Ekonomická univerzita v Bratislave

Fakulta hospodárskej informatiky

Evidenčné číslo: 103006/D/2016/3780964669

Možnosti využitia simulácie Monte Carlo v aktuárstve

Diplomová práca

2016 **Bc. Lenka Rabčanová**

Ekonomická univerzita v Bratislave

Fakulta hospodárskej informatiky

Možnosti využitia simulácie Monte Carlo v aktuárstve

Diplomová práca

Študijný program:	Informačný manažment
Študijný odbor:	Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a aktuárstva
Vedúci záverečnej práce:	prof. RNDr. Ing. František Peller, CSc.
Bratislava 2015/2016	Bc. Lenka Rabčanová

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že na diplomovej práci som pracovala samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov, konzultácii a štúdia odbornej literatúry, ktorej úplný prehľad je uvedený v zozname použitej literatúry.

Bratislava, dátum

....

Titul, meno priezvisko

Poďakovanie

Ďakujem svojmu vedúcemu záverečnej práce, pánovi prof. RNDr. Ing. Františkovi Pellerovi, CSc., za jeho ochotu pri písaní záverečnej práce. A taktiež za jeho odbornú pomoc a pripomienky, vďaka ktorým sa podieľal na vytvorení mojej záverečnej práce.

Abstrakt

Bc. Rabčanová Lenka: Možnosti využitia simulácie Monte Carlo v aktuárstve. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta Hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva. – Vedúci záverečnej práce: prof. RNDr. Ing. František Peller, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2015/2016, 67s.

Cieľom záverečnej práce bolo pomocou využitia stochastických premenných v simulačnom modeli určiť také poistné pre poisťovňu v zmiešanom životnom poistení, aby pri danom poistnom produkte nebola v strate.

Záverečná práca sa skladá z troch kapitol, ktoré obsahujú podkapitoly. Práca obsahuje dva grafy, pätnásť tabuliek, osem obrázkov a dve prílohy. V prvej kapitole sme vysvetlili čo je to proces, vysvetlili sme rozdiel medzi stochastickým a deterministickým procesom, ako aj diskrétnych a spojitých rozdelení. Vysvetlili sme princíp metódy Monte Carlo a vysvetlili základné pojmy zo životného poistenia so zameraním na zmiešané životné poistenie. Opísali sme potrebnosť úmrtnostných tabuliek a princíp komutačných čísel.

Druhá kapitola charakterizuje hlavný cieľ záverečnej práce, ako aj čiastkové ciele, metodiku práce a metódy skúmania potrebné na jeho dosiahnutie.

V poslednej kapitole sme zostavili model zmiešaného životného poistenia, z ktorého sme pomocou generovania náhodných premenných ako stochastických vstupov zostrojili simuláciu. Z výslednej simulácie sme zostrojili graf, ktorý nám pomocou priemerných čistých prítomných hodnôt pri daných poistných hodnotách ukázal, v akom intervale by sa mala pohybovať výška poistného pre zmiešané životné poistenie, aby poisťovňa začala dosahovať zisk.

Kľúčové slová: proces, pravdepodobnostné rozdelenia, metóda Monte Carlo, životné poistenie, úmrtnostné tabuľky, komutačné čísla, generovanie stochastických premenných

Abstract

Bc. Rabčanová Lenka: Monte Carlo simulation in actuary science – The University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Mathematics. – Supervisor: prof. RNDr. Ing. František Peller, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2015/2016, 67s.

A primary goal of our final thesis was by using of stochastic variables in construction model simulation of mixed life insurance to define the amount of insurance premium to the insurance company where profit is reached.

The final thesis consists from three basic chapters including subchapters for each main chapter also. Thesis includes two graphs, fifteen tables, eight pictures and two appendixes. First chapter explained: the process, differences between stochastic and deterministic process and between discrete and continuous distributions too. We explained the principle of Monte Carlo method and basic terms of the life insurance with focus on mixed life insurance. We described the mortality tables importance and the principle of commutation numbers.

The second chapter characterizes the primary goal and also partial goals, methodology and methods of research which are necessary for fulfilling the primary goal.

In the last chapter, we have set up a model of mixed life insurance, from which by generating of random variables as inputs we created simulation model. From this simulation model we created a graph, which shows us using an average present net values, in connection of specified insurance events, in which interval there should be adjusted the insurance premium level for mixed life insurance to reach the profit in the end.

Keywords: process, probability distributions, Monte Carlo method, life insurance, the mortality tables, commutation numbers, generate random variables

Obsah

Úvod

Už od samotného vzniku obchodu sa podnikatelia zaoberali rizikom. V mnohých prípadoch sa však manažéri len pozreli na ich prípad konkrétneho projektu, kde uznali jeho prítomnosť a následne neriešili spôsoby jeho odstránenia. Ako najdôležitejšiu premennú v kvalifikácií rizika brali odhady ziskovosti. Ignorovanie vzájomných väzieb medzi cenami výrobkov, variabilitou nákladov a iných veličín, znižovalo presnosť modelu. Preto ich odhady prinášali často krát nesprávne výsledky.

Jedným z tradičných prístupov pre riešenie rizika a neistoty je aplikácia analýzy scenárov. Už z jej názvu vieme, že predpokladá tri scenáre – najhorší, normálny a najlepší. v tejto metóde sa tiež neriešia problémy závislosti. Preto aplikovanie niektorého z týchto troch scenárov do praxe taktiež neprináša riešenie v oblasti rizika a neistoty.

Pokrokom v meraní rizika a neistoty sa stalo zavedenie analýzy citlivosti. V tomto modeli je každá premenná vopred špecifikovaná, čo zachytí aj zmenu vo vzájomných väzbách. Tento prístup je ľahký na porozumenie a ukáže nám ktorá premenná má najväčší vplyv na model. Avšak, vykonávanie tejto analýzy je veľmi zdĺhavé a poskytuje malý prínos. Preto je najlepším riešením použitie modelu Monte Carlo, kde všetky odchýlky, scenáre a špecifiká môžu byť vykonávané stovky, až niekoľko tisíckrát automaticky.

Z tohto dôvodu sme sa aj v tejto práci rozhodli pre vykonanie modelu zmiešaného životného poistenia a na jeho analýzu využiť metódu Monte Carlo. Simulujeme v ňom premenné, ktoré sú najviac neisté, ako stochastické. Preto po vykonaní dostatočného množstva zbehnutí modelu môžeme určiť výsledky modelu s odhadnutými premennými. Simulované výsledky týchto premenných sú potom uvedené v tabuľke, kde sú následne analyzované. Výhodou metódy Monte Carlo je, že v modeli môžeme mať simulovaných viac stochastických premenných, ktoré sa môžu meniť súčasne.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V tejto kapitole sme si vysvetlili základné teoretické pojmy z oblasti simulačného modelovania a poistenia, ako aj spôsoby výpočtov vo finančnej matematike, ktoré budeme potrebovať pre jednoduchšie chápanie praktickej časti tejto diplomovej práce, v ktorej sme zostrojili model pre zmiešané životné poistenie a následne využitím metódy Monte Carlo sme uskutočnili simuláciu. V tejto kapitole sme si objasnili pojmy ako sú proces, pravdepodobnostné rozdelenia a náhodné čísla. Objasnili sme princíp životného poistenia, komutačných čísel, poistného, peňažných tokov, poistnej rezervy a oceňovania poistenia.

1.1 Proces

Procesom môžeme nazvať určitý systém, ktorý je presne definovaný svojimi komponentmi, ktoré sú poprepájané rôznymi reláciami a smerujú k určitému cieľu. Tento systém sa môže nachádzať vo viacerých stavoch. Vo všeobecnosti ho možno definovanej aj ako: *„súbor vybraných objektov, označovaných ako prvky systému alebo podsystémy, ktoré na základe vzájomných vzťahov a vzťahov k okoliu tvoria celok istých vlastností“*.[1]

Analýza náhodných procesov zahŕňa vlastnosti procesu ako celku ako aj samostatnú analýzu ich vstupných a výstupných veličín. Tieto procesy môžeme rozdeliť na základe toho, či stavy tohto systému v čase majú spojitý alebo diskrétny charakter. V prípade, že je tento čas diskrétny, môže systém nadobudnúť hodnoty len z presne určenej diskrétnej množiny, v ktorej je obmedzený počet týchto hodnôt. Avšak v prípade spojitého rozdelenia sa tieto stavy menia kontinuálne, čo znamená, že systém môže nadobudnúť ľubovoľný stav akejkoľvek hodnoty zo skúmaného intervalu.

[1] **[8]** GUŠTAR MILAN, Generování náhodne promenných veličin v metode Monte Carlo

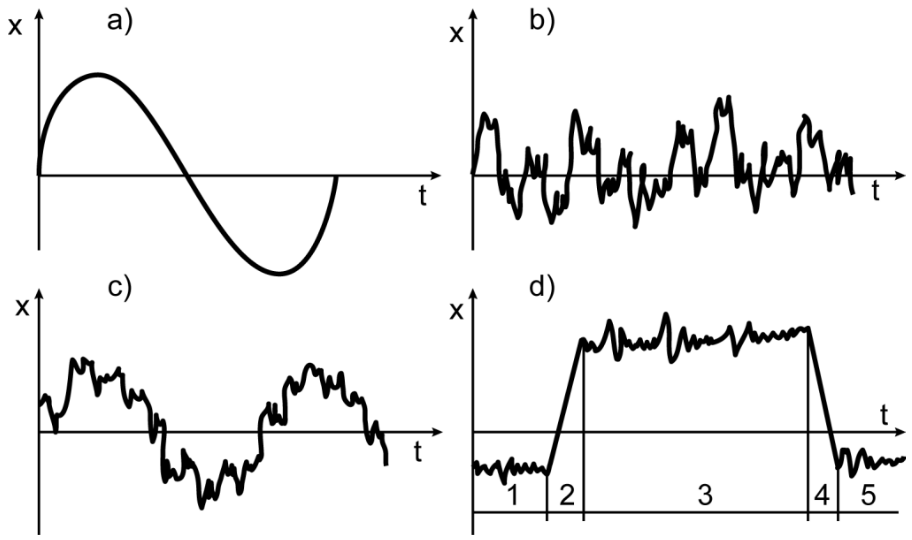
1.1.1 Rozdelenie procesov

Druhy spojitých procesov môžeme rozdeliť do nasledujúcich:

a) deterministické,
b) stochastické (náhodné),
c) zmiešané,
d) nehomogénne.

Tieto procesy sú zobrazené na obrázku č.1.1.

Obrázok č. 1.1: Druhy spojitých procesov



Zdroj: Martin Dlouhý, Josef Jablonský, Využítí simulace pri analýze podnikových procesú

Deterministický proces

Proces nazývame deterministickým práve vtedy, ak nastáva za určitých podmienok, ktoré sú presne dané (isté), pričom nenastanú nemožné javy. Pri týchto javoch je možné presne určiť ich výsledok už po prvom modelovaní procesu, ktorý sa po viacerých opakovaniach nemení.

Stochastický (náhodný) proces

Náhodnosť procesu spočíva v tom, že daný jav môže nastať, ale aj nemusí. Tieto javy sa pred ich pokusom nedajú presne predvídať, môžeme ich len odhadovať na základe predchádzajúcich pozorovaní. Proces označujeme X_t, kde t predstavuje čas z určitej časovej množiny T. Množina T býva najčastejšie rovná všetkým reálnym ($T = R$) alebo prirodzeným ($T = N$) číslam:

$$\{X_t : t \in T\} \tag{1.1.1}$$

Pre každé $t_1 \in T$ je X_{t1} náhodnou veličinou s distribučnou funkciou:

$$F_{t1}(x_1) = P(X_{t1} < x_1), \quad x_1 \in R, \quad t_1 \in T \tag{1.1.2}$$

Ak definujem ľubovoľnú podmnožinu $\{t_1, \ldots, t_n\}$ množiny T distribučnou funkciou náhodného vektora $(X_{t1}, \ldots, X_{tn})$ za predpokladu že $t_1 \neq t_2$ a predpokladáme nezávislosť X_{t1} a X_{t2}, môžeme systém týchto distribučných funkcií označiť ako náhodný proces X_t.

$$F_{t1,\ldots,tn}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_{t1} < x_1,\ldots,X_{tn} < x_n) \tag{1.1.3}$$

Tento proces X_t nazývame náhodným preto, lebo postupnosť týchto sledovaných stavov ktorými systém prechádza v čase $t \in T$ je náhodný, tzn. že nikdy nevieme presne určiť, ktorý stav bude nasledovať v nasledujúcom okamžiku.

Existuje mnoho príkladov náhodných procesov. Uvedieme jeden z ekonomiky. Majme poisťovaciu spoločnosť, ktorá poisťujete autá. Systémom budeme rozumieť všetkých poistencov, ktorým spoločnosť poistila autá (osobné, nákladné a pod.) Sledovaným stavom tu bude, či nastane poistná udalosť alebo nie, t.j. či sa stane majiteľovi auta na aute škoda, ktorá spĺňa poistné podmienky. Tento systém sa môže nachádzať v dvoch stavoch: 0,1 (0 – nastane poistná udalosť alebo 1 – nenastane poistná udalosť). To, v ktorom z týchto stavov sa bude systém nachádzať, je príkladom náhody.

Pre skúmaní tohto náhodného procesu, nie je nutná jeho realizácia. Nemusíme skúmať priamo štatistiky z poisťovacej spoločnosti. Stačí nám, ak si vytvoríme matematický model tohto problému, ktorý čo najpresnejšie daný model popisuje a simulovať jeho chovanie za pomoci postupnosti náhodných čísel. Simulácia preto znamená napodobňovanie určitých stavov reálneho alebo abstraktného procesu, ktoré sú predmetom nášho skúmania. Náhodným pokusom je opakované realizovanie procesu simulácii, pričom výsledný stav dopredu nepoznáme. Výsledkom náhodného pokusu je náhodná premenná. Náhodná premenná môže byť spojitá alebo diskrétna.

V minulosti sa na napodobňovanie týchto stavov najčastejšie využívali tabuľky náhodných čísel. Obsahom tabuliek náhodných čísel sú čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9, ktoré sú usporiadané tak, aby sa v nich nedal identifikovať žiaden systém. V týchto tabuľkách sa testuje nie len náhodnosť samostatných čísel, ale aj ich skupín (dvojíc, trojíc...). Avšak vyrobiť postupnosť náhodných čísel je veľmi ťažké, preto je vytváranie tabuliek náhodných čísel v dnešnej dobe počítačov skôr anachronizmus. Na vytváranie postupností náhodných čísel sa využíva ich generovanie pomocou počítača. Pre ten je to však náročná úloha, nakoľko sú presné a deterministické[2]. Počítačové programy vytvárajú tieto postupnosti využívaním tzv. pseudonáhodných čísel.

Počítače vytvárajú pseudonáhodné čísla pomocou rôznych aritmetických operácií a ich kombináciou pomocou určitých vzorcov. Tieto čísla následne spĺňajú väčšinu vlastností potrebných pri štatistických skúškach náhodnosti, preto ich môžeme využiť aj pri našej simulácii modelu pre zmiešané životné poistenie v praktickej časti tejto diplomovej práce. Na simuláciu náhodných procesov sa často využíva metóda Monte Carlo, ktorá k riešeniu problémov pristupuje za pomoci jednoduchých operácií, v ktorých využívame náhodné čísla. Pre úspech tejto simulácie treba vykonať jej mnohonásobné opakovanie, zvyčajne viac ako tisíckrát.

---

[2] Deterministickosť počítačov spočíva v tom, že pri vytváraní cesty problému a jeho následného riešenia sa vždy z toho istého začiatku dostanú do toho istého konca.

1.1.2 Pravdepodobnostné rozdelenia

Keď že sme si vysvetlili rozdiel medzi deterministickým a stochastickým procesom, môžeme v tejto podkapitole vypísať základné pravdepodobnostné rozdelenia, ktoré sa využívajú v simulačnom modelovaní. Pravdepodobnostné rozdelenie určuje pravdepodobnosť priradenia hodnoty každej premennej z určitého intervalu hodnôt. Ich základné rozdelenia sú:

- diskrétne rozdelenia,
- spojité rozdelenia.

<u>*Diskrétne rozdelenia*</u>

Premenné v diskrétnych rozdeleniach môžu nadobudnúť hodnoty len z presne určenej diskrétnej množiny, t.j. v množine sú presne vypísané všetky hodnoty, ktoré môže premenná nadobudnúť.

a) Binomické rozdelenie

Používa sa, ak predpokladáme, že výskyt každej premennej *X* má rovnakú pravdepodobnosť *p* nastátia. V poistnej praxi to môže byť napr. počet nastátia poistnej udalosti v skúmanom portfóliu počas n opakovaní. Pravdepodobnostná funkcia binomického rozdelenia je:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}, & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0, & inak \end{cases} \tag{1.1.4}$$

kde:
n – je počet nezávislých náhodných pokusov,
p – je pravdepodobnosť nastátia chceného javu.

b) Negatívne binomické rozdelenie

Toto rozdelenie sa líši od binomického rozdelenia v tom, že tu sledujeme koľkokrát musí nastať určitá udalosť, aby nastal určený počet *m* želaných výsledkov. V ekonomike výroby môžeme toto rozdelenie použiť napríklad na model, v ktorom kontrolujeme počet vyrobených výrobkov, na nájdenie r-tého nepodarku. Jeho pravdepodobnostná funkcia je:

$$p(x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} \cdot p^r \cdot (1-p)^x, & x \in \{0,1,2,...\} \\ 0, & inak \end{cases} \tag{1.1.5}$$

kde:

r – je počet nepriaznivých pokusov,

p – pravdepodobnosť nastátia priaznivého pokusu.

c) Geometrické rozdelenie

Pri tomto rozdelení určujeme pravdepodobnosť prvého priaznivého nastátia želanej udalosti v n pokusoch. V poistnej praxi to môže byť napríklad v n ročnej dobe poistenia nastátie smrti poistenca. Pravdepodobnostnú funkciu má:

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^x \cdot p, & x = 0,1,2,... \\ 0, & inak \end{cases} \tag{1.1.6}$$

kde p – predstavuje pravdepodobnosť nastátia želaného javu.

d) Poissonovo rozdelenie

V tomto pravdepodobnostnom rozdelení je podstatnou zložkou čas. Sledujeme tu nastátie udalosti za časové obdobie. Jeho pravdepodobnostná funkcia má nasledujúci tvar:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & x = 0,1,2,... \\ 0, & inak \end{cases} \tag{1.1.7}$$

kde:

λ – prestavuje priemerný počet výskytov udalosti za určité časové obdobie.

