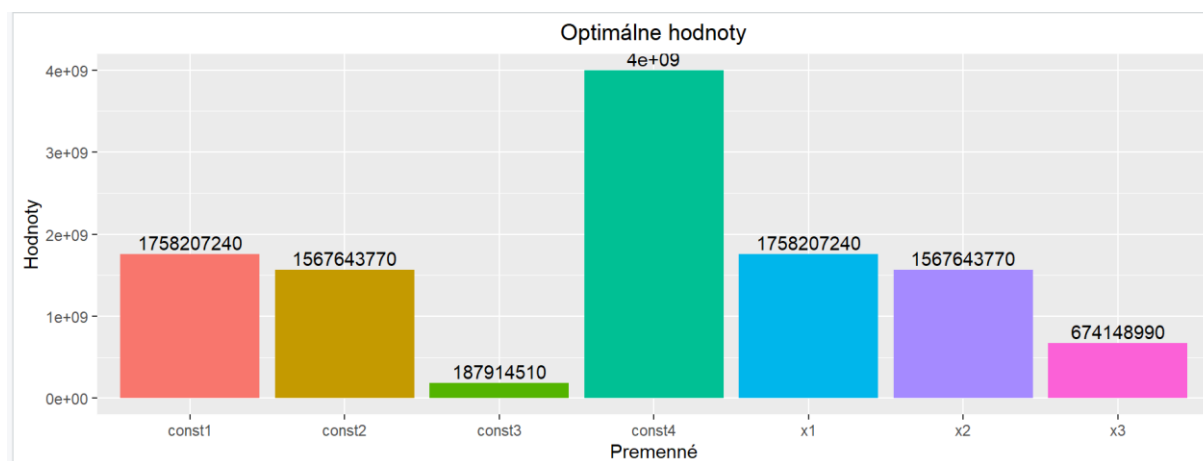
$$\text{s. t.: } x_1 \geq 1\,029\,190\,000$$

$$x_2 \geq 328\,187\,000$$

$$x_3 \geq 1\,151\,086\,000$$

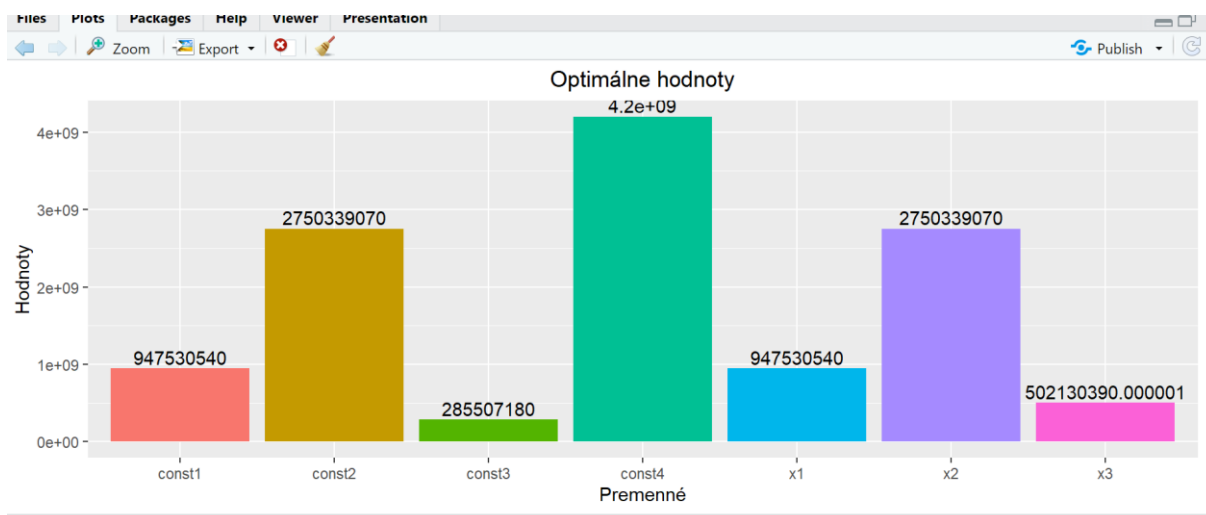
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\,600\,000\,000$$

Ako vidíme optimálne hodnoty sa zhodujú z duálnym problémom ktorý sme použili na výpočty v kapitole 3.3. Keďže sa optimálne hodnoty zhodujú aj pri primárnom a aj pri duálnom probléme môžeme tieto výpočty vnímať ako korektné.



