Matematická podstata započítavania vzájomných záväzkov

Ivan Brezina[1], Pavel Gežík[2]

Abstrakt

Častým ekonomickým problémom nedávnej minulosti, ale aj súčasnosti, je znížená schopnosť uhrádzať svoje záväzky. Platobná neschopnosť predstavuje stav, ktorý v mimoriadnych ekonomických situáciách (napr. ekonomická kríza, náhla zmena podmienok na trhu) znižuje schopnosť uhrádzať svoje záväzky. Tento problém však možno zovšeobecniť na akékoľvek započítavanie vzájomných záväzkov (napr. v rámci univerzity vzájomné započítavanie odučených hodín, resp. študentov, v energetiky započítavanie dodanej a odobranej elektrickej energie a pod.). Jedným z prostriedkov ako sa vyrovnať s týmto problémom je vzájomný zápočet záväzkov.

Modely optimalizujúce vzájomný zápočet záväzkov sú historicky orientované na aplikáciu teórie a modelov matematického programovania, predovšetkým na úlohu o maximálnej cirkulácii v hranovo ohodnotenom orientovanom grafe alebo na problém maximálneho toku. Už existujúce aplikácie na zápočet vzájomných záväzkov ponúkajú jednoduché riešenie ako sa vyrovnať so spoločnými záväzkami v rámci určitej skupiny subjektov. Vzťahy medzi jednotlivými subjektmi, ktoré sa dohodnú na vzájomných zápočtoch záväzkov v rámci nimi vytvorenej skupiny možno zobraziť prostredníctvom teórie grafov a následne vyriešiť úlohu vzájomného započítavania dlhov prostredníctvom matematického programovania.

V príspevku sú prezentované teoretické princípy zovšeobecneného vzájomného započítavania záväzkov na báze teórie grafov a teórie a modelov matematického programovania.

Kľúčové slová

kompenzácia, vzájomné záväzky, matematické programovanie, teória grafov

Abstract

The reduced ability to cover debts was the frequent economic problem in the past and the problem still remains actual in present time. Insolvency is the situation in which the ability to cover the debts in exceptional economic situations (e.g., economic crisis, sudden changes in market conditions) is reduced. However, this problem can be generalized to any mutual debt compensation (e.g., mutual compensation of hours or students at the university, mutual compensation between electricity supplier and customer using own source of power, etc.). One way of dealing with this problem is mutual debts compensation.

Models with optimization of mutual debt compensation are historically oriented to the application and models of mathematical programming theory. Especially these models are connected with the task of maximum circle detection in the edge-oriented graph or the maximum flow problem.

There are "split the bill" applications which are offering a simple solution to mutual debt compensation within a particular group of entities. Also, the graph can be used for demonstration of relationships between individual entities that agree on the mutual compensation within a group of them. Afterwards, the problem can be solved using the mathematical programming.

[1] prof. Ing. Ivan Brezina, CSc. Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Dolnozemská 1/b, 852 35 Bratislava, email: ivan.brezina@euba.sk.

[2] Ing. Pavel Gežík, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Dolnozemská 1/b, 852 35 Bratislava, email: pavel.gezik@euba.sk.

The paper presents the theoretical principles of generalized models of mutual debt compensation based on the graph theory and mathematical programming.

Key words
Compensation, Mutual Debts, Mathematical Programming, Graph Theory

JEL classification
C02, C61

1 Úvod

Jedným z veľkých ekonomických problémov je znížená schopnosť uhrádzať svoje záväzky (likvidita), ktorá môže viesť pre zainteresované subjekty k znižovaniu ich ekonomickej aktivity na trhu. Pomerne často prerastá neschopnosť uhrádzať svoje záväzky medzi jednotlivými subjektmi do veľkých rozmerov, čo vedie k rozširovaniu okruhu nelikvidných podnikateľský subjektov radikálnym tempom. Pritom neschopnosť uhrádzať svoje záväzky predstavuje stav, ktorý by mal byť za normálnych okolností eliminovaný trhovým prostredím alebo pôsobením zodpovedajúcich právnych nástrojov. Avšak v takých hospodárskych situáciách, ktoré môže predstavovať napríklad je nástup ekonomickej krízy, respektíve náhla zmena právnych či iných podmienok na trhu, je schopnosť vysporiadať sa s platobnou neschopnosťou značne znížená.

Jeden z nástrojov na riešenie problémov vzájomného započítavania záväzkov predstavujú aj modely optimalizujúce vzájomný zápočet záväzkov, ktoré majú tak vo svetovej, ako aj slovenskej literatúre už pomerne dlhú históriu. Modely optimalizujúce vzájomný zápočet dlhov majú už pomerne dlhú históriu.

V Českej republike prezentovali prvé práce na tému vzájomných zápočtov pohľadávok a záväzkov napr. (Koch, 1994), (Rais, 1995), pričom tieto práce vyústili do praktického vykonávania vzájomných zápočtov v rokoch 1991 až 1995. Neskôr sa uvedenou problematikou zaoberal (Ondrák, 2002), ktorý vytvoril a testoval vlastné heuristiky pre vyhľadávanie cyklov a dlžníckych reťazcov v sieťovom grafe, pričom ponúkol metodiku pre fungovanie inštitúcie, ktorá by mala zabezpečiť zápočet vzájomných pohľadávok a záväzkov a tým by zabrániť platobnej neschopnosti.

V slovenských podmienkach sa touto problematikou zaoberali viacerí autori, ktorí už od roku 1993 (v tomto období sa začali prejavovať prvé hlboké ekonomické problémy ekonomiky spôsobené vzájomnou neschopnosťou splácať svoje záväzky, teda primárna aj sekundárna platobná neschopnosť) problém formulovali a navrhovali nástroje na jeho riešenie založené predovšetkým na teórii grafov a na teórii matematického programovania, pričom problém matematicky formalizovali predovšetkým ako úlohu o maximálnej cirkulácii v hranovo ohodnotenom orientovanom grafe alebo problém maximálneho toku (Hozlár, 1993), (Fecenko, 1994), (Gazda, 2003). Nezávisle (Terek a Fecenko, 1993) a (Gazda a Munka, 1996) prezentovali problém vzájomnej zadĺženosti podnikov ako problém teórie grafov, resp. problém toku v sieti. Formulácia úlohy o maximálnej cirkulácii v orientovanom grafe a metóda minimalizácie vzájomných dlhov je prezentovaná v (Fecenko, 1994). Alternatívnu metódu vzájomnej kompenzácie dlhov s použitím dotácií s možnosťou zmeny dlžníckej štruktúry navrhol (Gazda, 2000). Problém vzájomného zápočtu organizovaného ministerstvom financií riešil (Gazda, 2001). Problém maximálnej cirkulácie na problém toku zo zdroja do ústia siete preformulovali (Gazda a Palúch, 2004) a vyriešili pritom problém riadeného bankrotu firmy s ohľadom na minimalizáciu vzájomného zadĺženia firiem v sieti.