Spojité rozdelenia

Premenné v spojitých rozdeleniach môžu nadobudnúť akékoľvek hodnoty z daného intervalu. Interval môže byť ohraničený zhora, ohraničený zdola, ohraničený aj zhora aj zdola a neohraničený.

a) Rovnomerné rozdelenie

Predstavuje rozdelenie na intervale (a, b), kde a predstavuje dolnú hranicu a b predstavuje hornú hranicu ohraničenia. Náhodná premenná môže potom nadobudnúť hociktorú hodnotu z intervalu, pričom všetky sa vyskytujú rovnako často. Rovnomerné rozdelenie R(0,1) je základné rozdelenie, ktoré budeme používať v praktickej časti na generovanie hodnôt náhodných veličín.

b) Normálne rozdelenie

Predstavuje symetrické rozdelenie premenných x, ktoré majú rozdielne stredné hodnoty a rozptyl. Používa sa pri hľadaní chýb v rôznych matematických meraniach.

c) Exponenciálne rozdelenie

Rozdelenie používame na modelovanie počtu nastáti nejakých udalostí v čase. V ekonomike je vhodné ho využiť na výpočet výšky poistného plnenia.

d) Trojuholníkové rozdelenie

Je obdobné rovnomernému rozdeleniu s tým rozdielom, že využíva ja tretí parameter, čo je najčastejšie vyskytujúca sa hodnota *b*. Jeho interval je teda *R(a, b, c)*. Pre hodnoty platí, že: $a < b < c$.

e) Gamma rozdelenie

Je charakterizujúce dvomi premennými. Predstavuje súčet *n* nezávislých premenných s exponenciálnym rozdelením δ. V aktuárstve sa využíva na modelovanie poistných rizík.

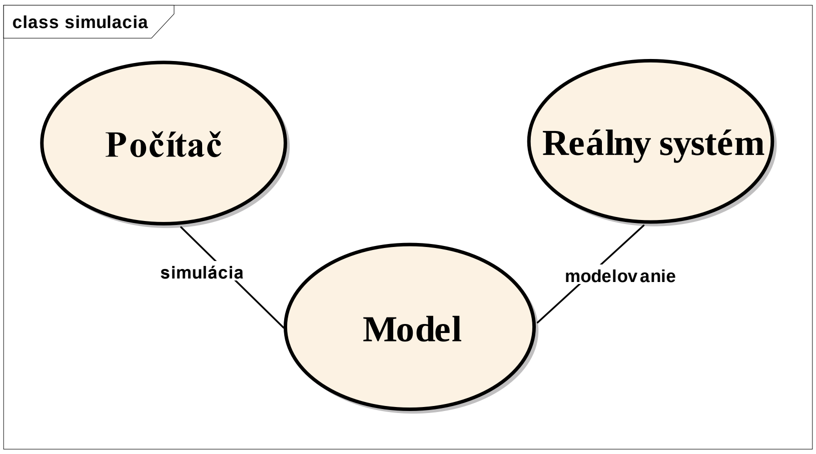
1.2 Metóda Monte Carlo

Spôsob riešenia problému metódou Monte Carlo je veľmi podobný simulácii. Simulácia predstavuje napodobňovanie určitých reálnych stavov systému pretransformovaných do počítačového modelu. V podobe simulácie riešime problém, ktorý nemá analytické riešenie alebo je toto riešenie príliš zložité a časovo zdĺhavé. „*Simulácia je proces tvorby logicko-matematického modelu reálneho objektu, systému na ňom definovaného, alebo procesu rozhodovania a realizácie veľkého množstva experimentov.*“ [3] Nakoľko sa simulácia modeluje na počítači využíva tieto základné prvky:

- model,
- počítač,
- reálny systém.

Vzťahy medzi modelom, počítačom a reálnym systémom predstavujú modelovanie a simulácia. Tieto vzťahy sú zobrazené na obrázku č. 1.2.

Obrázok č. 1.2: Vzťahy medzi modelom, počítačom a reálnym systémom



Zdroj: vlastné spracovanie v programe Enterprise Architect

[3] **[17]** Branislav Vančo, Ekonometria pre manažérov, str. 175

Reálny systém v simulačnom modeli predstavuje predmet nášho skúmania v reálnom svete (napr. podnik, štát alebo v našej praktickej časti poisťovaciu spoločnosť). Reálny systém generuje dáta pre náš skúmaný jav. Predstavuje určité správanie sa systému za presne stanovených podmienok.

Pod modelom rozumieme prenesenie reálneho sveta pomocou určitých vzťahov (matematických, logických a pod.) do presne definovaného systému. Presne definovaný systém nám potom pomáha pomocou počítača generovať dáta rovnakého alebo veľmi podobného charakteru ako dáta získavané z reálneho systému.

Keďže sme si veľmi jednoducho vysvetlili čo je to simulácia, môžeme prejsť na metódu Monte Carlo. Hlavným rozdielom medzi simuláciou a metódou Monte Carlo je, že v simulácií skúmame určitú časť zložitú časť reálneho sveta s dynamickým systémom[4] bez analytických podkladov. Monte Carlo využíva práve matematické riešenia a štatistické pokusy. Model sa zostavuje na základe deterministických a stochastických úloh, ktoré sú opakované veľkým počtom pravdepodobnostných pokusov.

Základný princíp metódy spočíva v zostavení pravdepodobnostnej úlohy, ktorej riešenie je zhodné s pôvodnou úlohou. Čiže nájdenie takej pravdepodobnostnej veličiny *X*, ktorej stredná hodnota *E(X)* je zhodná s hľadanou hodnotou *a*.

$$E(X) = a \tag{1.2.1}$$

Ak vypočítame n nezávislých realizácií $X_1, X_2, ..., X_n$ náhodnej veličiny *X*, môžeme hodnotu *a* odhadnúť pomocou ich aritmetického priemeru.

$$\bar{a} = \frac{1}{n}(X_1, X_2, ..., X_n) \tag{1.2.2}$$

V metóde Monte Carlo sa najskôr generujú náhodne veličiny $Y \in (y_1, y_2, ..., y_n)$, ktoré majú rovnomerné rozdelenie z intervalu (0,1) a tie sa potom transformujú na x_i. Model Monte

[4] Dynamickým systémom rozumieme vyjadrenie veľkej variability (premenlivosti) systému v čase.

Carlo má potom pravdepodobnostný charakter. Princíp metódy Monte Carlo sa dá zhrnúť do nasledujúcich krokov:

1. Generujeme náhodné čísla y_i pomocou rovnomerného rozdelenia na intervale (0,1),
2. transformujeme vygenerované náhodné čísla y_i na potrebné náhodné čísla z_i s príslušným pravdepodobnostným rozdelením,
3. po vygenerovaní potrebných náhodných čísel z_i prechádzame priamo k odhadom potrebných charakteristík náhodnej veličiny X alebo pomocou vhodného algoritmu odhadneme náhodné veličiny x_i,
4. štatisticky spracujeme získané výsledky.

1.2.1 Odhad presnosti metódy Monte Carlo

Pre presnosť metódy Monte Carlo zostrojujeme interval spoľahlivosti. Predpokladajme odhad strednej hodnoty $E(X)$ pomocou aritmetického priemeru z n hodnôt x_1, x_2, ..., x_n náhodnej veličiny X. Ak si zvolíme dostatočne malé a pre ktoré platí:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D(X)}{na}} \tag{1.2.3}$$

s rozptylom

$$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{N} \tag{1.2.4}$$

dostaneme

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - E(X)\right| \leq \sqrt{\frac{D(X)}{na}}\right) \geq 1 - a \tag{1.2.5}$$

čo znamená, že s pravdepodobnosťou $1 - a$ sa aritmetický priemer nezávislých realizácií náhodnej veličiny X neodlišuje od $E(X)$ o viac ako $\sqrt{D(X)/n}$ pri fixných $D(X)$ a a. Interval spoľahlivosti zostrojíme len ak platí centrálna limitná veta[5] pri dodatočne veľkom počte opakovaní (odporúča sa min. 1000 krát).

1.3 Životné poistenie

Poisťovníctvo patrí medzi rýchlo rozvíjajúce sa odvetvia súčasnej ekonomiky. Napomáha v udržiavaní ekonomickej stability štátu, právnických aj fyzických osôb. Predstavuje ochranu proti mimoriadnym udalostiam, ktorá má aj výhodnú možnosť investovania. Nové princípy a prístupy v rátaní poistného nastali na Slovensku po roku 1991, keď sa začal náš poistný trh výraznejšie rozvíjať.

Produkty poisťovní môžeme deliť z viacerých hľadísk. Základné rozdelenie podľa druhu poistení je:

- životné poistenie,
- neživotné poistenie.

Nakoľko hlavným cieľom našej diplomovej práce je výpočet modelu zmiešaného životného poistenia, budeme sa ďalej zaoberať len životným poistením.

Životné poistenie je poistenie, ktoré kryje riziká spojené so životmi osôb, či už ide o základné riziko úmrtia, alebo riziko dožitia. Životné poistenie sa skladá z viacerých typov produktov. Základné delenie vychádza z matematickej podstaty a tou je, či sa vypláca poistné plnenie v prípade nastátia smrti alebo dožitia.

Doživotné poistenie na úmrtie

V tomto prípade sa poistná suma vypláca v prípade úmrtia poistenca. Toto úmrtie môže nastať kedykoľvek, avšak vo väčšine poisťovní na Slovensku je táto doba ohraničená. Na konci tohto ohraničenia poisťovňa vyplatí poistné plnenie aj v prípade ak táto osoba ešte žije.

[5] Centrálna limitná veta hovorí, že priemer nezávislých náhodných veličín pre dostatočne veľký počet vybraných nezávisle z rovnakého pravdepodobnostného rozdelenia, bude mať tiež normálne rozdelenie.

Dočasné poistenie na úmrtie

Poistná suma sa vypláca len v prípade, že poistenec umrie do presne stanovenej doby. Táto doba sa uvádza aj ako termín splatnosti alebo dátum exspirácie. Dočasné poistenie na úmrtie je zvyčajne rozdeľované na tri základné typy:

- s konštantnou poistnou sumou,
- s klesajúcou poistnou sumou,
- s rastúcou poistnou sumou.

Dočasné poistenie na úmrtie s klesajúcou poistnou sumou býva zvyčajne využívané na krytie úverového rizika. Ak by poistenec zomrel pred splatením úveru, poisťovňa použije poistné plnenie, aby splatila úver veriteľovi. Dočasné poistenie na úmrtie s rastúcou poistnou sumou znamená, že v prípade úmrtia poistenca, poisťovňa bude vyplácať poistné plnenie blízkej osobe, na ktorú si poistenec toto poistenie uzatvára. Výška tohto poistného plnenie bude pravidelne rásť až do uplynutia určitého dátumu.

Poistenie na dožitie

Toto poistenie je na presne stanovené obdobie. Poistenec sa musí dožiť určitého dátumu resp. veku, a v prípade dožitia sa mu poisťovňa vyplatí poistnú sumu.

Zmiešané poistenie

Predstavuje kombináciu dočasného poistenia na úmrtie a poistenia na dožitie. V zmiešanom poistení sa vyplatí poistné plnenie poistencovi hocikedy v prípade úmrtia do konkrétneho dátumu alebo ak sa tohto dátumu dožije, tak sa mu tiež vyplatí táto poistná suma. Nakoľko je tento typ poistenia najčastejšie uzatváraný na Slovensku, rozhodli sme sa ho v praktickej časti využiť pre modelovanie našej simulácie pomocou metódy Monte Carlo.

1.3.1 Úmrtnostné tabuľky v životnom poistení

Úmrtnostné tabuľky predstavujú základné informácie o pravdepodobnosti prežitia alebo pravdepodobnosti úmrtia určitej skupiny populácie. Pri ich konštruovaní sa nepredpokladá s migráciou obyvateľstva, ani zmene jej veľkosti a zloženia. Tieto tabuľky v Slovenskej republike vytvára štatistický úrad Slovenskej republiky. V našej práci sme použili podrobné úmrtnostné tabuľky zo štatistického úradu Slovenskej republiky za rok 2012. Použili sme spoločný variant mužov a žien. Tabuľky sú priložené v prílohe č. 1.

Úmrtnostné tabuľky majú široké využitie. Okrem rôznych demografických výskumov ich môžeme využívať aj v oblasti životného poistenia, kde predstavujú významnú úlohu, preto je dôležitou úlohou každej poisťovne vybrať správne úmrtnostné tabuľky. Skúsenosti s úmrtím, ktorým sa zaoberajú štatistické úrady, však ukazuje na to že pravdepodobnosť úmrtia je závislá od rôznych faktorov. Dôležitými faktormi v oblasti poistenia je aj zamestnanie, vek, životný štýl poistenca a pod. Preto si poisťovne vytvárajú odlišné úmrtnostné tabuľky pre rôzne skupiny ľudí. V našom modeli sme tieto rôzne faktory nebrali do úvahy a pracovali sme s prierezovými tabuľkami. Tieto tabuľky sledujú krátke obdobie (väčšinou jeden rok) na základe ktorého sledujeme úmrtnostné miery podľa jednotlivých vekov v danom období. Úmrtnostné tabuľky obsahujú nasledujúce údaje:

Vekový interval (x) – predstavuje vek ktorému zodpovedajú hodnoty daného riadka tabuľky. Najčastejšie sa označuje ako prirodzené číslo, ktoré sa každým riadkom zvyšuje o jednotku, čo predstavuje vek jedinca.

Počet dožívajúcich sa veku x (l_x) – V prierezových úmrtnostných tabuľkách sa vyberá určitý počet ľudí l_0 (koreň úmrtnostnej tabuľky), ktorí predstavujú základ údajov. Táto skupina (zvyčajne sa volí 100 000 = l_0) sa každý rok zmenšuje o počet tých ľudí, ktorí v danom roku zomrú a hodnota l_x predstavuje práve počet ktorý sa daného veku x dožijú.

Počet zomrelých vo veku x (d_x) – počet ľudí, ktorí vo veku x zomrú. Vypočítame ho ako:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{1.3.1}$$

Pravdepodobnosť dožitia sa veku x (p_x) – predstavuje pravdepodobnosť, že osoba ktorá žije vo veku *x* sa dožije veku *x + 1*. Jeho výpočet je:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1.3.2}$$

Pravdepodobnosť úmrtia vo veku x (q_x) – pravdepodobnosť, že *x*-ročná osoba, ktorá žije vo veku *x*, sa nedožije veku *x + 1*. Túto pravdepodobnosť vypočítame nasledovne:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{1.3.3}$$

Počet všetkých rokov prežitých osobami vo veku x (L_x) – priemerný počet osôb, ktoré sa dožívajú určitého veku, pričom osoby, ktoré v daný vek *x* zomrú pripočítavajú do tejto hodnoty len čas do roku, ktorého sa dožili. Tieto roky vypočítame:

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \tag{1.3.4}$$

Počet zostávajúcich rokov života (T_x) – predstavuje počet rokov, ktorých sa môže daná skupina ľudí, ktorí žijú vo veku *x* ešte dožiť ak by po tomto veku zomreli všetci zo skupiny až v posledný možný vek (v úmrtnostných tabuľkách predstavuje zvyčajne 100 rokov):

$$T_x = \sum_{i=x}^{w} L_i \tag{1.3.5}$$

kde w je maximálny vek, ktorého sa osoba môže dožiť.

Stredná dĺžka života vo veku x (e_x) – priemerný počet rokov, ktorý sa môže daná osoba vo veku x dožiť. Ten rátame vydelením hodnoty T_x hodnotou l_x:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \tag{1.3.6}$$

1.3.2 Komutačné čísla

Pre jednoduchšie rátanie poistných hodnôt zmiešaného životného poistenia v praktickej časti sme využívali komutačné čísla. Tieto čísla využívajú hodnoty z úmrtnostných tabuliek ako aj úrokovú mieru *i*, respektíve odúročiteľa $v = 1/(1 + i)$.

