

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 17 200/I/2012/3045575908

Špeciálne prípady riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete

Diplomová práca

2012

Bc. Dušan Michalec

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Špeciálne prípady riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete

Diplomová práca

Študijný program: Operačný výskum a ekonometria

Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Školiteľ: prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

2012

Bc. Dušan Michalec



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Dušan Michalec
Študijný program: Operačný výskum a ekonometria (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)
Študijný odbor:
Typ záverečnej práce: Inžinierska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Špeciálne prípady riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete
Anotácia: 1. Úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete.
2. Špeciálne prípady riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete (CPP, DCPP, MCPP, RPP).
3. Využitie optimalizačných a heuristických prístupov k modelovaniu špeciálnych prípadov riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete.

Vedúci: prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.
Katedra: KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci katedry: doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Dátum zadania: 11.10.2010

Dátum schválenia: 04.11.2010
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: 04. 05. 2012

.....

podpis študenta

Pod'akovanie

Týmto by som rád poďakoval vedúcemu diplomovej práce prof. Ing. Ivanovi Brezinovi, CSc. za odbornú konzultačnú pomoc.

ABSTRAKT

MICHALEC, Dušan: *Špeciálne prípady riešenia úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete.* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: prof. Ing. Ivan Brezina, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2012, 61 s.

Cieľom záverečnej práce je implementácia exaktných a heuristických algoritmov, resp. prezentácia optimalizačných prístupov na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Obsahuje 15 obrázkov 6 tabuliek a päť príloh.

Prvá kapitola je venovaná teoretickému výkladu úloh poštára, poskytuje prehľad publikovaných poznatkov o riešenej problematike.

V ďalšej časti sú charakterizované hlavné a čiastkové ciele záverečnej práce, ktoré sú podmienené implementáciou algoritmov na riešenie úloh poštára.

Tretia kapitola obsahuje metodiku práce a teda najdôležitejšie údaje pre samotnú implementáciu algoritmov. Kapitola taktiež obsahuje optimalizačné prístupy riešenia jednotlivých úloh v podobe úloh celočíselného lineárneho programovania.

Záverečná kapitola sa zaoberá prezentáciou, akým spôsobom procedúry riešia jednotlivé kroky algoritmov. Súčasťou kapitoly sú aj výpočtové experimenty v prostredí, do ktorého sú algoritmy implementované.

Výsledkom riešenia danej problematiky je implementácia algoritmov na riešenie úloh neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára a priblíženie optimalizačných prístupov na riešenie daných úloh.

Kľúčové slová:

Exaktný algoritmus, heuristický algoritmus, eulerovský graf, orientovaný graf, zmiešaná úloha poštára

ABSTRACT

MICHALEC, Dušan: Special cases of solving route inspection problems. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operations Research and Econometrics. – Primary supervisor: prof. Ing. Ivan Brezina, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2012, 61 p.

The aim of the thesis is the implementation of exact and heuristic algorithms, respectively presentation of optimization approaches for solving undirected, directed and mixed postman problems.

Thesis is divided into four chapters. It contains 15 pictures, 6 tables and five appendixes.

The first chapter is devoted to theoretical interpretation of postman problems and gives an overview of published knowledge of solving these problems.

The next section is characterized by the main and sub-objectives of the thesis, which are determined by the implementation of algorithms for solving problems postman.

The third chapter contains the methodology of theses and therefore the most important data for the actual implementation of algorithms. The chapter also contains optimization approaches for each postman problem in the form of integer linear programs.

The final chapter is devoted to the presentation of the ways how the procedures solve the steps of algorithms. The chapter also includes computational experiments in an environment in which algorithms are implemented.

The result of solving the issue is implementation of algorithms for solving undirected, directed and mixed postman problems and approximate optimization approaches for solving these problems.

Key words:

Exact algorithms, heuristic algorithm, eulerian graph, directed graph, a mixed postman problem

Obsah

Zoznam obrázkov a tabuliek.....	8
Zoznam označení, pojmov a doplňujúce definície	9
Úvod.....	11
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma v zahraničí	13
1.1 Historický prehľad problematiky	13
1.2 Eulerovské ťahy	15
1.3 Úloha čínskeho poštára	19
1.3.1 Špeciálne prípady úloh o obsluhu hrán dopravenej siete.....	20
1.4 Úloha poštára v praxi	23
1.4.1 Kontrola odkazov na webovej stránke.....	24
2 Ciele práce	26
3 Metodika práce a metódy skúmania	28
3.1 Metódy riešenia úloh poštára	28
3.1.1 Neorientovaná úloha poštára	28
3.1.2 Orientovaná úloha poštára	34
3.1.3 Zmiešaná úloha poštára	37
3.2 Metódy prezentácie výsledkov.....	39
4 Výsledky práce	40
4.1 Neorientovaná úloha poštára.....	43
4.1.1 Implementácia Edmondsovho algoritmu	44
4.2 Orientovaná úloha poštára.....	47
4.2.1 Implementácia algoritmu na riešenie orientovanej úlohy poštára	48
4.3 Zmiešaná úloha poštára.....	52
4.3.1 Implementácia algoritmu Mixed 2.....	53
Záver	57
Zoznam použitej literatúry.....	59
Prílohy.....	61

Zoznam obrázkov a tabuliek

Obr. 1-1: Sedem mostov v meste Königsberg a multigraf G modelujúci situáciu	13
Obr. 1-2: Grafické zobrazenie úlohy čínskeho poštára.....	14
Obr. 1-3: Diagramy Eulerovských, resp. neeulerovských grafov.....	18
Obr. 1-4: Kontrola odkazov web stránky.....	25
Obr. 3-1: a) Maximálne párenie, ktoré nie je ani najpočetnejšie, ani úplné. b) Najpočetnejšie párenie, ktoré nie je úplné. c) Úplné párenie v K_6	29
Obr. 3-2: Postup pri Edmondsovom algoritme. a) Pôvodný graf, vrcholy nepárneho stupňa sú vyznačené štvorčekmi. b) Pomocný úplný graf K_{2t} zostrojený podľa kroku 1. algoritmu 3.1. c) Úplné párenie s minimálnou cenou v K_{2t} . d) Multigraf G zostrojený podľa kroku 3. algoritmu 3.1, kde už existuje eulerovský uzavretý ťah.....	31
Obr. 3-3: Graf, ktorý nie je eulerovský a dve poštárove množiny.....	33
Obr. 3-4: Digraf a poštárova trasa	36
Obr. 3-5: Zmiešaný graf a poštárova trasa.....	38
Obr. 4-1: Hranovo ohodnotený neorientovaný graf G	42
Obr. 4-2: Výstup procedúry P2 na určenie najkratšej cesty	42
Tab. 4-1: Zloženia súboru na riešenie neorientovanej úlohy poštára	43
Obr. 4-3: Matica vzdialeností neorientovaného grafu G	44
Obr. 4-4: Procedúry na riešenie neorientovanej úlohy poštára.....	46
Tab. 4-2: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, neorientovaná úloha poštára	47
Tab. 4-3: Zloženia súboru na riešenie orientovanej úlohy poštára	48
Obr. 4-5: Procedúry na riešenie orientovanej úlohy poštára.	50
Tab. 4-4: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, orientovaná úloha poštára.....	51
Tab. 4-5: Zloženia súboru na riešenie zmiešanej úlohy poštára	52
Obr. 4-6: Postupnosť procedúr na riešenie zmiešanej úlohy poštára.....	55
Tab. 4-6: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, zmiešaná úloha poštára.....	56

Zoznam označení, pojmov a doplňujúce definície

Označenie, pojem	Popis
$x(i), x_i$	i -tý prvok vektora \mathbf{x}
$x(T) = \sum_{t \in T} x_t$	Suma prvkov vektora podľa indexovej množiny T
$h_n \in H_n, h_n = \{u, v\}$	Neorientovaná hrana
$h_o \in H_o, h_o = (u, v)$	Orientovaná hrana
$h \in H_n \cup H_o, h = [u, v]$	Hrana bez rozlíšenia orientácie
$c(h), c_h$	Cena hrany h
$V(G)$	Vrcholová množina grafu G , digrafu G , migrafu G
$H_n(G)$	Hranová množina grafu G
$H_o(G)$	Hranová množina digrafu G
$H \in H_n \cup H_o$	Hranová množina migrafu G
$G = (V, H_n, c): H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$	Graf G , s množinami vrcholov V a hrán H_n
$G = (V, H_o, c), c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$	Digraf G , s množinami vrcholov V a hrán H_o
$G = (V, H_n, H_o), c: H_n, H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$	Migraf G , s množinami vrcholov V a hrán H_n, H_o
$G' = (V', H')$	Podgraf grafu $G = (V, H)$, ak platí $V' \subseteq V$ a $H' \subseteq H$
$G' = (V, H')$	Faktorový podgraf grafu $G = (V, H)$, ak platí $H' \subseteq H$
$x(h), x_h$	Premenná x zodpovedajúca hrane h
$v = P_v(h_o)$	Počiatkový vrchol orientovanej hrany h_o
$w = K_v(h_o)$	Koncový vrchol orientovanej hrany h_o
$H_G(v)$	Hranové okolie vrcholu (vzťahuje sa na neorientované aj orientované hrany)
<i>Incidencia</i>	Vzťah dvoch prvkov rôznej dimenzie (hrana - vrchol)
$deg_G(v)$	Stupeň vrcholu v , počet incidentných hrán s vrcholom v
$ideg_G(v)$	Vstupný stupeň vrcholu v , počet orientovaných hrán vchádzajúcich do vrcholu v
$odeg_G(v)$	Výstupný stupeň vrcholu v , počet orientovaných hrán vychádzajúcich z vrcholu v
$H_{oG}^-(v)$	Vstupné okolie vrcholu v , hrany vstupujúce do vrcholu v
$H_{oG}^+(v)$	Výstupné okolie vrcholu v , hrany vystupujúce z vrcholu v
V_G^-	Množina vrcholov, kde $ideg_G(v) > odeg_G(v)$

V_G^+	Množina vrcholov, kde $ideg_G(v) < odeg_G(v)$
<i>Vrchol párneho stupňa</i>	Párny počet incidentných hrán s vrcholom
<i>Vrchol nepárneho stupňa</i>	Nepárny počet incidentných hrán s vrcholom
V_G^P	Množina vrcholov párneho stupňa
V_G^N	Množina vrcholov nepárneho stupňa
<i>Súvislý graf G</i>	Graf v ktorom existuje cesta z ľubovoľného vrcholu do iného ľubovoľného vrcholu
<i>Úplný graf G</i>	Graf v ktorom je každý vrchol grafu spojený s každým iným vrcholom grafu
<i>Biparitný graf G</i>	Množinu vrcholov možno rozdeliť na dve disjunktné množiny V_1 a V_2 , pre ktoré platí, že žiadne dva vrcholy z tej istej časti nie sú susedné
<i>Sled, $s(u, v)$</i>	Alternujúca postupnosť vrcholov a hrán grafu, začína vrcholom u a končí vrcholom v
<i>Ťah, $t(u, v)$</i>	Sled, ktorý neobsahuje žiadnu hranu viac ako jedenkrát
<i>Diagram grafu G</i>	Grafická reprezentácia grafu

Zdroj: PALÚCH, S. 2008. Algoritmická teória grafov. Žilina : Žilinská univerzita, 2008. 274s.

Úvod

Úlohy o obsluhu hrán dopravnej siete patria do skupiny úloh určených na optimalizáciu prepravných trás. Práca bude venovaná špeciálnym prípadom úloh poštára, ktorých cieľom je nájsť najkratšiu cestu medzi všetkými miestami v dopravnej sieti pri minimalizácii celkovej prejdenej vzdialenosti. Pretože bežné dopravné systémy možno pomerne ľahko zobrazovať pomocou dopravných sietí, teoretickým základom úloh poštára je teória grafov. Keďže grafy vyjadrujú vzťahy medzi prvkami množiny, napr. dopravný systém mesta, železničná sieť, aplikácia teórie grafov poskytuje matematické nástroje na riešenie celého radu úloh z oblasti optimalizácie prepravných trás. Základné pojmy z teórie grafov sú uvedené v úvodnej časti práce, kde je obsiahnutý teoretický podklad jednotlivých definícií, pojmov a označení v tabuľkovej forme. Tieto budú používané v priebehu celej práce.

Prvá kapitola práce bude venovaná teoretickému výkladu úloh poštára, poskytuje prehľad publikovaných poznatkov o riešenej problematike. Súčasťou kapitoly bude aj historický prehľad problematiky, čiže informácie kde a kedy vznikli prvé formulácie úloh poštára, kapitola bude taktiež obsahovať grafické zobrazenie úlohy čínskeho poštára. Dôležitou časťou prvej kapitoly bude problematika eulerovských ťahov, resp. eulerovských grafov, keďže cieľom, a teda riešením jednotlivých úloh poštára je vytvorenie práve eulerovského grafu. Budú uvedené taktiež postupy a algoritmy na identifikáciu uzavretých eulerovských ťahov. Kapitola bude obsahovať formulácie špeciálnych prípadov jednotných úloh o obsluhu hrán siete. Záver kapitoly bude venovaný možným aplikáciám niektorých úloh poštára v praxi. Okrem využitia pri klasických dopravných sieťach bude uvedená aj možnosť využitia orientovanej úlohy pri kontrole odkazov internetovej stránky.

Nasledujúca kapitola bude obsahovať jednotlivé ciele práce. Hlavným cieľom bude implementácia algoritmov na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára. Prostredím implementácie bude v našom prípade MS Excel, ktorý poskytuje možnosť vytvárania procedúr prostredníctvom programovacieho jazyka Visual Basic for Application. Keďže úlohy poštára slúžia na optimalizáciu procesov, tabuľkový procesor bude svojou flexibilitou poskytovať ideálne prostredie pre implementáciu. Jedným z cieľov bude taktiež určenie limitov softvéru MS Excel pri praktickom riešení úloh.

Tretia kapitola bude obsahovať metodiku práce a teda najdôležitejšie údaje pre implementáciu algoritmov. Bude venovaná podrobnej problematike neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohe poštára. Pri prvých dvoch prípadoch bude uvedený a opísaný spôsob riešenie prostredníctvom exaktných algoritmov, avšak na riešenie zmiešanej úlohy bude prezentovaný heuristický prístup riešenia. Tieto prístupy a algoritmy budú predmetom implementácie do prostredia MS Excel. Kapitola bude taktiež obsahovať optimalizačné prístupy riešenia jednotlivých úloh v podobe úloh celočíselného lineárneho programovania. Praktické použitie optimalizačných prístupov, teda zostavenie úloh, bude na konkrétnych situáciách prezentované v prílohách práce.

Najdôležitejšia časť bude obsiahnutá v poslednej, teda štvrtej kapitole, v ktorej budú prezentované výsledky celej práce. Úvod kapitoly bude venovaný štruktúre a spôsobu prezentácie výsledkov a mechanizmu, akým budú jednotlivé úlohy riešené, teda spôsobom, akým budú z pôvodných grafových štruktúr vytvárané eulerovské grafy. Kapitola bude potom rozdelená na podkapitoly, každá bude venovaná jednému typu úloh. Prezentácia spôsobu implementácie metód riešenia bude kopírovať jednotlivé kroky algoritmov uvedených v tretej kapitole. Súčasťou kapitoly budú aj výpočtové experimenty v prostredí MS Excel, kde budú riešené jednotlivé úlohy s rôznym počtom vrcholov a hrán grafov. Cieľom tejto časti nebude poskytnúť zdrojový kód jednotlivých procedúr, ten sa bude nachádzať na optickom médiu v prílohách, ale skôr principiálne prezentovať, akým spôsobom procedúry riešia jednotlivé kroky algoritmov. Na konci každej časti bude v grafickej podobe uvedený mechanizmus fungovania jednotlivých procedúr ako celku.

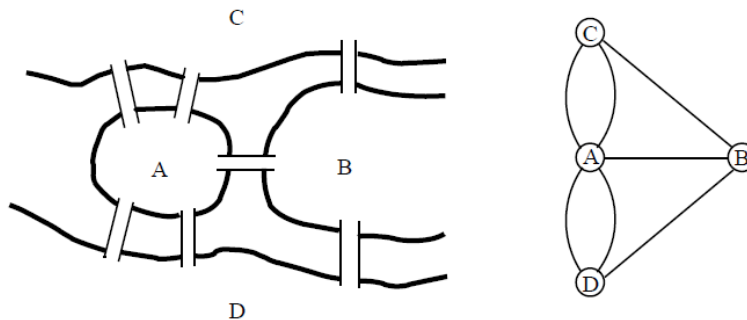
Nemenej dôležitou časťou práce budú jej prílohy. Ako už bolo uvedené bude obsahovať súbory MS Excel s implementovanými algoritmami na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára v elektronickej podobe na optickom médiu. Avšak súčasťou príloh budú aj konkrétne problémy, ktoré budú riešené najskôr optimalizačnými prístupmi, teda bude prezentované zostavenie úloh lineárneho programovania a poskytnuté optimálne riešenie, samozrejme tieto úlohy budú riešené aj prostredníctvom implementovaných algoritmov v prostredí MS Excel, pričom jednotlivé výsledky budú porovnané. Táto časť bude teda slúžiť aj ako návod na použitie jednotlivých súborov na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma v zahraničí

Skupina úloh o obsluhu hrán dopravnej siete, resp. úloh poštára sa zaraďuje do skupiny problémov optimalizácie prepravných trás. Cieľ úloh triedy poštára spočíva v určení najlacnejšej pochôdzky (trasy) podmnožiny hrán v danom grafe, pričom jednotlivé problémy možno špecifikovať na základe konkrétnych typov obmedzení, ohraničení a ich absencie [14]. V tejto kapitole je uvedený historický prehľad problematiky úloh poštára. Ďalšia časť je venovaná problematike eulrovských ťahov a eulerovských grafov, ktoré sú podstatné pre riešenie úloh poštára. Záver kapitoly je venovaný teoretickému výkladu úloh o obsluhu hrán dopravnej siete a možnej aplikácii týchto úloh v praxi.