V súčasnosti bola uvedená problematika rozpracovaná na báze heuristických algoritmov, ktoré boli využité v niektorých aplikáciách a fungovali na báze vzájomného znižovania záväzkov, označované ako „Split the Bill“ (voľne preložene „rozdeliť účtenky“) aplikácie. Tieto aplikácie sú vo všeobecnosti vytvárane ako mobilné aplikácie pre bežnú potrebu vzájomného zdieľania nákladov v skupine (napr.: Tricount - Split group bills, Splitwise alebo Split Bill). V teoretickej rovine ostala táto problematika riešená stále prostredníctvom teórie grafov, predovšetkým s využitím algoritmov na báze modelov matematického programovania s využitím úloh o maximálnom toku v sieti (napr. Babej 2012, Babej Gežík).

2 Historický vývoj vzájomného započítavania záväzkov

Vzájomné započítavanie finančných záväzkov (dlhov) je známe už zo stredoveku. Dôležitým míľnikom vo vývoji obchodu bol pritom prechod z priamej platby v mieste predaja na systém „quid and quo“, teda platby za nakúpený tovar sa nemuseli uskutočniť v rovnakom čase ako predaj (Greif, 2006). Vznikli pritom nové finančné nástroje (napr. „nákup na vrub“, obligácia, výmenný šek), ktoré predstavovali objednávky alebo prísľuby budúcej platby v konkrétnom čase a na konkrétnom mieste. Bezhotovostné platby boli veľmi dobrou alternatívou k držbe veľkého množstva zlatých alebo strieborných mincí pozdĺž nebezpečných obchodných ciest a taktiež umožňovali prekonať nedostatok peňažných prostriedkov, ktorý vznikal v stredoveku z dôvodu nedostatku zlata a striebra (Spufford, 1988).

Na uspokojenie vzájomných finančných záväzkov slúžili tzv. „vysporiadace dni“ keď sa stretli obchodníci (veritelia) s dlžníkmi (predajcovia, bankári, zástupcovia bankárov a zákazníci) a vyrovnávali si svoje pohľadávky a záväzky. Takýmto spôsobom sa vlastne formovali prvé algoritmy na vzájomné započítavanie dlhov známe ako „rescontrire, rescontre, skontrieren“ alebo „vivre compte/des parties“ (Denzel, 2005).

Fungovanie týchto algoritmov bolo založené na tom, že na konci obchodných dní, alebo v deň určený na vyrovnanie, sa stretli veritelia s dlžníkmi a každý z nich prezentoval svoje pohľadávky a záväzky, pričom každý dlžník musel potvrdiť svoje záväzky. Potom nasledovalo vyrovnávanie dlhov cez decentralizované vyhľadávanie, ktoré prebiehalo v troch krokoch. V prvom kroku sa započítali vzájomné dlhy, v druhom kroku sa používali zúčtovacie cykly a v treťom kroku sa používali zúčtovacie reťazce. Ak po ukončení týchto troch krokov stále existovali nezapočítané dlhy, tieto museli byť vyplatené v hotovosti alebo boli vyhotovené nové dlhové „účty“.

Tento zúčtovací mechanizmus bol postupne zdokonaľovaný a používali ho aj na finančných trhoch na konci 16. a začiatku 17. storočia, keď sa vyvinul a formálne zakotvil z právneho hľadiska. Tento zúčtovací mechanizmus dlhov bol dominantný v najvýznamnejších obchodných krajinách Európy akými bola oblasť súčasného Nemecka, Talianska, Francúzska, Holandska a Španielska.

Postupne však po vzniku bánk tento systém vysporiadania vzájomných dlhov strácal na význame, pretože už prvé banky prevzali na seba úlohu clearingového centra. Postupný úpadok systému spôsobilo aj schválenie používania zmeniek v priebehu 17. storočia. Avšak obchodníci na prvých burzových trhoch používali rovnakú techniku, tzv. „offset“ platby za akcie, alebo „futurity“ v mestách ako je Amsterdam a Londýn (Parker, 1974).

V roku 1775 bol v Londýne založený London Clearing Club (Londýnsky zúčtovací klub), čo predstavovalo pre mnohé banky impulz na vyrovnávanie svojich záväzkov podobným spôsobom (Seyd, 1872). Preto decentralizovaný systém mnohostranného zúčtovacieho algoritmu pomaly začal strácať svoj význam.

Zúčtovací mechanizmus bol založený na tom, že započítanie vzájomných dlhov (zúčtovanie) sa konalo pravidelne 4x ročne (vychádzalo sa z tradície štvrťročného konania veľkých trhov) na konci trhových dní (Da Silva, 1969).

Tento postup bol zdokumentovaný v mestách ako Lyon, Brabant, Antverpy a Bergen, taktiež na všetkých talianskych trhoch a väčšine nemeckých trhoch). V mestách s permanentnými trhmi sa v 17. a 18. storočí početnosť zúčtovaní zvýšila na mesačné, prípadne až na týždenné cykly (napr. vo Frankfurte, Lipsku, v Besacone , v Bozene atď.).

Vlastný postup zúčtovania fungoval nasledujúcim spôsobom: Na určenom mieste sa osobne stretli obchodníci (alebo nimi poverení zástupcovia) so svojimi obchodnými (účtovnými) knihami. Po uzavretí množiny účastníkov každý prezentoval svoje pohľadávky voči svojim dlžníkom, pričom dlžníci museli následne potvrdiť alebo odmietnuť svoje dlhy. V ďalšom kroku každý obchodník vytvoril bilanciu svojich dlhov so všetkými uznanými nárokmi, ktoré museli byť v súlade s predpismi a ktoré boli skontrolované zodpovedným úradníkom. Žiadny z dlhov, ktorý bol uznaný a uvedený v bilancii, nemohol byť pritom predmetom zúčtovania v budúcnosti na inom mieste. Všetky akceptované dlhy boli neskôr vzájomne započítavané. Dlhy, ktoré boli odmietnuté, boli prerokované pred obchodným súdom.

V ďalšom kroku skupina bankárov z rôznych regiónov, ktorá sa zúčastňovala zúčtovacieho procesu, stanovila výmenné kurzy v mene platnej pre konkrétny trh. Po stanovení kurzov nasledoval proces zúčtovania pohľadávok medzi obchodníkmi, v niektorých prípadoch za pomoci maklérov. Bol to proces organizovaného a decentralizovaného vyhľadávania a párovania dlhov. Decentralizovaný zúčtovací algoritmus pracoval tak, že ako prvé sa kompenzovali dlhy recipročným spôsobom. Takže ak obchodník „A“ dlhoval obchodníkovi „B“ a naopak, ich spoločný dlh mohol byť priamo znížený/zrušený. V ďalšom kroku sa obchodníci snažili nájsť cyklus zúčtovania alebo reťazec. V zúčtovacom cykle, v ktorom napríklad obchodník A dlhuje obchodníkovi B, obchodník B dlhuje obchodníkovi C a obchodník C dlhuje obchodníkovi A určitú sumu, je možné spoločnú výšku dlhu započítať. V prípade dlhového reťazca, keď A dlhuje B a B dlhuje C, je možné zúčtovať dlhy iba obchodníkovi B, pričom medzi obchodníkmi A a C sa vytvorí nový dlh.