Komutačné čísla používané v praktickej časti máme v prílohe č. 2. Hodnoty pre každý vek *x* sme rátali pomocou vzorcov:

„ $D_x = l_x \cdot v^x$ *- počet žijúcich vo veku x odúročený k dátumu ich narodenia,*

$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ *- počet zomretých ľudí vo veku x, odúročený k dátumu ich narodenia,*

$N_x = \sum_{n=0}^{w=x} D_{x+n}$ *- súčet všetkých žijúcich od veku x až po koniec úmrtnostnej tabuľky,*

$S_x = \sum_{n=0}^{w=x} N_{x+n}$ *- súčet Nx+n od veku x až po koniec úmrtnostnej tabuľky,*

$M_x = \sum_{n=0}^{w=x} C_{x+n}$ *- súčet počtu zomrelých od veku x až po koniec úmrtnostnej tabuľky,*

$R_x = \sum_{n=0}^{w=x} M_{x+n}$ *- súčet Mx+n od veku x až po koniec úmrtnostnej tabuľky.“* [6]

1.3.3 Poistné

Poistenie predstavuje ochranu proti neočakávaným škodám na hmotnom majetku, ale aj na život človeka a jeho neočakávané úmrtie. Čiže poistenie predstavuje určitý produkt poisťovne, ktorý poisťovňa predáva svojim poistencom. Poistné predstavuje sumu tejto ochrany, ktorú poistenec zaplatí poisťovni za túto ochranu. Zvyčajne sa platí v určitých intervaloch (ročne, mesačne a pod.) Každá poisťovňa si poistné určuje na základe určitých pravidiel:

---

[6] **[2]** Viera Sekerová, Mária Bilíková, Poistná matematika, vydavateľstvo Ekonóm 2005, str. 39

- malo by zabezpečiť dostatok finančných zdrojov na krytie budúcich nákladov pri realizácií poistnej udalosti,
- malo by zabezpečiť vytvorenie technickej rezervy,
- malo by zabezpečiť dostatok finančných zdrojov na prevádzkové a správne náklady v poisťovni pre danú poistku,
- brať ohľad na úrokovú sadzbu a mieru inflácie na základe stavu na ekonomickom trhu,
- stanovovať poistné na základe konkurencieschopnosti oproti svojim konkurentom,
- samozrejme nezabudnúť správne stanoviť výšku zisku poisťovne.

V životnom poistení počítame výšku poistného pomocou komutačných čísel. Pri stanovení poistného potrebujeme najskôr rozoznať aký typ bude poisťovňa používať. Poisťovňa môže určovať výšku poistného na základe nasledovných typov poistného:

Jednorazové poistné

Pri tomto druhu poistného poisťovňa vopred stanoví poistencovi celú sumu poistného, ktorú poistenec vyplatí poisťovni jednorázovo na začiatku poistnej doby.

Bežné poistné

Predstavuje typ poistného, kde má poistenec svoje poistné rozdelené do viacerých (väčšinou rovnako vysokých) splátok. Tieto splátky platí poistenec pravidelne vo vopred určených časových intervaloch (zvyčajne to býva mesiac až rok). V praktickej časti sme využívali bežné poistné s pravidelnými predlehotnými ročnými splátkami.

Nakoľko je poisťovacia spoločnosť podnik, ktorého hlavným cieľom je dosahovať zisk, tak aj tento zisk musí zahrnúť do poistného. Taktiež má poisťovňa pri každom kontrakte určité náklady, ktoré musí opäť zahrnúť do poistného. Preto rozdeľujeme poistné na:

Netto poistné

Je to suma, ktorú potrebuje poisťovňa pre prípad vzniku poistného plnenia.[7] Suma poistného plnenia musí brať do úvahy pravdepodobnosť úmrtnosti, ako aj predvídanú úrokovú mieru. Pri tomto poistení poisťovňa nezarátava do poistného svoje náklady ani zisk.

Brutto poistné

Brutto poistné predstavuje sumu poistného plnenia ku ktorej poisťovňa pripočítava aj svoje náklady a zisk. Náklady, ktoré vznikajú poisťovni a pripočítava si ich k netto poisteniu môžu byť:

- náklady vznikajúce na začiatku kontraktu,
  - počiatočné náklady,
  - prvoročná provízia sprostredkovateľovi,
- priebežné náklady,
  - náklady na správu,
  - udržiavacia provízia sprostredkovateľovi,
- ukončovacie (terminálne) náklady.

1.3.4 Metóda oceňovania produktov životného poistenia

V praktickej časti sme pri metóde oceňovania produktov zmiešaného životného poistenia vychádzali práve z testovania zisku, ktorý sme upravili pre potreby našej praktickej práce. V tejto metóde sme použili peňažné toky poisťovne aby sme mohli vypočítať očakávané prítomné hodnoty. Pomocou zistenia očakávaných prítomných hodnôt daného poistného kontraktu sme mohli následne odsimulovať daný model zmiešaného životného poistenia a odhadnúť vhodné poistné pri ktorom by poisťovacia spoločnosť dosahovala zisk. Za pomoci hlavných krokov metódy, ktoré sme si upravili pre náš model so stochastickými premennými sme použili nasledujúce kroky pre určenie výšky zisku poisťovne:

[7] **Poistné plnenie** predstavuje odškodnenie, ktoré uhradí poisťovňa v prípade vzniku poistnej udalosti.

- Na základe získaných skúseností sme si stanovili základný produkt poisťovne. Určili sme vstupné premenné ako aj rozhodujúcu premennú (skúšobné poistné daného produktu).
- Stanovili sme si poistnú bázu.
- Určili sme si stochastické premenné a spôsoby ich generovania na základe ktorých sme testovali zisk poisťovne. Nakoľko sme prevádzali simuláciu pomocou metódy Monte Carlo, mohli sme mať množinu kontraktov dostatočne širokú pre simuláciu testovania zisku, takže náš model bol prehľadný a časovo nenáročný.
- Určili sme zisk poisťovne daného produktu:
    - na základe určitého časového obdobia sme určili budúce peňažné toky,
    - v tomto časovom období sme vykalkulovali peňažné toky pre každý rok,
    - pri kalkulovaní peňažných tokov sme brali do úvahy pravdepodobnosť prežitia,
    - čisté peňažné toky sme diskontovali na začiatok kontraktu a stanovili sme očakávaný zisk pre dané vstupné premenné.
- Uskutočnili sme simuláciu na porovnanie čistej prítomnej hodnoty pre jednotlivé poistné a stanovili sme hranicu dosiahnutia zisku pre danú množinu kontraktov.

1.3.5 Kritéria ziskovosti

Každá poisťovňa sa snaží stanoviť svoje produkty pri očakávaní čo najväčšieho zisku. Pre zistenie výšky zisku z danej poistky môže poisťovňa použiť rôzne spôsoby hodnotenia investičných projektov. Hodnotenie každého kontraktu záleží od kritéria ziskovosti. Kritéria ziskovosti predstavujú určité ohodnotenie daného kontraktu. Pomocou týchto kritérií poisťovňa meria svoj zisk na základe provízií predajcom, kumulovanou výškou všetkých poistných, ale aj celkovou návratnosťou kapitálu. Medzi základné hodnotenia investícií patria:

- *„metóda výnosnosti investícií (Return on Investment - ROI),*
- *metóda doby návratnosti (Payback Period - PP),*
- *metóda čistej súčasnej hodnoty (Net Present Value - NPV),*

- *metóda vnútorného výnosového percenta (Internal Rate of Return - IRR),*
- *nákladové metódy.“* [8]

Metóda výnosnosti investícií (ROI)

Metóda ráta čistý zisk plynúci z investície. Na výpočet predpokladá poznanie zmeny objemu výroby, tržieb a nákladov. Tieto zmeny použijeme na výpočet výnosnosti investície. Preto vzorec pre túto metódu je nasledovný:

$$ROI = \frac{\overline{ČZ}}{INV_n} \tag{1.3.7}$$

kde:

$\overline{ČZ}$ – predstavujú priemerný čistý zisk investície,

INV_n – sú náklady na investíciu.

Metóda doby návratnosti (PP)

Časové obdobie, za ktoré sa hodnota čistých príjmov bude rovnať hodnote nákladov je doba návratnosti. Dobu návratnosti rátame zvyčajne v rokoch a to pomocou peňažných tokov. Peňažné toky za každý rok kumulujeme, až kým sa nám ich hodnota nebude rovnať investičným nákladom. Dobu návratnosti vypočítame nasledovne:

$$PP = \frac{INV_n}{CF_1 + CF_2 + ... + CF_n} \tag{1.3.8}$$

kde:

INV_n – sú náklady na investíciu,

CF – predstavujú peňažné toky za jednotlivé roky.

---

[8] **[18]** R. A. Bradley, S. C. Myers, A. Franklin, Teória a prax firemných financií

Metóda čistej súčasnej hodnoty (NPV)

Čistá prítomná hodnota (net present value) je hodnota daného kontraktu, ktorá predstavuje jej hodnotu budúceho zisku, čiže rozdiel medzi súčasnou hodnotou očakávaných príjmov a kapitálových výdavkov. Pre jej výpočet je potrebné poznať rizikovú diskontnú mieru. Túto metódu hodnotenia investičných projektov sme použili aj v našom modeli:

$$NPV = \sum_{t=1}^{Tn} CF \cdot \frac{1}{(1+\mathrm{rdm})^{\mathrm{t}}} - INV_n \tag{1.3.9}$$

kde:

rdm – je riziková diskontná miera,

CF – sú peňažné toky,

Tn – je ekonomická životnosť investície,

INV_n – predstavujú kapitálové výdavky na investíciu

Metóda vnútorného výnosového percenta (IRR)

Táto metóda je založená na metóde súčasnej prítomnej hodnoty. Predstavuje takú súčasnú prítomnú hodnotu, pri ktorej je riziková diskontná miera rovná nule. Jej nájdenie býva v niektorých prípadoch veľmi ťažké a zvyčajne sa na jej výpočet používa metóda pokus – omyl.

Metóda priemerných ročných nákladov

Táto metóda je postavená na zhotovení viacerých plánov rozloženia nákladov na investíciu. Na základe viacerých investičných plánov sa potom vyberá ten, ktorý má najnižšie náklady. Do výpočtu ročných nákladov sa musia započítať aj odpisy, prevádzkové náklady a riziková diskontná miera.

2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

Hlavný cieľ záverečnej práce

Základnou otázkou pri riešení každého problému je to, či máme dostatok informácií na správne stanovenie riešenia. A keďže niektoré premenné sa nie vždy dajú presne určiť, rozhodli sme sa pre vytvorenie modelu, v ktorom môžeme predpokladať čistú prítomnú hodnotu z produktu poistky zmiešaného životného poistenia pre poisťovňu. Hlavným cieľom bolo určiť výšku poistného tak, aby sa poisťovni daný produkt oplatilo zaviesť do svojich služieb.

Čiastkové ciele záverečnej práce

Nakoľko sme pri plnení hlavného cieľa využívali metódu Monte Carlo, určili sme si čiastkové ciele, ktoré nám pomohli pochopiť zvolenú problematiku a následným simulačným modelovaním dospieť k záveru našej práce. Čiastkové ciele sme stanovili nasledovne:

- naštudovanie procesov a pravdepodobných rozdelení, ako aj náhodných premenných,
- pochopenie princípu metódy Monte Carlo,
- pochopenie princípu zostrojenia simulačného modelu so stochastickými premennými,
- naštudovanie a pochopenie princípu zmiešaného životného poistenia a určenia jeho čistej prítomnej hodnoty,
- uľahčenie výpočtov použitím komutačných čísel z úmrtnostných tabuliek,
- princíp výpočtov poistenia, poistnej rezervy a peňažných tokov,
- prieskum úmrtnosti obyvateľstva na Slovensku zo štatistických úradov.

Charakteristika objektu skúmania

Hlavný objekt skúmania v diplomovej práci predstavovalo možnosť využitia metódy Monte Carlo. Numerické metódy, ktoré využívajú metódu Monte Carlo, boli prvýkrát využité pri riešení vývoja atómovej bomby vedcami v Los Almos v roku 1992. Vynájdenie metódy

Monte Carlo sa pripisuje poľskému matematikovi Stanislawovi Ulamovi. Ulam navrhol numerickú simuláciu, ktorá mohla byť využívaná pre výpočet komplikovaných matematických integrálov, ktoré vznikali z teórií nukleárnych reťazových reakcií. Tento návrh viedol k formálnejšiemu vývoju metódy Monte Carlo Johnom Von Neumannom, Nicholasom Metropolisom a ďalšími. Vo svojej autobiografii Ulam spomína, že metódu pomenoval na počesť svojho strýka, ktorý bol gambler. Monte Carlo je odvodené od slávneho kasína z juhu Francúzka, kvôli náhodným číslam v rulete, či iných hazardných hier.

Pracovné postupy

Záverečnú prácu sme vypracovali na základe pochopenia hlavných pojmov metódy Monte Carlo, ako aj modelovania zmiešaného životného poistenia a následným aplikovaním tejto metódy v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013 pre určenie poistného v poistnom produkte. V prvej kapitole sme vysvetlili, čo je to náhodný proces, ako aj náhodná premenná. Vysvetľujem princíp zmiešaného životného poistenia a metódy Monte Carlo, aby sme na základe týchto poznatkov v praktickej časti práce zostrojili model zmiešaného životného poistenia využitím komutačných čísel z úmrtnostnej tabuľky. Z tohto modelu sme následne určili čistú prítomnú hodnotu, pomocou ktorej sme odsimulovali výšky rôznych poistných a určili tak hranicu, v ktorej začína poisťovňa dosahovať pri danom poistnom produkte zisk.

Spôsob získavania údajov a ich zdroje

Podklady k splneniu hlavného cieľa, ako aj čiastkových cieľov pre vypracovanie záverečnej práce sme získavali zo širokej škály rôznych zdrojov. Tie sme získavali z:

- odbornej literatúry od významných domácich, ale aj zahraničných autorov, ktorá popisuje riešenú problematiku,
- publikácie a odborné články k danej problematike,
- domáce a zahraničné internetové portály a stránky venujúce sa danej problematike,
- prieskumom poistného trhu na Slovensku.

Použité metódy vyhodnotenia a interpretácie výsledkov

K vyhodnoteniu a interpretácií sa dá v dnešnej dobe využiť mnoho metód. K vyhotoveniu práce sme využili zabudované funkcie softvéru Microsoft Excel 2013. Do našej práce sme využili nasledovné metódy vyhodnotenia a interpretácie výsledkov:

- analýza a syntéza – využívali sme ich predovšetkým v prvej kapitole,
- sumarizácia dostupných poznatkov a podkladov,
- konzultácia s odborníkmi v danej oblasti,
- konkretizácia,
- matematické metódy – využívali sme pri výpočtoch v teoretickej a praktickej časti,
- grafické metódy – na interpretovanie výsledkov v praktickej časti sme využili grafické možnosti softvéru Microsoft Excel 2013.

3 Výsledky práce

V hlavnej časti diplomovej práce sme sa venovali zostrojeniu simulačného modelu pre zmiešané životné poistenie. Na základe vstupných údajov, ktoré predstavujú kontrolovateľné vstupy (napr. doba poistenia, poistná suma), náhodných vstupných premenných (napr. vek poistenca, výnos z aktív) a rozhodujúcej premennej (premenná, ktorú v modeli sledujeme) sme zostrojili simulačný model v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013. Tento model využíva rôzne matematické formulácie a logické vzťahy z oblasti aktuárstva[9].

3.1 Generovanie náhodných čísel v modeli

Hlavným cieľom našej práce bolo stanovenie poistného pre poisťovňu, ak bude uzatvárať poistku pre zmiešané životné poistenie na päť rokov pre poistencov s rôznym vekom. Vstupné údaje modelu sú rozpísané v kapitole: 3.2 Model produktu zmiešaného životného poistenia. Simulačný model sme vytvárali na základe algoritmu Monte Carlo.

V simulácií sme využívali pseudonáhodné čísla, ktoré sme generovali pomocou tabuľkového programu Microsoft Excel. Tieto čísla sme generovali pomocou jeho zabudovaných funkcií. Pomocou generátora pseudonáhodných čísel v programe Microsoft Excel sme si náhodne vygenerovali čísla z intervalu (0,1). Tieto počítačom generované pseudonáhodné čísla majú rovnakú pravdepodobnosť vygenerovania a taktiež rovnomerné rozdelenie. V Microsoft Excele sme na ich generovanie využívali zabudovanú funkciu RANDOM, ktorá používa príkaz: „=RAND()“.V tabuľke číslo 3.1 sme uviedli príklad náhodne vygenerovaných čísel z intervalu (0,1) pomocou funkcie RANDOM.

[9] **Aktuárstvo** je odborná veda v oblasti finančnej a poistnej matematiky, investícií, teórie portfólia, derivátov a cenných papierov.

Tabuľka č. 3.1: Príklad náhodne generovaných čísel s Microsoft Excelu

AVERAGE | =RAND()

	A	B	C	D	E	F
1	=RAND()	0,79508	0,21465	0,00936	0,03743	
2	0,23087	0,64304	0,16419	0,37980	0,64915	
3	0,91130	0,54587	0,85169	0,59351	0,29527	
4	0,39203	0,85309	0,53661	0,95160	0,80837	
5	0,27407	0,37359	0,12251	0,06692	0,98144	
6	0,79150	0,96508	0,12454	0,84121	0,28417	
7	0,73184	0,20111	0,24228	0,15415	0,89227	
8	0,21379	0,28423	0,81518	0,77315	0,88486	
9	0,25059	0,46700	0,87692	0,80112	0,57373	
10	0,46500	0,14049	0,63177	0,43312	0,56394	
11						

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

Na základe v teórii spomínaných rozdelení sme vygenerované náhodné čísla z intervalu (0,1) transformovali na konkrétne náhodné čísla. Na to využívame v tabuľkovom procesore Microsoft Excel nasledujúce zabudované funkcie pre rôzne rozdelenia:

a) Rovnomerné rozdelenie

Pre generovanie náhodných čísel v rovnomernom rozdelení v tabuľkovom procesore Microsoft Excel potrebujeme vedieť minimálnu a maximálnu hodnotu z intervalu, z ktorého chceme hodnoty generovať. Následne nám stačí do bunky, kde chceme mať vygenerovanú hodnotu zadať funkciu:

$$= \$H\$2 + (\$H\$3 - \$H\$2) * \mathrm{RAND}() \tag{3.1.1}$$

Hodnoty si môžete pozrieť v nasledujúcej tabuľke č. 3.2.