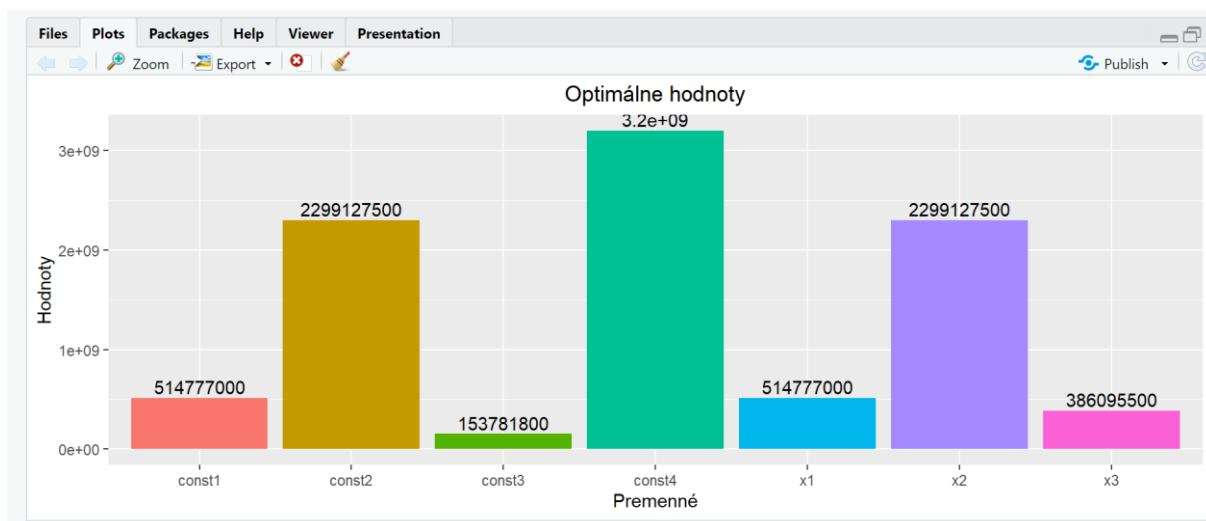
5. obrázok výstup programu čsob
zdroj: vlastné spracovanie

Na hore uvedenom obrázku vidíme výstupy programu s dátami od Československej obchodnej banky.



6. obrázok výstup programu VÚB
zdroj: vlastné spracovanie

Na hore uvedenom obrázku vidíme výstup programu s dátami od VÚB banky.



7. obrázok výstup programu Tatra banka
zdroj: vlastné spracovanie

Hore uvedení obrázok nám ukazuje graficky výstupy programu s dátami od Tatra Banky.

5. Diskusia

Rizikovým úverom sa banka nevie vyhnúť, ak chce zachovať a zlepšiť svoju pozíciu na trhu. Samozrejme banka by mohla zaviesť veľmi prísnu politiku na vydanie takýchto úverov, tým by ale stratila časť klientov a s tým aj ich úroky. Títo klienti, keďže majú dopyt pre úver, môžu prejsť ku konkurenčnej banke. Preto je dôležité, aby banka našla zlatú strednú cestu pri nastavení politiky úverov. Vidím to tak, že dôležitosť monitorovania kreditného rizika jednotlivých klientov a využitie možností zaistenia opísané v kapitole 1.2 sú kľúčovým krokom k tomu, aby banka predišla stratám kvôli nesplácaným úverom. Čím je toto monitorovanie dokonalejšie, tým lepšie vie banka posúdiť, či danému klientovi sa oplatí poskytnúť úver. Použiteľnosť lineárneho programovania však v bankovom sektore by som si skôr vedel predstaviť vo vrcholovom manažmente. Sila tohto algoritmu by sa najviac zúžitkovala pri nastavení cieľov pre ďalšie účtovné obdobie, a v rozhodovaní, na ktorý sektor sa v akej miere zamerať. Ako príklad by som uviedol hypotekárny trh: pokiaľ ceny nehnuteľností majú silno stúpajúcu tendenciu, banka sa môže rozhodnúť zadať väčšiu sumu ako ohraničenie pre rizikové úvery v tomto segmente. V praxi si to viem predstaviť tak, že zníži kritériá pre vydanie hypotekárnych úverov.