1.1 Historický prehľad problematiky

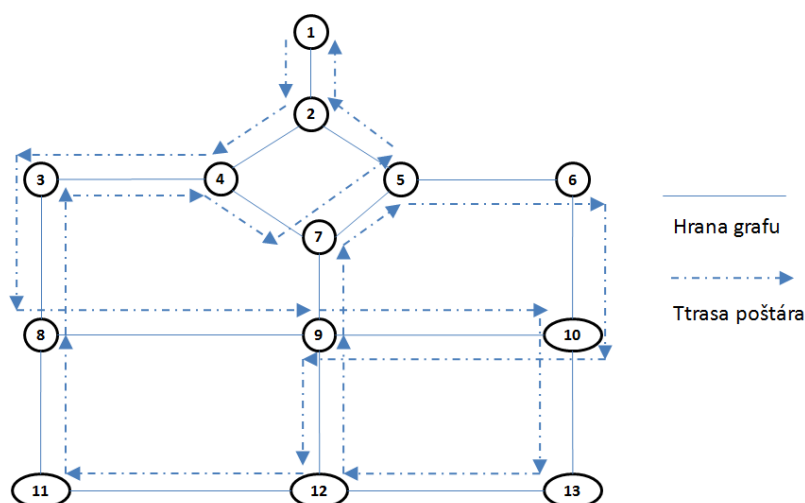
Najstaršia zmienka s väzbou na problémy trasovania pochádza z 18. teho storočia. V meste Königsberg (dnes Kaliningrad) vznikla nasledujúca úloha: v meste sa nachádzajú dva ostrovy na rieke Pregel'. Ostrovy sú spojené jeden s druhým a aj s brehmi rieky siedmimi mostmi. Úlohou je nájsť takú trasu, ktorá prechádza každým mostom práve raz a začína aj končí v tom istom bode. Obyvatelia mesta dlho hľadali riešenie tohto problému, až v roku 1736 matematik Leonard Euler dokázal, že takáto cesta neexistuje. Pri dôkaze svojho tvrdenia vytvoril matematický model problému pomocou grafu, v ktorom vrcholy reprezentovali brehy rieky a ostrovy, hrany grafu jednotlivé mosty. Pomocou tohto modelu Euler nielen vyriešil danú úlohu, ale našiel aj spôsob ako problém zovšeobecniť [3].



Obr. 1-1: Sedem mostov v meste Königsberg a multigraf G modelujúci situáciu. Zdroj: Palúch [3].

Otázkou pri zovšeobecnenom probléme je, či je možné v danom (resp. ľubovoľnom) grafe nájsť taký sled, ktorý obsahuje všetky hrany grafu a každú hranu práve raz. Sled, ktorý obsahuje každú hranu práve raz, sa nazýva ťahom a ťah, obsahujúci všetky hrany grafu, sa

nazýva na počet' Euler a eulerovským ťahom. Graf s eulerovským ťahom sa nazýva eulerovským grafom. Rozšírením predchádzajúceho problému na grafy, ktoré nie sú eulerovské, je úloha čínskeho poštára. V nej sa v danom grafe hľadá najkratší sled, ktorý prechádza každou hranou grafu aspoň raz. Takýto sled sa nazýva eulerovským sledom [10]. Samozrejme eulerovským sledom v eulerovskom grafe je eulerov ťah. Zložitejší je prípad, kde daný graf nie je eulerovský¹. Prvý matematik, ktorý sa týmto problémom zaoberal bol čínsky matematik Mei-Ko Kwan [8]. Úlohu opísal nasledovne: poštár vychádzajúc z pošty má prejsť ulice svojho mesta (obvodu) po najkratšej trase a následne sa vrátiť na poštu. Príklad úlohy čínskeho poštára ilustruje nasledujúci obrázok.



Obr. 1-2: Grafické zobrazenie úlohy čínskeho poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Nový pohľad na problémy teórie grafov priniesli 1950-te až 1960-te roky a rozvoj výpočtovej techniky, ktorý nastal v tomto období. Výkonnejšie počítače umožnili riešiť rozsiahle optimalizačné úlohy definované na grafoch, ktoré vznikali z matematických modelov reálnych problémov. Kým predtým zaujímali matematikov hlavne teoretické problémy, ako napríklad štruktúra rôznych typov grafov a ich popis, po 50-tych rokoch dostáva veľký význam tvorba efektívnych algoritmov.

¹ Presné definície ťahu a sledu sú uvedené v nasledujúcej časti.

1.2 Eulerovské ťahy

Každý z nás sa už pravdepodobne stretol s úlohou nakresliť daný obrázok jedným ťahom. Ak príslušný obrázok pokladáme za diagram niektorého grafu alebo multigrafu, ide o úlohu zostrojiť v príslušnom grafe sled obsahujúci každú hranu grafu práve raz. Odtiaľto je i motivácia termínu teórie grafov „ťah“ ako sledu, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje. Nasledujúce definície a algoritmy sú uvedené v publikácii Palúcha [3].

Definícia 1.1 [3] Hovoríme, že sled $s(u, v)$ v súvislom grafe $G = (V, H_n)$ je eulerovský, ak sú v ňom obsiahnuté všetky hrany grafu G .

Definícia 1.2 [3] Hovoríme, že graf $G = (V, H_n)$ je eulerovský, ak sa v ňom vyskytuje uzavretý eulerovský ťah.

Keďže špeciálnym prípadom sledu je ťah, definíciou 1.1 je presne vymedzený pojem eulerovský ťah ako ťah $t(u, v)$ v súvislom grafe G , ktorý obsahuje všetky hrany grafu G . Pretože ťah obsahuje každú hranu grafu G práve raz, postupnosť vrcholov a hrán ťahu $t(u, v)$ predstavuje postup, ako „jedným ťahom“ vytvoriť diagram grafu G .

Veta 1.1. (Euler, 1736.) [3] Súvislý graf $G = (V, H_n)$ je eulerovský práve vtedy, keď stupne všetkých vrcholov grafu G sú párne.

Definície 1.1 a 1.2 možno rozšíriť i pre multigrafy. Takisto veta 1.1 platí i pre multigrafy. Dôkaz vety 1.1 uvedený v [3] dáva i návod, ako v súvislom grafe G so všetkými vrcholmi parného stupňa zostrojiť uzavretý eulerovský ťah: Zostrojí sa najprv ľubovoľný uzavretý ťah $t(v, v)$ tak, že sa začne vo vrchole v ľubovoľnou hranou a potom sú k ťahu pridávané ešte neprejudené hrany, pokiaľ sa dá. Párny stupeň vrcholov grafu G zaručuje, že sa skončí v počiatočnom vrchole v . Ak v ťahu $t(v, v)$ existuje vrchol w taký, že $t(v, v)$ neobsahuje všetky hrany incidentné s vrcholom w , vloží sa do ťahu $t(v, v)$ na mieste w uzavretý ťah $t(w, w)$, ktorý obsahuje len (niektoré) hrany, ktoré sa nevyskytujú v $t(v, v)$. Takto sa pokračuje v predlžovaní ťahu $t(v, v)$ dovtedy, kým neobsahuje všetky hrany grafu G .

Podobne ako v neorientovanom grafe G môže byť aj v digrafe G definovaný **eulerovský orientovaný ťah** ako taký orientovaný ťah v digrafe G , ktorý obsahuje všetky orientované hrany digrafu G . Digraf G sa nazýva eulerovský, ak obsahuje uzavretý eulerovský

orientovaný ťah. Veta 1.1 sa dá preformulovať nasledovne: Silne súvislý digraf je eulerovský práve vtedy, keď pre každý jeho vrchol v platí $ideg(v) = odeg(v)$ [3].

Z vety 1.1 vyplýva, že v súvislom grafe G existuje otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď G má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

Veblenova veta podľa [15] ponúka iný prístup k identifikácii eulerovského grafu, znie nasledovne: Nech $G = (V, H_n)$ je súvislý neorientovaný graf, potom G je eulerovský práve vtedy, keď G je disjunktným zjednotením cyklov, čo znamená, že je povolená duplikácia hrán.

Palúch v [3] uvádza dva algoritmy na hľadanie uzavretého eulerovského ťahu v súvislom grafe $G = (V, H_n)$, v ktorom dosahujú všetky vrcholy grafu G párny stupeň:

- Fleuryho algoritmus
- Labyrintový algoritmus

Pokiaľ sa Fleuryho algoritmus aplikuje s pomocou diagramu grafu, obsahuje v určitom kroku silný intuitívny prvok pri kontrole súvislosti grafu pozostávajúceho z nevybraných hrán a s nimi incidentných vrcholov. Algoritmizácia tejto kontroly je síce možná, ale takto vzniknutý algoritmus by nebol práve najefektívnejší. Pre počítačovú implementáciu je vhodnejší labyrintový algoritmus, ktorého správnosť síce nie je zrejmá na prvý pohľad, ale je veľmi efektívny.

Algoritmus 1.1 [3]: Labyrintový algoritmus

Krok 1. Začni z ľubovoľného vrcholu $u \in V$. Nech sled S inicializačne pozostáva z jediného vrcholu u . Polož $w := u$ – vrchol w je posledný vrchol doteraz vytvoreného sledu S .

Krok 2. Ako ďalšiu hranu vyber podľa nižšie uvedených pravidiel do sledu S hranu $\{w, v\}$. Zaznač si smer použitia hrany $\{w, v\}$. Ak doteraz vrchol v ešte nebol zaradený do sledu S , označ hranu $\{w, v\}$ ako hranu prvého príchodu. Ďalej zaznamenaj tzv. spätnú postupnosť – poradie hrán, v ktorom sa v slede S vyskytujú po druhýkrát. Pri výbere hrany dodržuj nasledujúce pravidla:

- Každú hranu možno v jednom smere použiť iba raz

- Poradie zaraďovania hrán:
 - – nepoužité hrany
 - – hrany použité raz
 - – hrana prvého príchodu (ak niet inej možnosti)

Krok 3. Ak taká hrana neexistuje – STOP.

Spätná postupnosť určuje hľadaný eulerovský ťah.

Krok 4. Inak polož $w := v$ a pokračuj krokom 2.

König [9] definoval *orientovaný eulerovský graf* nasledovne: Nech je daný súvislý digraf $G = (V, H_o)$, digraf je *eulerovský* práve vtedy, keď vstupné a výstupné stupne všetkých vrcholov $v \in V$ digrafu G sú rovnaké. Demel v [4] zároveň naznačuje, že každý slabo súvislý graf, pri ktorom platí rovnosť medzi vstupnými a výstupnými stupňami všetkých vrcholov, je silne súvislý. Eulerovský cyklus je možné určiť rovnakými algoritmami, ako v prípade neorientovaného grafu, bez nutnosti modifikácie postupu. Rovnosť vstupného a výstupného stupňa v orientovanom grafe vrcholu zjavne implikuje párnosť celkového stupňa, teda $G = (V, H_o), \forall v \in V: ideg(v) = odeg(v) = k \implies deg(v) = ideg(v) + odeg(v) = 2k, k \in \mathbb{N}$.

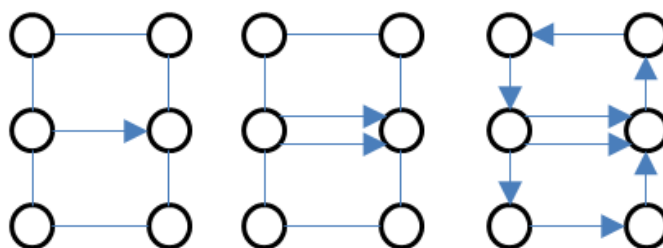
Ďalej nech je daný migraf resp. zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o)$, sled $s(u, v)$ v súvislom grafe $G = (V, H_n, H_o)$ je *eulerovský*, ak obsahuje všetky neorientované hrany i orientované hrany zmiešaného grafu G . Zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o)$ je *eulerovský*, ak je v ňom prítomný uzavretý eulerovský ťah.

Konkrétnu nutnú a postačujúcu podmienku definovali v roku 1962 Ford a Fulkerson v [11], pre zmiešaný graf je eulerovský graf: Nech $G = (V, H_n, H_o)$ je súvislý zmiešaný graf, kde hranová množina $H = H_n \cup H_o$, potom takýto graf je eulerovský práve vtedy, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- podmienka párnosti – stupeň každého vrcholu $v \in V$ migrafu G je párný

- podmienka vyrovnanosti – pre každú podmnožinu vrcholov $S \subseteq V$ rozdiel počtu hrán $h \in H$ smerujúcich z množiny vrcholov \bar{S} do množiny vrcholov S a počtu orientovaných hrán $h_o \in H_o$ smerujúcich z S do \bar{S} je nezáporné číslo.

Podľa Edmondsona a Johnsona [8], nech je daný súvislý zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o)$, tak migraf G je eulerovský práve vtedy, ak neexistuje podmnožina $S \subset V$ taká, že každá hrana vchádzajúca z ľubovoľného vrcholu v S do nejakého vrcholu mimo S , ktoré sú obsiahnuté v množine $V - S$, je orientovaná von z S , pričom počiatočný vrchol je v S . Nasledovná formulácia predstavuje postačujúcu podmienku existencie zmiešaného eulerovského grafu: Ak pre každý vrchol zmiešaného grafu je stupeň vrcholu párny a zároveň vstupný a výstupný stupeň vrcholu dosahujú rovnakú hodnotu, hovoríme, že zmiešaný graf je eulerovský. Poznamenáme, že táto podmienka je slabšia ako vety Edmondsona a Johnsona a Ford a Fulkersona, ktoré vyžadujú, aby bol daný zmiešaný graf aj symetrický, teda obsahoval rovnaký vstupný a výstupný stupeň vrcholov. Na nasledujúcom obrázku 1-3 sú ilustrované grafové štruktúry a platnosť uvedenej podmienky. V prvom prípade multimigraf podmienku nespĺňa (vstupný a výstupný stupeň vrcholu nedosahujú rovnakú hodnotu), ale uvedený multimigraf obsahuje eulerovský cyklus. Ak by sme upravili grafovú štruktúru na mutidigraf (druhý prípad), teda všetky hrany by boli orientované, postačujúca podmienka existencie eulerovského cyklu by bola splnená. Posledný prípad ilustruje zmiešaný graf, ktorý eulerovský cyklus neobsahuje, pretože nie všetky stupne vrcholu sú párne.



Obr. 1-3: Diagramy Eulerovských, resp. neeulerovských grafov. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Je potrebné poznamenať, že prvá a druhá grafová štruktúra sa líšia iba „zdvojenou“ hranou, ktorú obsahuje druhý multimigraf. Tento fakt je veľmi dôležitý pri riešení úloh o obsluhu hrán dopravnej siete. Pretože uvedenú postačujúcu podmienku možno overiť, resp. realizovať v lineárnom čase, možno ju efektívne využiť pri optimalizácii niektorých konštrukčných algoritmov pre riešenie uvedených typoch úloh.

Podľa [14] možno o platnosť postačujúcej a nutnej podmienky zistiť v polynomiálnom čase. Edmonds a Johnson v [12] uviedli algoritmus na zistenie eulerovského cyklu v symetrickom eulerovskom zmiešanom grafe. Naproti tomu Ford a Fulkerson v [11] uvádzajú všeobecnejšie aplikovateľný algoritmus na identifikáciu eulerovského cyklu, ktorý je použiteľný aj pri nesymetrickom eulerovskom zmiešanom grafe, ktorý vychádza z dôkazu vlastnej postačujúcej a nutnej podmienky. Týmto algoritmom je možné pridať orientáciu všetkým neorientovaným hranám v zmiešanom eulerovskom grafe a následne hľadať cyklus v orientovanom grafe. Určenie, resp. pridanie orientácie hranám možno docieľiť párovaním v biparitnom grafe [11].