Tabuľka č. 3.2: Príklad rovnomerného rozdelenia generovaného v Microsoft Excele 2013

H4 | =$H$2+($H$3-$H$2)*RAND()

	F	G	H	I
1		**Rovnomerné rozdelenie**		
2		minimálna hodnota	1,00	
3		maximálna hodnota	10,00	
4		vygenerované číslo:	3,03	
5				

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

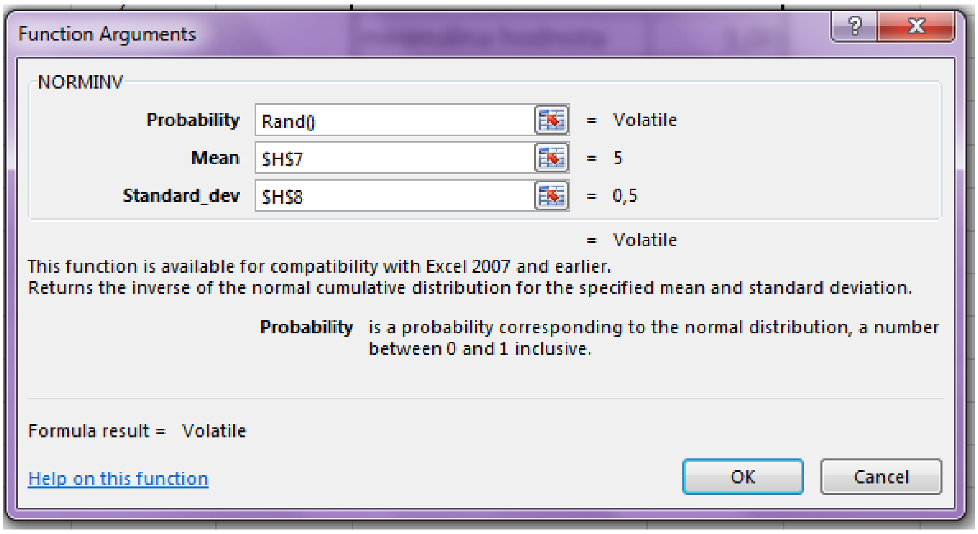
b) Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie generované v tabuľkovom procesore Microsoft Excel využíva zabudovanú funkciu NORMINV. Pre jeho vygenerovanie je potrebná stredná hodnota rozdelenia a jeho smerodajná odchýlka. Ak ho chcete písať do bunky priamo stačí zadať vzorec:

$$= \mathrm{NORMINV}(\mathrm{RAND}();\$H\$7;\$H\$8) \tag{3.1.2}$$

podľa tabuľky č. 3.3, v ktorej máme príklad generovanej hodnoty v normálnom rozdelení.

Obrázok č. 3.1: Argumenty pre vloženie funkcie normálneho rozdelenia v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013



Zdroj: vlastné spracovanie z programu Microsoft Excel

Taktiež sa dá vložiť priamo cez funkciu, ktorej hodnoty sú vyobrazené na Obrázku č. 3.1, kde do políčok:

Probability – zadáme funkciu generovania náhodných čísel RANDOM,
Mean – zadáme odkaz na bunku, v ktorej máme strednú hodnotu,
Standard_dev – predstavuje odkaz so smerodajnou odchýlkou.

Tabuľka č. 3.3: Príklad normálneho rozdelenia generovaného v Microsoft excel 2013

H9 =NORMINV(RAND();H7;H8)

	F	G	H	I
5				
6		**Normálne rozdelenie**		
7		stredná hodnota	5	
8		Smerodajná odchýlka	0,5	
9		vygenerované číslo	4,72612	
10				

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft excel

c) Exponencionálne rozdelenie

Pre vygenerovanie náhodného čísla pri exponencionálnom rozdelení v programe Microsoft Excel nám stačí jedna hodnota a t.j. stredná hodnota rozdelenia. Vygenerované náhodné číslo sme si v Microsoft Excele zobrazili v tabuľke č. 3.4. Do bunky, kde chceme mať náhodné číslo vygenerované, sme zadali funkciu v tvare:

$$= (-\$H\$12) * LN(RAND()) \tag{3.1.3}$$

Tabuľka č. 3.4: Príklad exponencionálneho rozdelenia generovaného v Microsoft Excel 2013

H13 =(-$H$12)*LN(RAND())

	F	G	H	I
10				
11		**Exponencionálne rozdelenie**		
12		stredná hodnota	5	
13		vygenerované číslo	4,02144	
14				

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

d) Diskrétne rozdelenie

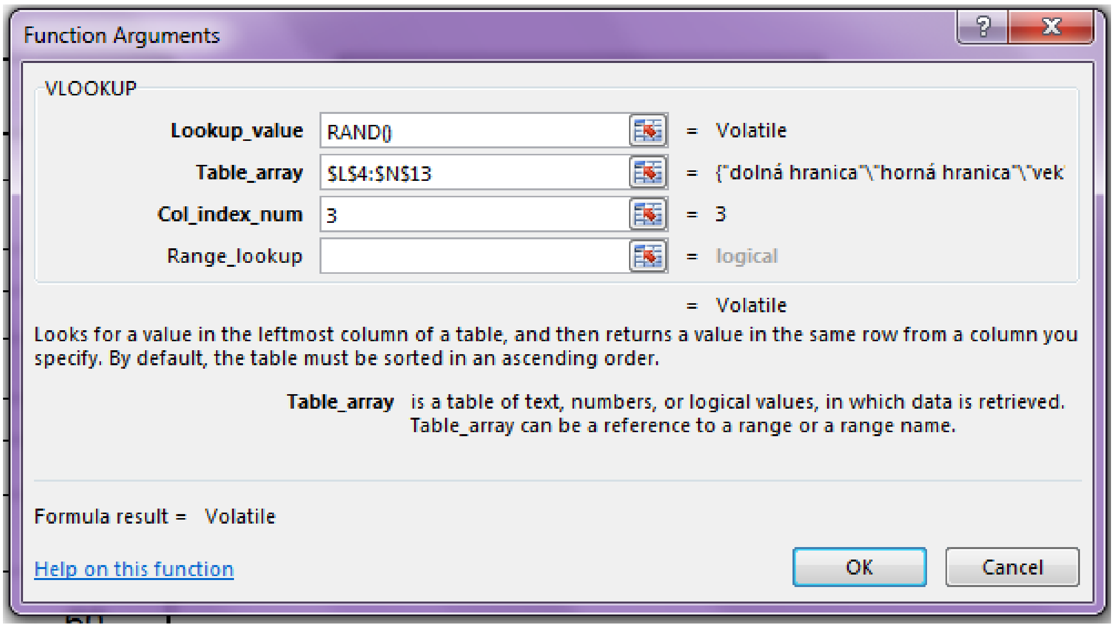
Na funkciu diskrétneho rozdelenia sme potrebovali jednotlivé pravdepodobnosti s príslušnými hodnotami vstupov. Pravdepodobnosti nám prestavujú dolnú a hornú hranicu náhodného čísla. Pre príklad sme použili toto diskrétne rozdelenie pre generovanie náhodného vstupu do simulačného modelu, čo predstavoval vek, v ktorom poistenec uzatváral poistku. Preto sme si vytvorili tabuľku vstupov, ktorá je vyobrazená na tabuľke č. 3.5 a taktiež sme v tejto tabuľke zobrazili príklad vygenerovania náhodného veku. Do bunky v ktorej chceme mať vygenerované náhodné číslo sme mohli zadať funkciu v tvare:

$$= \text{VLOOKUP(RAND();\$L\$4:\$N\$13;3)} \qquad (3.1.4)$$

alebo sme ho mohli vložiť priamo cez funkciu VLOOKUP, ktorej argumenty sú vyobrazené na obrázku č. 3.2. V argumentoch funkcie do políčok zadávame:

Lookup_value – zadáme funkciu pre generovanie náhodných hodnôt RANDOM,
Table_array – označíme tabuľku v Excele, z ktorej hľadáme náhodné číslo,
Col_index_num – zadáme stĺpec, z ktorého chceme, aby nám vrátilo hodnotu.

Obrázok č. 3.2: Argumenty pre vloženie funkcie diskrétneho rozdelenia v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013



Zdroj: vlastné spracovanie z programu Microsoft Excel

Tabuľka č. 3.5: Príklad diskrétneho rozdelenia generovaného v Microsoft Excel 2013

=VLOOKUP(RAND();$L$4:$N$13;3)

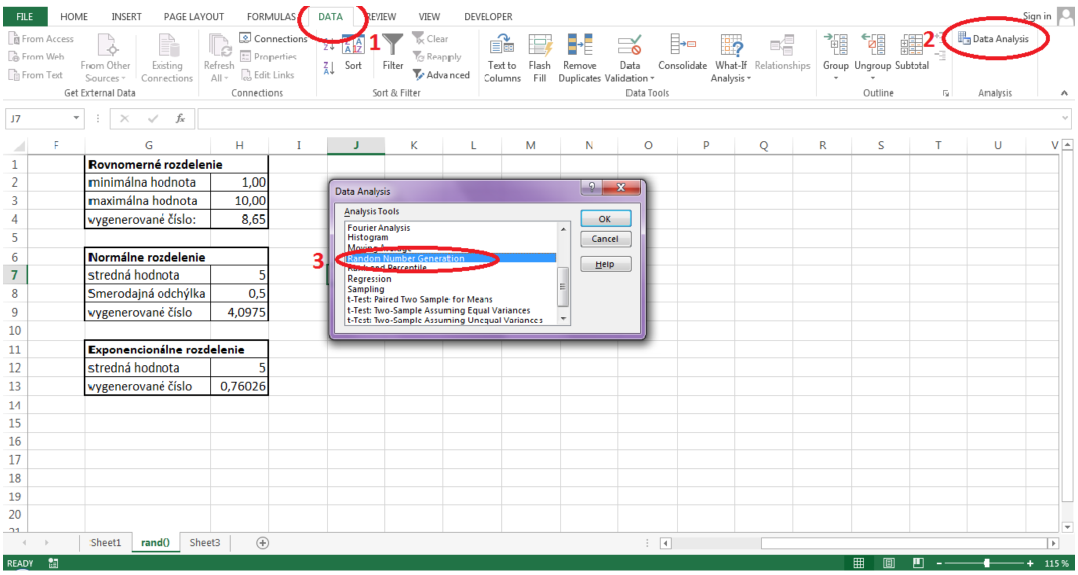
dolná hranica	horná hranica	vek
0	0,05	20
0,05	0,1	25
0,1	0,2	30
0,2	0,27	35
0,27	0,4	40
0,4	0,55	45
0,55	0,75	50
0,75	0,9	55
0,9	1	60

Disrétne rozdelenie	
vygenerované číslo	40

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

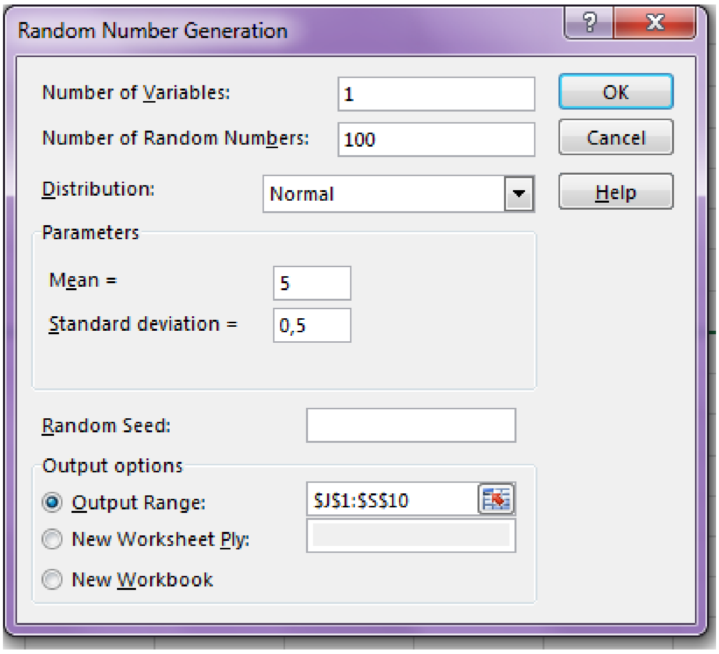
Microsoft Excel má pre generovanie náhodných čísel zabudovaný nástroj „Generátor pseudonáhodných čísel“, ktorý sa nachádza v doplnku Analytické nástroje. Vo verzii Microsoft Excel 2013 si tento generátor nájdeme v záložke DATA a v DATA ANALYSIS vyberieme Random Number Generation. Postup si môžete pozrieť na obrázku č. 3.3 a na obrázku č. 3.4 je zobrazený generátor pseudonáhodných čísel v normálnom rozdelení. Tam si v Distributions môžeme vybrať, aký typ rozdelenia potrebujeme.

Obrázok č. 3.3: Generátor náhodných čísel v programe Microsoft Excel 2013



Zdroj: vlastné spracovanie z programu Microsoft Excel

Obrázok č. 3.4 Normálne rozdelenie cez generátor náhodných čísel



Zdroj: vlastné spracovanie z programu Microsoft Excel

3.2 Model produktu zmiešaného životného poistenia

Ako sme už uviedli v teoretickej časti, zmiešané životné poistenie je poistenie poistenca na dožitie a úmrtie, tzn. že poistencovi bude vyplatená poistná suma, keď sa dožije určitého dátumu, alebo do tohto dátumu zomrie. Každá poisťovňa sa snaží vytvoriť produkt, ktorý jej prinesie maximálny zisk za čo najmenšieho rizika. Aby sme model navrhli čo najspoľahlivejšie, vychádzali sme z predpokladu správneho ocenenia.

Základný model sme vytvárali na základe teórie aktuárstva z *Oceňovania produktov v životnom poistení*[10] do ktorého sme vložili stochastické vstupy, na základe ktorých sme následne vytvárali simuláciu v tabuľkovom programe Microsoft Excel 2013.

Pri oceňovaní produktu sme vychádzali z aktuárskej bázy. „*Aktuárska báza je súbor predpokladov používaných na uskutočnenie jedného alebo viacerých aktuárskych výpočtov.*

[10] [1] Oceňovanie produktov v životnom poistení, Ekonóm 2001, ISBN: 8022513504

Súbor predpokladov sa mení v súlade s cieľom, na ktorý je použitý."[11] Báza sa skladá z dvoch častí. V prvej si stanovíme poistné a v druhej ohodnotíme aktíva a pasíva poisťovne.

Na začiatku zostrojenia modelu v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013, sme si najskôr určili vstupné premenné modelu. Vstupné premenné máme deterministické aj stochastické. V základnej tabuľke sme si určili dobu poistenia, poistnú sumu a o aké platby sa bude jednať (predlehotné alebo polehotné), ktoré predstavujú kontrolovateľné vstupy. Vstupný vek budeme generovať pomocou pseudonáhodných čísel a poistné predstavuje rozhodujúcu premennú, ktorú sa budeme snažiť určiť tak, aby poisťovňa, ktorá dané zmiešané životné poistenie poskytuje nebola v strate. Základnú tabuľku máme vyobrazenú v tabuľke č. 3.6.

Tabuľka č. 3.6: základné vstupy modelu

Premenná	**Hodnota**	**Skratka**
Doba poistenia	5 rokov	DP
Vstupný vek poistenca	generovaný náhodne	vek
Poistná suma	3200,00 €	PS
Poistné	rozhodujúca premenná	P
Platby	predlehotne	Plat

Zdroj: Vlastné spracovanie

V tabuľke č. 3.7 máme vyobrazené faktory z poistnej bázy, ktoré boli použité pre ďalšie výpočty a simuláciu pre výpočet poistného.

Tabuľka č. 3.7: Základné vstupy modelu pre výpočet poistného

Údaj	**hodnota**	**Skratka**
Počiatočné náklady	40 €	PN
Prvoročná provízia	30 %	PP
Marketingové náklady	10 %	MN

[11] [1] Oceňovanie produktov v životnom poistení, Ekonóm 2001, ISBN: 8022513504, str. 46

Údaj	Hodnota	Skratka
Správne náklady	50 €	SN
Udržiavacia provízia	2 %	UP
Terminálne náklady	20 €	TN
Výnos z aktív	generovaný náhodne	VzA
Inflácia nákladov	generovaná náhodne	Inf
Mortalita PT	ŠÚ SR	-
Riziková diskontná miera	3,00%	rdm
Technická úroková miera	1,9 %	tum

Zdroj: vlastné údaje

V ďalšej časti sme si stanovili poistnú bázu poisťovne. Poistná báza poisťovne sa skladá z nasledujúcich zložiek:

- úroková miera,
- úmrtnosť,
- náklady,
- inflácia.

