# Modelovanie hromadnej obsluhy

Ivan Brezina – Juraj Pekár

# Základné pojmy

- požiadavka na obsluhu
- obslužný kanál
- vstupný prúd – náhodný proces so spojitým časom a nespojitými stavmi
- zdroj požiadaviek
- intenzita vstupného prúdu požiadaviek $\lambda$
- čas obsluhy $t_0$
- intenzita výstupného prúdu $\mu = 1/t_0$
- čas čakania
- čas pobytu požiadavky v systéme

# Charakteristika vstupného prúdu požiadaviek

- poissonovský prúd požiadaviek (Poissonovo rozdelenie):
  - stacionárnosť (pravdepodobnosť vstupu požiadavky v intervale $(t, t+\Delta t)$ závisí len od dĺžky intervalu $\Delta t$).
  - ordinárnosť (Počas ľubovoľného intervalu môže vstúpiť len jedna požiadavka).
  - nezávislosť (Intenzita vstupu požiadaviek nezávisí od počtu požiadaviek, ktoré prv vstúpili a vystúpili zo systému obsluhy).
- pravdepodobnosť výskytu k požiadaviek v intervale t:

$$p_k=(\lambda t)^k.e^{-\lambda t}/k!$$

# Mechanizmus obsluhy

- Počet kanálov:
  - Jednokanálové SHO
  - Viackanálové SHO
- Usporiadanie:
  - Paralelné
  - Sériové
- Podľa dĺžky čakania:
  - Bez čakania
  - S čakaním
    - Neohraničeným
    - Ohraničeným
- Podľa typu zdrojov:
  - Otvorené
  - Uzavreté
- Podľa charakteristiky vstupného prúdu:
  - Poissonovské
  - Nepoissonovské

# Disciplína v radoch

- FIFO (first in – first out)
- LIFO (last in – first out)
- PRI (priority in) prioritný systém

# Kendallova symbolika

(A/B/X/Y/Z)

A – udáva typ rozdelenia vstupného prúdu požiadaviek,

M = exponenciálne rozdelenie (Markovove reťazce, t. j. poissonovské),

D = deterministické intervaly vstupu požiadaviek,

Ek = Erlangovo rozdelenie k-tého typu,

GI = intervaly s ľubovoľným nezávislým rozdelením;

B – udáva typ rozdelenia času obsluhy podobne ako v prípade A, iba ľubovoľné rozdelenie sa označuje ako G;

X – určuje počet obslužných zariadení – kanálov;

Y – určuje maximálny počet požiadaviek v systéme hromadnej obsluhy, ak ohraničenie neexistuje, používame symbol $\propto$;

Z – znamená počet potenciálnych požiadaviek v zdroji, ak zdroj nie je ohraničený, používame symbol $\propto$.

# VSTUPNÉ CHARAKTERISTIKY MODELOV

- intenzita vstupného prúdu požiadaviek $\lambda$
- intenzita výstupného prúdu požiadaviek $\mu$, (resp. stredná hodnota času obsluhy $t_0$)
- miera zaťaženia systému $\Psi=\lambda/\mu$
- počet obslužných kanálov n

# UKAZOVATELE KVALITY OBSLUHY

- pravdepodobnosť odmietnutia (straty) požiadavky $p_{st}$
- relatívna kapacita (pravdepodobnosť obslúženia) $K_r$, $K_r = 1 - p_{st}$
- absolútna kapacita (efektívna intenzita vstupov) $K_a$, $K_a = K_r.\lambda$
- pravdepodobnosť, že požiadavka bude čakať v rade $\pi_f$, $\pi_f = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$,
- stredná hodnota počtu požiadaviek v systéme $d_s$, $d_s = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k$,
- stredná hodnota dĺžky radu $d_f$, $d_f = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \cdot p_k$,
- stredná hodnota času pobytu požiadavky v systéme $w_s = d_s/K_a$
- stredná hodnota času čakania požiadavky v rade $w_f = d_f/K_a$

# UKAZOVATELE VYUŽÍVANIA OBSLUŽNÝCH ZARIADENÍ

- priemerný počet obsadených kanálov $n_z$,

$$n_z = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot p_k,$$

- priemerný počet voľných kanálov $n_0$,

$$n_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k,$$

- koeficient využitia kanálov $k_z$, $k_z = n_z/n$
- koeficient prestoja kanálov $k_0$, $k_0 = n_0/n$