Veblenova veta, ktorú sme bola uvedená pri neorientovaných eulerovských grafoch, je v určitých podmienkach (dekompozície cyklov) aplikovateľná aj pri orientovaných a zmiešaných grafoch [8]: každý netriviálny eulerovský graf, či už neorientovaný, orientovaný, zmiešaný, obsahuje určitý počet eulerovských cyklov, ich minimálny počet je rovný počtu vrcholov v grafe, pretože cyklus začína a končí v tom istom vrchole. Túto veblenovu charakteristiku možno použiť pri konštrukcii algoritmu na identifikáciu eulerovského cyklu, kde by algoritmus zisťoval, či grafová štruktúra obsahuje eulerovský cyklus, a teda graf je eulerovský.

1.3 Úloha čínskeho poštára

Úloha čínskeho poštára patrí do skupiny úloh o obsluhu hrán dopravnej siete. V práci je základná úloha čínskeho poštára označovaná ako *CPP* (z angl. Chinese Postman Problem). Ak by sa úloha formulovala slovné a zjednodušene, tak poštár, začína a končí svoju prácu na pošte, pričom musí prejsť všetkými ulicami svojho rajónu, tak aby prešiel čo najkratšiu vzdialenosť. Názov a prvá formulácia tejto úlohy pochádza z roku 1962 od čínskeho matematika Kwana. Matematická formulácia úlohy v pojmoch teórie grafov a s dopravnou sieťou modelovanou súvislým grafom je nasledujúca: Nech je daný hranovo ohodnotený graf² $G = (V, H, c)$, $c: H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Hľadá sa eulerovský sled (uzavretý sled S grafu obsahujúci každú hranu aspoň raz) s minimálnou dĺžkou $c(S) = \sum_{h \in S} c(h)$ [2].

² Pri všeobecnej formulácii abstrahujeme od orientácie hrán grafovej štruktúry.

1.3.1 Špeciálne prípady úloh o obsluhu hrán dopravenej siete

Keďže sa práca venuje niektorým špeciálnym prípadom všeobecnej formulácie úlohy čínskeho poštára, v nasledujúcej časti je uvedený charakter a terminológia jednotlivých variácií tohto typu úloh. Formulácie, ktoré sú ďalej uvedené vychádzajú z publikácie Palúcha a Peška [2].

Neorientovaná úloha čínskeho poštára

Pomenovanie úlohy vychádza z angl. *Undirected Chinese Postman Problem* a v priebehu práce je používané aj označenie *UCPP*. Úloha bola pôvodne definovaná na hranovo ohodnotenom jednoduchom (teda neorientovanom) grafe $G = (V, H_n, c)$, $c: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. V roku 1965 Edmonds prezentoval exaktné riešenie problému v podobe deterministického algoritmu pracujúceho v polynomiálnom čase, pričom ho označil ako *Chinese Postman Problem*, teda problém čínskeho poštára. Riešením je eulerovský sled s minimálnou dĺžkou $c(S) = \sum_{h \in S} c(h_n)$.

Orientovaná úloha čínskeho poštára

V prípade keď je potrebné uvažovať aj s orientáciou hrán siete (napr. ľavá a pravá strana cesty), treba riešiť orientovanú úlohu čínskeho poštára, ktorú bude označovaná aj ako *Directed Chinese Postman Problem – DCPP*, teda úlohu *minimálnej orientovanej poštárovej trasy* v hranovo ohodnotenom grafe. Dostávame nasledovnú grafovú formuláciu: Je daný hranovo ohodnotený silne súvislý digraf $G = (V, H_o, c)$, $c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Hľadá sa orientovaný eulerovský sled S s minimálnou dĺžkou $c(S)$. Edmonds a Johnson v 1973 ukázali, že *DCPP* úloha je rovnako dobre (v polynomiálnom čase) riešiteľná ako jej neorientovaná verzia *UCPP* pomocou tokových formulácií.

Zmiešaná úloha čínskeho poštára

Prirodzenou kombináciou úloh *CPP* a *DCPP* vzniká zmiešaná úloha čínskeho poštára (*Mixed Chinese Postman Problem MCPP*), kde sú niektoré hrany orientovane a iné neorientované (migrafy, multimigrafy, pseudomigrafy). Úlohu možno formulovať nasledovne: Je daný hranovo ohodnotený silne súvislý zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o, c)$, $H = H_n \cup H_o$, $c: H \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Hľadá sa eulerovský zmiešaný sled S (obsahujúci všetky hrany aspoň raz, pričom orientované hrany v požadovanom smere) s minimálnou dĺžkou $c(S)$.

Úloha veterného poštára

Menej známou modifikáciou úlohy *UCPP* je prípad, keď je síce dopravná sieť modelovaná grafom, ale hľadá sa orientovaný sled, ktorého dĺžka závisí od toho, v akom smere sa prechádza hranami siete. Zodpovedá to pochôdzke poštára idúceho v smere alebo proti smeru vetra. Úloha má názov úloha veterného poštára (Windy Postman Problem - *WPP*). Možno ho formulovať takto: je daný súvislý graf $G = (V, H_n, c_1, c_2)$, $c_1: H_n, c_2: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ohodnotený dvoma hranovými ohodnoteniami $c_1: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a $c_2: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Hrana $\{v_i, v_j\} \in H_n$ je ohodnotená číslom $c_1(v_i, v_j)$, ak bude použitá v smere $v_i \rightarrow v_j, i < j$, a číslom $c_2(v_i, v_j)$ v opačnom prípade. Opäť hľadáme eulerovský sled S s minimálnou dĺžkou
$$c(S) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in S_{i < j}} c_1(v_i, v_j) + \sum_{\{v_i, v_j\} \in S_{i > j}} c_2(v_i, v_j).$$

Úloha vidieckeho poštára

Formulácie úloh *UCPP*, *DCPP*, *MCPP* možno zosilniť požiadavkou, aby boli obsluhované len niektoré hrany $R \subset H$ dopravnej siete. Dostávame tak príslušné verzie *RPP*, *DRPP*, *MRPP* tzv. úlohy vidieckych poštárov (Rural Postman Problem - *RPP*).

V prípade úlohy *RPP* ide o polynomiálne problémy (dobře riešiteľné) len pre rozmery $9 < |V| \leq 84$, $13 < |H| \leq 184$, $4 < |R| \leq 74$ a v roku 1994 dosiahli Sanchis and Corberan výrazné zníženie doby výpočtu metódou vetiev a ezov. Starostlivá implementácia tejto metódy umožnila v roku 2000 Ghianimu a Laportemu riešiť úlohy s $|V| \leq 350$. Úloha *DRPP* sa ukazuje byť náročnejšia než *RPP*. Christofides a kol. (1989) uvádza inštancie riešených úloh $13 < |V| \leq 80$, $7 < |R| \leq 74$. Pre úlohu *RMPP* je publikovaný výsledok Coberan a kol. (1999) s inštanciami $20 < |V| \leq 100$, $55 < |H| \leq 350$, $15 < |R| \leq 200$.

Úloha viacnásobného čínskeho poštára

Prirodzeným zovšeobecnením úloh *UCPP*, *DCPP*, *MCPP*, *WPP* sú ich k násobné verzie *kCPP*, *kDCPP*, *kMCPP*, *kWPP*, keď sa vopred fixuje počet poštárov a požaduje, aby každá hrana siete bola obsluhovaná aspoň jedným poštárom.

Úloha vidieckeho poštára s uzávierkou

V prípade, keď je obsluha hrán terminovaná časovou uzávierkou, vytvára sa napr. z úlohy *CPP* úlohu dedinského poštára s uzávierkou (Rural Postman Problem with Deadline Classes - *RPPDC*). Tu je daný hranovo a časovo ohodnotený graf $G = (V, H, c, t)$ a nejaký významný uzol v_0 (garaz-sklad). Je daný rozklad R_1, R_2, \dots, R_m danej podmnožiny $R \subset C$ množiny hrán, pričom sa požaduje, aby hrany $h \in R_k$ boli obslužené do daného termínu T_k . Hľadá sa uzavretý $v_0 - v_0$ sled obsahujúci hrany z R , ktoré sú v danom termíne obslužené, ak sled začína vo vrchole v_0 v čase 0.

Hierarchická úloha čínskeho poštára

Všeobecnejšiu možnosť uprednostňovania obsluhy hrán siete ako *RPPDC* rieši hierarchická úloha čínskeho poštára (Hierarchical Chinese Postman Problem *HCPP*). Je daný hranovo ohodnotený graf $G = (V, H, c)$ a rozklad podmnožiny hrán do tried rozkladu H_1, H_2, \dots, H_m s reláciou precedencie $<$ medzi triedami tohto rozkladu. Ak je $H_p < H_q$, potom všetky hrany H_p musia byť obslužené pred hranami H_q . Hľadá sa uzavretý sled minimálnej dĺžky, ktorý rešpektuje reláciu precedencie, pričom obsahuje každú hranu najmenej raz.

Úlohu *HCPP* formulovali v roku 1987 Dror a kol. pričom dokázali, že je NP-tažká. Ukázali tiež, že je polynomiálne riešiteľná v prípade, keď je G buď úplný graf alebo úplný digraf, relácia precedencie je lineárne usporiadanie a každá trieda rozkladu vytvára úplný podgraf grafu G . Exaktné riešenie metódou dynamického programovania navrhol Gélinas v roku 1992. Aproximatívne ani heuristické algoritmy neboli doteraz publikované.

Všeobecná úloha čínskeho poštára

Ďalšia modifikácia sa týká výberu najmenej jednej hrany z daného rozkladu množiny hrán. V prípade takéhoto zovšeobecnenie úlohy *CPP* dostávame zovšeobecnú úlohu čínskeho poštára (Generalized Chinese Postman Problem - *GCPP*). Úlohu *GCPP* možno formulovať nasledovne: Je daný hranovo ohodnotený graf $G = (V, H, c)$, $c: H \rightarrow R_0^+$ a rozklad množiny hrán do m tried, t.j. $H = \cup_{k=1}^m H_k, H_i \cap H_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq m$. Hľadá sa uzavretý sled S grafu obsahujúci aspoň jednu hranu z každej triedy rozkladu s minimálnou dĺžkou $c(S)$.

Doteraz nie je známy exaktný ani aproximatívny algoritmus riešenia. Autori Dror a Haonari (2000) však dokázali, že úloha *GCPP* je NP-ťažká.

Kapacitná úloha čínskeho poštára

Ak máme k dispozícii vozidlo a je známy dopyt (veľkosti požiadaviek) na hranách dopravnej siete, vznikne po úprave úlohy *CPP* kapacitná úloha čínskeho poštára (Capacitated Chinese Postman Problem - *CCPP*). Možno ju formulovať nasledovne: Je daný hranovo ohodnotený graf $G = (V, H, c, d)$ s jedným hranovým ohodnotením oceňujúcim dĺžky hrán $c: H \rightarrow R_0^+$ a druhým hranovým ohodnotením udávajúcim dopyt po hranách $d: H \rightarrow R_0^+$. Nech je známa kapacita vozidla Q v jednotkách dopytu a umiestenie jeho garáže vo vrchole $v_0 \in V$. Potom sa hľadá taká množina uzavretých sledov $S = \{S_k\}$, ktorá minimalizuje celkovú dĺžku sledov $c(S) = \sum_{S \in S} c(S)$ a vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

- (p1) Každý sled je uzavretý $v_0 v_0$ sled; vozidlo začína a končí v garáži
- (p2) Každá hrana je prvkom aspoň jedného sledu; hrana je obslužená aspoň na jednej trase
- (p3) Dopyt každého sledu $d(S) = \sum_{S \in S} d(S)$ je najvyšší Q ; dopyt na trase vozidla neprevýši jeho kapacitu.

Kapacitná okružná úloha na hranách

Prípade, keď sa podmienka (p2) z prechádzajúcej úlohy nahradí podmienkou

- (r2) Každá hrana danej podmnožiny $H' \subset H$ je prvkom aspoň jedného sledu

Dostávame úlohu známu ako kapacitná okružná úloha na hranách (Capacitated Arc Routing Problem - *CARP*).

1.4 Úloha poštára v praxi

Až objavenie výkonnejších počítačov umožnilo, aby sa na grafy nepozeralo len ako na množinu vrcholov a hrán, ale aj ako na modely niektorých problémov reálneho sveta, ktorým zodpovedajú jednotlivé úlohy čínskeho poštára. Hrany grafu môžu mať v súčasnosti pridelené numerické hodnoty, ktoré môžu vyjadrovať dĺžku cesty, alebo čas potrebný na ukončenie určitého procesu, vrcholy môžu značiť dôležité mestá, miesta či križovatky.

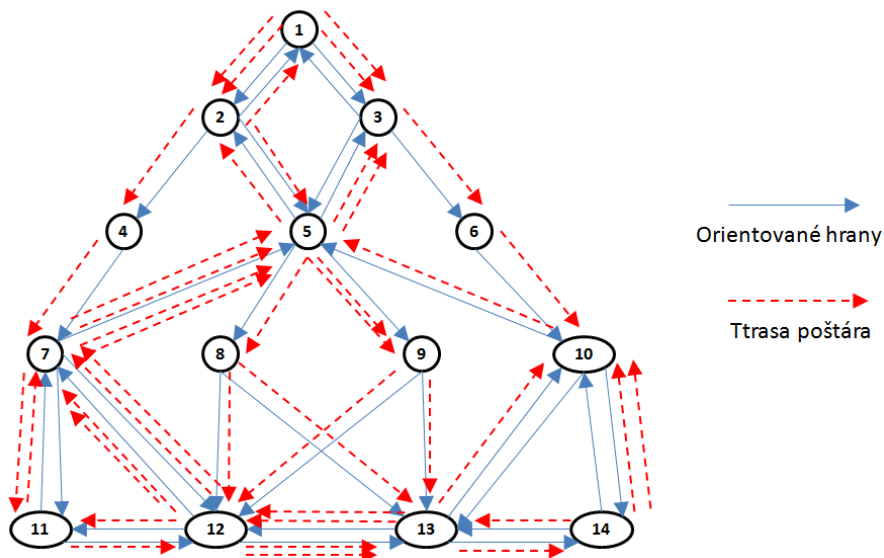
Už názvu je jasné, že prvotným poslaním úlohy bolo riešiť minimalizáciu prejdenej trasy poštárom počas rozvozu pošty, novin. Rovnaký princíp je možné aplikovať pri odvážaní komunálneho odpadu. Reálny prípad uvádza Palúch a kol. v [2], v ktorom bol riešený zvoz domového odpadu v Liptovskom Mikuláši. Analogicky môže byť uvedené letné kropenie resp. čistenie ulíc, zimnú údržba ciest. Plánovanie ciest podnikových resp. školských autobusov pre zvoz a odvoz zamestnancov resp. žiakov, pochôdzok poriadkových hliadok, plánovanie úpravy resp. kontroly stavu komunikácií, železničných trás, potrubí, infraštruktúry, plánovanie turistických trás. Príkladom neorientovanej poštárovej trasy je napr. kontrola parkovacích lístkov, kde úloha spočíva v navrhnutí trasy policajta tak, aby mohol celý svoj revír skontrolovať a to po najkratšej možnej trase. Predpokladajme, že policajt vykonáva kontrolu, tak že prechádza po chodníku. Potom kontrolu celého revíru môžeme chápať tak, že policajt musí prejsť každým chodníkom. Ďalšou požiadavkou na trasu je, aby sa začínala a končila v tom istom bode (policajt príde k parkovisku na aute a potom sa vráti k autu). Pre malý revír je úloha triviálna, ľahko môže byť nájdená takáto trasa preskúmaním všetkých možností. So zväčšujúcim sa revírom sa ale úloha stáva problematickou pre obrovský počet možností. Pri riešení nášho problému nám pomôže matematický model, ktorým je graf ktorého vrcholy reprezentujú križovatky a hrany označujú chodníky, pri ktorých sú platené parkoviská. Každá hrana má priradenú numerickú hodnotu, ktorá vyjadruje dĺžku daného chodníka. Hrany grafu nie sú orientované, lebo nie je dôležité, akým smerom daným chodníkom policajt prejde. Úlohou je potom nájsť najkratší sled vo vzniknutom grafe, ktorý je uzavretý a obsahuje každú hranu aspoň raz, čo predstavuje neorientovanú úlohu čínskeho poštára.

Avšak úlohy čínskeho poštára môžu byť aplikované aj v iných sférach, napr. pri tvorbe integrovaných obvodov, testovania zložitosti ponúk programového vybavenia elektronických zariadení, pri kontrole odkazov na webových stránkach.

1.4.1 Kontrola odkazov na webovej stránke

Internetové stránky majú v dnešnej dobe zložitú a komplexnú štruktúru. Pre zachovanie prehľadnosti stránky, je nutné stránku rozdeliť na viacero (pod)stránok, medzi ktorými je možné pohybovať sa pomocou odkazov. Z dôvodu údržby je potrebná kontrola stránky, pri ktorej sa kontroluje aj funkčnosť jednotlivých odkazov. Už pri relatívne malom počte stránok môže existovať značný počet odkazov a všetky náhodne preskúmať môže trvať príliš dlho. Problémom je, že funkčnosť odkazu je možné overiť len kliknutím na daný odkaz

a overením, či sa zobrazí správna stránka. Potom sa, ale užívateľ nachádza už na inej stránke, odkiaľ sa samozrejme môže vrátiť na predchádzajúcu, to však trvá určitý čas. Cieľom je optimalizovať kontrolu odkazov.