<u>Úroková miera</u>

Úroková miera predstavuje priemernú návratnosť. V modeli budeme používať rizikovú diskontnú mieru a technickú úrokovú mieru. Výber rizikovej diskontnej miery je pre model poistenia veľmi dôležitý. Ak by poisťovňa určila túto mieru príliš vysokú môže nastať, že predpokladaný zisk poisťovne bude vyšší ako skutočný, čím si môže spôsobiť aj stratu. V opačnom prípade, ak predpokladáme nízky úrok môžeme v budúcnosti dosiahnuť vyšší skutočný zisk.

Technická úroková miera, je miera ktorou si poisťovňa pri zmiešanom životnom poistení úročí rezervy. Túto úrokovú mieru si musí poisťovňa stanoviť na celú dobu poistenia. Maximálnu výšku tejto úrokovej miery obmedzuje štát. V Slovenskej republike určuje jej maximálnu výšku Ministerstvo financií SR a Národná banka Slovenska, všeobecne záväzným právnym predpisom. Vývoj maximálnej technickej úrokovej miery je zobrazený na nasledujúcej tabuľke č. 3.8.

Tabuľka č. 3.8: Vývoj maximálnej technickej úrokovej miery v Slovenskej republike

Technická úroková sadzba	**Platnosť od**	**Predpis**
4,0 %	1.3.2004	Vyhláška MF SR č. 50/2004 z 19.1.2004
2,5 %	1.1.2007	Vyhláška NBS č. 172/2006 z 27. marca 2006
2,5 %	1.4.2008	Opatrenie NBS č. 1/2008 z 5. februára 2008
1,9 %	1.1.2014	Opatrenie NBS č. 3/2013 z 25. júna 2013

Zdroj: online z https://www.poistenie.sk/technicka-urokova-miera 05.12.2015

Úmrtnosť (mortalita)

Pre životné poistenia predstavuje úmrtnosť významný faktor. Naopak, nakoľko zmiešané poistenie patrí medzi rezervotvorné, nie je najdôležitejším faktorom. Väčší význam v zmiešanom poistení má úroková sadzba. Nakoľko v našom modeli sme nepredpokladali, že poistené osoby majú nejaké iné špecifiká ako celá populácia (napr. sociálnu príslušnosť, zamestnanie, prostredie a pod.) použili sme komutačné čísla vypočítane z úmrtnostných tabuliek zo Štatistického úradu Slovenskej republiky v roku 2013, ktoré sme priložili do prílohy č. 2. Pri zostavovaní tabuliek úmrtnosti sme počítali s tým, že najvyšší možný dosiahnutý vek je 100 a pri výpočte sme použili rizikovú diskontnú mieru 3 %.

Náklady

Náklady v našom modeli sme si rozdelili na tri základné skupiny podľa času ich vzniku a to:

- počiatočné náklady,
- priebežné náklady,

- terminálne náklady.

Počiatočné náklady vznikajú na začiatku kontraktu a predstavujú množstvo peňažných prostriedkov, ktoré musí poisťovňa vynaložiť pri predaji produktu ako sú napr. zamestnanci, fixné náklady a pod. Počiatočné náklady v našom modeli predstavujú počiatočné náklady ktoré majú pevne stanovenú sumu. Ďalej prvoročnú províziu a marketingové náklady, ktoré predstavujú určité percento z prvoročného poisteného.

Priebežné náklady vznikajú v pravidelne sa opakujúcich intervaloch v priebehu poistenia. V našom modeli sme ich stanovili ako správne náklady, ktoré slúžia na správu poistenia a od druhého roku podliehajú inflácií a udržiavacia provízia, ktorá sa platí z druhoročného a ďalšieho poistného.

Terminálne náklady vznikajú pri ukončení poistnej zmluvy. V prípade zmiešaného poistenia ide o vyplatenie pri úmrtí alebo dožití sa určitého veku. Medzi terminálne patria aj také náklady, ktoré vznikajú pri kontrole, či nastali podmienky určené v kontrakte.

Inflácia

V poistnej báza má dôležitú úlohu aj inflácia. Nakoľko sa inflácia môže pribežne meniť, v našom odeli sme ju stanovili ako náhodnú premennú pre každý rok poistenia. Na základe údajov zo Štatistického úradu Slovenskej republiky sme si pozreli infláciu za posledné roky na Slovensku a stanovili sme jej interval od 0,5 po 4 %. V nasledujúcej tabuľke č. 3.9 máme infláciu za posledné roky.

Tabuľka č. 3.9: Inflácia za roky 2009 – 2015 v %

Rok	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Inflácia	0,9	0,7	4,1	3,7	1,5	-0,1	1

Zdroj: Štatistický úrad Slovenskej republiky

Ako posledný zdroj údajov pre náš model sme si vytvorili tabuľku pravdepodobnosti, ktorá bude obsahovať stĺpce:

- rok poistenia,
- vek na začiatku roku poistenia,

- pravdepodobnosť úmrtia,
- pravdepodobnosť prežitia,
- faktor prežitia.

Nakoľko sme si stanovili dobu poistenia na 5 rokov, tak hodnoty v stĺpci roku poistenia sú 1 až 5. V druhom stĺpci, vek na začiatku roku poistenia, sme zadali do prvého riadku odkaz na bunku v ktorej máme vstupný vek. Ten bude generovaný náhodne. Hodnoty do nasledujúcich riadkov sme vypočítali vždy následným pripočítaním jedného roku.

Tretí stĺpec predstavuje pravdepodobnosť úmrtia, ktorú vypočítame pomocou zabudovanej funkcie VLOOKUP. Nakoľko máme komutačnú tabuľku, v Excele sme využili funkciu VLOOKUP (nájdenie). Pre použitie funkcie VLOOKUP v Excele sme zadali za rovná sa VLOOKUP a zátvorku s tromi hodnotami oddelenými čiarkami. Prvá hodnota predstavuje hodnotu/výraz, ktorý chceme v danej tabuľke nájsť. Vo výpočte pravdepodobnosti úmrtia sme tam dali odkaz na vek na začiatku roku poistenia. Druhá časť predstavuje tabuľku v ktorej hľadanú hodnotu/výraz hľadáme, čo je v našom prípade komutačná tabuľka, ktorú sme si označili KT. Do tretej hodnoty zadávame číslo stĺpca z ktorého chceme vrátiť hodnotu, čiže 4. V štvrtom stĺpci v komutačnej tabuľke máme hodnoty pravdepodobnosti úmrtia.

Do bunky s pravdepodobnosťou úmrtia dáme teda v Excele vzorec: =VLOOKUP(B2;KT;4). Tým istým spôsobom sme si vypočítali aj pravdepodobnosť prežitia, len namiesto odkazu na štvrtý stĺpec sme udali piaty, v ktorom máme pravdepodobnostné hodnoty prežitia v jednotlivých vekoch. Vzorec teda je: =VLOOKUP(B2;KT;5).

Faktor prežitia v prvom roku je 1. V nasledujúcich rokoch ho dopočítame pomocou vzorca v ktorom od faktora prežitia v predchádzajúcom roku vynásobíme pravdepodobnosťou prežitia v tom istom roku. čiže v nasledujúcej tabuľke č. 3.10, v ktorej máme príklad pravdepodobnostnej tabuľky pre poistenca so vstupným vekom 45. Čiže napríklad v treťom riadku tabuľky, v bunke E3 je vzorec: =E2*D2.

Tabuľka č. 3.10: Príkladná tabuľka pravdepodobnosti

Rok poistenia	Vek na začiatku roku poistenia	Pravdepodobnosť úmrtia	Pravdepodobnosť prežitia	Faktor prežitia
1	45	0,002924522	0,997075478	1,000000000
2	46	0,003203528	0,996796472	0,997075478
3	47	0,003547727	0,996452273	0,993881318
4	48	0,003989696	0,996010304	0,990355300
5	49	0,004436734	0,995563266	0,986404082

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

3.3 Výpočet čistej prítomnej hodnoty

V tomto kroku modelu sme počítali čistú prítomnú hodnotu (ďalej len NPV) poistky. NPV sme vypočítali na základe teoretickej časti zo strany 27 a vzorca 1.3.9. Pre výpočet metódy je nutné využiť tabuľku komutačných čísel. Tento výpočet NPV sme si rozdelili do 4 nasledujúcich častí:

- určili sme si bežné netto poistné,
- určili sme si poistnú rezervu poisťovne najskôr na 1 €, a potom na celú poistnú sumu,
- zistili sme peňažné toky poisťovne na danú poistku za jednotlivé roky poistenia,
- vypočítali sme NPV.

3.3.1 Výpočet bežného netto poistenia

Jednorazové bežné netto poistenie pre zmiešané poistenie sme počítali pomocou komutačných tabuliek z prílohy č. 2. Nakoľko sa snažíme zistiť optimálnu ročnú sumu poistenia, budeme toto jednorazové bežné netto poistné počítať na jeden rok. Na výpočet sme použili vzťah pre zmiešané životné poistenie:

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{3.3.1}$$

kde:

$A_{x,\dot{n}|}$ - jednorazové netto poistné,

M_x – súčet z počtov všetkých zomretých vo veku x, ktoré sú odúročené k dátumu narodenia,

M_{x+n} – sčítané počty všetkých zomretých vo veku x + n, ktoré sú odúročené k dátumu narodenia,

D_{x+n} – predstavuje počet žijúcich ľudí vo veku x + n odúročených k ich dátumu narodenia

D_x – je počet žijúcich ľudí vo veku x odúročených k ich dátumu narodenia.

Nakoľko máme komutačnú tabuľku v Excele sme využili funkciu VLOOKUP. Pre výpočet jednorazového netto poistenia sme tam dali odkaz na vek poistenca, respektíve sumu veku poistenca s dobou poistenia, ktorú sme si označili DP. V Druhej časti príkazu sme zadali odkaz na komutačná tabuľku, ktorú sme si označili KT. Do tretej hodnoty zadávame číslo stĺpca z ktorého chceme vrátiť hodnotu. Do bunky, kde chceme mať vypočítanú hodnotu jednorazového netto poistenia sme zadali vzorec pre výpočet jednorazového netto poistenia rozpísaný cez príkaz VLOOKUP:

$$= \frac{VLOOKUP(vek, KT,10) - VLOOKUP(vek + DP, KT,10) + VLOOKUP(vek + DP, KT,6)}{VLOOKUP(vek, KT,6)} \quad (3.3.2)$$

pričom v desiatom stĺpci v komutačnej tabuľke máme hodnoty M_x a v šiestom stĺpci zasa hodnoty D_x.

Ak však chceme vypočítať bežné netto poistné na celú sumu poistenia, potrebujeme dôchodok platenia. Dôchodok platenia (*DP*) na 1 € poistnej sumy sme si vypočítali pomocou komutačných čísel cez vzorec pre zmiešané životné poistenie:

$$\ddot{a}_{x,\dot{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (3.3.3)$$

Pri výpočte dôchodku platenia sme tak isto využili zabudovanú funkciu v Microsoft Excele VLOOKUP. Pomocou tejto funkcie sme zadali vzorec do bunky, kde chceme mať vypočítaný dôchodok platenia:

$$= \frac{VLOOKUP(vek, KT, 7) - VLOOKUP(vek + DP, KT, 7)}{VLOOKUP(vek, KT, 6)} \tag{3.3.4}$$

pričom v komutačnej tabuľke máme v siedmom stĺpci hodnoty N_x a v šiestom stĺpci hodnoty D_x.

Keď sme si vypočítali hodnoty jednorazového netto poistenia a dôchodku platenia, mohli sme si pomocou jednoduchého predelenia jednorazového netto poistenia dôchodkom platenia vypočítať bežné netto poistné na jedno euro. Ak by sme potrebovali vypočítať bežné netto poistné na celé poistné, stačí ak toto netto poistné vynásobíme poistným. V našom príklade poistné predstavuje našu poistnú premennú, pri vytváraní poistného sme určili sumu 800 €. V simulácií budeme počítať *NPV* pre rôzne poistné.

3.3.2 Poistná rezerva

Nakoľko si poisťovňa vytvára aj poistnú rezervu, ktorú budeme potrebovať v ďalších výpočtoch, v tejto časti sme vytvárali tabuľku, z ktorej ju budeme počítať pre jednotlivé prípady. Poistnú rezervu si poisťovňa vytvára pre prípad nastátia mimoriadnych výdavkov, na ktoré musí mať krytie. Pre výpočet sme použili pravdepodobnosť prežitia (p_x) a pravdepodobnosť úmrtia (q_x) z pravdepodobnostnej tabuľky z prílohy č. 1. Keďže je doba poistenia päť rokov, tak ich má aj tabuľka v ktorej sme počítali rezervu okrem riadku názvov. Tabuľka č. 3.11 obsahuje príklad pre poistenca so vstupným vekom 45 rokov. Tabuľka obsahuje rezervy na 1 €, ako aj na celú poistnú sumu.

Tabuľka č. 3.11: Poistná rezerva

Rok poistenia	Pravdepodobnosť úmrtia	Pravdepodobnosť prežitia	Rezerva na 1 euro poistnej sumy	Rezerva na poistnú sumu
1	0,002 925	0,997075478	0,000 000	0,00
2	0,003 204	0,996796472	0,191526052	612,88
3	0,003 548	0,996452273	0,387092031	1238,69
4	0,003 990	0,996010304	0,586871565	1877,99
5	0,004 437	0,995563266	0,791079046	2531,45

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

V tabuľke č. 3.11 máme päť stĺpcov. V prvom stĺpci nazvanom rok poistenia máme čísla 1 až 5, lebo doba poistenia predstavuje 5 rokov. Pre pravdepodobnosť prežitia a pravdepodobnosť úmrtia sme sa odkázali na bunky v pravdepodobnostnej tabuľke. Pri výpočte rezervy na 1 € poistnej sumy sme použili vzorec:

$$RnEvR_n = \frac{RnEvR_{n+1} * p_x + q_x}{(1 + tum) - BNP} \quad (3.3.5)$$

kde:

$RnEvR_n$ je rezerva na jedno euro v roku n,

$RnEvR_{n+1}$ predstavuje rezervu na jedno euro v roku n + 1,

p_x je pravdepodobnosť prežitia,

q_x je pravdepodobnosť úmrtia,

tum je technická úroková miera,

BNP je bežné netto poistné na jedno euro.

V Excele sme teda do bunky pre prvý rok v bunke rezerva na 1 euro poistnej sumy zadali príkaz:

$$RnEvR_n = ((\mathrm{D10} * \mathrm{C9} + \mathrm{B9})/(1 + \mathrm{tum}) \text{ - } \$\mathrm{H}\$2) \quad (3.3.6)$$

kde:

$H$2 – je pevne zafixovaná bunka, v ktorej sme vypočítali bežné netto poistné na 1 € poistnej sumy. Ostatné riadky sme dopočítali obdobným spôsobom.

Rezervu na celú poistnú sumu (*RnPS*) sme si potom jednoducho dopočítali tak, že sme rezervu na 1 € poistnej sumy vynásobili poistným, ktoré sme si zatiaľ stanovili na 800 €.

3.3.3 Peňažné toky poisťovne za jednotlivé roky

Peňažné toky v poisťovni sme rátali za jednotlivé roky. Tieto peňažné toky sme si zobrazili v tabuľke č. 3.12.

Tabuľka č. 3.12: Peňažné toky poisťovne za jednotlivé roky

Rok poistenia	Toky na začiatku roku			Toky na konci roku				Celkové peňažné toky
	Poistné	Náklady	Úrok	Poistné plnenie smrti	Náklady na PP smrti	Poistné plnenie na dožitie	Náklady na PP dožitia	
1	800	360,00	5,25	9,36	0,06	0,00	0,00	447,08
2	800	66,57	8,75	10,25	0,07	0,00	0,00	750,25
3	800	67,14	8,74	11,35	0,07	0,00	0,00	747,63
4	800	67,72	8,74	12,77	0,08	0,00	0,00	744,89
5	800	68,30	8,73	14,20	0,09	3185,80	21,06	-2 480,70

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

Základnou rovnicou pre výpočet peňažných tokov za jednotlivé roky bolo odpočítanie výdavkov od príjmov poisťovne za poistku. Poisťovňa mala peňažné toky na začiatku roku, ako aj na konci roku. Na začiatku roku mala príjmy poistné a úrok a náklady na začiatku roku. Poistné predstavovalo sumu poistného, ktorú platil poistenec poisťovni vždy na začiatku roku, v tabuľke č. 3.12, to bolo 800 € (táto suma sa bude v simulácií meniť na základe generovania náhodných čísel). Nakoľko na výpočet úroku z investovaných aktív poisťovne, sme potrebovali aj náklady, tak v druhom stĺpci peňažných tokov na začiatku roku máme náklady. Tie sme v prvom roku počítali nasledovne:

$$N = PN + (PP + MN) * P \qquad (3.3.7)$$

pričom pri ich počítaní v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013 sme sa odkázali na bunku s ich hodnotou v tabuľke č. 3.6: Základné vstupy modelu a tabuľku č. 3.7: Základné vstupy pre výpočet poistného.

N predstavuje náklady, ktoré počítame do danej bunky. *PN* sú počiatočné náklady, ktoré sme si v tabuľke č. 4 určili ako 40 €. *PP* predstavujú prvoročnú províziu, ktorú sme si zadefinovali v tabuľke pre výpočet poistného ako 30 % z prvoročného poistného (čiže v tabuľke č. 7 sme ju rátali zo sumy 800 €). *MN* sú marketingové náklady, a tiež sme sa na ne odkazovali na tabuľku pre výpočet poistného, kde predstavujú 10 % z prvoročného poistného. *P* je poistné (takže v tabuľke č. 3.12, ktorá je názorná pre výpočet peňažných tokov sme použili poistné 800 €).