Takto sa spôsob vzájomného zúčtovania opakoval dovtedy, kým sa neskončil čas určený na vzájomné započítavanie, respektíve pokiaľ už nebolo možné započítať žiadny dlh medzi obchodníkmi a každý účastník procesu dosiahol tzv. čistú pozíciu. Po skončení vzájomného započítavania dlhov obchodníci skontrolovali, či existujú ešte nejaké úvery a dlhy.

Všetky vzájomné dohody o vyrovnaní museli mať zapísané v obchodných knihách. Všetky vzájomné finančné zápočty realizované do daného momentu boli zapísané v knihách a boli definitívne, teda, ak bol dlh prevedený na nového veriteľa, starý veriteľ už viac nemal žiadne právne nároky na tento dlh (v právnych predpisoch bolo zaužívaným pravidlom, že bezhotovostné vysporiadanie bolo v rovnakej pozícii ako hotovostné vyrovnanie). V poslednom kroku boli zostávajúce dlhy vyplatené v hotovosti alebo boli vyhotovené nové dlhové účty a prísľuby na budúce platby. Voči obchodníkom nesplácajúcim svoje dlhy na konci zúčtovacích dní sa postupovalo veľmi prísne (Neuhaus 1892), na týchto účastníkov bol vyhlásený konkurz a boli vyčlenení z ďalšieho budúceho zúčtovania.

Súčasný medzibankový platobný styk (vyrovnanie medzibankových pohľadávok a záväzkov) je ideálnym príkladom fungovania zúčtovacích mechanizmov v praxi. Tento platobný systém zaisťuje prevody peňažných prostriedkov. Samotná realizácia bezhotovostného platobného styku medzi rôznymi bankami predpokladá existenciu jednej z dvoch základných štruktúr, buď voľne organizovanú štruktúru (systém korešpondentských bánk spočívajúci v priamom spojení bánk cez navzájom otvorené účty platobného styku - tzv. nostro a loro účty), alebo pevne organizovanú štruktúru, ktorá funguje na princípe zúčtovania (clearingu), v rámci ktorého jedna inštitúcia vystupuje ako zúčtovacie centrum (clearingová inštitúcia) pre obchodné banky, ktoré sú na ňu napojené prostredníctvom svojich účtov platobného styku.

Systém slovenského a českého medzibankového styku vznikal v bývalom Československu v polovici 60-tych rokov 20. storočia (známy ako automatizované bankové operácie - ABO) a bol dokončený v roku 1980. ABO zabezpečovali realizáciu platobných operácií v rámci existujúcej bankovej sústavy a tento systém platobného a zúčtovacieho styku fungoval úspešne až do roku 1989. Po rozdelení Československa začiatkom roka 1993 bolo na Slovensku vytvorené nové zúčtovacie centrum, zatiaľ čo bývalé federálne zúčtovacie centrum zostalo v Českej národnej banke. Zo začiatku boli tieto zúčtovacie centrá úzko previazané tzv. platobnou zmluvou, ktorá riešila vzájomné medzirepublikové zúčtovanie - prevody prostriedkov zo záväzkov vzniknutých v dobe federácie, ako aj prevody nové, vzniknuté po rozdelení federálneho štátu.

Preto na Slovensku muselo vzniknúť nové zúčtovacie centrum na spracovanie medzibankových platieb - Bankové zúčtovacie centrum Slovenska (BZCS). BZCS bolo jediným realizátorom medzibankového platobného systému v Slovenskej republike a zároveň plnilo funkciu zúčtovacieho centra. BZCS začalo svoju prevádzku 8. februára 1993 (v deň zavedenia slovenskej koruny ako národnej meny) ako jediné clearingové centrum pre všetky domáce medzibankové platby. BZCS nebolo organizačnou jednotkou Národnej banky Slovenska (NBS), založili ho komerčné banky ako akciovú spoločnosť a väčšinovým akcionárom bola NBS.

BZCS ako prevádzkovateľ medzibankového platobného systému ukončilo svoju činnosť k 31. decembru 2002 a od 1. januára 2003 sa prevádzkovateľom nového medzibankového platobného systému (SIPS) stala NBS. Medzibankový platobný systém SIPS predstavuje v súčasnosti v Slovenskej republike jediný platobný systém pre spracovanie a zúčtovanie tuzemských platieb. Spracovanie a zúčtovanie platieb je plne automatizované, pričom sa prenos údajov medzi NBS a účastníkmi SIPS (komerčné banky, pobočky zahraničných bánk, Eximbanka a dva nebankové subjekty - Autorizačné centrum Slovenska, a.s. a Burza cenných papierov Bratislava, a.s.) realizuje výhradne v elektronickej forme.

3 Matematický aparát teórie grafov

Teória grafov predstavuje vhodný nástroj na tvorbu matematických modelov pre najrôznejšie typy problémov. Aj modelovanie vzájomného započítavania finančných dlhov na jej báze je toho vhodným príkladom, pretože najjednoduchšie možno graf charakterizovať ako objekt, ktorý vznikne pospájaním vrcholov čiarami. Teória grafov, ako samostatná matematická disciplína, je pritom pomerne nová vedná disciplína – v rámci rozvoja matematických disciplín vznikla neskoro, až v prvej polovici 20. storočia (aj keď prvé kroky v tejto oblasti podnikal už Euler v r 18. storočí - riešil problém siedmich mostov mesta Königsbergu a svoje závery v roku 1736 zhrnul v práci *Solutio problemas ad geometriam situs pertinentis*.). Za definitívny vznik modernej teórie grafov možno považovať rok 1936, v ktorom maďarský matematik König publikoval prvú monografiu z teórie grafov. V posledných desaťročiach sa aplikácia teórie grafov značne rozširuje a to hlavne kvôli výraznému rozvoju výpočtovej techniky.

Ďalej bude prezentovaný teoretický základ pre modelovanie vzájomného započítavania dlžníckych vzťahov, ktorý vychádza predovšetkým z (Brezina a kol. 2012) a budú uvedené základné pojmy, ktoré budeme používať v nasledujúcom texte:

Nech $U = \{u_i\}$ ($i = 1, 2, ..., n$) je množina n prvkov, $K = U \times U$ a $H \subseteq K$ (H je ľubovoľná podmnožina množiny všetkých kombinácií druhej triedy prvkov množiny U).

Neorientovaným grafom nazývame dvojicu $G = (U, H)$. Ak graf G obsahuje konečný počet prvkov, a teda množina $U \cup H$ je konečná, hovoríme o konečnom neorientovanom grafe. Graf G tvoria prvky grafu, sú to jeho vrcholy a hrany. Vrcholy reprezentujú prvky množiny U, označujeme ich u_i ($i = 1, 2, ..., n$). Hrany reprezentujú prvky množiny H, označujeme ich h_{ij}, alebo ako neusporiadanú dvojicu $\{u_i, u_j\}$.