Obr. 1-4: Kontrola odkazov web stránky. Zdroj : Vlastné spracovanie.

Aby mohol byť na optimalizáciu použitý matematický aparát, najskôr je potrebné vytvoriť matematický model daného problému v podobe digrafu, v ktorom každý vrchol digrafu reprezentuje jednu stránku, a orientovaná hrana z vrcholu i do vrcholu j znamená, že stránka i obsahuje odkaz na stránku j . Modelom je digraf, lebo ak jedna stránka obsahuje odkaz na druhú, opačne to tak byť nemusí. Každá orientovaná hrana (i, j) má priradenú numerickú hodnotu, ktorá vyjadruje dĺžku trvania stiahnutia stránky j . Potom kontrola všetkých odkazov zodpovedá prejdeniu každej orientovanej hrany vzniknutého digrafu aspoň jedenkrát, teda ide o orientovanú úlohu čínskeho poštára [17].

2 Ciele práce

Cieľom práce je prezentovať a implementovať prístupy a metódy na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára, teda úlohy realizované na grafoch, digrafoch, resp. migrafoch. V prípade neorientovanej a orientovanej úlohy poštára sú implementované deterministické, resp. exaktné algoritmy. Pri zmiešanej úlohe poštára je aplikovaný heuristický, teda aproximatívny spôsob riešenia. Okrem implementácie algoritmov na riešenie jednotlivých úloh sú prezentované aj optimalizačné spôsoby riešenia v podobe celočíselného lineárneho programovania.

Implementácia jednotlivých algoritmov je realizovaná v prostredí MS Excel v podobe procedúr vytvorených v jazyku Visual Basic for Application. Pre každý typ úlohy je vytvorený jeden súbor, v ktorom je možné danú úlohu riešiť.

Dosiahnutie hlavného cieľa je podmienené splnením a riešením čiastkových cieľov práce. Tie sú stanovené tak, aby splnenie hlavného cieľa bolo možné overiť, a tak aj objektívne zhodnotiť. Čiastkové ciele sú nasledovné:

- V prvej časti práce poskytnúť teoretický podklad spôsobu riešenia úloh poštára v podobe priblíženia problematiky eulerovských ťahov, resp. eulerovských grafov.
- Uvedenie a priblíženie implementovaných algoritmov na riešenie jednotlivých úloh poštára.
- Prezentovať riešenie jednotlivých úloh poštára v prostredí MS Excel na konkrétnych príkladoch, ktoré bude slúžiť aj ako návod na použitie jednotlivých procedúr. Táto časť je obsiahnutá v prílohách práce.
- Uviesť formuláciu jednotlivých optimalizačných prístupov riešenia na konkrétnych príkladoch (taktiež uvedené v prílohách práce).
- Priblížiť a opísať proces implementácie prezentovaných algoritmov do jednotlivých procedúr.
- V poslednej časti práce prezentovať prostredníctvom výpočtových experimentov výpočtovú náročnosť jednotlivých algoritmov v závislosti od zložitosti vstupov. Takýmto spôsobom taktiež určiť limity, resp. hranice algoritmov v prostredí, v ktorom sú implementované.

Samotným cieľom implementácie algoritmov na riešenie úloh poštára je vytvorenie troch súborov v prostredí MS Excel, každý súbor je určený na riešenie jedného typu úlohy, teda neorientovanej, orientovanej alebo zmiešanej úlohy. Zámerom práce je teda pripraviť komplexné používateľské prostredie, v podobe panela nástrojov na riešenie úloh poštára, pričom riešenie jednotlivých úloh je prezentované presným určením počtu a rozloženia neorientovaných, resp. orientovaných hrán vo výslednej grafovej štruktúre a samozrejme hodnota minimálnej poštárovej trasy.

Poznamenajme, že softvér použitý na implementáciu sa vyznačuje univerzálnosťou a teda poskytuje programové rozhranie umožňujúce aplikáciu implementovaných algoritmov tretími osobami, napr. v iných prácach, projektoch, resp. v praxi.

3 Metodika práce a metódy skúmania

V kapitole sú prezentované prístupy a metódy riešenia jednotlivých úloh, pričom úlohy budú označované ako *neorientovaná*, *orientovaná* a *zmiešaná úloha poštára*. Cieľom každej úlohy je získať minimálnu trasu poštára. V prípade neorientovanej o orientovanej úlohy sú uvedené exaktné, teda deterministické algoritmy, avšak v prípade zmiešanej úlohy je prezentovaný heuristický algoritmus. Tieto algoritmy sú v ďalšej časti práce implementované. Okrem iného sú uvedené aj optimalizačné prístupy na riešenie jednotlivých úloh.

Jednotlivé kapitoly a podkapitoly sú chronologicky číselne označené. Vzťahy, definície, vety, grafy, tabuľky a poznámky sú číslované priebežne v každej kapitole, pričom začiatok číslovania vždy korešponduje s číslom kapitoly, v ktorej sa nachádzajú. Napríklad označenie vzťahu (3.1) znamená, že ide o prvý vzťah z tretej kapitoly.

Pri implementácií algoritmov sa pracovalo s programovacím jazykom Visual Basic for Application v prostredí MS Excel. Procedúry sú navrhnuté tak, aby zo vstupných údajov vytvorili eulerovský graf a takýmto spôsobom úlohu riešili.

3.1 Metódy riešenia úloh poštára

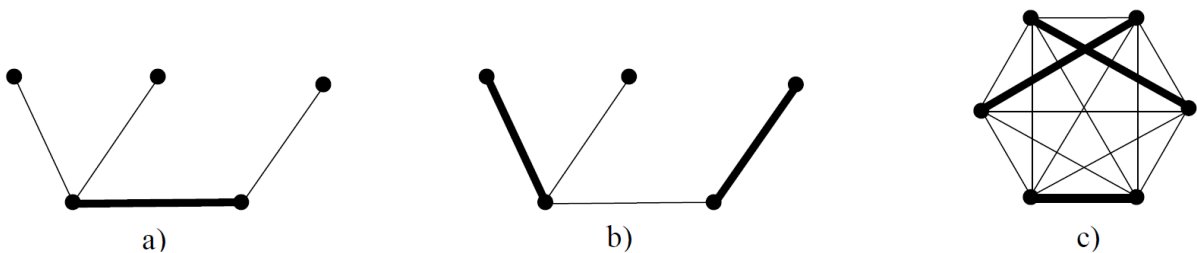
3.1.1 Neorientovaná úloha poštára

Ak by graf G , ktorý modeluje poštárov rajón obsahoval iba vrcholy, ktoré majú párný stupeň, úloha by bola značne zjednodušená, stačilo by nájsť, resp. určiť uzavretý eulerovský ťah. V reálnych situáciách je však situácia zložitejšia. Križovatky typu Y alebo T sú bežné a existujú aj zložitejšie dopravné uzly, ktoré vedú k vrcholom nepárneho stupňa grafom modeli. Počet vrcholov nepárneho stupňa grafu G je párný. Keby sa "spojili" dva vrcholy u, v nepárneho stupňa novou fiktívnou hranou, stanú sa z nich vrcholy párneho stupňa. Ak by sa zoradili všetky vrcholy grafu G nepárneho stupňa do dvojíc a tie by sa následne "pospájali" fiktívnymi hranami, takto vytvorený nový graf (vo všeobecnosti multigraf) G už obsahuje všetky vrcholy párneho stupňa a teda je v ňom možné zostrojiť uzavretý eulerovský ťah.

Ako však poštár prejde fiktívnu hranu $\{u, v\}$? Pretože sa môže pohybovať len po reálnych uliciach, prejde z križovatky u na križovatku v po najkratšej možnej $u - v$ ceste. Ak je teda každá fiktívna hrana typu $\{u, v\}$ ohodnotená vzdialenosťou $c(u, v)$ vrcholov u, v v

grafe G , súhrnná dĺžka dodaných fiktívnych hrán bude predstavovať naprázdno prejdenú vzdialenosť pri pochôdzke. Teraz je už vidieť, že ak je cieľom minimalizovať naprázdno prejdenú vzdialenosť (t. j. splniť požiadavku poštára „aby sa čo najmenej nachodil“), je potrebné nájsť také spárovanie dvojíc vrcholov nepárneho stupňa, aby súhrnná dĺžka dodatočných fiktívnych hrán bola najmenšia [3].

Definícia 3.1 [3]: Nech $G = (V, H_n, c): H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je hranovo ohodnotený graf. **Párenie** v grafe G je taký jeho podgraf P , v ktorom má každý vrchol stupeň 1. **Cena párenia P** je súčet ohodnotení jeho hrán. Hovoríme, že párenie P je **maximálne párenie** v grafe G , ak P nie je podgrafom žiadneho iného párenia v G . Párenie P je **najpočetnejšie párenie** v grafe G ak P má zo všetkých párení najväčší počet hrán. Párenie P je **úplné párenie** v G , ak P je faktorovým podgrafom grafu G (P obsahuje všetky vrcholy grafu G).



Obr. 3-1: a) Maximálne párenie, ktoré nie je ani najpočetnejšie, ani úplné. b) Najpočetnejšie párenie, ktoré nie je úplné. c) Úplné párenie v K_6 . Zdroj: Palúch [3].

Nie každé maximálne párenie musí byť najpočetnejším párením ani úplným párením. Každé najpočetnejšie (resp. úplné) párenie je aj maximálnym párením. Avšak v úplnom grafe K_{2t} s párnym počtom vrcholov je každé maximálne párenie najpočetnejším i úplným párením.

Úlohu nájdenia optimálnej množiny fiktívnych hrán možno teraz sformulovať nasledovne: V úplnom hranovo ohodnotenom grafe K_{2t} nájsť úplné (resp. maximálne, resp. najpočetnejšie) párenie s minimálnou cenou [3].

Pri takomto postupe je potrebné určiť počet dvojíc vrcholov nepárneho stupňa. Nasledovný výpočet uvádza Brezina a kol. v [1].

Keďže počet vrcholov nepárneho stupňa v grafe G je vždy párný, je možné ho označiť $2n$. Ak je vybraný jeden vrchol, počet vrcholov, ktoré by mohli s ňím vytvoriť dvojicu je $2n - 1$ atď. Suma počtu dvojíc je nasledovná:

$$p = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

po úprave

$$p = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Ďalej je uvedený Edmondsov algoritmus, ktorý umožňuje nájsť najkratší uzavretý eulerovský sled v hranovo ohodnotenom súvislom grafe $G = (V, H_n, c): H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Algoritmus je publikovaný v určitých variáciách napr. v [1], [2], [13].

Algoritmus 3.1 [2]: Edmondsov algoritmus

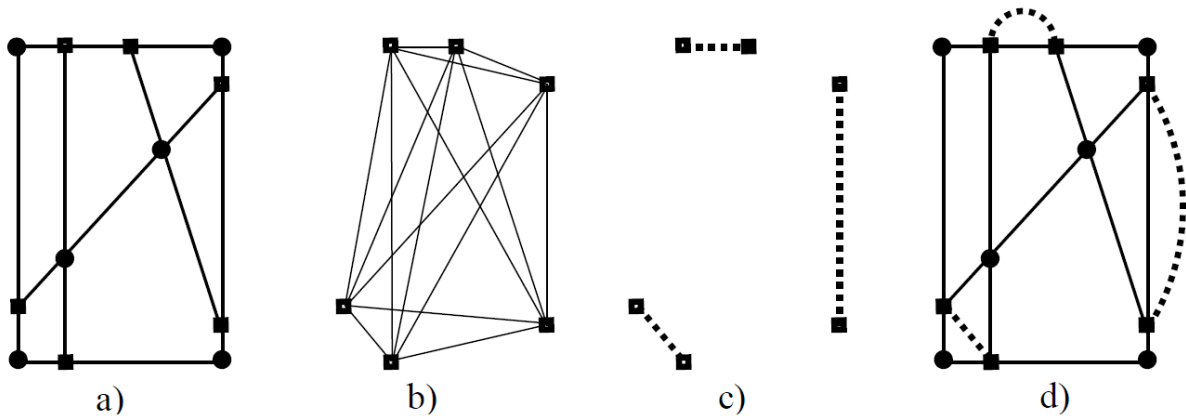
Krok 1: Ak je graf G eulerovský (stupne všetkých vrcholov sú párne), položme $G_E = G$ a prejdime na krok 4. Ináč definujeme množinu V_E vrcholov grafu G nepárneho stupňa.

Krok 2: Definujeme úplný graf $K_{2t}(V_E, H_E, c)$, kde hranové ohodnotenie každej hrany $\{v_i, v_j\} \in H_E$ je označené ako c_{ij} a udáva dĺžku najkratšej cesty z vrcholu v_i do vrcholu v_j .

Krok 3: V grafe K_{2t} sa hľadá najlacnejšie úplné párenie $P(V_E, H_P, c)$, t.j. taký podgraf grafu K_{2t} , ktorého každý vrchol $u \in V_E$ je vrcholom práve jednej páriacej hrany $\{u, v\} \in H_P$ a súčet ohodnotení jeho hrán je minimálny.

Krok 4: K hranám H grafu G sú pridané hrany párenia H_P a dostaneme eulerovský (multi)graf $G_E = (V_E, H \cup H_P, c)$, ktorého stupne všetkých vrcholov sú párne, no niektoré hrany sa môžu opakovať.

Krok 5: V grafe G_E sa hľadá eulerovský ťah T_E (uzavretý sled, ktorý obsahuje každú hranu grafu práve raz), z ktorého je zostrojený hľadaný uzavretý sled S nahradením páriacich hrán $\{u, v\} \in T_E$ hranami najkratšej cesty z u do v .



Obr. 3-2: Postup pri Edmondsovom algoritme. a) Pôvodný graf, vrcholy nepárneho stupňa sú vyznačené štvorčkami. b) Pomocný úplný graf K_{2t} zostrojený podľa kroku 1. algoritmu 3.1. c) Úplné párenie s minimálnou cenou v K_{2t} . d) Multigraf G zostrojený podľa kroku 3. algoritmu 3.1, kde už existuje eulerovský uzavretý ťah. Zdroj: Palúch [3].

Podľa [2] pri riešení praktických úloh by mohol byť problematický Krok 3 – riešenie úlohy najlacnejšieho úplného párenia, pre ktorý je síce známa grafová maďarská metóda pracujúca v polynomiálnom čase, no je programátorsky náročná. Pre úlohy stredných rozmerov, kde $|V_E| \leq 50$, sú dobré praktické skúsenosti s nasledujúcou bivaletnou formuláciou úlohy najlacnejšieho párenia uvedenej v [2]: Nájst' také x_{ij} aby

$$\sum_{i,j \in H_E, i < j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Za podmienok

$$\sum_{v_i \in H_E - \{v_j\}} x_{ij} = 1 \quad v_j \in H_E \quad (3.1)$$

$$\sum_{v_j \in H_E - \{v_i\}} x_{ij} = 1 \quad v_i \in H_E \quad (3.2)$$

$$x_{ij} - x_{ji} = 0 \quad \{v_i, v_j\} \in H_E \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad v_j \in H_E, v_i \in H_E \quad (3.4)$$

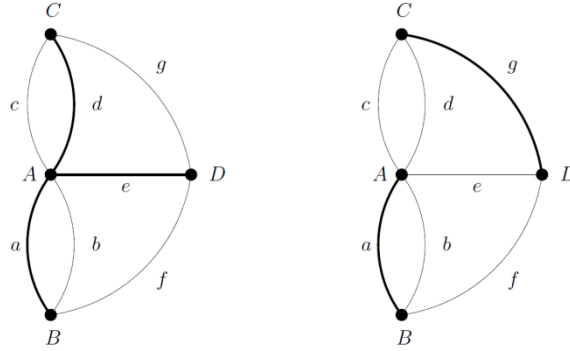
Úloha bez podmienky (3.3) je prirad'ovacou úlohou, v ktorej sa nepripúšťajú priradenia $v_i \rightarrow v_i$. Podmienka (3.3) zabezpečí, že ak $x_{ij} = 1$, $v_i \rightarrow v_j$, potom aj $x_{ji} = 1$, $v_j \rightarrow v_i$ je

hranou párenia. Ak tak pre hľadané páriace hrany máme $H_p = \{\{v_i, v_j\} | \{v_i, v_j\} \in H_E, x_{ij} = 1, i < j\}$.