# Model hromadnej obsluhy bez čakania (M, M, n, n, ∞)

- Stavy $S_0$ $(p_0(t))$, $S_1$ $(p_1(t))$, $S_2$ $(p_2(t))$, ... $S_n$ $(p_n(t))$,
  $$\sum_{i=0}^{n} p_i(t) = 1.$$
- Stav, kde v čase t bolo v systéme k požiadaviek a v čase t+Δt nastal vstup požiadavky do systému a súčasne ukončenie obsluhy požiadavky $p_k(t)\, \lambda \Delta t \cdot k\mu \Delta t$
- Z toho $-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$ $\qquad p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$
- a
  $$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0 = \frac{\psi^k}{k!} p_0 \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\psi^i}{i!} p_0 = 1 \qquad p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\psi^i}{i!}}$$

# MHO bez čakania ukazovatele kvality obsluhy 1

- pravdepodobnosť odmietnutia (straty) požiadavky $p_{st}$

$$p_n = \frac{\Psi^n}{n!} p_0 = \frac{\frac{\Psi^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\Psi^i}{i!}}.$$

- relatívna kapacita (pravdepodobnosť obslúženia) $K_r$

$$K_r = 1 - p_n = 1 - \frac{\Psi^n}{n!} p_0,$$

- absolútna kapacita systému (efektívna intenzita vstupov) $K_a$

$$K_a = \lambda \cdot K_r = \lambda \cdot \left( 1 - \frac{\Psi^n}{n!} p_0 \right),$$

- pravdepodobnosť, že požiadavka bude čakať v rade $\pi_f = 0$

# MHO bez čakania ukazovatele kvality obsluhy 2

- stredná hodnota počtu požiadaviek v systéme $d_s$

$$d_s = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi^k}{(k-1)!} p_0,$$

- stredná hodnota dĺžky radu $d_f$

$$d_f = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \cdot p_k = 0,$$

- stredná hodnota času pobytu požiadavky v systéme $w_s$

$$w_s = \frac{d_s}{K_a} = \frac{1}{\mu} = t_0,$$

- stredná hodnota času čakania požiadavky v rade $w_f$

$$w_f = \frac{d_f}{K_a} = 0.$$

# MHO bez čakania
# ukazovatele využívania kanálov

- priemerný počet obsadených kanálov $n_z$

$$n_z = \sum_{k=1}^{n} k \cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi^k}{(k-1)!} p_0,$$

- priemerný počet voľných kanálov $n_0$

$$n_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\psi^k}{k!} p_0,$$

- koeficient využitia kanálov $k_z$

$$k_z = \frac{n_z}{n},$$

- koeficient prestoja kanálov $k_0$

$$k_0 = \frac{n_0}{n}.$$

# Model hromadnej obsluhy s čakaním (M, M, n, ∞, ∞)

- Stavy $S_0$ ($p_0(t)$), $S_1$ ($p_1(t)$), ..., $S_n$ ($p_n(t)$), ..., $S_\infty$ ($p_\infty(t)$),

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1$$

- Stav, kde v čase t bolo v systéme k požiadaviek a v čase t+Δt nastal vstup požiadavky do systému a súčasne ukončenie obsluhy požiadavky $p_k(t)\, \lambda \Delta t \cdot n\mu\, \Delta t$
- Z toho $-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$ $\quad p_k = \frac{\Psi^k}{k!} p_0 \quad\quad p_k = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\Psi^k}{n^k} p_0$
- a

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi^k}{k!} p_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\Psi^k}{n^k} \cdot p_0, \quad\quad p_0 = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi^k}{k!} + \frac{n}{n!} \cdot \frac{\Psi^k}{(n-\Psi)} \right)^{-1}$$