V prípade, ak je hrana daná začiatočným a koncovým vrcholom, v grafe označovaná šípkou, hovoríme o orientovanej hrane, je to usporiadaná dvojica vrcholov (u_i, u_j) a označujeme ju $\vec{h}_{ij}$. Orientovaný graf je teda taký graf, ktorého všetky hrany sú orientované, teda každá z nich spája usporiadanú dvojicu vrcholov grafu

Nech $U = \{u_i\}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ je ľubovoľná množina n prvkov a H je ľubovoľná podmnožina množiny W, t. j. všetkých variácií druhej triedy bez opakovania prvkov množiny U $(H \subseteq W)$. Potom usporiadanú dvojicu $G = (U, H)$ nazývame orientovaný graf.

Neorientovaný graf predstavuje špeciálny prípad orientovaného grafu (každá neorientovaná hrana je nahradená dvojicou orientovaných hrán s opačnou orientáciou), je to vlastne neusporiadaná dvojica vrcholov (u_i, u_j).

Kompletný (úplný) graf je taký graf, v ktorom sú každé dva rôzne vrcholy susedné, teda spojené hranou (neobsahuje slučky - taká hrana, ktorá sa začína a končí sa v tom istom vrchole, a rovnobežné hrany).

Pod pojmom sled rozumieme každú alternujúcu postupnosť vrcholov a hrán grafu, ktorá sa začína a končí sa vrcholom. Sled v grafe zo začiatočného vrcholu u_1 do koncového vrcholu u_n tvorí konečná postupnosť vrcholov $u_1, u_2, ..., u_n$ s vlastnosťou, že dva po sebe nasledujúce vrcholy u_i a u_{i+1} sú spojené hranou.

V prípade, ak sú začiatočný a konečný vrchol sledu rôzne, teda $u_1 \neq u_n$, hovoríme o otvorenom slede. Ak sú začiatočný a konečný vrchol sledu totožné, teda $u_1 = u_n$, hovoríme o uzavretom slede. Taký sled, v ktorom sa neopakuje žiadna hrana, nazývame ťah. V prípade, že ide taký sled, v ktorom sa neopakuje žiaden vrchol, hovoríme o ceste. Ak existuje taká uzavretá cesta, ktorá má aspoň jednu hranu (neopakuje sa v nej žiaden vrchol okrem začiatočného, ktorý je súčasne konečným), hovoríme o cykle.

O hranovo ohodnotenom grafe $G = (U, H)$ hovoríme vtedy, ak každej neorientovanej hrane $\{u_i, u_j\}$, resp. orientovanej hrane (u_i, u_j), $h_{ij} \in H$ je priradený reálny číselný údaj k_{ij} označovaný ako ohodnotenie hrany h_{ij}. Za hranovo ohodnotený graf možno označiť usporiadanú trojicu $G = (U, H, k)$, kde U je množina vrcholov, H množina hrán a k je reálna funkcia definovaná na množine H.

Pod pojmom subjekt budeme rozumieť taký ekonomický subjekt, ktorý má voči iným ekonomickým subjektom záväzky a/alebo pohľadávky. Subjekt i bude v grafe reprezentovaný vrcholom u_i, vo výslednom riešení možno subjekt pomenovať ako dlžnícky subjekt.

Dlžnícky vzťah medzi dvoma subjektmi predstavuje taký vzťah, v ktorom jeden dlžnícky subjekt (dlžník) dlží druhému dlžníckemu subjektu (veriteľ) hodnotu k_{ij}. V grafe predstavuje takýto vzťah medzi i-tým subjektom reprezentovaným vrcholom u_i a j-tym subjektom reprezentovaným vrcholom u_j orientovaná hrana $\vec{h}_{ij}$ s ohodnotením k_{ij}. Pre dlžníka je tento vzťah záväzkom, pre veriteľa pohľadávkou. Vzťah môže byť tvorený niekoľkými záväzkami alebo pohľadávkami, ktoré mohli vzniknúť nezávisle od seba pri rôznych transakciách, tento vzťah teda predstavuje kumulovaný záväzok, resp. pohľadávku. Po vzájomnom vyrovnaní záväzkov a pohľadávok je tento vzťah označovaný ako dlžnícky vzťah.

Dlžnícku štruktúru predstavuje uzavretá množina dlžníckych subjektov a všetkých dlžníckych vzťahov medzi nimi, ktorú možno zobraziť pomocou orientovaného ohodnoteného grafu $G = (U, H, k)$.

4 Tvorba dlžníckych vzťahov

Predpokladajme dlžnícky systém $G = (U, H, k)$, ktorý tvorí množinu s n subjektmi, ktoré majú vzájomne medzi sebou m nenulových vzťahov (reprezentované orientovanými hanami $\vec{h}_{ij}$ s ohodnotením k_{ij}). Výšku vzťahu (záväzku) v peňažných jednotkách (záväzok i-teho subjektu voči j-temu subjektu) označíme y_{ij}.

4.1 Matematické vyjadrenie

Úlohou vzájomného zápočtu záväzkov medzi jednotlivými subjektmi je znížiť objem dlžníckych vzťahov medzi jednotlivými subjektmi jednotlivo. Hodnota zníženia dlžníckeho vzťahu y_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n) sa označuje ako z_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n). Rozdiel týchto vzájomných vzťahov predstavuje tzv. dlžnícke vzťahy a tie sú reprezentovane hodnotou dlhu označovanou ako d_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n).

Pretože vzájomné vzťahy možno znižovať len do nulovej hodnoty (maximálne do ich výšky), musí pre všetky z_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n) platiť:

$z_{ij} \le y_{ij}$ (i, j = 1, 2, ..., n) (1)

Pre určenie výšky dlhu, resp. hodnoty dlhového vzťahu d_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n), ktorá bude predstavovať rozdiel vzájomných záväzkov sa vychádza z neznížených (nezapočítaných) vzťahov jednotlivých subjektov a pre i, j = 1, 2, ..., n platí:

ak $y_{ij} > y_{ji}$, potom $z_{ij} = y_{ji}$ a $d_{ij} = y_{ij} - y_{ji}$, resp. $z_{ij} = y_{ij} - d_{ij}$; (2)

ak $y_{ij} < y_{ji}$, potom $z_{ij} = y_{ij}$ a d_{ij} neexistuje, resp. $d_{ij} = 0$; (3)

ak $y_{ij} = y_{ji}$, potom $z_{ij} = y_{ij}$, resp. $z_{ij} = y_{ji}$ a $d_{ij} = 0$. (4)

Z dôvodu zachovania vyrovnanej bilancie pohľadávok a záväzkov každého dlžníckeho subjektu musí platiť pre i-tý subjekt podmienka:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} z_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} z_{ji} \qquad (5)$$

Inými slovami, musí platiť vzťah, v ktorom suma zníženia pohľadávok sa rovná sume zníženia záväzkov. Pre celý dlžnícky systém dostaneme sústavu n rovníc a m nerovníc, kde n je počet dlžníckych subjektov a m je počet nenulových dlžníckych vzťahov systému.

Po uvedenom upravení vzájomných vzťahov a vytvorení dlžníckych vzťahov možno problém riešiť na základe rôznych prístupov. Častým je prístup vychádzajúci z úloh o maximálnom toku s cieľom maximalizovať hodnotu započítania (Babej, 2012). V tomto prípade je cieľom pre každý nenulový dlžnícky vzťah nájsť zníženie, tak aby suma zníženia z_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n) všetkých dlžníckych vzťahov bola maximálna $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \to \max$.