Silu simplexovej metódy vidím aj v jej využiteľnosti v prípadoch, kde treba reagovať na zmenu nejakej situácie. Autor tejto metódy, Dr. Dantzig, ju používal hlavne pre flexibilitu a jednoduchosť. Napríklad, ako rýchlu reakciu na vládnu iniciatívu podpory inovácií môže banka zaviesť úverový program špeciálne navrhnutý pre začínajúce firmy alebo technologické podniky, či reakciou na meniacu sa hospodársku situáciu môže banka upraviť svoju politiku poskytovania úverov malým podnikom. Dobrým príkladom sú pandémie alebo energetická kríza. Je logické, že dopyt o úver, hlavne menších podnikov, sa v takýchto situáciách zvýši, a banka to iniciálne môže vidieť ako potenciál pre zisk. Počas takýchto situácií však je nutné k rýchlemu vývoju hospodárskej situácie prispôbiť aj riadenie úverového portfólia. V lineárnom programovaní sa to dá rýchlo a efektívne spraviť prepísaním daných premenných alebo zavedením nových ohraničení.

Záver

Táto práca popisuje základné pojmy úverového rizika, spôsob zaistenia jednotlivých typov úverov a dôvody, pre ktoré sú jednotlivé segmenty úverov viac alebo menej vystavené riziku. Ďalej práca krátko opíše štyri najväčšie banky na slovenskom trhu, ich trhové rozdelenie a základné charakteristiky. Ďalej v tejto práci sme krátko opísali lineárne programovanie, jeho vznik, využitie a základné pojmy, v rámci lineárneho programovania sme dôslednejšie opísali samotný simplexový algoritmus. Tento algoritmus sme potom použili pre riadenie úverového portfólia komerčných bank. Pri týchto výpočtoch sme sa zamerali na tri typy úverov a z ročných výpisov jednotlivých bánk sme sa snažili vypočítať alternatívne rozdelenie na ďalší rok tak, aby tieto hodnoty boli reálne. Cieľom tejto práce bolo napísať program, ktorý je schopný na riadenie expozície kreditného rizika úverového portfólia podľa používateľom zadáných ohraničení tak, že na riadenie využíva simplexovú metódu. Keďže som pri písaní tejto práce nemal informácie o tom, do ktorých segmentov chcú jednotlivé banky investovať viac alebo menej zdrojov, vychádzal som z empirických dát expozície z minulých účtovných období z rokov 2020 a 2021. Najprv som tieto dáta vypočítal manuálne, potom som použil implementovaný program, ktorý som otestoval údajmi jednotlivých bánk. Po každom teste program graficky znázornil optimálne rozdelenie portfólia. Je to jednoznačné, že program dokáže správne počítať len ak používateľ pozná presne koľko chce investovať do jednotlivých segmentov a vie, kde chce, aby expozície boli menšie a kde môže expozícia kreditného rizika rásť. Ak však máme tieto dáta k dispozícii, lineárne programovanie môže byť relatívne ľahkým a dôveryhodným nástrojom na riešenie takýchto úloh.