Palúch v [3] uvádza nasledovnú zložitosť Edmondsovho algoritmu: Úplný graf K_{2t} môže mať najviac n vrcholov a najviac $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ hrán. Pre výpočet ohodnotení hrán grafu K_{2t} stačí vypočítať maticu vzdialeností C vrcholov grafu G , čo možno použitím Floydovho algoritmu urobiť v čase $O(n^3)$. Celý krok 2. možno teda urobiť v čase $O(n^3)$. Pretože $2t \leq n$, úplné párenie s minimálnou cenou v grafe K_{2t} možno urobiť v čase $O(n^4)$. (lebo najpočetnejšie párenie v grafe s n vrcholmi možno nájsť v čase $O(n^4)$). Krok 3. vyžaduje čas $O(n^4)$. V kroku 5. sa hľadá uzavretý eulerovský ťah v grafe G čo možno urobiť v čase $O(n^4)$ - pozri rozbor zložitosti labyrintového algoritmu. Konečne v kroku 4. treba nahradiť každú fiktívnu hranu príslušnou najkratšou cestou. Fiktívnych hrán môže byť najviac $n/2$. Ak sa v kroku 1. počítalo spolu s maticou vzdialeností aj maticu X , možno pomocou smerníkov z tejto matice zrekonštruovať ľubovoľnú najkratšiu $u-v$ cestu v čase $O(n)$ (lebo žiadna cesta v grafe G s n vrcholmi nemôže mať viac ako $n - 1$ hrán). Pretože fiktívnych hrán môže byť najviac $n/2$, stačí na ich nahradenie príslušnými najkratšími cestami $O(n^2)$ krokov. Pre zložitosť celého Edmondsovho algoritmu bude určujúca zložitosť krokov 2. a 5. Edmondsov algoritmus má teda zložitosť $O(n^4)$.

Optimalizačný prístup

Martínez v [8] uvádza, že optimalizačný prístup riešenia je postavený na úlohe minimálneho neorientovaného eulerovského sledu v pôvodnom súvislom a hranovo ohodnotenom neorientovanom grafe. Optimalizačná úloha nezabezpečuje vytvorenie postupnosti vrcholov a hrán. Cieľom je získať optimálne rozšírenie v zmysle dvojfázového riešenia úlohy. Keďže cieľom úlohy je minimalizovať dĺžku poštárovej trasy v neorientovanom grafe, problém je označený ako **minimálna neorientovaná poštárova trasa MNPT**.



Obr. 3-3: Graf, ktorý nie je eulerovský a dve poštárove množiny. Zdroj: Martínez [8].

Možná poštárove trasa neorientovaného grafu z obr. 3-3 je nasledovná:

$$(A, a, B, b, A, a, B, f, D, e, A, e, D, g, C, d, A, c, C, d, A).$$

Keďže graf vytvorený z neorientovaného grafu G duplikáciou každej jeho hrany je eulerovský, problém rozhodovania či graf G obsahuje poštárove trasu alebo nie a problém hľadania takej trasy korešpondujú s hľadaním eulerovského sledu.

Nech je daný neorientovaný graf $G = (V, H_n, c)$, $c: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a poštárove trasa T v grafe G , potom hodnota poštárovej trasy $c(T)$ je reprezentovaná sumou ohodnotení hrán, ktoré obsahuje trasa T :

$$c(T) = \sum_{h \in H_n} c(h).$$

Ak by sa predpokladalo, že hranové ohodnotenie všetkých hrán je jedna jednotka, minimálna neorientovaná poštárove trasa grafu z obr. 3-3 je nasledovná:

$$(A, a, B, b, A, a, B, f, D, g, C, c, A, d, C, g, D, e, A).$$

Úlohu minimálnej neorientovanej poštárovej trasy (MNPT) možno zapísať vo forme úlohy celočíselného lineárneho programovania. Nech je daný neorientovaný graf $G = (V, H_n, c)$, $c: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a poštárove trasa T v grafe G . Pre každú hranu $h \in H_n$ nech $x_h \in \mathbb{N}$ reprezentuje počet dodatočných výskytov hrany h v poštárovej trase T . $H_G(v)$ predstavuje okolie vrcholu v grafu G .

Na základe Eulerovej vety musí hodnota x_h pre každý vrchol $v \in V$ zabezpečiť, že $x(H_G(v))$ je párne číslo, potom je uvedený súvislý hranovo ohodnotený rozšírený graf eulerovský. Párnosť čísla $x(H_G(v))$ možno vyjadriť použitím umelých premenných, v našom prípade to bude premenná z_v . Potom môže byť formulovaná nasledovná celočíselná úloha [8]:

$$MNPT = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

pri ohraničeníach

$$\begin{aligned} x(H_G(v)) &= 2z_v \quad \forall v \in V(G) \\ x_h &\in \{0,1\} \quad \forall h \in H_n(G) \\ z &\in \mathbb{Z}^n \quad z \geq 0. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že $MNPT$ dosahuje optimálne riešenie pre hodnoty $x_h < 2$ pre každú hranu $h \in H_n$. Ak by $x_h \geq 3$, potom by bolo možné odstrániť kópie hrán a znížiť tento komponent o hodnotu 2, čo nemá vplyv na podmienku párnosti a prípustnosť riešenia. Preto je úloha formulovaná ako bivalentná úloha, kde $x_h \in \{0,1\}$.

Ďalšie ekvivalentné formulácie a formulácie využívajúce iné špeciálne vlastnosti riešenia uvádzajú napr. Edmonds a Johnson [12], Eiselt, Gendreau a Laporte [14], či Eiselt a Sandblom [15].

3.1.2 Orientovaná úloha poštára

Podľa [8] úlohu minimálnej orientovanej trasy možno riešiť ako úlohu najlacnejšieho toku v silne súvislom digrafe $G = (V, H_o, c), c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Na riešenie teda možno použiť algoritmy na minimalizáciu nákladov toku v hranovo ohodnotenom grafe. Viacerí autori napr. Eiselt a kol. v [14] poukázali, že úloha špeciálnou úlohou na tok v grafe, a to dopravnou úlohou. Ďalej je uvedený algoritmus na riešenie orientovanej úlohy poštára:

Algoritmus 3.2: Algoritmus na riešenie minimálnej orientovanej poštárovej trasy

Krok 1: V digrafe G sa určia všetky nesymetrické vrcholy. Množina V^- bude obsahovať vrcholy s prebytkom toku, množina V^+ bude obsahovať vrcholy, ktoré tok prijímú.

Krok 2: Pre každú vrchol sa definuje bilanciu $b(v) = ideg(v) - odeg(v)$.

Krok 3: Formuluje sa vybilancovanú dopravnú úlohu. Dodávateľov budú reprezentovať vrcholy z množiny V^- , odberateľov vrcholy z V^+ . Ceny budú ohodnotenia najkratších orientovaných ciest medzi vrcholmi z V^- a V^+ . Vektor dodávateľskej kapacity $d = (b(v)|v \in V^-)$, vektor odberateľskej kapacity $o = (b(v)|v \in V^+)$. Dopravu úlohu riešime pre maticu $X_{|V^-| \times |V^+|}$.

Krok 4: Pre $\forall x_{ij} > 0$, sú doplnené kópie orientovaných hrán do digrafu G v najkratšej orientovanej ceste $V_i^- \rightarrow V_j^+$. Digraf G je eulerovský.

Ďalej je priblížený krok 3, teda zostavenie vybilancovanej dopravnej úlohy. Množinu dodávateľov predstavujú vrcholy $v_i \in V^-$, pre ktoré platí $d_i = \text{ideg}(v) - \text{odeg}(v)$, množinu odberateľov reprezentujú vrcholy $v_j \in V^+$, pre ktoré platí $o_i = \text{odeg}(v) - \text{ideg}(v)$. Formulácia dopravnej úlohy je uvedená napr. v [1]:

$$\sum_{v_i \in V^-} \sum_{v_j \in V^+} c_{ij} x_{ij}$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} \sum_{v_j \in V^+} x_{ij} &= d_i, \quad \forall v_i \in V^- \\ \sum_{v_i \in V^-} x_{ij} &= o_i, \quad \forall v_j \in V^+ \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall v_i \in V^-, \forall v_j \in V^+ \end{aligned}$$

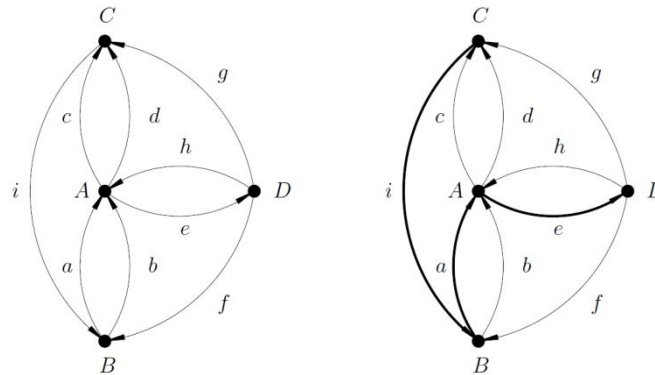
Uvedená formulácia bude mať vždy celočíselne riešenia. Optimálne hodnoty x_{ij} predstavujú počet nových orientovaných ciest, ktoré je potrebné pridať do pôvodného digrafu G , ten sa stáva eulerovským.

Optimalizačný prístup

Podľa [8] je úloha formulovaná na silne súvislom hranovo ohodnotenom orientovanom grafe, teda digrafe $G = (V, H_o, c), c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Cieľom úlohy je teda minimalizovať dĺžku poštárovej trasy v digrafe, problém je označený ako **minimálna orientovaná poštárova trasa MOPT**. Trasa v digrafe je poštárova trasa, ak obsahuje každú orientovanú hranu digrafu aspoň raz. Poštárova trasa digrafu zobrazeného na nasledujúcom obrázku 3-4 je nasledovná:

$(A, c, C, i, B, a, A, d, C, i, B, a, A, e, D, f, B, a, A, e, D, g, C, i, B, b, A, e, D, h, A)$.

Poznamenajme, že niektoré hrany sú použité viac ako dvakrát a tomuto faktu sa nedá vyhnúť.



Obr. 3-4: Digraf a poštárova trasa. Zdroj: Martínez [8].

Pretože digraf obsahuje poštárovu trasu iba keď je silne súvislý, je ľahké určiť či digraf danú trasu obsahuje alebo nie. Dôležitejším problémom je získanie hodnoty poštárovej trasy v digrafe.

Nech je daný digraf $G = (V, H_o, c), c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a poštárova trasa T . Pre každú orientovanú hranu $h \in H_o$ nech $x_h \in \mathbb{N}$ reprezentuje počet výskytov hrany h v poštárovej trase T . Na základe Königovej vety musí x_h spĺňať nasledovné požiadavky: pre $\forall v \in V(G)$ musí platiť : $x(H_G^+(v)) = x(H_G^-(v))$ a pre každú orientovanú hranu $h \in H_o$ musí $x_h \in \mathbb{Z}^n$. Potom môžeme formulovať nasledovnú celočíselnú úlohu [8]:

$$MOPT = \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

pri ohraničeniach

$$x(H_G^+(v)) - x(H_G^-(v)) = 0 \quad \forall v \in V(G)$$

$$x_{h_o} \geq 1 \quad \forall h \in H_o(G)$$

$$x \in \mathbb{Z}^n \quad x \geq 0.$$

Úlohu možno riešiť ako úlohu na toky v sieti, konkrétne ako najlacnejšiu cirkuláciu a s dolným ohraničením toku pre každú orientovanú hranu $l(h) = 1$, kde funkcia toku je definovaná $f(h) = 1$. Spôsob riešenia je uvedený napr. v [11], [4] a [10].

3.1.3 Zmiešaná úloha poštára

Pri riešení zmiešanej úlohy poštára je aplikovaný heuristický algoritmus všeobecne označovaný ako Mixed 2 (z angl. zmiešaný) uvedený napr. v [16]. Nech je daný zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o), c: H_n, H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, algoritmus funguje na princípe rozširovania grafu G , prostredníctvom vytvárania kópií orientovaných a neorientovaných hrán. Výsledný graf je párný a symetrický. Pripomíname, že takýto graf spĺňa postačujúcu podmienku eulerovského multigrafu. Taktiež každý symetrický silno súvislý graf je vyvážený.

Algoritmus 3.3 [16]: Mixed 2

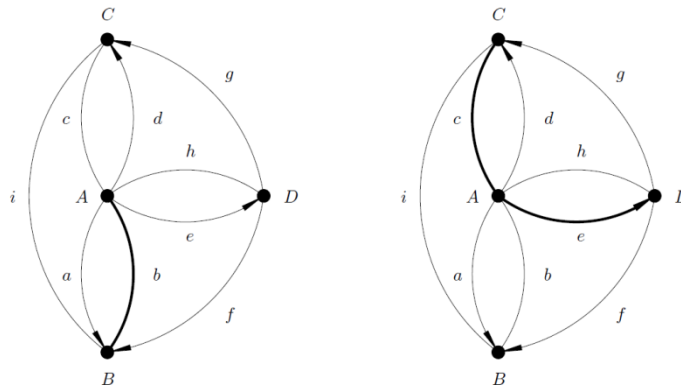
Krok 1: (InOutDegree). Zo zmiešaného grafu G je vytvorený symetrický graf pomocou algoritmu najlacnejšej cirkulácie. Výstupom bude graf $G' = (V', H_n', H_o')$.

Krok 2: (LargeCycles). V grafe $G' = (V', H_n')$ sú identifikované nepárne vrcholy. Aplikuje sa algoritmus najlacnejšieho párovania nepárnych vrcholov rovnako ako v Edmondsovom algoritme, avšak najkratšie cesty sa určia nad faktorovým podgrafom $G_u = (V, H_n) \subseteq G$. Kópie hrán vložíme do G' , ktorý sa stane eulerovským.

Prvý krok algoritmu úzko súvisí s úlohou orientovanej úlohy poštára, preto pri implementácií algoritmu bude použitá aj časť algoritmu na riešenie orientovanej úlohy poštára. Z druhého kroku je zrejmé, že je aplikovaný Edmondsov algoritmus v jednotlivých faktorových grafoch. Je potrebné poznamenať, že pri riešení druhý krok nemusí byť vykonaný, pokiaľ po prvom kroku bude graf upravený tak, že nebude obsahovať neorientované hrany.

Optimalizačný prístup

Problém formuluje Martínez v [8] nasledovne: Úloha je formulovaná na silne súvislom hranovo ohodnotenom zmiešanom grafe, teda pseudomigrafe $G = (V, H_n, H_o), c: H_n, H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Cieľom úlohy je minimalizovať dĺžku poštárovej trasy v zmiešanom grafe, problém sa označí ako **minimálna zmiešaná poštárova trasa MZPT**.



Obr. 3-5: Zmiešaný graf a poštárova trasa. Zdroj: Martínez [8].

Obdobne ako v prechádzajúcich prípadoch trasa v zmiešanom grafe je poštárova trasa, ak obsahuje každú hranu grafu aspoň raz. Poštárova trasa zmiešaného grafu uvedeného na obrázku 3-5 je nasledovná:

$$(A, a, B, b, A, d, C, c, A, e, D, f, b, A, h, D, g, i, B, b, A).$$

Tak ako v orientovanom prípade, poštárova trasa obsahuje niektoré hrany a vrcholy viackrát. Taktiež podobne ako v neorientovanom prípade je potrebné zvážiť či zmiešaný graf obsahuje poštárovu trasu. Zmiešaný graf obsahuje poštárovu trasu ak je silne súvislý. Dôkaz vyplýva z Veblenovej vety pre existenciu eulerovského cyklu v zmiešanom grafe: Ľubovoľný zmiešaný graf $G = (V, H_n, H_o)$ možno rozšíriť duplikáciou neorientovaných hrán (dve paralelné neorientované hrany vytvoria cyklus (v, h, w, h', v)). Pre každú orientovanú hranu $(v, w), v, w \in V$ zmiešanú cestu $w \rightarrow v$, taká cesta existuje, pokiaľ je graf silne súvislý, takýmto spôsobom sa opäť vytvorí cyklus. Uvedenou metódou rozšírený graf tvorený disjunktným zjednotením cyklov, a teda je eulerovský. Zákonite, ak je graf eulerovský, obsahuje poštárovu trasu.

Ďalej je uvedená formulácia úlohy celočíselného lineárneho programovania uvedená napr. v [8]. Prezentovaný postup transformuje zmiešaný graf na orientovaný. Výsledkom je teda orientovaný hranovo ohodnotený graf, ktorý je eulerovský, v ktorom možno určiť poštárovu trasu.