# MHO s čakaním: ukazovatele kvality obsluhy 1

- !!! Riešiteľnosť – podmienka permanentného režimu

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu} < n$$

- pravdepodobnosť odmietnutia požiadavky $p_{st} = 0$
- relatívna kapacita (pravdepodobnosť obslúženia)

$$K_r = 1$$

- absolútna kapacita (efektívna intenzita vstupov)

$$K_a = \lambda$$

# MHO s čakaním: ukazovatele kvality obsluhy 2

- $$\pi_f = \frac{n}{n!} \cdot \frac{\Psi^n}{n - \Psi} p_0$$

$$d_f = \frac{\Psi}{n - \Psi} \pi_f$$

$$d_s = d_f + \Psi$$

$$w_f = \frac{d_f}{\lambda}$$

$$w_s = \frac{d_s}{\lambda}$$

# MHO s čakaním: ukazovatele využívania kanálov

- priemerný počet využitých kanálov $n_z = \frac{\lambda}{\mu} = \Psi$
- priemerný počet voľných kanálov $n_0 = n - n_z$
- koeficient využitia kanálov $k_z = \frac{n_z}{n}$
- koeficient prestoja kanálov $k_0 = \frac{n_0}{n}$

# Jednokanálový model hromadnej obsluhy s čakaním (M, M, 1, ∞, ∞)

- Stavy $S_0$ ($p_0(t)$), $S_1$ ($p_1(t)$), ..., $S_\infty$ ($p_\infty(t)$),

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1$$

- !!! Riešiteľnosť – podmienka permanentného režimu

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$p_k = \Psi^k p_0 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{, potom } \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^k p_0 = p_0\left(1 + \Psi + \Psi^2 + \ldots\right) = 1$$

- potom

$$p_0 = 1 - \Psi \qquad p_k = \Psi^k p_0 = \Psi^k (1 - \Psi)$$

# Jednokanálový MHO s čakaním: ukazovatele kvality obsluhy 1

- pravdepodobnosť odmietnutia (straty) požiadavky $p_{st} = 0$

- relatívna kapacita (pravdepodobnosť obslúženia) $K_r = 1$

- absolútna kapacita systému (efektívna intenzita vstupov) $K_a = \lambda$

- pravdepodobnosť, že požiadavka bude čakať v rade

$$\Pi_f = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = (1 - p_0) = \Psi$$

# Jednokanálový MHO s čakaním: ukazovatele kvality obsluhy 2

- stredná hodnota dĺžky radu $d_f = \frac{\psi^2}{1-\psi}$
- stredná hodnota času čakania v rade $w_f = \frac{d_f}{\lambda}$
- stredná hodnota počtu požiadaviek v systéme $d_s = \frac{\psi}{1-\psi}$
- stredná hodnota času pobytu požiadavky v systéme $w_s = \frac{d_s}{\lambda}$

# Jednokanálový MHO s čakaním: ukazovatele využívania kanálov

- koeficient využitia kanálov

$$k_z = \psi$$

- koeficient prestoja kanálov

$$k_0 = 1 - \psi$$

- priemerný počet využitých kanálov

$$n_z = k_z$$

- priemerný počet voľných kanálov

$$n_0 = k_0$$

# Optimalizácia počtu obslužných kanálov

- Nákladová funkcia na n prevádzkovaných kanálov

$$C_p(n) = c_p.n$$

- Nákladová funkcia odmietnutia požiadavky pre model bez čakania ($c_{st}$ - náklady (straty) pri odmietnutí požiadavky (nezávislé od počtu kanálov))

$$C_{st}(n) = p_{st}(n).\lambda.c_{st}$$

- Nákladová funkcia pobytu zákazníkov v MHO s n kanálmi ($c_f$ - náklady (straty) pri prestoji požiadaviek za časovú jednotku (nezávisle od počtu kanálov),

$$C_f(n) = c_f.d_s(n)$$

- Celková nákladová funkcia pre model bez čakania

$$C(n) = C_p(n)+C_{st}(n)$$

- Celková nákladová funkcia pre model s čakaním

$$C(n) = C_p(n)+C_f(n)$$

# Optimalizácia počtu obslužných kanálov

- Nákladová funkcia na n prevádzkovaných kanálov

$$C_p(n) = c_p.n$$

kde

n - počet obslužných kanálov

$c_p$ - náklady na prevádzku jedného obslužného kanála za časovú jednotku, ktoré sa môžu rozdeliť na

náklady prestoja obslužných kanálov $C_0 = c_0.n_0$ ,

kde $c_0$ - náklady, ktoré vzniknú nevyužitím kanála za časovú jednotku,

$n_0$ – priemerný počet voľných kanálov,

náklady na využitie obslužných kanálov $C_z = c_z.n_z$,

kde $c_z$ – náklady, ktoré vzniknú využívaním kanálov za časovú jednotku,

$n_z$ – priemerný počet obsadených kanálov,