Zoznam použitej literatúry

- AGARANA M. C., A. T. (7. 7 2014). APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING MODEL TO UNSECURED LOANS AND BAD DEBT RISK CONTROL IN BANKS. Department of Mathematics, College of Science and Technology, Covenant University, Ota, Ogun State, Nigeria. Dostupné na Internete: https://www.researchgate.net/publication/277567163_APPLICATION_OF_LINEAR_PROGRAMMING_MODEL_TO_UNSECURED_LOANS_AND_BAD_DEBT_RISK_CONTROL_IN_BANKS
- Československá obchodná banka, a. (2022). VÝROČNÁ SPRÁVA 2021. Bratislava. Dostupné na Internete: <https://www.csob.sk/o-nas/banka#financne-informacie>
- ČSOB. (2023). *O spoločnosti*. Dostupné na Internete: <https://www.csob.sk/o-nas/banka>
- Csernák, P. (16. 02 2022). *FINSIDER*. Dostupné na Internete: <https://www.finsider.sk/biznis/velke-zatvaranie-pobociek/>
- Dantzig, G. B. (2002). *Linear Programming*. Dostupné na Internete: <https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.50.1.42.17798>.
- HORVÁTOVÁ, E. (2 2022). Riziká hypotekárneho bankovníctva v teórii a praxi. Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, Slovenská republika. Dostupné na Internete: https://www.derivat.sk/files/casopisssssssssssssssss2022/Nove%20Pokus%20FT_2_2022_Horvatova,%20E.%20Rizika%20hypotek.%20bankovnictva.pdf?fbclid=IwAR0p5pi0NpAC3eS8nfTAJFa6Qx-kU0T5sUd2Sg4hWeOitDLVosKQYh2OA0s
- KAŠPAROVSKÁ, V. (2006). *Řízení obchodních bank*. Praha: C.H. Beck.
- Ken Brown, P. M. (02 2016). Credit Risk Management. Dostupné na Internete: <https://ebs.online.hw.ac.uk/EBS/media/EBS/PDFs/Credit-Risk-Management-Course-Taster.pdf>
- Laurel Nichols, G. C. (2015). Explanation of Simplex Method. IMSE Concept Library.
- PAVELKA, F. (2008). *Úvěrové obchody*. Praha: Bankovní institut vysoká škola, a.s.
- PINTER, L. (2010.). *Úverový proces a zabezpečovacie inštrumenty komerčných bánk*. Banská Bystrica: Ekonomická fakulta Mateja Bela.
- POLIDAR, V. (1999.). *Management bank a bankovních obchodů*. Praha: Nakladatelství Ekopress s.r.o.
- Slovenská sporiteľňa. (2023). Dostupné na Internete: <https://www.slsp.sk/sk/informacie-o-banke/o-banke/profil-banky>
- Slovenská sporiteľňa, a. (15.. februára 2022). Výročná správa 2021. Bratislava. Dostupné na Internete: https://cdn0.erstegroup.com/content/dam/sk/slsp/www_slsp_sk/documents/financne-ukazovatele/vyroczna-sprava-slovenska-sporitelna-2021.pdf
- Tatra Banka. (2023). Dostupné na Internete: <https://www.tatrabanka.sk/sk/o-banke/o-tatra-banke/>

- Tatra, B. (2022). Výročná správa 2021. Bratislava, Slovensko. Dostupné na Internet: <https://www.tatrabanka.sk/files/archiv/financne-ukazovatele/vyrocne-spravy/vyrocna-sprava-2021.pdf>
- Valenčíková, M. (apríl 2012). Vybrané krátkodobé bankové úvery. Banská Bystrica. Dostupné na Internet: https://is.ambis.cz/th/jbmbn/Bankovni_institut_vysoka_skola_Praha__zahranicna_vysoka_skola_Banska_Bystrica_2012__Michaela_Valencikova__Vybrane_kratkodobe_bankove_uvery_ewseozth.pdf?fbclid=IwAR2uiVvUtP_wgIQLW3eoWbHP5QqpH3i_h3j1AKpTkrKhjbXuX2--bOv4MYc
- VÚB, B. (2022). VÝROČNÁ SPRÁVA 2021. Dostupné na Internet: https://www.vub.sk/document/documents/VUB/kryte-dlhopisy-vub/financne-informacie/vs_2021.pdf