Nech $G = (V, H_o \cup H_n^+ \cup H_n^-)$ je orientovaný graf, vytvorený z $G = (V, H_n, H_o)$, $H = H_o \cup H_n$. Nech $B = H_n^+ \cup H_n^-$. Pre každú hranu $h_n \in H_n$ nech $c(h_n^+) + c(h_n^-) = c(h_n)$. Hľadá sa najlacnejšia prípustná cirkulácia x v $G = (V, H_o \cup H_n^+ \cup H_n^-)$ s dolným ohraničením pre každú orientovanú hranu $x_{h_o} \geq 1, h_o \in H_o$, pričom pôvodne neorientovaným hranám je

pridelená orientácia, a platí $x_{h_n^+} + x_{h_n^-} \geq 1, h_n \in H_n$. Požaduje sa teda, aby neorientovaná hrana bola zmenená na orientovanú v určitom smere, avšak rozšírenie môže obsahovať ďalšie inštancie neorientovanej hrany usmernenej v rovnakom alebo opačnom smere. Formulácia úlohy ma nasledovnú podobu uvedenú napr. v [8]:

$$MZPT = \min \mathbf{c}_{H_0}^T \mathbf{x}_{H_0} + \mathbf{c}_{H_n^+}^T \mathbf{x}_{H_n^+} + \mathbf{c}_{H_n^-}^T \mathbf{x}_{H_n^-}$$

pri ohraničeniach

$$\begin{aligned} x(H_n^+(v)) - x(H_n^-(v)) &= 0, \quad \forall v \in V(G) \\ x_{h_o} &\geq 1, \quad \forall h_o \in H_o(G) \\ x_{h_n^+} + x_{h_n^-} &\geq 1, \quad \forall h_n \in H_n(G) \\ x &\in \mathbb{Z}^n \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

3.2 Metódy prezentácie výsledkov

Nasledujúca časť práce bude venovaná problematike implementácie exaktných resp. heuristického algoritmu na riešenie uvedených úloh do prostredia MS Excel prostredníctvom jazyka Visual Basic for Application. Nebude uvádzaný zdrojový kód, pretože ten je k dispozícii na optickom médiu v prílohách, pre účely práce budú prezentované spôsoby akými sú jednotlivé kroky algoritmov implementované do procedúr a mechanizmus fungovania jednotlivých procedúr ako celku. Nakoniec sú prezentované výpočtové možnosti implementovaných algoritmov v prostredí MS Excel. V prílohách práce na konkrétnych príkladoch sú uvedené spôsoby riešenia jednotlivých úloh pomocou vytvorených procedúr, teda pomocou uvedených algoritmov, ale taktiež na rovnakých príkladoch je prezentovaný spôsob zostavenia a riešenie úloh prostredníctvom optimalizačných metód.

4 Výsledky práce

Hlavným výsledkom celej práce je implementácia exaktných a heuristických metód resp. algoritmov na riešenie jednotlivých úloh poštára (neorientovaná, orientovaná, resp. zmiešaná úloha poštára) v prostredí MS Excel prostredníctvom procedúr vytvorených pomocou programovacieho jazyka Visual Basic for Application. V tejto časti je opísaný a priblížený spôsob implementácie jednotlivých algoritmov.

V prostredí MS Excel sú vytvorené tri súbory, každý je určený na riešenie jedného typu úlohy poštára. Súbory sú uvedené v prílohách na optickom médiu, ich názvy korešpondujú s úlohou na, ktorú sú určené, teda neorientovaná úloha poštára (z angl. Undirected Postman Problem) – UPP.xlsm, orientovaná úloha poštára (z angl. Directed Postman Problem) – DPP.xlsm, zmiešaná úloha poštára (z angl. Mixed Postman Problem) – MPP.xlsm. Každý súbor obsahuje vlastný set procedúr, avšak niektoré procedúry sa vyskytujú vo všetkých resp. v dvoch súboroch, pretože niektoré časti riešenia sú principiálne zhodné. Poznamenajme, že takéto procedúry nemusia byť identické z hľadiska kódu, ale môžu obsahovať menšie úpravy z dôvodu rôznych formulácií úloh, ale z hľadiska podstaty ide o rovnaké procedúry, preto ich budeme v ďalšom priebehu je ich označenie rovnaké.

Pri otvorení, resp. spustení každého súboru je potrebné v MS Excel povoliť makrá, teda umožniť procedúram, aby mohli byť spúšťané. Každý súbor obsahuje tzv. panel s nástrojmi, ktoré slúžia na riešenie konkrétneho typu úlohy. Takýmto spôsobom je možné monitorovať výpočet jednotlivých krokov, avšak panel taktiež ponúka možnosť na získanie riešenia ihneď po zadaní vstupov automatickým volaním všetkých procedúr v určenom poradí. Panel je automaticky zobrazený pri spustení súboru MS Excel.

```
Private Sub Workbook_Open()  
    Dim prem As PANEL  
    Set prem = New PANEL  
    prem.Show vbModeless  
End Sub
```

Script 4-1: Zobrazenie panela nástrojov pri spustení súboru. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Možnosti, ktoré panel ponúka sa líšia v závislosti od typu úlohy. Detailné spracovanie problematiky je uvedené v prílohách práce.

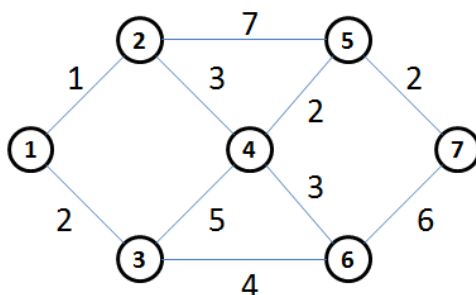
V prílohách práce je uvedený zoznam a popis vytvorených procedúr v programovacom jazyku Visual Basic for Application, v ďalšom priebehu práce sa na daný zoznam budeme odvolávať. Označenie procedúry závisí od toho, či sa procedúra nachádza v jednom alebo vo viacerých súboroch. Ak ide o procedúru, ktorá sa nachádza iba v jednom súbore, je označená jedným z indexov „N“, „O“ alebo „Z“ na základe názvu úlohy, ku ktorej prislúcha. Procedúra, ktorá sa vyskytuje vo viacerých súboroch nie je označená indexom. Je potrebné poznamenať, že označenie procedúr v samotnom kóde nie je identické s označením, ktoré je uvedené, a taktiež reálne zloženie procedúr je omnoho zložitejšie. Zámerom zoznamu procedúr uvedeného v prílohách je možnosť adresnej prezentácie implementácie algoritmov. Presné znenie kódu všetkých procedúr v programovacom jazyku Visual Basic for Application je k dispozícii v prílohách na optickom médiu.

Vstupnými dátami pre každý súbor je matica vzdialeností, ktorej zadanie je manuálne. Ďalej je uvedený segment kódu, ktorý na základe počtu vrcholov, ktoré používateľ zadá, vytvorí podklad na zadanie dát.

```
Sub vstup()  
  
Dim n, i As Integer, j As Integer  
  
Sheets("vstup").Cells.Clear  
Sheets("vstup").Activate  
  
'vstup  
n = InputBox("ZADAJTE POCET VRCHOLOV")  
If IsNumeric(n) = False Then  
    MsgBox ("NEZADALI STE CISLO")  
    Exit Sub  
End If  
  
Sheets("vstup").Cells(1, 1).Value = "V"  
  
'vypis vrcholov matice vzdialenosti  
For i = 1 To n  
    For j = 1 To n  
        Sheets("vstup").Cells(1, i + 1).Value = "u" & i  
        Sheets("vstup").Cells(i + 1, 1).Value = "u" & i  
        If i = j Then  
            Sheets("vstup").Cells(i + 1, j + 1).Value = 0  
        End If  
    Next j  
Next i  
  
End Sub
```

Script 4-2: Vytvorenie podkladu na zadanie vstupov. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Keďže cieľom úloh poštára je vytvorenie eulerovského grafu, je potrebné uviesť mechanizmus, akým bude technicky pri jednotlivých úlohách daný graf vytváraný. V prechádzajúcej kapitole 3 sú uvedené algoritmy, ktoré sú v prostredí MS Excel implementované. Jednotlivé algoritmy vo všeobecnosti pracujú na dopĺňaní hrán do pôvodných grafov, resp. určovaní orientácie jednotlivých hrán. Pri zložitejších grafoch, resp. grafoch väčších rozmerov je často krát hrana, ktorá je algoritmom určená ako fiktívna, resp. je potrebné ju do grafu pridať, aby sa graf stal eulerovským, zložená z čiastkových hrán. Majme nasledovný neorientovaný graf G :



Obr. 4-1: Hranovo ohodnotený neorientovaný graf G . Zdroj: Vlastné spracovanie.

Riešením neorientovanej úlohy poštára pomocou Edmondsovho algoritmu sú fiktívne hrany medzi vrcholmi 2-3 (hrana A) a 5-6 (hrana B). Po doplnení týchto hrán sa stáva graf G eulerovským. Problém však spočíva v určení, ktoré hrany budú zdublikované, keďže neexistuje priame spojenie medzi vrcholmi 2 a 3 resp. 5 a 6. Tento problém rieši procedúra ($P2$), ktorej vstupnými údajmi budú vrcholy hrany A resp. B. Nasledujúci obrázok ilustruje výstup procedúry pre vstupné údaje získané z hrany A, teda vrcholy 2 a 3.

vstup		vystup	
2	1	3	
L	1	2	3

Obr. 4-2: Výstup procedúry $P2$ na určenie najkratšej cesty. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Výstupom procedúry je cesta a najkratšie vzdialenosti medzi jednotlivými vrcholmi, ktoré cesta obsahuje. V konečnom dôsledku je potrebné do grafu G doplniť fiktívne hrany 2-1 a 1-2. Analogický postup platí pre hranu B. Takýmto spôsobom je pôvodný graf G upravený na eulerovský. Procedúra ($P2$) je takýmto spôsobom aplikovaná pri neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohe poštára.

V ďalších častiach je priblížený spôsob implementácie jednotlivých algoritmov na riešenie úloh poštára a taktiež sú uvedené princípy výpočtu resp. pracovania jednotlivých procedúr. Grafickým spôsobom je prezentovaný mechanizmus fungovania a nadväznosti týchto procedúr pre každý typ úlohy poštára. V závere každej časti sú uvedené výpočtové možnosti jednotlivých implementovaných algoritmov v prostredí MS Excel v závislosti od počtu vrcholov a hrán jednotlivých grafov. Údaje majú tabuľkovú formu, kde sú uvedené rozmery grafov a taktiež hodnoty poštárovej trasy. Hodnota trasy má samozrejme len informatívny charakter, pretože tá závisí od ohodnotenia jednotlivých hrán pôvodných vstupných grafov. Tieto grafy sú však uvedené v hárku „data“ v každom súbore na riešenie úloh poštára v prílohách práce.

4.1 Neorientovaná úloha poštára

Ako už bolo uvedené v predchádzajúcej kapitole 3, pri riešení neorientovanej úlohy poštára bude implementovaný exaktný Edmondsov algoritmus. Súbor, ktorý je určený na riešenie uvedenej úlohy poštára má názov „UPP.xlsm“. Hárky, ktoré sú v ňom obsiahnuté sú uvedené a v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 4-1: Zloženia súboru na riešenie neorientovanej úlohy poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Názov hárku	Obsah
<i>vstup</i>	Vstupné dáta, priebeh resp. riešenie Floydovho algoritmu.
<i>matica_k</i>	Pomocné matice na výpočet najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v grafe.
<i>hrany</i>	Tabuľková reprezentácia hrán, vytvorená z pôvodnej matice vzdialeností.
<i>dophrany</i>	Hrany, ktoré sú doplnené do pôvodného grafu. Priestor na úschovu fiktívnych hrán.
<i>postar</i>	Určenie fiktívnych hrán pomocou úlohy lineárneho programovania. Informácie o hodnote poštárovej trasy.
<i>data</i>	Úložisko pre vstupné dáta.

4.1.1 Implementácia Edmondsovhovho algoritmu

Vstupné informácie a ich úprava

Vstupným údajom pre úlohu je neorientovaný graf $G = (V, H_n, c), c: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Graf má podobu matice vzdialeností medzi jednotlivými vrcholmi, pokiaľ neexistuje priama cesta medzi dvoma vrcholmi, vzdialenosť medzi vrcholmi je označená hodnotou „m“. Vstupy sú do aplikácie zadávané manuálne.

Vrchol	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3 m	m	m	
2	2	0 m		6	7	8
3	3 m		0 m	m		6
4	m	6 m		0 m	m	
5	m	7 m	m		0 m	
6	m	8	6 m	m		0

Obr. 4-3: Matica vzdialenosti neorientovaného grafu G. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Po zadaní vstupných údajov, je spustená procedúra na overenie, či je neorientovaný graf G eulerovský ($P5_N$). Procedúra skontroluje párnosť resp. nepárnosť jednotlivých vrcholov na základe počtu numerických hodnôt (okrem hodnoty 0) v riadku pre každý vrchol. Ak je počet numerických hodnôt párný, vrchol dosahuje párný stupeň. Ak je sú stupne všetkých vrcholov párne, poštár prejde každou hranou jedenkrát. Hodnota poštárovej trasy je v takomto prípade určená procedúrou ako suma hodnôt uvedených v matici vzdialeností delená číslom 2, algoritmus končí. Ak sa nachádzajú v matici vzdialeností vrcholy nepárneho stupňa, riešenie úlohy poštára pokračuje ďalej.

Pre riešenie úloh poštára je veľmi dôležitá informácia, ktorá uvádza najkratšie vzdialenosti medzi všetkými vrcholmi dopravnej siete (v našom prípade matice vzdialeností), nosnou je taktiež informácia cez ktoré vrcholy je najkratšia cesta realizovaná. Na riešenie tejto čiastkovej úlohy je vytvorená procedúra ($P1$), do ktorej je implementovaný Floydov algoritmus v podobe, v akej ho uvádza Brezina v kol. v [1]. Procedúra poskytuje celý výstup Floydovho algoritmu, maticu najkratších vzdialeností medzi všetkými vrcholmi, taktiež pomocnú maticu na určenie najkrajšej cesty medzi jednotlivými vrcholmi. Určenie najkratšej cesty medzi vrcholmi je následne realizované prostredníctvom procedúry ($P2$), ktorej vstupnými údajmi sú začiatkový a konečný vrchol. Procedúra teda určuje najkratšiu cestu z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu. Po vytvorení uvedených procedúr môžeme pristúpiť k ďalšiemu riešeniu neorientovanej úlohy poštára.

Riešenie úlohy

V časti realizácie riešenia je uvedený spôsob implementácie Edmondsovho algoritmu a mechanizmus výpočtu prostredníctvom vytvorených procedúr.

Úplný graf K_{2t}

V prvom kroku riešenia je opäť volaná procedúra ($P5_N$) na identifikáciu množiny vrcholov nepárneho stupňa V_E (spôsob jej pracovania je uvedený v predchádzajúcej časti). Podľa algoritmu je následne vytvorený úplný graf $K_{2t}(V_E, H_E, c)$, $c: H_n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, kde hranové ohodnotenie každej hrany udáva dĺžku najkratšej cesty z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Poznamenajme, že úplný graf je graf, v ktorom je každý vrchol spojený s každým iným vrcholom grafu. Tento krok je vyriešený procedúrou ($P6_N$), ktorá z vrcholov nepárneho stupňa vytvorí všetky ich kombinácie, kde jedna kombinácia predstavuje jednu hranu. Každá kombinácia má pridelenú dĺžku najkratšej cesty z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Vzďialenosť je určená automatickým zavolaním procedúry na určenie najkratšej vzdialenosti vrcholov pre každú kombináciu vrcholov, resp. hranu úplného grafu. Kombinácie vrcholov nepárneho stupňa a ich najkratšie vzdialenosti nám vytvárajú úplný graf K_{2t} .

Najlacnejšie úplné párenie

Po vytvorení úplného grafu K_{2t} v nasledujúcom kroku sa hľadá najlacnejšie úplné párenie $P(V_E, H_P, c)$, t.j. taký podgraf grafu K_{2t} , ktorého každý vrchol $v \in V_E$ je vrcholom práve jednej páriacej hrany $h_p \in H_P$ a súčet ohodnotení jeho hrán je minimálny. Ako je uvedené v predchádzajúcej kapitole, problém je riešený bivaletnou úlohou najlacnejšieho párenia³. Procedúra, ktorá zostavuje a rieši bivalentnú úlohu sa za účelom získania optimálneho riešenia odvoláva na funkciu MS Excel, tzv. „Solver“ alebo „Riešiteľ“. Procedúra ($P7_N$) teda pozostáva zo zostavenia úlohy a zavolania Solveru, ktorý poskytuje riešenie, ktoré v našom prípade predstavuje hodnotu 1 alebo 0 pri jednotlivých hranách úplného grafu K_{2t} a hodnotu účelovej funkcie. Hodnota 1 pri hrane úplného grafu znamená, že daná hrana je hranou najlacnejšieho úplného párenia a je potrebné príslušnú hranu v pôvodnom neorientovanom grafe G zdublikovať, resp. do grafu G pridať, získavame tzv. fiktívne hrany. Poznamenajme, že v tejto časti riešenia je už známa hodnota neorientovanej

³ Formulácia bivalentnej úlohy je uvedená v podkapitole 3.1.1 Neorientovaná úloha poštára.