Iný prístup spočíva v minimalizovaní dlžníckych vzťahov, resp. dlhov. Tie môžu byť reprezentované napr. hodnotami záväzkov y_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n), respektíve priamo hodnotami dlhov d_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n) alebo už vzájomne započítanými záväzkami y'_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n), ktoré predstavujú zostatkové záväzky jednotlivých subjektov. Teda $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \to \min$, príp. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \to \min$ alebo $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y'_{ij} \to \min$.

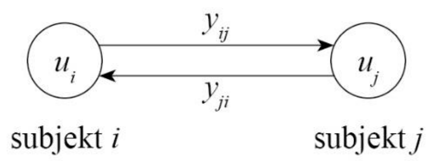
Všetky uvedené prístupy vzhľadom na jeden cieľ možno riešiť ako klasický prípad úlohy matematického programovania s n premennými a sústavou m obmedzujúcich vzťahov s cieľom maximalizovať hodnotu započítania alebo minimalizovať dlžnícke vzťahy.

4.2 Vyjadrenie problému pomocou grafu

Matematickým modelom dlžníckeho systému je cyklický orientovaný graf $G = (U, H, k)$. Pomocou orientovaného grafu $G = (U, H, k)$ môžeme zobraziť vzťahy medzi veriteľmi a dlžníkmi, tieto subjekty v grafe predstavujú jednotlivé vrcholy, hrany v grafe reprezentujú dlžné vzťahy a ohodnotenie hrán predstavuje výšku dlhu medzi dvoma subjektmi (veriteľ a dlžník).

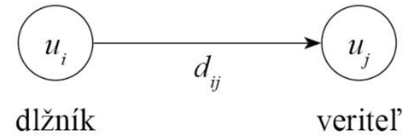
Hrany $\vec{h}_{ij}$ (i, j = 1, 2, ..., n) v orientovanom grafe $G = (U, H, k)$ sú orientované smerom od dlžníka k veriteľovi. Hrany, ktoré vstupujú do vrcholu, predstavujú pre daný vrchol (subjekt) pohľadávky a hrany, ktorý z vrcholu vystupujú, predstavujú pre daný vrchol záväzok (Obr. 1), ich ohodnotenie prestavuje výšku dlhu, kde hodnota záväzku sa označuje ako y_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n) a rozdiel týchto vzájomných vzťahov (záväzkov) predstavuje tzv. dlžnícke vzťahy (Obr. 2) a tie sú reprezentované hodnotou dlhu označovanou ako d_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n).

Obr.1: Zobrazenie vzájomného vzťahu



Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 2: Zobrazenie dlžníckeho vzťahu

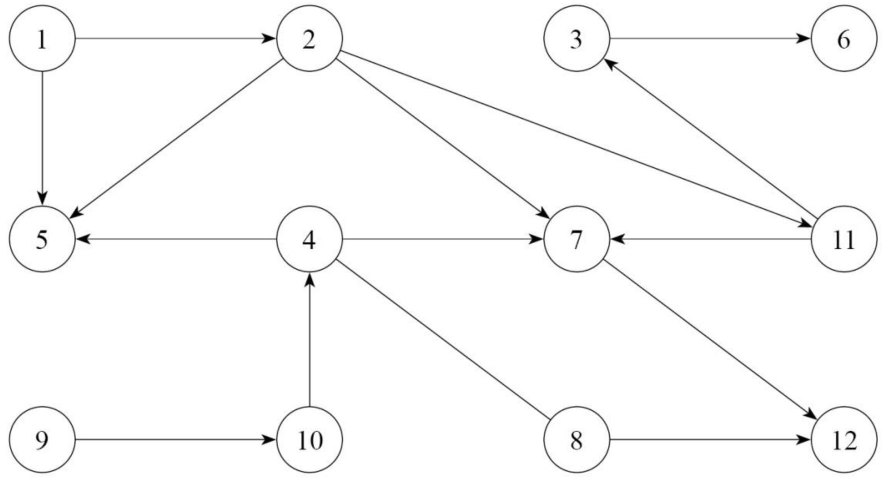


Zdroj: Vlastné spracovanie

Orientovaný graf $G = (U, H, k)$ zobrazujúci vzájomné vzťahy môže obsahovať 3 druhy vrcholov (príklad možných dlžníckych vzťahov reprezentuje Obr. 3):

- *Začiatočné vrcholy,* z ktorých hrany iba vychádzajú a v grafe predstavujú také subjekty (dlžníkov), ktoré majú iba záväzky voči ostatným subjektom.
- *Vnútorné vrcholy*, ktoré majú do nich vstupujúce a zároveň aj z nich vystupujúce hrany a predstavujú subjekty, ktoré majú záväzky aj pohľadávky.
- *Koncové vrcholy*, do ktorých hrany iba vstupujú a predstavujú tie subjekty (veriteľov), ktoré majú iba pohľadávky.

Obr. 3: Zobrazenie dlhovej štruktúry



Zdroj: Vlastné spracovanie

5 Model vzájomného zápočtu

Model vzájomného zápočtu umožňuje efektívne minimalizovať objem transakcii, resp. výšku jednotlivých záväzkov pre skupinu subjektov, ktoré sú ochotné si vzájomne ponížiť svoje záväzky a zároveň plne rešpektujú takúto optimalizáciu. Musí sa pritom vždy jednať o uzavretú skupinu subjektov, medzi ktorými existuje minimálne jeden vzťah.

5.1 Východiská a predpoklady modelu

Podstata modelu vzájomného zápočtu vychádza z literatúry (Brezina a kol., 2012) známeho problému hľadania maximálneho toku prostredníctvom metód lineárneho programovania. Problém maximálneho toku spočíva v hľadaní maximálneho toku, resp. maximálnej možnej hodnoty, ktorú umožňujú jednotlivé kapacity hrán grafu z jedného začiatočného vrcholu u_1 v grafe do posledného vrcholu u_n.

V tom spočíva hlavný rozdiel medzi modelom vzájomného zápočtu a hľadaním maximálneho toku. Model vzájomného zápočtu neuvažuje s začiatočným vrcholom a ani s koncovým vrcholom. Preto musia všetky vrcholy v grafe predstavovať subjekty, ktoré môžu byť tak dlžníkmi ako aj veriteľmi. Z toho vychádza, že v grafe, nemôžu existovať vyššie uvedené začiatočné a ani koncové vrcholy a všetky vrcholy v grafe musia byť vnútorné a inak povedané, graf musí byť úplný a súvislý.

Graf musí teda popisovať vzťahy medzi subjektmi, nie len dlžnícke vzťah a teda všetky hrany, ktoré obsahuje sú orientované a násobne. Tento fakt spočíva v možnosti vytvorenia nových dlhových štruktúr a medzi subjektmi, ktorá inak nemajú vzájomné, resp. dlžnícke vzťahy. Práve vznik nových dlžníckych vzťahov je základ optimalizácie vzájomných záväzkov v uzavretej skupine subjektov/dlžníkov.