V ďalších rokoch sme náklady počítali pomocou správnych nákladov (z tabuľky. č.4 ako *SN*), ktoré podliehajú inflácií, a taktiež pomocou udržiavacej provízie (*UP*, tiež z tabuľky č. 4). *Inf* predstavuje infláciu. Pre výpočet sme použili vzorec:

$$N = SN * (1 + \inf)^{n-1} + UP * P \qquad (3.3.8)$$

Do tabuľky č. 3.12 sme potom zadali do bunky pre náklady za 2 rok poistenia vzorec:

$$\acute{U}rok = \mathrm{SN} * \mathrm{POWER}(1 + \mathrm{inf;}1) + \mathrm{UP} * \mathrm{P} \qquad (3.3.9)$$

ktorý sme následným ťahaním dole skopírovali pre roky 3 až 5.

Keď že sme vypočítali náklady za jednotlivé roky, mohli sme následne vypočítať aj výšku úrokov z investovaných aktív poisťovne. Ten sme počítali pomocou vzorca:

$$\acute{U}rok = \frac{VzA * (P - N)}{100} \qquad (3.3.10)$$

kde z výpočtu nákladov vieme, že *N* sú náklady a *P* je poistné (800 €). *VzA* predstavuje výnos z aktív, ktorý sa bude v simulácií meniť náhodne pre každý rok poistného. Vďaka teoretickej časti a vysvetleniu generovania náhodných premenných sme použili pre *VzA* rovnomerné rozdelenie s minimálnou hodnotou 0,5 % a maximálnou hodnotou 4 %. Pre výpočet úroku do vzorca teda miesto *VzA* zadávame:

$$VzA = (\$M\$23 + (\$M\$24 - \$M\$23) * \mathrm{RAND}())/100 \qquad (3.3.11)$$

hodnoty máme uvedené v tabuľke č. 3.13 so zobrazením príslušných buniek v programe Microsoft Excel pre jednoduchšie pochopenie vzorca pre *VzA*.

V ďalšej časti tabuľky č. 3.12 sme počítali peňažné toky na konci roku. Tu sme rátali

- poistné plnenie smrti,
- náklady na poistné plnenie smrti,
- poistné plnenie na dožitie,
- náklady na poistné plnenie dožitia.

Poistné plnenie na smrť sme vypočítali tak, že za každý rok poistenia sme vynásobili poistnú sumu (narp. 800 €) pravdepodobnosťou úmrtia v danom roku. Pravdepodobnosti úmrtia v jednotlivých rokov už máme vypočítane buď v pravdepodobnostnej tabuľke alebo v tabuľke na výpočet poistných rezerv. Náklady na poistné plnenie smrti sme rátali pomocou terminálnych nákladov (*TN*), inflácie (*inf*) a pravdepodobnosti úmrtia (q_x) pre jednotlivé roky *n*. Pre ich výpočet sme použili vzorec:

$$NnaPPSmrti = q_x * TN * (1 + \inf)^n \tag{3.3.12}$$

Poistné plnenie dožitia sme rátali len v piatom roku, nakoľko sa predpokladá, že výplatná suma sa bude poistencovi vyplácať v prípade dožitia sa daného veku. Pri jeho výpočte sme postupovali tak, že sme si poistnú sumu vynásobili pravdepodobnosťou prežitia daného človeka v piatom roku. A taktiež náklady pre poistné plnenie dožitia sme počítali len v piatom roku pomocou pravdepodobnosti prežitia (p_x) v roku n t.j. v piatom roku, na základe vzorca:

$$NnaPPZivota = p_x * TN * (1 + \inf)^n \tag{3.3.13}$$

Po výpočte peňažných tokov na začiatku a na konci každého roku sme si mohli vypočítať celkové peňažné toky v tabuľke č. 3.12. Tie sme v každom roku rátali tak, že sme si od poistného odrátali položky, ktoré predstavujú poisťovni mínusy pri danej poistke a pripočítali sme plusy. Medzi plusy patrí úrok poisťovne z výnosu aktív. Mínusové položky predstavujú náklady v tokoch na začiatku roku a všetky stĺpce v tokoch na konci roku.

Tabuľka č. 3.13: Normálne rozdelenie pre výpočet VzA

výnos z aktív

rovnomerné rozdelenie	
min	0,50
max	4,00

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

3.3.4 Výpočet čistej prítomnej hodnoty (NPV)

K simulácií pre výpočet poistného budeme vychádzať z hlavnej hodnoty, ktorou je čistá prítomná hodnota. Nakoľko čistú prítomnú hodnotu máme opísanú v teoretickej časti na strane 27, v praktickej časti sme sa sústredili len na jej výpočet v našom modeli. Jej hodnotu za jednotlivé roky v päť ročnej dobe poistenia ako aj jej kumulovanú hodnotu za roky sme počítali v tabuľke č. 3.14.

Podstatnú zložku vo výpočte NPV predstavuje signatúra zisku ako aj vektor zisku. Rezervy na poistnú sumu a faktor prežitia sme si len skopírovali (resp. v Microsoft Excele sme sa odkázali na ich bunky) zo skorších výpočtov. Výnos z rezerv sme počítali prenásobíme *rezervy na PS*, ktorú máme v vo výpočtoch v Excele v bunke: *B24* a hodnoty *VzA*, ktorú nám pre každý rok počíta náhodne, čiže v bunke výnos z rezerv sme použili vzorec, kde sme sa za rovná sa odkázali na bunku *rezerva na PS*, ktorú sme vynásobili použitím vzorca 3.2.5, ktorý sme dali do zátvorky, čiže:

$$VzR = B24 * ((\$M\$23 + (\$M\$24 - \$M\$23) * \mathrm{RAND}())/100) \qquad (3.3.14)$$

kde:
VzR je výnos z rezerv.

Zmenu v rezervách sme potom vyrátali pre rok *x* tak, že *RnPS* v roku *n + 1* sme vynásobili pravdepodobnosťou prežitia v roku *x* a odpočítali sme od toho *VzR* v roku *n*. Čiže:

$$ZvR_n = (RnPS_{n+1} * p_x) - RnPS_n \qquad (3.3.15)$$

Vektor zisku sme si následne do ďalšieho stĺpca dopočítali tak, že k celkovým peňažným tokom za rok n sme pripočítali výnos z rezerv a odpočítali zmenu v rezervách. Obdobným spôsobom sme ho vypočítali aj v nasledujúcich rokoch. Z vektoru zisku si ľahko vypočítame aj jeho signatúru tak, že tento vektor vynásobíme faktorom prežitia. Nakoľko sme si vyjadrili všetky premenné, ktoré sú potrebné pre výpočet čistej prítomnej hodnoty, mohli sme vypočítať čistú prítomnú hodnotu dosadením premenných do vzorca:

$$NPV = \frac{\mathrm{SZ}}{(1+\mathrm{rdm})^{\mathrm{n}}} \tag{3.3.16}$$

kde:

SZ je signatúra zisku,

rdm je riziková diskontná miera,

n je rok v ktorom rátame *NPV*.

Akumulovaná NPV je sčítavaná NPV za jednotlivé roky. Čiže čistú prítomnú hodnotu potrebnú do našej simulácie sme vzali z tabuľky č. 3.14, v piatom roku ako akumulovanú NPV, čo predstavuje sumu zisku poisťovne z danej poistky. Pre vzorový príklad, čiže pre 45 ročného poistenca s poistným 800 € predstavuje sumu 205,47 €. Je to suma, ktorú zarobí poisťovňa na danej poistke.

Tabuľka č. 3.14: Výpočet NPV

Rok poistenia	Rezerva na PS	Výnos z rezerv	Zmena rezerv	Vektor zisku	Faktor prežitia	Signatu -ra Zisku	NPV	Akumu-lovaná NPV
1	0,00	0,00	611,09	-175,26	1,00000	-175,26	-170,16	-170,16
2	612,88	7,31	621,84	117,33	0,99708	116,99	110,28	-59,88
3	1 238,69	14,78	632,63	112,32	0,99388	111,64	102,16	42,28
4	1 877,99	22,40	643,36	107,21	0,99036	106,17	94,33	136,62
5	2 531,45	30,20	-2531,453	80,92	0,98640	79,82	68,86	205,47

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

3.4 Simulácia určenia výšky poistného

V predchádzajúcej podkapitole sme si vypočítali čistú prítomnú hodnotu. Na základe čistej prítomnej hodno sme v tejto podkapitole navrhli simulačný model pomocou ktorého stanovíme výšku poistného tak, aby poisťovňa pri uzatváraní danej poistky nebola v state. Simuláciu vytvárame v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013. Simuláciu máme zobrazenú v tabuľke č. 3.15.

Tabuľka č. 3.15: Simulačný model výpočtu NPV pre jednotlivé poistné

B89 =NPV

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
88																			
89	NPV	205,47202																	
90																			
91	**Poradové číslo**									**poistné**									
92	**205,47**	550,00	570,00	590,00	610,00	630,00	650,00	670,00	690,00	710,00	730,00	750,00	770,00	790,00	810,00	830,00	850,00	870,00	890,00
93	1	-874,43	-674,88	-691,13	-422,98	-298,39	-447,95	-146,85	-181,25	-111,77	135,50	119,28	237,68	358,51	238,07	239,55	620,56	621,94	707,17
94	2	-864,52	-622,93	-508,79	-413,93	-351,93	-326,01	-376,69	-193,20	-6,53	35,01	-5,37	155,35	243,59	342,16	259,66	547,91	741,01	723,23
95	3	-845,11	-574,49	-583,42	-633,32	-547,26	-397,05	-106,08	-210,67	-143,76	-10,01	-93,23	272,72	300,75	203,92	472,09	348,78	519,13	562,12
1090	998	-670,98	-717,00	-598,39	-551,10	-474,37	-381,57	-177,05	-261,73	-45,15	-2,00	-126,96	166,84	139,48	315,77	458,93	422,68	691,27	542,58
1091	999	-850,74	-706,08	-546,57	-547,05	-429,43	-253,02	-193,61	-50,53	-97,97	-117,39	-81,01	308,00	403,50	428,11	362,64	477,97	649,20	565,95
1092	1000	-627,96	-540,33	-551,75	-436,41	-360,22	-450,18	-110,92	-123,82	7,00	103,11	-94,76	146,10	318,87	304,15	474,85	378,75	603,31	809,23
1093																			
1094	**popisné štatistiky**																		
1095	**priemerné NPV**	-762,86	-678,91	-596,74	-514,59	-430,92	-341,95	-257,47	-178,26	-96,71	-13,43	68,54	154,32	238,52	319,51	400,91	489,53	573,44	654,13
1096	**smerodajná odchýlka**	77,19	81,65	82,48	81,49	81,73	85,41	84,65	83,99	86,49	87,62	88,38	89,17	90,10	90,51	92,40	92,63	95,27	97,93
1097																			
1098	**min NPV**	-935,91	-857,70	-774,10	-693,18	-616,27	-523,48	-453,83	-370,95	-288,10	-205,37	-126,96	-44,93	30,53	107,36	192,14	274,03	352,96	428,63
1099	**max NPV**	-602,57	-518,97	-433,71	-350,90	-260,68	-177,29	-91,43	-13,13	76,65	158,86	250,37	338,47	417,96	502,70	593,45	681,20	758,68	852,99
1100																			
1101	**interval spoľahlivosti**																		
1102	**dolná hranica**	-767,64	-683,97	-601,85	-519,64	-435,98	-347,24	-262,72	-183,46	-102,07	-18,86	63,07	148,80	232,93	313,90	395,19	483,79	567,53	648,06
1103	**horná hranica**	-758,07	-673,85	-591,63	-509,54	-425,85	-336,65	-252,23	-173,05	-91,35	-8,00	74,02	159,85	244,10	325,12	406,64	495,27	579,34	660,20
1104																			
1105																			

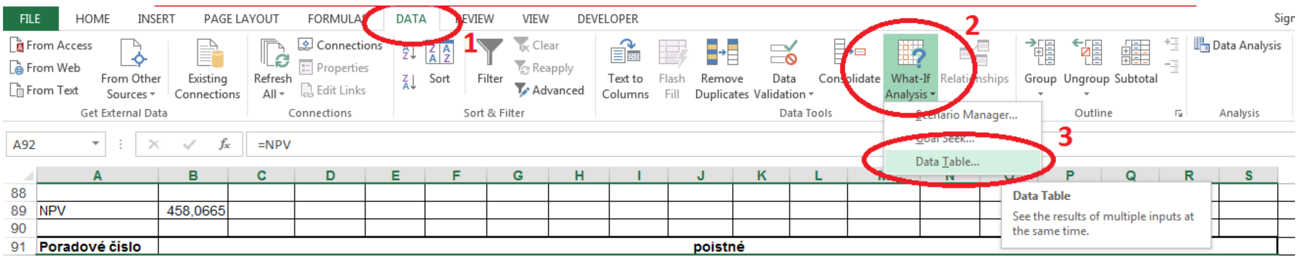
Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

Simulačný model sme vytvárali cez tabuľku údajov. Simuláciu sme vytvárali pre 1000 hodnôt, ktoré sme generovali náhodne. V tabuľke máme zobrazené výšky čistej prítomnej hodnoty. Prítomnú hodnotu rátame vždy cez náš model rozpísaný v podkapitole 3.2 Model produktu zmiešaného životného poistenia a 3.3 Výpočet čistej prítomnej hodnoty. Simulácia počíta 1000 riadkov hodnôt pre rôzne poistné, ktorých hodnota je vždy na vrchu daného stĺpca. V tabuľke č. 3.15 máme zobrazené iba riadky 1-3 a 998-1000. Zvyšné riadky sú v tabuľke č. 3.15 skryté kvôli prehľadnosti simulácie.

Pre vytvorenie dátovej tabuľky sme si najskôr v tabuľke vypísali hodnoty výšky poistného, pre ktoré chceme model simulovať. Do ľavého horného rohu sme zadali odkaz na bunku v ktorej nám model ráta NPV. Následne sme si vybrali tabuľku údajov v rozsahu A92:S1092. V stĺpci A92:A1092 máme uvedené poradové čísla simulácie.

Po vysvietení buniek, do ktorých chceme simuláciu vygenerovať (A92:S1092) klikneme v tabuľkovom procesore Microsoft Excel 2013 na záložku DATA a v nej na What-if analysis a vyberieme možnosť DATA TABLE, čo máme vyobrazené na obrázku č. 3.5.

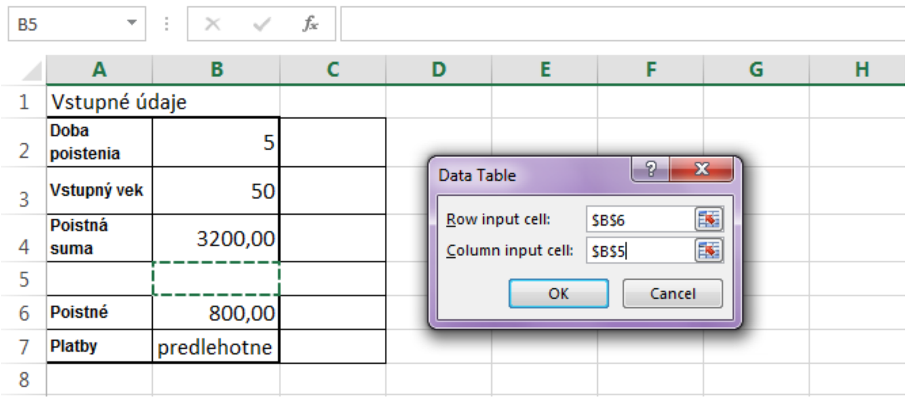
Obrázok č. 3.5 Zobrazenie výberu dátovej tabuľky



Zdroj: vlastné spracovanie z programu Microsoft Excel

Na obrázku č. 3.6 máme zadávanie vstupných buniek do dátovej tabuľky. V okne dátovej tabuľky sme si zadali do prvého riadku Row input cell odkaz na bunku v ktorej máme našu rozhodujúcu premennú. Čiže v našej simulácii sme tam zadali odkaz zo vstupných údajov na hodnotu poistného, čiže bunku \$B\$6 a do druhého riadku môžeme dať odkaz na akúkoľvek prázdnu bunku, my sme tam dali odkaz na bunku \$B\$5.

Obrázok č. 3.6: Vstupné údaje v dátovej tabuľke



Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel

Následne sa nám po stlačení tlačidla OK vygenerujú údaje NPV do buniek v oblasti B93:S1092, čo máme vyobrazené aj v tabuľke č. 3.15.