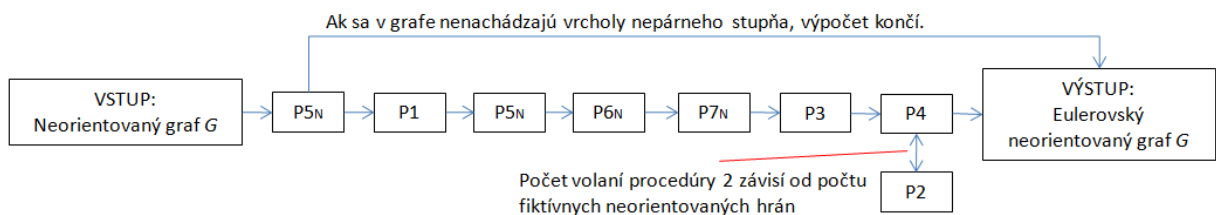
trasy poštára, ktorá predstavuje súčet sumy číselných hodnôt pôvodnej matice vzdialeností podelenej číslom 2 a hodnoty účelovej funkcie bivalentnej úlohy. Nie je známe však presné rozloženie a počty hrán grafu.

Vytvorenie Eulerovského grafu

Cieľom úlohy je vytvorenie Eulerovského grafu, teda grafu, ktorého všetky vrcholy dosahujú páry stupeň. Aby mohli byť monitorované všetky hrany a taktiež ich výskyt v pôvodnom neorientovanom grafe G , pomocou procedúry (P3) na prepis hrán z matice vzdialenosti sú hrany transformované do podoby, kde je hrana reprezentovaná dvoma vrcholmi, ktoré sú s hranou incidentné, jej dĺžkou a počtom výskytov hrany v grafe G . Po spustení procedúry (P3) je samozrejme počet výskytov každej hrany 1. Dôležitou časťou v tomto kroku je správne pridanie fiktívnych hrán získaným z najlacnejšieho úplného párenia do pôvodného grafu G . Vrcholy hrán úplného grafu, ktoré boli v bivalentnej úlohe vyhodnotené ako hrany úplného najlacnejšieho párenia, slúžia ako vstupy pre procedúru (P2) na určenie najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v grafe G . Takto sú identifikované hrany grafu, ktoré je potrebné zdublikovať, resp. sú určené fiktívne hrany. Nakoniec je volaná procedúra (P4) na zápis fiktívnych hrán grafu G , ktorý sa stáva eulerovským, to znamená, že výskyt niektorých hrán dosahuje hodnotu 2. Výsledkom je teda hodnota neorientovanej trasy poštára a presný rozpis dĺžky a počtu výskytov jednotlivých neorientovaných hrán v eulerovskom grafe G .

Grafické zobrazenie postupnosti procedúr

Nasledujúci obrázok ilustruje postupnosť jednotlivých procedúr vytvorených na riešenie neorientovanej úlohy poštára.



Obr. 4-4: Procedúry na riešenie neorientovanej úlohy poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Je zřejmé, že ak je vstupný neorientovaný graf eulerovský, výpočet je ukončený, pretože je známa hodnota poštárovej trasy a taktiež rozloženie jednotlivých hrán grafu. Ďalej

sú v tabuľkovej forme uvedené výsledky výpočtových experimentov, resp. hodnoty poštárovej trasy v závislosti od počtu vrcholov a neorientovaných hrán. Neorientované grafy, na ktorých boli výpočty realizované sú uvedené v súbore „UPP.xmls“ v hárku s názvom „data“, súbor je uvedený v elektronickej podobe v prílohách práce.

Tab. 4-2: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, neorientovaná úloha poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Graf	Počet vrcholov	Počet hrán	Hodnota poštárovej trasy
1	10	19	124
2	10	22	160
3	10	26	211
4	15	45	333
5	15	50	401
6	15	57	476
7	20	70	488
8	20	80	635
9	20	100	913
10	25	129	951
11	25	158	1349
12	30	189	x

Na základe testovania bolo zistené, že pri úlohách, ktorých rozmer presahuje 30 vrcholov, resp. cca 160 hrán, pri zostavení a riešení úlohy najlacnejšieho úplného párenia solver v MS Excel nedokáže poskytnúť optimálne riešenie, pretože úloha obsahuje viac ako 200 premenných, čo predstavuje maximálny počet, ktorý solver dokáže akceptovať. Čiastková úloha, teda bola zostavená, avšak na jej riešenie je potrebný profesionálny solver. Takýto problém, resp. limit je možné očakávať aj pri orientovanej a zmiešanej úlohe.

4.2 Orientovaná úloha poštára

V tejto časti j prezentovaná implementácia algoritmu v prostredí MS Excel na riešenie orientovanej úlohy poštára. Pri implementácií sú použité niektoré procedúry, ktoré boli vytvorené na riešenie neorientovanej úlohy. Označenie týchto procedúr bude preto rovnaké. Nasledujúca tabuľka približuje štruktúru súboru „UPP.xmls“ na riešenie uvedenej úlohy.

Tab. 4-3: Zloženia súboru na riešenie orientovanej úlohy poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Názov hárku	Obsah
<i>vstup</i>	Vstupné dáta, priebeh resp. riešenie Floydovho algoritmu.
<i>matica_k</i>	Pomocné matice na výpočet najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v grafe.
<i>hrany</i>	Tabuľková reprezentácia hrán, vytvorená z pôvodnej matice vzdialeností.
<i>solver</i>	Určenie fiktívnych hrán pomocou úlohy lineárneho programovania v podobe vybilancovanej dopravnej úlohy. Informácie o hodnote poštárovej trasy.
<i>data</i>	Úložisko pre vstupné dáta.

4.2.1 Implementácia algoritmu na riešenie orientovanej úlohy poštára

Algoritmus, ktorého proces implementácie bude uvedený sa v detailnej podobe nachádza v tretej kapitole.

Vstupné informácie a ich úprava

Vstupným údajom pre úlohu je orientovaný graf, resp. digraf $G = (V, H_o, c), c: H_o \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Digraf je opäť reprezentovaný maticou vzdialeností, na ktorú sa ako v predchádzajúcom prípade vzťahujú rovnaké charakteristiky. Vstupy sú do aplikácie zadávané manuálne. Pri ďalšej úprave vstupov je zavolaná procedúra (P1) na výpočet Floydovho algoritmu, ktorého výstupom je matica najkratších vzdialeností jednotlivých vrcholov. Po úprave vstupov je možný prechod k riešeniu úlohy.

Riešenie úlohy

V časti realizácie riešenia je obdobne ako v prechádzajúcom prípade uvedený spôsob implementácie algoritmu na riešenie orientovanej úlohy poštára a mechanizmus výpočtu prostredníctvom vytvorených procedúr.

Určenie nesymetrických vrcholov

V prvom kroku je potrebné určiť, či v sa v matici vzdialeností nachádzajú vrcholy, ktoré sú nesymetrické, teda počet hrán, ktoré do vrcholu vstupujú a z vrcholu vystupujú je rozdielny. Poznamenajme, že ak sa vo vstupných údajoch nachádzajú iba symetrické vrcholy,

digraf je eulerovský, hodnota poštárovej trasy je rovná sume numerických hodnôt uvedených v matici vzdialeností, poštár prejde každou hranou práve jedenkrát a algoritmus končí. Procedúra ($P8_0$), ktorá rieši daný problém pracuje nasledovne: Pre každý vrchol je procedúrou určený počet numerických hodnôt (okrem hodnoty 0) v príslušnom riadku vstupnej matice vzdialeností, čo predstavuje počet hrán, ktoré z vrcholu vystupujú, procedúra taktiež určí počet numerických hodnôt pre daný vrchol v príslušnom stĺpci, čo predstavuje počet hrán, ktoré z vrcholu vystupujú. Pre každý vrchol sú teda určené dve hodnoty, tieto sú porovnané, vstup prevyšuje výstup vrchol je zaradený do množiny V^- (vrcholy s prebytkom toku), ak je situácia opačná, vrchol je zaradený do množiny V^+ (vrcholy, ktoré tok prijímú). Vrcholy, ktoré sú symetrické budú ďalej vo výpočtoch použité nepriamo.

Bilancia vrcholov

V tomto kroku algoritmu, je potrebné určiť rozdiel medzi počtom vstupujúcich a vystupujúcich hrán pre každý vrchol digrafu. Teda určiť bilanciu vrcholov $b(v) = iddeg(v) - odeg(v)$. Procedúra ($P9_0$), ktorá je volaná na určenie bilancie vrcholov, vo veľkej miere vychádza z predchádzajúcej procedúry, je doplnená o možnosť kvantifikovať bilanciu vrcholov a zároveň vrcholy spolu s údajmi počte vstupujúcich a vystupujúcich hrán prepisuje z matice vzdialeností do podoby, ktorá je potrebná na ďalšie riešenie úlohy.

Vybilancovaná dopravná úloha

Algoritmus ďalej uvádza, že pri riešení orientovanej úlohy poštára je možné použiť úlohu lineárneho programovania v podobe vybilancovanej dopravnej úlohy⁴. Hrany sú v úlohe reprezentované začiatočným a konečným vrcholom. Na riešenie tohto problému je volaná procedúra ($P10_0$) na zostavenie a riešenie dopravnej úlohy v podobe úlohy lineárneho programovania. Procedúra opäť za účelom získania optimálneho riešenia požíva funkciu MS Exel, tzv. „Solver“ alebo „Riešiteľ“. Riešením úlohy sú hodnota účelovej funkcie, ktorá vyjadruje dodatočnú vzdialenosť, ktorú musí poštár absolvovať a numerické hodnoty zodpovedajúce hranám, ktoré vyjadrujú počtu výskytov týchto hrán, a ktoré je potrebné do pôvodného digrafu pridať, resp. zduplikovať, aby sa graf stal symetrickým. Poznamenajme, že hrany použité v dopravnej úlohe môžu okrem začiatočného a konečného vrcholu obsahovať aj

⁴ Presný postup zostavenia dopravnej úlohy je uvedený v podkapitole 3.1.2 Orientovaná úloha poštára.

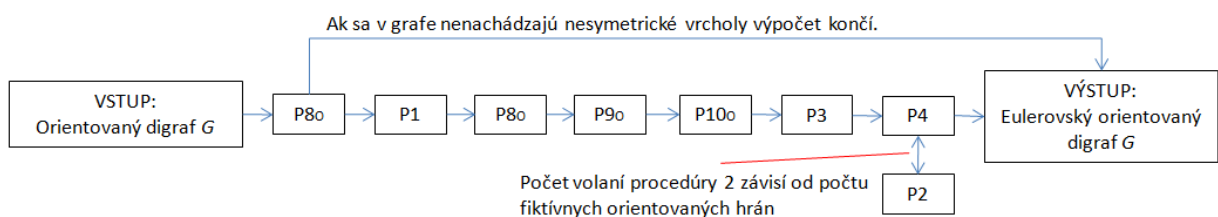
iné vrcholy. Taktiež v tejto časti výpočtu je už známa hodnota minimálnej orientovanej poštárovej trasy, ktorá je určená ako súčet hodnoty účelovej funkcie a sumy numerických hodnôt pôvodnej matice vzdialeností. Avšak nie je známe presné rozloženie a počet orientovaných hrán v digrafe G .

Vytvorenie Eulerovského digrafu

Cieľom úlohy je vytvorenie eulerovského digrafu, teda digrafu, ktorého všetky vrcholy sú symetrické. Aby sa rovnako ako pri neorientovanej úlohe opäť mohli monitorovať všetky orientované hrany a ich výskyt v pôvodnom orientovanom digrafe G , je použitá procedúra (P3) na prepis hrán z pôvodnej matice vzdialenosti, orientované hrany sú transformované do podoby, kde je každá hrana reprezentovaná dvoma vrcholmi, ktoré sú s hranou incidentné, jej dĺžkou a počtom výskytov hrany v digrafe G . Po spustení procedúry je samozrejme počet výskytov každej hrany opäť najskôr 1. Na správne priradenie nových orientovaných hrán do digrafu je v závislosti od výstupu dopravnej úlohy volaná procedúra (P2) na určenie najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v digrafe G . Nakoniec je zavolaná procedúra (P4) na zápis fiktívnych hrán do digrafu G , ktorý sa stáva eulerovským a symetrickým, to znamená, že výskyt niektorých hrán dosahuje hodnotu väčšiu ako 1. Výsledkom je hodnota minimálnej orientovanej trasy poštára a presný rozpis dĺžky a počtu výskytov jednotlivých orientovaných hrán v eulerovskom digrafe G .

Grafické zobrazenie postupnosti procedúr

Nasledujúci obrázok ilustruje postupnosť jednotlivých procedúr na riešenie orientovanej úlohy poštára. Poznamenajme, že niektoré procedúry sú identické s procedúrami na výpočet neorientovanej úlohy a majú rovnaké označenie.



Obr. 4-5: Procedúry na riešenie orientovanej úlohy poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Postupnosť procedúr dosahuje vo všeobecnosti rovnaký charakter ako v prípade neorientovanej úlohy. Avšak niektoré procedúry pracujú na inom princípe, ten je uvedený v predchádzajúcej časti. Ďalej sú v tabuľkovej forme uvedené výsledky výpočtových experimentov, resp. hodnoty poštárovej trasy v závislosti od počtu vrcholov a orientovaných hrán. Orientované grafy, na ktorých boli výpočty realizované sú uvedené v súbore „DPP.xmls“ v hárku s názvom „data“, súbor je uvedený v elektronickej podobe v prílohách práce.

Tab. 4-4: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, orientovaná úloha poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Digraf	Počet vrcholov	Počet hrán	Hodnota poštárovej trasy
1	10	39	504
2	10	43	1140
3	10	45	1198
4	15	93	2180
5	15	100	2510
6	15	105	2620
7	20	171	3156
8	20	183	3483
9	20	190	3670
10	25	273	4911
11	25	286	5134
12	30	435	x

Na základe testovania bolo zistené, že pri úlohách, ktorých rozmer opäť presahuje 30 vrcholov, resp. cca 280 hrán, pri zostavení a riešení úlohy vybilancovanej dopravnej úlohy solver v MS Excel nedokáže poskytnúť optimálne riešenie, pretože úloha obsahuje viac ako 200 premenných, čo predstavuje maximálny počet, ktorý solver dokáže akceptovať. Čiastková úloha, teda bola zostavená, avšak na jej riešenie je potrebný profesionálny solver. Takýto problém, bol očakávaný, pretože sa vyskytol aj pri neorientovanej úlohe. Aj keď nejde o rovnaké úlohy, ktoré solver rieši.

4.3 Zmiešaná úloha poštára

Najzložitejšou časťou práce je implementácia heuristického algoritmu označeného ako Mixed 2 určeného na riešenie zmiešanej úlohy poštára. Algoritmus je rovnako ako predchádzajúce prípady implementovaný v prostredí MS Excel, pričom sú použité niektoré procedúry aplikované na riešenie neorientovanej a orientovanej úlohy. Tieto procedúry budú mať opäť rovnaké označenie. Nasledujúca tabuľka približuje štruktúru súboru „DPP.xmls“ na riešenie uvedenej orientovanej úlohy.

Tab. 4-5: Zloženia súboru na riešenie zmiešanej úlohy poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Názov hárku	Obsah
<i>vstup</i>	Vstupné dáta, priebeh resp. riešenie Floydovho algoritmu.
<i>matica_k</i>	Pomocné matice na výpočet najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v grafe.
<i>hrany</i>	Tabuľková reprezentácia hrán, vytvorená z pôvodnej matice vzdialeností.
<i>inout</i>	Kombinácie nevybilancovaných vrcholov.
<i>solver</i>	Určenie fiktívnych hrán pomocou úlohy lineárneho programovania v podobe vybilancovanej dopravnej úlohy.
<i>dophrany</i>	Fiktívne hrany, ktoré sú výsledkom vybilancovanej dopravnej úlohy.
<i>faktgraf</i>	Vrcholy na vytvorenie faktorových grafov.
<i>faktgrafy</i>	Vytváranie faktorových grafov.
<i>faktgraf_all</i>	Zoznam všetkých faktorových grafov.
<i>vstup_f</i>	Priestor na vstupy, pre každý faktorový graf.
<i>matica_k_f</i>	Pomocné matice na výpočet najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu vo faktorovom grafe.
<i>index_f</i>	Indexácia hrán faktorových grafov.
<i>dophrany2</i>	Fiktívne hrany, ktoré sú výsledkom najlacnejšieho úplného párenia v faktorových grafoch.
<i>dophrany1</i>	Finálne rozloženie hrán grafu, hodnota poštárovej trasy.
<i>data</i>	Úložisko pre vstupné dáta.

Už z obsahu tabuľky je zrejmé, že zmiešaná úloha poštára je výpočtovo komplikovanejšia ako predchádzajúce úlohy.

4.3.1 Implementácia algoritmu Mixed 2

Heuristický algoritmus, ktorého proces implementácie je uvedený na nasledujúcej časti je v detailnej podobe uvedený v predchádzajúcej tretej kapitole, ktorá je venovaná metodike práce.