Ďalším špecifikom typickým pre hľadanie maximálneho toku, ktorý sa v modeloch vzájomného zápočtu nemôže nachádzať je podmienka, že hodnota toku nemôže prekročiť kapacitu jednotlivých hrán. Práve naopak, v prípade modelu vzájomného zápočtu je tento stav želaný, nakoľko predstavuje minimalizáciu počtu transakčných operácii, resp. minimalizuje počet vzťahov. V praxi to znamená, že ak mal subjekt povodne záväzky napr. voči trom subjektom, tak po implementácii modelu môže mať záväzok iba voči jednému subjektu ale v hodnote všetkých troch záväzkov. Sumárna hodnota všetkých jeho dlhov sa ale nemení.

Z vyššie uvedeného vychádza, že model vzájomného zápočtu predpokladá vznik nových dlžníckych vzťahov a preto je jeho základným predpokladom je existencia úplného súvislého hranovo orientovaného grafu. Teda musí vždy existovať vzťah (hrana) z množiny H medzi každým subjektom (vrcholom) z množiny U. Tieto hrany sú ohodnotené hodnotou záväzku y_{ij}, resp. upravenou výškou dlhu d_{ij} medzi subjektom i a subjektom j. Aby sme mohli vytvoriť novú dlžnícku štruktúru, predpokladanú v nami prezentovanom modeli, zavádzame hodnoty c_{ij}, vychádzajúce z hodnôt d_{ij} (pokiaľ neexistuje vzťah medzi subjektom i a subjektom j, tak d_{ij} = 0) v nasledujúcom tvare:

$$c_{ij} = \begin{cases} d_{ij} + M & \text{ak existuje } d_{ij} \\ 0 & \text{ak } i = j \\ M & \text{ak neexistuje } d_{ij} \end{cases} \tag{6}$$

kde M je veľké kladné reálne číslo $(M >> \max_{(i,j)\in H} d_{ij})$.

Práve táto zmena hodnôt d_{ij} na hodnoty c_{ij} na základe uvedeného vzťahu (6) umožňuje vytvorenie vzťahov medzi všetkými subjektmi, t.j. novej dlhovej štruktúry a teda vytvorenie úplného grafu.

5.2 Formulácia modelu

Formulácia modelu vychádza z vyššie uvedených predpokladov a preberá rovnaké označenia jednotlivých premenných. Na rozdiel od úloh pre hľadanie maximálneho toku (Brezina a kol., 2012) alebo od iného modelu vzájomného zápočtu (Babej, 2012), ktorý je rovnako maximalizačný, je nasledujúci model minimalizačný. Priorita teda nie je v hľadaní maximálnej hodnoty, ktorú je možné vzájomne započítať medzi jednotlivými subjektmi, ale naopak, v hľadaní minimálneho zostatku z dlhu, resp. zo vzájomných záväzkov.

Model rieši hodnoty záväzkov, ktoré sú označovane ako y_{ij}, ale nakoľko sa už bude jednať o hodnoty záväzkov po vzájomnom započítaní, budú ďalej kvôli zrozumiteľnosti označované ako y'_{ij}.

Nech x_{ij} je podiel dlhu c_{ij}, ktorý ostane po započítaní dlhov medzi subjektom i a j. Potom tento podiel je daný vzťahom

$$x_{ij} = \frac{y'_{ij}}{c_{ij}} \quad \text{pre } i, j = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

a teda $y'_{ij} = c_{ij}x_{ij}$ pre $i, j = 1, 2, ..., n$.

Keďže x_{ij} predstavuje podiel na dlhu po započítaní (zníženého), teda zostatok dlhu, musí pre $i, j = 1, 2, ..., n$ platiť:

$$0 \le x_{ij} \le 1. \tag{8}$$

Vzájomný zápočet, teda kompenzáciu dlhu, predstavuje potom hodnotu $1 - x_{ij}$. Kompenzácia vzájomných dlhov nesmie zmeniť bilanciu dlhov subjektu i a musí platiť

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(1 - x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\left(1 - x_{ji}\right) \quad \text{pre } i = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Následne celú úlohu minimalizácie vzájomných záväzkov možno formulovať nasledovne:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y'_{ij} \tag{10}$$

$$y'_{ij} = c_{ij}x_{ij} \quad \text{pre } i, j = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left(1 - x_{ij}\right) - \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\left(1 - x_{ji}\right) = 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, ..., n$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad \text{pre } i, j = 1, 2, ..., n$$

5.3 Upravený model – model minimalizácie dlhu

Využívanie premennej x_{ij} vychádza z potreby poznať hodnotu podielu c_{ij} na zostatkovom dlhu po vzájomnom započítaní ($i, j = 1, 2, ..., n$). To ale nie je vždy potrebné poznať a niekedy postačuje vyriešiť len samotnú hodnotu dlhu po vzájomnom započítaní y'_{ij}($i, j = 1, 2, ..., n$). Vtedy je možné použiť zjednodušený model, ktorý v niektorých prípadoch dosahuje výsledky s ešte nižším počtom zostatkových vzťahov a teda nižším počtom transakcií (hrán vo výslednom grafe).

Ak y'_{ij} je dlh, ktorý ostane po započítaní dlhov medzi subjektom i a j ($i, j = 1, 2, ..., n$), potom rozdiel medzi pôvodným dlhom d_{ij} a zostatkovým dlhom y'_{ij} predstavuje vzájomný zápočet. Tento zápočet nesmie zmeniť bilanciu dlhov subjektu i, teda musí platiť

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{ji} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ji} \quad \text{pre } i = 1, 2, ..., n. \tag{11}$$

V upravenom modeli sa jedná v princípe o rovnaký vzťah pre určenie vzájomnej bilancie ako v predchádzajúcom zápise modelu a teda pre $i, j = 1, 2, ..., n$ nie je nutné vychádzať z úpravy dlhov d_{ij} na c_{ij} prostredníctvom M. Samozrejme, v zápise ale možno použiť aj hodnoty c_{ij} namiesto d_{ij}.

Avšak upravený model je prioritne na minimalizáciu dlhu a teda pokiaľ nie je nutné riešiť vzájomné započítavanie, môže model vychádzať z pôvodného, resp. základného stavu záväzkov opísaného premennými y_{ij} ($i, j = 1, 2, ..., n$). Model potom možno aplikovať bez akýchkoľvek úprav so vzťahom:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ji} \qquad \text{pre } i = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

V rámci obmedzenia dlhu, ktorý môže vzniknúť ako nový vzťah možno stanoviť horný limit veľkosti dlhu ako L, pričom platí ($i, j = 1, 2, ..., n$):

$$0 \le y'_{ij} \le L. \tag{13}$$

Následne úlohu minimalizácie dlhu, ak nie je nutné riešiť vzájomné započítavanie, možno formulovať nasledovne:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y'_{ij} \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} - \sum_{j=1}^{n} y'_{ji} \qquad \text{pre } i = 1, 2, ..., n$$

$$0 \le y'_{ij} \le L \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Ak by pri aplikácii bolo požadované vzájomné započítanie záväzkov medzi dvoma subjektami, tak by premenné y_{ij} v zápise nahradili premenné d_{ij} ($i, j = 1, 2, ..., n$).