Zo simulácie sme si potom vyrátali popisné štatistiky pre jednotlivé stĺpce, čiže pre jednotlivé poistné. V popisných štatistikách sme rátali priemernú NPV, smerodajnú odchýlku a 95 % intervalu spoľahlivosti. Taktiež sme si zobrazili minimálnu a maximálnu hodnotu NPV. Výpočet popisných štatistík sme v práci vypísali pre prvú hodnotu poistného, čo je

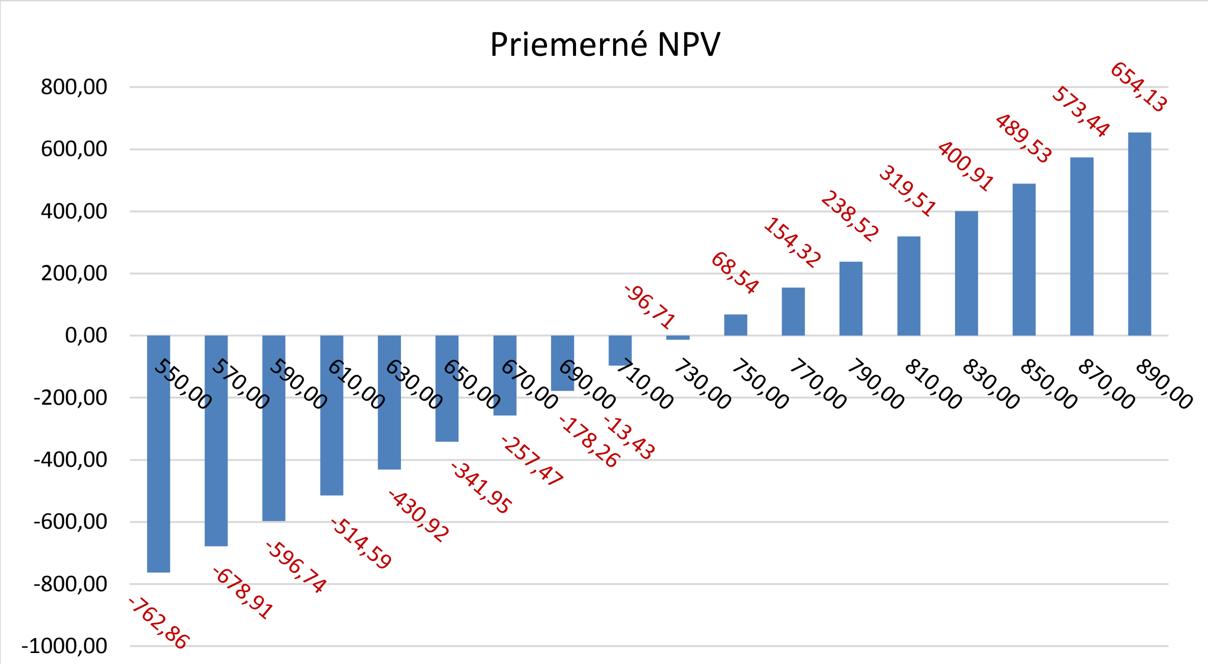
550,00 €. Pre zvyšné hodnoty poistného sme vzorce v programe Microsoft Excel skopírovali z tejto hodnoty. Pre výpočty popisných štatistík sme použili nasledujúce funkcie:

- Priemerná NPV – do bunky sme zadali: =AVERAGE(B93:B1092)
- Smerodajná odchýlka – zadali sme funkciu: =STDEV(B93:B1092)
- Minimálne NPV – do bunky sme zadali: =MIN(B93:B1092)
- Maximálne NPV – zadanie funkcie do bunky: =MAX(B93:B1092)
- Dolná hranica intervalu spoľahlivosti: =B1095-1,96*B1096/SQRT(1000)
- Horná hranica intervalu spoľahlivosti: =B1095+1,96*B1096/SQRT(1000)

V simulácií pre poistné 550,00 € nám vyšla priemerná NPV -762,86 € so smerodajnou odchýlkou 77,19. Smerodajná odchýlka ukazuje ako sa pohybujú hodnoty okolo strednej hodnoty (priemeru NPV). Minimálnu hodnotu NPV sme odsimulovali ako -935,91 € a maximálnu hodnotu NPV ako -602,57 €. Na základe vypočítaného intervalu spoľahlivosti môžeme povedať, že s presnosťou 95 % sa bude stredná hodnota NPV pre poistné 550,00 € pohybovať v intervale (-767,64;-758,07). Interval spoľahlivosti si môžeme overiť stlačením klávesy F9 na počítači, čím nám znovu zbehne simulácia a vygeneruje iné náhodné čísla, ktorej výsledky sa môžu mierne odlišovať.

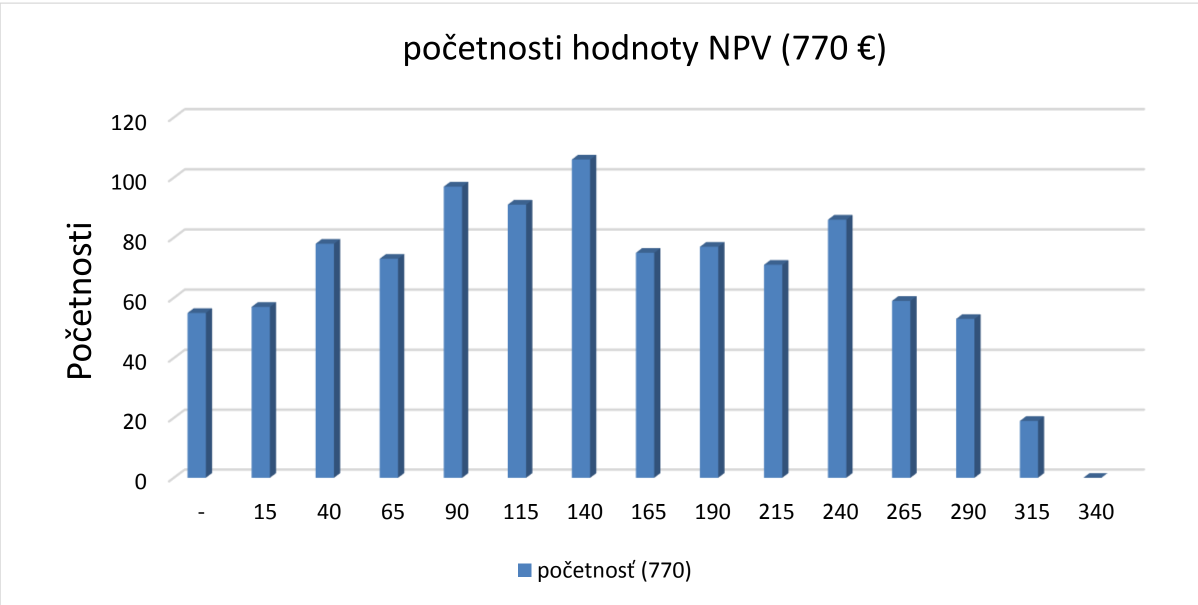
Nakoľko sme v našej simulácií hľadali také poistné, v ktorom by poisťovňa nedosahovala stratu, vytvorili sme si graf, v ktorom sme vyobrazili priemerné poistné NPV z tistíc náhodne vygenerovaných hodnôt pre poistné 550,00 € až 890,00 €. Výsledky sú vyobrazené na grafe č. 3.1. Nakoľko sa s generovaním rôznych náhodných čísel mení priemerná NPV, môžeme si na grafe č. 3.1 všimnúť, že poisťovňa začína dosahovať zisk z poistného ktoré sa nachádza v intervale (730 € - 750 €). Pričom príklad distribúcie hodnôt NPV z náhodného generovania pre poistné 770 € sme zobrazili na grafe č. 3.2.

Graf č. 3.1: Priemerné NPV



Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel 2013

Graf č. 3.2: Distribúcia hodnôt NPV pri poistnom 770 €



Zdroj: vlastné spracovanie v programe Microsoft Excel 2013

Záver

Cieľom našej práce bolo navrhnúť simulačný model pre výpočet poistného v zmiešanom životnom poistení pomocou netradičnej metódy Monte Carlo, ktorá využíva stochastické vstupy.

V úvodnej časti sme sa venovali popisu princípu metódy Monte Carlo, ktorá sa v poistnej matematike pre stanovenie poistného v súčasnosti veľmi nevyužíva. V súčasnosti sa používajú metódy na princípe profit testingu [12]. Avšak tento princíp je veľmi zdĺhavý, pretože v modeli treba zakaždým meniť vstupné poistné a v prípade rôznych vstupov ho prepočítavať s následným testom senzitivity. Metóda Monte Carlo je jednoduchšia a berie do úvahy už aj stochastické premenné. Na základe možnosti opakovať simuláciu aj niekoľko tisíckrát, je táto metóda pomerne presná.

V hlavnej časti našej práce sme zostrojili simulačný model metódou Monte Carlo, ktorý pri zadaní rôznych vstupných premenných (stochastických aj deterministických) vypočíta priemerný zisk poisťovne z poistného produktu vo forme priemernej čistej prítomnej hodnoty. Z priemernej čistej prítomnej hodnoty sme určili výšku poistného, čo bola naša rozhodujúca premenná, pre produkt poisťovne tak, aby nebola poisťovňa pri danom produkte v strate. Tento produkt predstavovalo uzatváranie poistky zmiešaného životného poistenia poistencami rôznych vekových skupín.

Model sme zostrojili na základe čiastkových krokov, ktoré nám pomohli k vypočítaniu čistej prítomnej hodnoty. Najskôr sme vypočítali bežné netto poistenie, poistnú rezervu a celkové peňažné toky poisťovne. Z celkových peňažných tokov poisťovne sme vypočítali čistú prítomnú hodnotu jednej poistnej zmluvy. Následne sme riešili simulačný model, v ktorom sme výpočet čistej prítomnej hodnoty s náhodnými premennými vypočítali tisíckrát pre rôzne poistné. Popisné štatistiky v simulačnom modeli, ako aj graf priemerných čistých prítomných hodnôt ukázali, že pre náš model sa hranica, kde začína poisťovňa dosahovať zisk z poistky pohybuje na intervale (-96,71 € až 68,54 €). čo predstavuje hodnoty poistného (730,00 € až 750,00 €).

[12] [19] Ing. Margaréta Ivanová, Rentabilita bankopoistenia

Simulačný model sa môže použiť pri výpočte poistného produktu zmiešaného životného poistenia s rôznymi vstupnými premennými. Používateľ do modelu zadá potrebné vstupné premenné (stochastické aj deterministické), ako aj jeho požadovanú rozhodujúcu premennú. V prípade, ak by bola poistná doba viac ako päť rokov, dá sa model ľahko prispôsobiť.

Výsledkom návrhu simulačného modelu sme dosiahli algoritmus, ktorý má mnoho využítí nie len v štatistickým metódach, ale aj v poistnej matematike. Predpokladáme, že naša diplomová práca poskytne užitočné informácie pri používaní metódy Monte Carlo v aktuárstve.

Použitá literatúra:

[1] SAKÁLOVÁ, K., Oceňovanie produktov v životnom poistení, Ekonóm 2001, ISBN: 80-225-1350-4

[2] SEKEROVÁ VIERA, BILÍKOVÁ MÁRIA, Poistná matematika, 2. vydanie, vydavateľstvo Ekonóm 2005, ISBN: 80-225-2001-2

[3] BILÍKOVÁ MÁRIA, Spojité metódy v poistnej matematike, vydavateľstvo Ekonóm 2003, ISBN: 80-225-1698-8

[4] HORÁKOVÁ GALINA, MUCHA VLADIMÍR, Teória rizika v poistení, 1. časť, vydavateľstvo Ekonóm 2006, IBSN: 80-225-2141-8

[5] SOBOL, I. M. Die Monte-Carlo-Methode, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1971.

[6] MARIE HEMSTAD TORVOLD, Investment in Wind Power – Profitability Analysis of the NBT II, Norwegian University of Life Sciences 2015, NO-1432 As. Norway

[7] ZBIERKA ZÁKONOV č. 39/2015, Zákon o poisťovníctve a o zmene a doplnení niektorých zákonov z 3. februára 2015

[8] GUŠTAR MILAN, Generování náhodne promenných veličin v metode Monte Carlo, I. ročník cestátní konference SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ, ISBN: 80-02-01344-1

[9] REIFF MARIAN, DOMONKOŠ TOMAŠ, Využitie zabudovaných funkcií Microsoft Excel pri konštrukcii simulačných modelov

[10] DLOUHÝ MARTIN, JABLONSKÝ JOSEF, Využítí simulace pri analýze podnikových procesú, článok vznikol v rámci riešenia projektu GA ČR č. 402/08/0155

[11] BRIGES BENJAMIN, GESUNARIA ROBERT a V.LEONESIO MICHAEL, Assessing the performance of life-cycle portfolio allocation strategies for retirement saving: A simulation study

[12] ŠTATISTICKÝ ÚRAD SLOVENSKEJ REPUBLIKY, dostupné online z: https://slovak.statistics.sk [19.2.2016]

[13] HAREWOD NOEL, Stochastic Modeling Workshop – Mortality, Southeastern Actuaries Conference, November 19, 2003

[14] SHAMITA DUTTA GUPTA, On simulation method of small life insurace portfolios, Department od Mathematics Pace University, New York, NY 10038

[15] PROUZA LUDVÍK, Finanční a pojistná matematika, vydavateľstvo Vysoká škola ekonomie a manažmentu 2007, EAN: 9788086730172

[16] KLIEŠTIK TOMÁŠ, Modelovanie a simulácia sko signifikantný nástroj analýzy rizika, príspevok k Projektu VEGA 1/0357/11 Výskum možnosti aplikácie fuzzy-stochastického prístupu a corporativemetrics ako nárstrojov kvantifikácie a diverzifikácie podnikových rizík

[17] VANČO BRANISLAV, Ekonometria pre manažérov, vydavateľstvo Žilinská univerzita 2004, ISBN: 80-96-91480-4

[18] BRADLEY R. A., MYERS S. C., FRANKLIN A., Teória a prax firemných financií, vydavateľstvo Bizbooks 2014, ISBN: 9788026500285

[19] Ing. IVANOVOVÁ MARGARÉTA, Rentabilita bankopoistenia online z: http://www.derivat.sk/files/casopis%202012/Rentabilita%20bankopoistenia.pdf [22.04.2016]

Prílohy

Príloha č. 1: Úmrtnostné tabuľky

Podrobné úmrtnostné tabuľky								
Územie:	Slovenská republika							
Obdobie:	2012							
spolu: muži aj ženy								
Vek	**Zomrelí**	**Žijúci**	**qx**	**lx**	**dx**	**Lx**	**Tx**	**ex**
0	321	58213	0,005499	100000	550	99505	7606521	76,07
1	31	59402	0,000522	99450	52	99424	7507016	75,49
2	15	58813	0,000255	99398	25	99386	7407591	74,52
3	8	58441	0,000137	99373	14	99366	7308206	73,54
4	13	55790	0,000146	99359	14	99352	7208840	72,55
5	6	54236	0,000093	99345	9	99340	7109488	71,56
6	6	54271	0,000102	99336	10	99330	7010148	70,57
7	3	54268	0,00011	99325	11	99320	6910817	69,58
8	11	52849	0,00017	99314	17	99306	6811497	68,59
9	8	51294	0,000162	99298	16	99289	6712191	67,6
10	10	51218	0,000151	99281	15	99274	6612902	66,61
11	5	53289	0,000144	99267	14	99259	6513628	65,62
12	8	55486	0,000153	99252	15	99245	6414369	64,63
13	13	56344	0,000161	99237	16	99229	6315124	63,64
14	7	57663	0,000196	99221	19	99211	6215895	62,65
15	16	59082	0,000289	99202	29	99187	6116683	61,66
16	25	60271	0,000342	99173	34	99156	6017496	60,68
17	23	63307	0,000377	99139	37	99120	5918340	59,7
18	26	68959	0,000417	99102	41	99081	5819220	58,72
19	38	72826	0,000489	99060	48	99036	5720139	57,74
20	37	75146	0,00052	99012	51	98986	5621103	56,77
21	46	77587	0,000551	98960	55	98933	5522116	55,8
22	42	78343	0,000538	98906	53	98879	5423183	54,83
23	45	79645	0,000593	98853	59	98823	5324304	53,86
24	50	81344	0,000667	98794	66	98761	5225481	52,89
25	65	82966	0,000701	98728	69	98693	5126719	51,93
26	59	85756	0,000667	98659	66	98626	5028026	50,96
27	49	87400	0,000628	98593	62	98562	4929400	50
28	56	87632	0,00057	98531	56	98503	4830838	49,03
29	49	88026	0,000574	98475	56	98447	4732335	48,06
30	44	88267	0,000613	98418	60	98388	4633888	47,08
31	76	88915	0,000756	98358	74	98321	4535500	46,11
32	63	91752	0,000697	98284	68	98250	4437179	45,15