Vstupné informácie a ich úprava

Vstupným dátami pre zmiešanú úlohu je zmiešaný graf, $G = (V, H_n, H_o), c: H_n, H_o, \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Graf je rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch reprezentovaný maticou vzdialeností s rovnakými vlastnosťami. Vstupy sú do aplikácie zadávané manuálne. Pri úprave vstupov do pre aplikáciu potrebnej podoby je zavolaná procedúra (P1) na výpočet Floydovho algoritmu, ktorého výstupom je matica najkratších vzdialeností jednotlivých vrcholov. V tejto fáze je na rozdiel od prechádzajúcich prípadov volaná modifikovaná procedúra (P3) na transformáciu pôvodnej matice vzdialeností do tabuľkovej podoby, modifikácia spočíva v poskytnutí údaju, či ide o orientovanú hranu (hodnota 0) alebo neorientovanú hranu (hodnota 1). Ostatné charakteristiky sú rovnaké: každá hranu je reprezentovaná dvoma vrcholmi, ktoré sú s hranou incidenčné, jej dĺžkou a počtom výskytov hrany v zmiešanom grafe. Po spustení procedúry (P3) dosahuje výskyt každej hrany hodnotu 1.

Riešenie úlohy

Algoritmus, ktorý bol uvedený v predchádzajúcej kapitole pozostáva z dvoch veľkých častí nazvaných *InOutDegree* a *LargeCycles*, pre účely práce budú tieto časti algoritmu označované ako *Vytvorenie symetrického grafu* a *Najlacnejšie úplné párenie v zmiešanom grafe*.

Vytvorenie symetrického grafu

Táto časť algoritmu úzko súvisí s orientovanou úlohou poštára. Cieľom je identifikovať symetriu všetkých vrcholov, pričom uvažujeme len orientované hrany. Neorientované hrany nemajú vplyv na symetriu vrcholu. V tejto časti výpočtu je volaná procedúra (P11_Z) na určenie bilancie vrcholov zmiešaného grafu G . Po určení bilancie je volaná procedúra (P10_O) na zostavenie a riešenie vybilancovanej dopravnej úlohy pracujúce na rovnakom princípe ako pri orientovanej úlohe poštára. Keďže už vo fáze úpravy vstupov

bola transformovaná pôvodnú maticu vzdialeností do tabuľkovej podoby, kde každá hrana obsahuje aj údaj o orientácii a počte výskytov, zavoláme procedúru na zápis fiktívnych hrán do zmiešaného grafu a priradenie orientácie neorientovaným hranám. Procedúra ($P4$) teda na základe výsledkov vybilancovanej dopravnej úlohy zdublikuje hrany v tabuľke vstupných údajov použitím procedúry ($P2$) na určenie najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu v grafe. Pričom neorientované hrany v tejto fáze nie sú duplikované, ak by na základe výsledkov dopravnej úlohy mali byť znásobené je im iba pridelená požadovaná orientácia, teda sú zmenené na orientované hrany, tak, že hodnota určujúca orientáciu hrany je zmenená na hodnotu 0. Po ukončení tejto fázy získavame zmiešaný graf, ktorého všetky vrcholy sú symetrické. Je potrebné poznamenať, že procedúra ($P12_Z$) na záver kontroluje či všetky hrany nie sú orientované, to by znamenalo, že pôvodný zmiešaný graf bol upravený na eulerovský digraf, taktiež by bolo známe presné zloženie grafu a hodnota minimálnej zmiešanej poštárovej trasy by bola určená ako suma násobkov hodnoty výskytu hrán a ich dĺžok, výpočet by skončil. Ak sa však v zmiešanom grafe stále vyskytujú neorientované hrany, v riešení úlohy sa pokračuje.

Najlacnejšie úplné párenie v zmiešanom grafe

V tejto časti algoritmu pri výpočtoch používame, len neorientované hrany, teda hrany, ktorých atribútu orientácie si po predchádzajúcom kroku zanechal hodnotu 1. Výskyt týchto hrán dosahuje taktiež stále hodnotu 1. Už z názvu tohto kroku je zrejmé, že na výpočet budú volané niektoré procedúry na riešenie neorientovanej úlohy, resp. ich modifikácie. Avšak proces výpočtu je o niečo zložitejší. Na základe výskytu neorientovaných hrán je volaná procedúra ($P13_Z$), ktorá z vrcholov týchto hrán vytvorí tzv. faktorové grafy, teda grafy, ktorých každý vrchol je priamo spojený s každým iným vrcholom. Procedúra pracuje na základe vytvárania kombinácií vrcholov neorientovaných hrán, pričom výskyt vrcholov, ktoré vo faktorovom grafe figurujú viackrát z dôvodu incidencie s viacerými neorientovanými hranami je upravený na hodnotu 1. Poznamenajme, že faktorový graf môže byť tvorený jednou hranou, resp. faktorových grafov môže byť viac a ich zloženie je variabilné. V ďalšej časti výpočtu je potrebné realizovať najlacnejšie úplné párenie v každom faktorovom grafe, čiže procedúra ($P7_N$) na určenie najlacnejšieho úplného párenia bude volaná v cykle na základe počtu faktorových grafov. Pri každej iterácii procedúra ($P7_N$) zostaví a vyrieši za

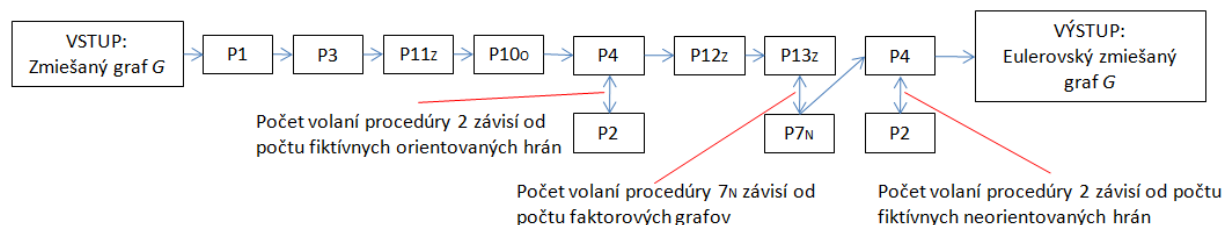
pomoci Solvera úlohu bivalentného programovania na riešenie neorientovanej úlohy pošťára pre každý faktorový graf. Samozrejme po každom vyriešení bivalentnej úlohy je volaná procedúra (P4) na zápis fiktívnych hrán do zmiešaného grafu G , ktorá získava vstupy z procedúry (P2) na určenie najkratšej cesty z ľubovoľného do iného ľubovoľného vrcholu vo faktorovom grafe. Takýmto spôsobom sú pridelené fiktívne hrany do zmiešaného grafu. Poznamenajme, že ak sa v zmiešanom grafe vyskytuje faktorový graf reprezentovaný len jednou hranou, bivalentna úloha nie je zostavovaná, ale príslušná hrana je zdublikovaná z v tabuľke vstupov.

Zmiešaná pošťarova trasa

Po ukončení oboch fáz je vytvorený zmiešaný graf, ktorý je symetrický a vrcholy dosahujú párny stupeň. Graf má podobu tabuľky, kde sú uvedené všetky hrany, ich dĺžka, orientácia, počet výskytov. Hodnota zmiešanej pošťarovej trasy je získaná procedúrou, ktorá poskytne sumu súčinov dĺžok hrán ich počtu výskytov.

Grafické zobrazenie postupnosti procedúr

Obrázok 4-6 ilustruje postupnosť jednotlivých procedúr na riešenie zmiešanej úlohy pošťára. Je nutné poznamenať, že niektoré procedúry sú identické s procedúrami na výpočet neorientovanej a orientovanej úlohy a majú rovnaké označenie.



Obr. 4-6: Postupnosť procedúr na riešenie zmiešanej úlohy pošťára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Postupnosť procedúr dosahuje vo všeobecnosti kombinovaný charakter prípadov orientovanej a neorientovanej úlohy. Ďalej sú v tabuľkovej forme uvedené výsledky výpočtových experimentov, resp. hodnoty pošťarovej trasy v závislosti od počtu vrcholov a orientovaných hrán. Zmiešané grafy, na ktorých boli výpočty realizované sú obdobne ako v predchádzajúcich prípadoch uvedené v súbore „MPP.xmls“ v hárku s názvom „data“, súbor je uvedený v elektronickej podobe v prílohách práce.

Tab. 4-6: Výsledné hodnoty poštárovej trasy, zmiešaná úloha poštára. Zdroj: Vlastné spracovanie.

Migraf	Počet vrcholov	Počet hrán	Hodnota poštárovej trasy
1	10	40	816
2	10	42	837
3	12	61	1264
4	15	91	1691
5	15	95	1750
6	15	98	1768
7	20	166	3174
8	20	172	3272
9	20	178	3348
10	25	264	5173
11	25	274	5270
12	30	381	x

Na základe testovania bolo zistené, že pri úlohách, ktorých rozmer opäť ako v prechádzajúcich prípadoch presahuje 30 vrcholov, resp. 300 hrán, pri zostavení a riešení čiastkových úloh vo forme lineárneho programovania solver v MS Excel nedokáže poskytnúť optimálne riešenie, pretože úlohy obsahujú viac ako 200 premenných, čo predstavuje maximálny počet, ktorý solver dokáže akceptovať. Čiastkové úlohy, bola zostavené, avšak na ich riešenie je potrebný profesionálny solver. Takýto problém, bol očakávaný, pretože sa vyskytol aj pri neorientovanej resp. orientovanej úlohe.

Záver

Úvodná kapitola práce bola venovaná problematike a teoretickému výkladu úloh o obsluhu hrán dopravnej siete, konkrétne úloh poštára. Táto časť taktiež obsahuje prehľad publikovaných poznatkov o riešenej problematike. Nosnou časťou kapitoly bolo uvedenie resp. priblíženie problematiky eulerovských ťahov, a eulerovských grafov, keďže cieľom, a teda riešením jednotlivých úloh poštára je modifikácia pôvodného grafu na eulerovský graf. V tejto časti boli taktiež uvedené postupy a algoritmy na identifikáciu uzavretých eulerovských ťahov. Keďže predmetom práce boli niektoré špeciálne úlohy poštára, úvodná kapitola obsahuje aj formulácie relatívne veľkého počtu špeciálnych prípadov jednotných úloh o obsluhu hrán siete. Záver kapitoly bol venovaný možným aplikáciám niektorých úloh poštára v praxi. Okrem využitia pri klasických dopravných sieťach boli uvedené aj možnosti využitia orientovanej úlohy napr. pri kontrole odkazov internetovej stránky.

Druhá kapitola obsahuje jednotlivé ciele práce. Hlavným cieľom bola implementácia algoritmov na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára. Prostredím implementácie bol softvér MS Excel, ktorý poskytuje možnosť vytvárania procedúr prostredníctvom programovacieho jazyka Visual Basic for Application. Keďže cieľom jednotlivých úloh poštára slúžia je optimalizácia procesov, tabuľkový procesor svojou flexibilitou poskytoval ideálne prostredie pre implementáciu algoritmov. Cieľom bolo taktiež určiť výpočtové limity softvéru MS Excel pri praktickom riešení úloh.

Významnou časťou práce je tretia kapitola, ktorá bola venovaná podrobnej problematike neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy poštára, a teda obsahuje najdôležitejšie údaje pre implementáciu jednotlivých algoritmov. V prípade neorientovanej a orientovanej úlohy bol uvedený resp. opísaný spôsob riešenia prostredníctvom exaktných algoritmov, avšak na riešenie zmiešanej úlohy bol v práci prezentovaný heuristický prístup riešenia. Tieto prístupy a algoritmy boli predmetom samotnej implementácie v prostredí MS Excel. Kapitola taktiež prezentuje optimalizačné prístupy riešenia jednotlivých úloh v podobe úloh celočíselného lineárneho programovania. Praktické použitie optimalizačných prístupov, teda zostavenie úloh, je na konkrétnych situáciách uvedené v prílohách práce.

Najdôležitejšia časť práce je obsiahnutá v poslednej, teda štvrtej kapitole, v ktorej boli prezentované výsledky celej práce. Úvod kapitoly je venovaný štruktúre a spôsobu prezentácie

výsledkov a mechanizmu, akým boli jednotlivé úlohy riešené, teda spôsobom, akým boli z pôvodných grafových štruktúr vytvárané eulerovské grafy. Detailný spôsob implementácie algoritmov bol uvedený jednotlivých častiach kapitoly, každá bola venovaná jednému typu úloh pošťára. Prezentácia spôsobu implementácie metód riešenia kopírovala jednotlivé kroky algoritmov uvedených v tretej kapitole. Súčasťou kapitoly boli aj výpočtové experimenty v prostredí MS Excel, kde boli riešené jednotlivé úlohy s rôznym počtom vrcholov a hrán grafov. Tu je nutné poznamenať, že pri problémoch ktoré dosahovali viac ako 30 vrcholov a cca 180 hrán softvérové vybavenie prostredia, resp. Solver, ktorý bol slúžil na riešenie niektorých čiastkových úloh jednotlivých algoritmov nedokázal poskytnúť riešenie. Nešlo teda o principiálny problém, ale problém naplnenie maximálneho limitu premenných, s ktorým vie základná verzia Solveru pracovať. Avšak toto je možné odstrániť zakúpením profesionálnej verzie Solveru. Cieľom tejto časti nebolo poskytnúť zdrojový kód jednotlivých procedúr, ten sa nachádza na optickom médiu v prílohách, ale skôr principiálne prezentovať, akým spôsobom procedúry riešia jednotlivé kroky algoritmov. Na konci každej časti bol v grafickej podobe uvedený mechanizmus fungovania jednotlivých procedúr ako celku.

Dôležitou časťou práce sú jej prílohy. V tejto časti sú obsiahnuté súbory MS Excel s implementovanými algoritmi na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy pošťára v elektronickej podobe na optickom médiu. Súčasťou príloh sú taktiež aj riešené problémy, ktoré sú vyriešené najskôr optimalizačnými prístupmi, teda je prezentované zostavenie úloh lineárneho programovania a poskytnuté optimálne riešenie, samozrejme tieto úlohy sú riešené aj prostredníctvom implementovaných algoritmov v prostredí MS Excel, pričom jednotlivé výsledky sú porovnané. Táto časť teda slúži aj ako návod na použitie jednotlivých súborov na riešenie neorientovanej, orientovanej a zmiešanej úlohy pošťára.

Zoznam použitej literatúry

1. **BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z. a REIFF, M.** *Kvalitatívne metódy na podporu logistických procesov.* Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009. ISBN: 978-80-225-2648-7.
2. **PALÚCH, S. a PEŠKO, Š.** *Kvantitatívne metódy v logistike.* Žilina : EDIS, 2007. ISBN: 80-8070-636-0.
3. **PALÚCH, S.** *Algoritmická teória grafov.* Žilina : Žilinská univerzita, 2008. 161-165.
4. **UNČOVSKÝ, L. a kol.** *Modely sieťovej analýzy.* Bratislava : ALFA, 1991. ISBN: 80-00812-0.
5. **DEMLOVÁ, M. a ŠTĚPÁNKOVÁ, O.** *Teorie složitosti a úlohy umělé inteligence.* Praha : Academia, 2001. Vol. 3 díl.
6. **EULER, L.** 1736. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* In *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.* 1736, issue 8, pp. 128-140.
7. **BREZINA, I., IVANIČOVÁ, Z. a PEKÁR, J.** *Operačná analýza.* Bratislava : Iura, 2007. ISBN: 978-80-8078-176-7.
8. **MARTÍNEZ, F. J.** *Postman Problems on Mixed Graphs.* Waterloo, Ontario, Canada : University of Waterloo, 2003, Ph.D. thesis.
9. **KÖNIG, D.** *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe.* Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.
10. **DEMEL, J.** *Grafy a jejich aplikace.* 1. vydanie Praha : Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
11. **FORD, L. R. a FULKERSON, D. R.** *Flows in Networks.* Princeton : Princeton University Press, 1962. ISBN 80-200-0990-6.
12. **EDMONDS, J. a JOHNSON, E. L.** Matchin, Euler tours and the Chinese postman. In *Mathematical Programmiung.* s.l. : Elsevier (North-Holland), 1973, vol. 5.

13. **RAGHAVACHARI, B. a VEERASAMYY, J.** Approximation Algorithms for Mixed Postman Problem. *Integer Programming and Combinatorial Optimization*. Lecture Notes in Computer Science, 1998, Vol. 1412. ISBN 3-540-64590-X.
14. **EISELT, H. A., GENDREAU, M. and LAPORTE, G.** 1995. Arc Routing Problems, Part I: The Chinese Postman Problem. *Operation Research*. s.l. : Informs, 1995, vol. 43, no. 2.
15. **EISELT, H. A. and C., SANDBLOM.** 2004. *Integer programming and network models*. Berlin : Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-67191-6.
16. **FREDERICKSON, G. N.** 1979. Approximation Algorithms for Some Postman Problems. In *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1979, vol. 26, issue 3. ISSN: 0004-5411.
17. **THIMBLEBY, H.** 2003. The directed Chinese Postman Problem. In *Software: Practice and Experience*. s.l. : Wiley, September 2003, vol. 33, issue 11, pp. 1081-1096. ISSN: 0038-0644.

Prílohy