6 Aplikácia modelu

V tejto časti je porovnanie uvedených modelov z modelmi, ktoré vychádzajú z iných prístupov.

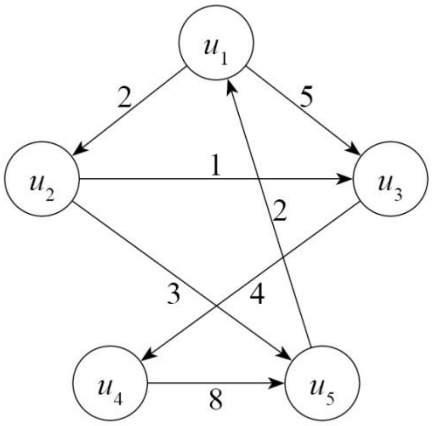
Zadanie príkladu je totožné s príkladom, na ktorom bol ilustrovaný príklad, ktorý optimalizuje vzájomné započítavanie záväzkov s využitím cyklov v grafe (*Gazda, 2003*). Celková hodnota dlhov, resp. zostatkových záväzkov po vzájomnom započítaní medzi piatimi subjektmi bola 25 jednotiek a predpokladá 7 transakcií (úhrad). Toto zadanie je znázornené v tabuľke (*Tab. 1*) a v obrázku (*Obr. 4*) nižšie.

Tab.1: Zadanie príkladu

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	2	5	0	0
u_2	0	0	1	0	3
u_3	0	0	0	4	0
u_4	0	0	0	0	8
u_5	2	0	0	0	0

Zdroj: Gazda, 2003

Obr.4: Zadanie príkladu



Zdroj: Vlastné spracovanie

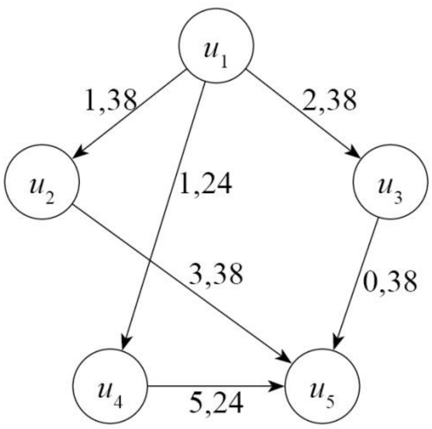
Riešenie tohto modelu vzájomného započítavania záväzkov s využitím cyklov v grafe (*Gazda, 2003*) je v tabuľke (*Tab. 2*) a v obrázku (*Obr. 5*). Výsledkom optimalizácie je zníženie celkového dlhu na 14 jednotiek a počet transakcií klesol na 6.

Tab. 2: Výsledky modelu s využitím cyklov

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	**1,38**	**2,38**	**1,24**	0
u_2	0	0	0	0	**3,38**
u_3	0	0	0	0	**0,38**
u_4	0	0	0	0	**5,24**
u_5	0	0	0	0	0

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 5: Výsledky modelu s využitím cyklov



Zdroj: Vlastné spracovanie

Ďalším ilustrovaným riešením je riešenie modelu maximalizácie zápočtu (*Babej, 2012*) vyjadreného prostredníctvom matice, ktorá vyjadruje zostatok po započítaní, resp. koeficient zostatku z upraveného pôvodného dlhu. Táto úprava spočívala v pripočítaní M (v tomto prípade M = 10) z dôvodu získania úplného grafu, teda všetkých možných vzťahov medzi dlžníckymi subjektmi. Toto upravené zadanie, ako aj matica koeficientov a výsledok modelu sú v nasledovných tabuľkách (*Tab. 3, Tab. 4* a *Tab. 5*) a výsledok reprezentuje obrázok (*Obr.6*).

Tab. 3: Upravené zadanie (c_{ij})

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	12	15	10	10
u_2	10	0	11	10	13
u_3	10	10	0	14	10
u_4	10	10	10	0	18
u_5	12	10	10	10	0

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tab. 4: Matica koeficientov (x_{ij})

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	0	0	0	**0,5**
u_2	0	0	0	0	**0,154**
u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	0	**0,2**	0	**0,111**
u_5	0	0	0	0	0

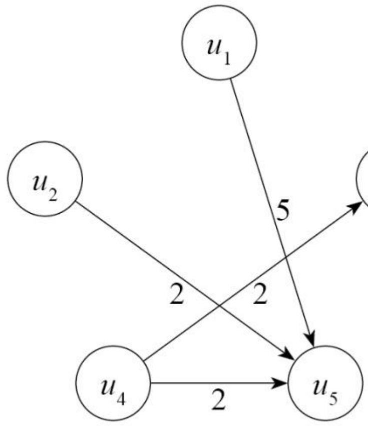
Zdroj: Vlastné spracovanie

Tab. 5: Riešenie pri maximalizácii zápočtu.

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	0	0	0	**5**
u_2	0	0	0	0	**2**
u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	0	**2**	0	**2**
u_5	0	0	0	0	0

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 6: Výsledok pri maximalizácii zápočtu.



Zdroj: Vlastné spracovanie

Takéto riešenie umožňuje zníženie celkového dlhu na 11 jednotiek a na 4 transakcie po vzájomnom započítaní záväzkov. Rovnaké výsledky dosahuje aj tu popísaný model minimalizácie dlhu. Hlavný rozdiel je ale v náročnosti výpočtu a model poskytuje rovno výsledný dlh, resp. výslednú štruktúru záväzkov bez nutnosti prepočítavania výsledku z matice koeficientov (ale rovnako maticu koeficientov obsahuje).

Zásadný rozdiel oproti predchádzajúcemu modelu predstavuje už upravený model, ktorý si nevyžaduje úpravu vstupných údajov a je možné ho počítať zo začiatočného stavu záväzkov bez vykonania vzájomných zápočtov medzi dvoma subjektmi. Tento stav je ilustrovaný v tabuľke (*Tab. 6*) a hodnota celkového dlhu je 53 jednotiek. Po vzájomnom započítaní záväzkov by vznikla matica dlhov, na ktorej sú ilustrované všetky vyššie uvedené modeli (*Tab. 1*).

Tab. 6: Začiatočný stav záväzkov bez započítania.

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	5	7	0	4
u_2	3	0	4	0	5
u_3	2	3	0	4	0
u_4	0	0	0	0	8
u_5	6	2	0	0	0

Zdroj: Vlastné spracovanie

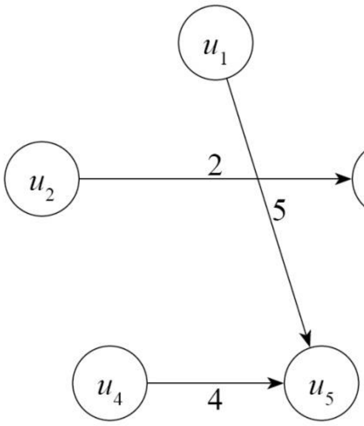
Zjednodušenie výpočtu a menší počet matematických operácií nie je ale jediná výhoda upraveného modelu. Tento model rovnako minimalizuje dlh, teda výsledok 11 jednotiek je zhodný s modelom maximalizácie zápočtu ako aj s modelom minimalizácie dlhu pri vzájomnom započítaní záväzkov. Avšak oproti týmto modelom, upravený model umožnil zníženie výsledných transakcií na 3. Táto skutočnosť, ako aj výsledky sú uvedené v tabuľke (*Tab. 7*) a v obrázku (*Obr. 7*).