33	79	93488	0,000706	98215	69	98181	4338929	44,18
34	47	92867	0,000721	98146	71	98110	4240749	43,21
35	92	92432	0,000972	98075	95	98027	4142638	42,24
36	106	91151	0,001109	97980	109	97925	4044611	41,28
37	120	90120	0,001282	97871	125	97808	3946685	40,33
38	113	87658	0,001399	97746	137	97677	3848877	39,38
39	136	82752	0,0015	97609	146	97536	3751200	38,43
40	124	78012	0,00161	97462	157	97384	3653664	37,49
41	124	74560	0,001812	97306	176	97217	3556280	36,55
42	165	72838	0,002151	97129	209	97025	3459062	35,61
43	166	70499	0,002425	96920	235	96803	3362038	34,69
44	193	69067	0,002686	96685	260	96555	3265235	33,77
45	207	70635	0,00292	96426	282	96285	3168679	32,86
46	226	73030	0,003201	96144	308	95990	3072395	31,96
47	277	75427	0,003547	95836	340	95666	2976404	31,06
48	297	76136	0,003995	95496	382	95306	2880738	30,17
49	327	74118	0,00444	95115	422	94904	2785433	29,28
50	382	73776	0,004928	94693	467	94459	2690529	28,41
51	387	74857	0,005391	94226	508	93972	2596070	27,55
52	456	74233	0,006125	93718	574	93431	2502098	26,7
53	509	75194	0,006685	93144	623	92832	2408667	25,86
54	575	77629	0,00724	92521	670	92186	2315835	25,03
55	601	79264	0,007702	91851	707	91497	2223649	24,21
56	672	79461	0,008285	91144	755	90766	2132151	23,39
57	701	77929	0,009105	90389	823	89977	2041385	22,58
58	756	76111	0,010018	89566	897	89117	1951408	21,79
59	866	75207	0,011132	88668	987	88175	1862291	21
60	873	73951	0,011944	87681	1047	87158	1774116	20,23
61	954	70767	0,01317	86634	1141	86063	1686958	19,47
62	915	65363	0,014269	85493	1220	84883	1600895	18,73
63	988	61227	0,015842	84273	1335	83606	1516012	17,99
64	993	58592	0,016869	82938	1399	82238	1432406	17,27
65	974	52570	0,01773	81539	1446	80816	1350168	16,56
66	850	46150	0,018746	80093	1501	79343	1269352	15,85
67	898	44681	0,020299	78592	1595	77794	1190009	15,14
68	999	43351	0,022321	76997	1719	76137	1112215	14,45
69	977	40975	0,023735	75278	1787	74385	1036078	13,76
70	1058	39919	0,025502	73491	1874	72554	961693	13,09
71	1040	38630	0,027155	71617	1945	70645	889139	12,42
72	1113	36262	0,030135	69672	2100	68622	818495	11,75
73	1125	33327	0,033783	67573	2283	66431	749872	11,1

74	1206	31047	0,037518	65290	2450	64065	683441	10,47
75	1255	29185	0,041451	62840	2605	61538	619376	9,86
76	1278	28057	0,046022	60235	2772	58849	557838	9,26
77	1435	26942	0,050764	57463	2917	56005	498989	8,68
78	1485	25504	0,055627	54546	3034	53029	442984	8,12
79	1525	24682	0,061926	51512	3190	49917	389955	7,57
80	1721	23433	0,069968	48322	3381	46632	340038	7,04
81	1775	21364	0,079385	44941	3568	43157	293406	6,53
82	1775	19153	0,088971	41373	3681	39533	250249	6,05
83	1844	16863	0,099787	37692	3761	35812	210716	5,59
84	1773	14766	0,111972	33931	3799	32032	174904	5,15
85	1721	12825	0,125676	30132	3787	28238	142873	4,74
86	1619	10846	0,141055	26345	3716	24487	114634	4,35
87	1499	9120	0,158274	22629	3582	20838	90147	3,98
88	1403	8009	0,177501	19047	3381	17357	69309	3,64
89	1322	6632	0,198905	15666	3116	14108	51952	3,32
90	1125	5209	0,22265	12550	2794	11153	37844	3,02
91	891	3700	0,248887	9756	2428	8542	26691	2,74
92	703	2561	0,277747	7328	2035	6310	18149	2,48
93	368	1459	0,309326	5293	1637	4474	11839	2,24
94	202	744	0,343678	3655	1256	3027	7365	2,01
95	183	581	0,380795	2399	914	1942	4338	1,81
96	140	501	0,420592	1486	625	1173	2395	1,61
97	161	437	0,46289	861	398	662	1222	1,42
98	96	336	0,507397	462	235	345	561	1,21
99	88	249	0,553697	228	126	165	216	0,95
100+	109	383	0,601238	102	102	71	71	0,7
Spolu	**52337**	**5407580**						

Príloha č. 2: Komutačné tabuľky pri úroku 3 %

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
x	**l_x**	**d_x**	**q_x**	**p_x**	**D_x**
0	100000	550	0,005 500	0,994 500	100 000,00
1	99450	52	0,000 523	0,999 477	96 553,40
2	99398	25	0,000 252	0,999 748	93 692,15
3	99373	14	0,000 141	0,999 859	90 940,37
4	99359	14	0,000 141	0,999 859	88 279,18
5	99345	9	0,000 091	0,999 909	85 695,87
6	99336	11	0,000 111	0,999 889	83 192,34
7	99325	11	0,000 111	0,999 889	80 760,31
8	99314	16	0,000 161	0,999 839	78 399,39
9	99298	17	0,000 171	0,999 829	76 103,65
10	99281	14	0,000 141	0,999 859	73 874,39
11	99267	15	0,000 151	0,999 849	71 712,59
12	99252	15	0,000 151	0,999 849	69 613,36
13	99237	16	0,000 161	0,999 839	67 575,57
14	99221	19	0,000 191	0,999 809	65 596,77
15	99202	29	0,000 292	0,999 708	63 673,99
16	99173	34	0,000 343	0,999 657	61 801,33
17	99139	37	0,000 373	0,999 627	59 980,73
18	99102	42	0,000 424	0,999 576	58 211,98
19	99060	48	0,000 485	0,999 515	56 492,53
20	99012	52	0,000 525	0,999 475	54 820,54
21	98960	54	0,000 546	0,999 454	53 195,88
22	98906	53	0,000 536	0,999 464	51 618,30
23	98853	59	0,000 597	0,999 403	50 088,00
24	98794	66	0,000 668	0,999 332	48 600,10
25	98728	69	0,000 699	0,999 301	47 153,04
26	98659	66	0,000 669	0,999 331	45 747,66
27	98593	62	0,000 629	0,999 371	44 385,49
28	98531	56	0,000 568	0,999 432	43 065,61
29	98475	57	0,000 579	0,999 421	41 787,51
30	98418	60	0,000 610	0,999 390	40 546,91
31	98358	74	0,000 752	0,999 248	39 341,94
32	98284	69	0,000 702	0,999 298	38 167,32
33	98215	69	0,000 703	0,999 297	37 029,63
34	98146	71	0,000 723	0,999 277	35 925,84
35	98075	95	0,000 969	0,999 031	34 854,23
36	97980	109	0,001 112	0,998 888	33 806,28
37	97871	125	0,001 277	0,998 723	32 785,12
38	97746	137	0,001 402	0,998 598	31 789,56
39	97609	147	0,001 506	0,998 494	30 820,39
40	97462	156	0,001 601	0,998 399	29 877,64
41	97306	177	0,001 819	0,998 181	28 960,99
42	97129	209	0,002 152	0,997 848	28 066,32
43	96920	235	0,002 425	0,997 575	27 190,22

44	96685	259	0,002 679	0,997 321	26 334,27
45	96426	282	0,002 925	0,997 075	25 498,76
46	96144	308	0,003 204	0,996 796	24 683,68
47	95836	340	0,003 548	0,996 452	23 887,96
48	95496	381	0,003 990	0,996 010	23 109,92
49	95115	422	0,004 437	0,995 563	22 347,30
50	94693	467	0,004 932	0,995 068	21 600,14
51	94226	508	0,005 391	0,994 609	20 867,59
52	93718	574	0,006 125	0,993 875	20 150,57
53	93144	623	0,006 689	0,993 311	19 443,84
54	92521	670	0,007 242	0,992 758	18 751,25
55	91851	707	0,007 697	0,992 303	18 073,26
56	91144	755	0,008 284	0,991 716	17 411,79
57	90389	823	0,009 105	0,990 895	16 764,62
58	89566	898	0,010 026	0,989 974	16 128,13
59	88668	987	0,011 131	0,988 869	15 501,39
60	87681	1047	0,011 941	0,988 059	14 882,37
61	86634	1141	0,013 170	0,986 830	14 276,37
62	85493	1220	0,014 270	0,985 730	13 678,00
63	84273	1335	0,015 841	0,984 159	13 090,11
64	82938	1399	0,016 868	0,983 132	12 507,52
65	81539	1446	0,017 734	0,982 266	11 938,39
66	80093	1501	0,018 741	0,981 259	11 385,12
67	78592	1595	0,020 295	0,979 705	10 846,37
68	76997	1719	0,022 326	0,977 674	10 316,74
69	75278	1787	0,023 739	0,976 261	9 792,64
70	73491	1874	0,025 500	0,974 500	9 281,72
71	71617	1945	0,027 158	0,972 842	8 781,59
72	69672	2099	0,030 127	0,969 873	8 294,27
73	67573	2283	0,033 786	0,966 214	7 810,09
74	65290	2450	0,037 525	0,962 475	7 326,42
75	62840	2605	0,041 454	0,958 546	6 846,12
76	60235	2772	0,046 020	0,953 980	6 371,18
77	57463	2917	0,050 763	0,949 237	5 900,95
78	54546	3034	0,055 623	0,944 377	5 438,25
79	51512	3190	0,061 927	0,938 073	4 986,18
80	48322	3381	0,069 968	0,930 032	4 541,16
81	44941	3568	0,079 393	0,920 607	4 100,41
82	41373	3681	0,088 971	0,911 029	3 664,92
83	37692	3761	0,099 782	0,900 218	3 241,60
84	33931	3799	0,111 963	0,888 037	2 833,15
85	30132	3787	0,125 680	0,874 320	2 442,66
86	26345	3716	0,141 051	0,858 949	2 073,47
87	22629	3582	0,158 292	0,841 708	1 729,13
88	19047	3381	0,177 508	0,822 492	1 413,03
89	15666	3116	0,198 902	0,801 098	1 128,35
90	12550	2794	0,222 629	0,777 371	877,59
91	9756	2428	0,248 872	0,751 128	662,35

92	7328	2035	0,277 702	0,722 298	483,02
93	5293	1638	0,309 465	0,690 535	338,72
94	3655	1256	0,343 639	0,656 361	227,08
95	2399	913	0,380 575	0,619 425	144,71
96	1486	625	0,420 592	0,579 408	87,03
97	861	399	0,463 415	0,536 585	48,95
98	462	234	0,506 494	0,493 506	25,50
99	228	126	0,552 632	0,447 368	12,22
100	102	102	1,000 000	0,000 000	5,31

1	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
0	2 943 105,80	70 374 127,22	533,9806	5 984,203	296 670,78
1	2 843 105,80	67 431 021,41	49,0150	5 450,222	290 686,58
2	2 746 552,41	64 587 915,61	22,8785	5 401,208	285 236,36
3	2 652 860,26	61 841 363,21	12,4388	5 378,329	279 835,15
4	2 561 919,89	59 188 502,95	12,0765	5 365,890	274 456,82
5	2 473 640,70	56 626 583,06	7,5374	5 353,814	269 090,93
6	2 387 944,83	54 152 942,36	8,9440	5 346,276	263 737,12
7	2 304 752,49	51 764 997,53	8,6835	5 337,332	258 390,84
8	2 223 992,18	49 460 245,04	12,2627	5 328,649	253 053,51
9	2 145 592,79	47 236 252,86	12,6496	5 316,386	247 724,86
10	2 069 489,14	45 090 660,06	10,1139	5 303,736	242 408,47
11	1 995 614,76	43 021 170,92	10,5207	5 293,623	237 104,74
12	1 923 902,16	41 025 556,17	10,2143	5 283,102	231 811,11
13	1 854 288,81	39 101 654,00	10,5779	5 272,888	226 528,01
14	1 786 713,24	37 247 365,20	12,1954	5 262,310	221 255,12
15	1 721 116,47	35 460 651,96	18,0718	5 250,114	215 992,81
16	1 657 442,48	33 739 535,49	20,5706	5 232,043	210 742,70
17	1 595 641,14	32 082 093,01	21,7336	5 211,472	205 510,66
18	1 535 660,42	30 486 451,87	23,9520	5 189,738	200 299,19
19	1 477 448,44	28 950 791,45	26,5764	5 165,786	195 109,45
20	1 420 955,90	27 473 343,01	27,9526	5 139,210	189 943,66
21	1 366 135,36	26 052 387,10	28,1822	5 111,257	184 804,45
22	1 312 939,48	24 686 251,74	26,8547	5 083,075	179 693,19
23	1 261 321,19	23 373 312,26	29,0241	5 056,220	174 610,12
24	1 211 233,19	22 111 991,07	31,5220	5 027,196	169 553,90
25	1 162 633,08	20 900 757,89	31,9949	4 995,674	164 526,70
26	1 115 480,04	19 738 124,80	29,7125	4 963,680	159 531,03
27	1 069 732,38	18 622 644,76	27,0988	4 933,967	154 567,35
28	1 025 346,89	17 552 912,38	23,7634	4 906,868	149 633,38
29	982 281,28	16 527 565,49	23,4832	4 883,105	144 726,51
30	940 493,78	15 545 284,20	23,9992	4 859,622	139 843,41
31	899 946,86	14 604 790,42	28,7369	4 835,622	134 983,79
32	860 604,93	13 704 843,56	26,0148	4 806,885	130 148,16
33	822 437,61	12 844 238,63	25,2571	4 780,871	125 341,28
34	785 407,98	12 021 801,02	25,2322	4 755,614	120 560,41

35	749 482,14	11 236 393,05	32,7781	4 730,381	115 804,79
36	714 627,91	10 486 910,91	36,5131	4 697,603	111 074,41
37	680 821,63	9 772 283,00	40,6533	4 661,090	106 376,81
38	648 036,52	9 091 461,37	43,2582	4 620,437	101 715,72
39	616 246,96	8 443 424,85	45,0639	4 577,179	97 095,28
40	585 426,57	7 827 177,89	46,4300	4 532,115	92 518,10
41	555 548,93	7 241 751,32	51,1458	4 485,685	87 985,99
42	526 587,94	6 686 202,39	58,6335	4 434,539	83 500,30
43	498 521,62	6 159 614,45	64,0074	4 375,906	79 065,77
44	471 331,40	5 661 092,83	68,4896	4 311,898	74 689,86
45	444 997,13	5 189 761,43	72,3997	4 243,409	70 377,96
46	419 498,37	4 744 764,30	76,7717	4 171,009	66 134,55
47	394 814,70	4 325 265,93	82,2796	4 094,237	61 963,54
48	370 926,73	3 930 451,23	89,5161	4 011,958	57 869,31
49	347 816,82	3 559 524,50	96,2612	3 922,441	53 857,35
50	325 469,52	3 211 707,68	103,4233	3 826,180	49 934,91
51	303 869,38	2 886 238,16	109,2265	3 722,757	46 108,73
52	283 001,79	2 582 368,78	119,8227	3 613,530	42 385,97
53	262 851,22	2 299 367,00	126,2635	3 493,708	38 772,44
54	243 407,38	2 036 515,78	131,8340	3 367,444	35 278,73
55	224 656,13	1 793 108,40	135,0625	3 235,610	31 911,29
56	206 582,87	1 568 452,27	140,0313	3 100,548	28 675,68
57	189 171,08	1 361 869,40	148,1975	2 960,516	25 575,13
58	172 406,45	1 172 698,33	156,9929	2 812,319	22 614,61
59	156 278,32	1 000 291,88	167,5266	2 655,326	19 802,29
60	140 776,93	844 013,56	172,5345	2 487,800	17 146,97
61	125 894,56	703 236,63	182,5483	2 315,265	14 659,17
62	111 618,20	577 342,07	189,5024	2 132,717	12 343,90
63	97 940,19	465 723,87	201,3255	1 943,214	10 211,19
64	84 850,08	367 783,68	204,8321	1 741,889	8 267,97
65	72 342,57	282 933,59	205,5472	1 537,057	6 526,08
66	60 404,18	210 591,03	207,1508	1 331,510	4 989,03
67	49 019,05	150 186,85	213,7122	1 124,359	3 657,52
68	38 172,69	101 167,80	223,6183	910,646	2 533,16
69	27 855,94	62 995,11	225,6934	687,028	1 622,51
70	18 063,31	35 139,17	229,7876	461,335	935,48
71	17 075,86	33 180,21	231,5471	474,150	972,94
72	16 104,35	31 240,86	242,6024	498,786	1 021,89
73	15 136,51	29 309,05	256,1836	523,099	1 065,55
74	14 172,54	27 389,84	266,9158	542,452	1 102,65
75	13 217,30	25 489,43	275,5362	560,197	1 135,68
76	12 272,13	23 611,33	284,6603	575,486	1 159,99
77	11 339,20	21 763,63	290,8258	584,506	1 177,97
78	10 424,43	19 951,77	293,6803	593,467	1 201,74
79	9 527,34	18 168,91	299,7869	608,269	1 232,81
80	8 641,57	16 406,91	308,4821	624,544	1 257,18
81	7 765,33	14 671,85	316,0621	632,637	1 263,25
82	6 906,52	12 981,27	316,5747	630,609	1 252,61

83	6 074,75	11 350,57	314,0338	622,002	1 228,02
84	5 275,82	9 791,95	307,9677	606,021	1 188,02
85	4 516,13	8 318,72	298,0533	582,000	1 131,68
86	3 802,59	6 944,75	283,9469	549,683	1 058,94
87	3 142,15	5 683,54	265,7356	509,254	970,67
88	2 541,38	4 547,33	243,5186	461,414	869,00
89	2 005,95	3 545,89	217,8950	407,583	757,31
90	1 539,94	2 685,30	189,6876	349,726	639,99
91	1 145,36	1 967,09	160,0383	290,266	522,26
92	821,73	1 387,54	130,2274	231,996	409,53
93	565,80	937,60	101,7688	177,531	306,76
94	371,79	603,53	75,7623	129,231	218,24
95	231,73	367,71	53,4684	89,004	146,57
96	135,98	210,44	35,5361	57,562	92,13
97	74,46	112,18	22,0255	34,566	53,66
98	37,72	55,25	12,5410	19,097	30,81
99	17,53	22,83	6,5561	11,709	16,86
100	5,31	5,31	5,1528	5,153	5,15