Tab. 7: Výsledky upraveného modelu

Vrchol	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	0	0	0	0	**5**
u_2	0	0	**2**	0	0
u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	**4**
u_5	0	0	0	0	0

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 7: Výsledky upraveného modelu



Zdroj: Vlastné spracovanie

7 Záver

Modely zamerané na optimalizáciu vzájomného zápočtu záväzkov, predovšetkým finančných záväzkov, vzájomných dlhov, sa na Slovensku historicky zameriavajú na aplikáciu teórie a modelov matematického programovania. Prezentovaný príspevok rozvíja teóriu a prax vzájomného započítavania záväzkov.

Jadrom príspevku je formulácia východísk a predpokladov modelu, na základe ktorých je zostavený vlastný model kompenzácie dlhu. Originálnou je modifikácia už známych modelov (Babej, 2012; Gazda, 2003) založená na minimalizácii dlhu, ktorá vedie nielen k celkovej minimalizácii dlhu medzi jednotlivými subjektmi dlžníckej štruktúry, ale aj k zníženiu počtu dlžníckych vzťahov medzi jednotlivými subjektmi.

Experimentálne výpočty boli aplikované na modeli s piatimi subjektmi s predpokladom 7 transakcií, ktorý je totožný s ilustratívnym príkladom použitým už Gazdom, aby bolo možné porovnať dosiahnuté výsledky. Z dosiahnutých výsledkov možno konštatovať, že prezentovaný model dosiahol lepšie výsledky vzájomného započítania dlhov, ako boli pôvodne dosiahnuté Gazdom, 2003, (zníženie celkového dlhu na 14 jednotiek) a rovnaké výsledky vzájomného započítania dlhov ako dosiahol vo svojej práci Babej, 2013.

Babej, 2013, vo svojej práci dosiahol zníženie celkového dlhu na 11 jednotiek pri existencii 4 transakcií (vzťahov medzi subjektmi), nami prezentovaný model dosiahol zníženie celkového dlhu taktiež na 11 jednotiek, ale pri existencii len 3 transakcií, teda znížil sa počet dlžníckych vzťahov medzi jednotlivými subjektmi, čo vedie k zjednodušeniu vzájomného vyrovnávania dlhov.

Problém vzájomného započítavania záväzkov môže byť aktuálny aj v iných hospodárskych oblastiach, napr. započítavanie dodávok a odberu elektrickej energie z elektrickej sústavy, ako aj v spoločenskej sfére, kde možno uvažovať o vzájomnom započítavaní odučených hodín medzi jednotlivými subjektmi v rámci vzdelávacej inštitúcie a podobne. Prezentovaný prístup predstavuje zaujímavý nástroj zefektívnenia vzájomného započítavania záväzkov medzi subjektmi v dlžníckej štruktúre založený na teórii a modeloch matematického programovania na báze teórie grafov.

Literatúra

[1] Babej, A. (2012). Modelovanie finančných tokov na báze teórie grafov = Cash flow modeling based on graph theory. *Mladá veda AIESA 2012 – Participácia doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov na budovaní spoločnosti založenej na vedomostiach*, 1-4.

[2] Babej, A. (2012). Vzájomné započítanie dlhov ako úloha maximálnej cirkulácie = Offseting debts as a problem of maximal circulation. *Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu. Mezinárodní vědecký seminář. Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu, Medzinárodný vedecký seminár*, 1-5.

[3] Babej, A., & Gežík, P. (2015). Aplikácia modelu vzájomných zápočtov. *Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu. Mezinárodní vědecký seminář. Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu, Medzinárodný vedecký seminár*, 5-10.

[4] Brezina, I., Čičková, Z., & Gežík, P. (2012). *Sieťová analýza,* Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.

[5] Da Silva, J. G. (1969). Banque et Cr´edit. *Italie au XVII Siecle. 2*.

[6] Denzel, M. A. (2005). *Die Bozner Messen und ihr Zahlungsverkehr, 1633-1850*. Bozen: Athesia.

[7] Fecenko, J. (1994). K optimalizácii operácií zápočtov pohľadávok a záväzkov po lehote splatnosti. *Ekonomický časopis = Journal of economics*, 42(5), 360-374.

[8] Fecenko, J. (1995). Optimalizačný model medzipodnikového započítavania pohľadávok a záväzkov s použitím kapitálu. *Ekonomické rozhľady 1995, 2*.

[9] Gazda, V., Munka, V. (1996). Návrh modelu riešenia vzájomného zápočtu pohľadávok. *Zborník konferencie „Ekonomika podnikov a regiónov 1997“*.

[10] Gazda, V. (2000). Mutual Debts Compesation as Graph Theory Application. *Gökceada-Canakkale, Turkey, First Joint Symposium on Business Administrator Proceedings 2000*.

[11] Gazda, V. (2003). O nahradení klasického prístupu ku kompenzácii dlhov a pohľadávok. *Acta Oeconomica Cassoviensia*, 7, 141-148.

[12] Gazda, V., Palúch, S. (2004). One Method of Mutual Dedts Comensation. *Proceedings of the Conference in Canakale held in April 2000*.

[13] Greif, A. (2006). I*nstitutions and the Path to the Modern Economy: Lessons from Medieval Trade*. Cambridge: University Press.

[14] Hozlár, E. (1993). Modelový prístup k riešeniu problematiky vzájomnej zadĺženosti podnikov. *Seminár FHI EU 1993, 2*.

[15] Koch, M., Ondrák, V., & Rais, K. (1994). *Rozvoj metod snižování závazků a pohledávek českých firem*. Výzkumná zpráva, Brno: Fakulta podnikatelská VUT Brno.

[16] Neuhaus, G. (1892). *Die Skontration, ihre historische Entwicklung, juristische Natur und volkswirtschaftliche Bedeutung*. Dissertation Erlangen.

[17] Ondrák, V. (2002). *Řešení problematiky druhotné platební neschopnosti metodou vzájemných zápočtu*. Brno: Fakulta podnikateľská.

[18] Parker, G. (1974). The Emergence of Modern Finance in Europe 1500-1730. *The Fontana Economic History of Europe*, *2*.
[19] Rais, K. (1995). Jak se zbavit dluhů. *Ekonom*, *18*, 22-28.
[20] Seyd, E. (1872). *The London banking and bankers' clearing house system*. London; Paris; New York: Cassell, Petter and Galpin.
[21] Spufford, P. (1988). *Money and its Use in Medieval Europe*. Cambridge: Cambridge University Press.
[22] Terek, M., & Fecenko, J. (1993). Analýza veriteľsko-dlžníckych vzťahov hospodárskych organizácií pomocou grafov. *FHI EU, Zborník – medzinárodný seminár "Transformácia ekonomiky Slovenska a životné prostredie".*