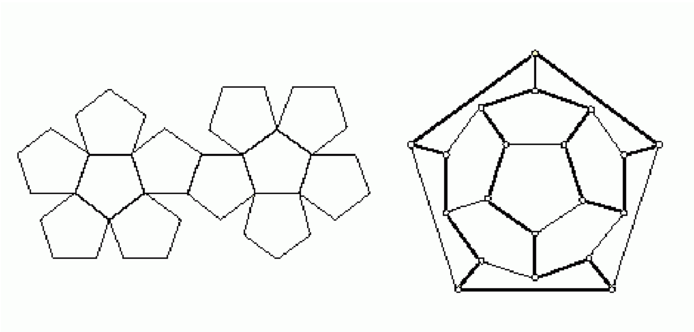
Fundamentálne pojmy teórie grafov pre ekonómov

doc. Ing. Ivan Brezina, CSc.

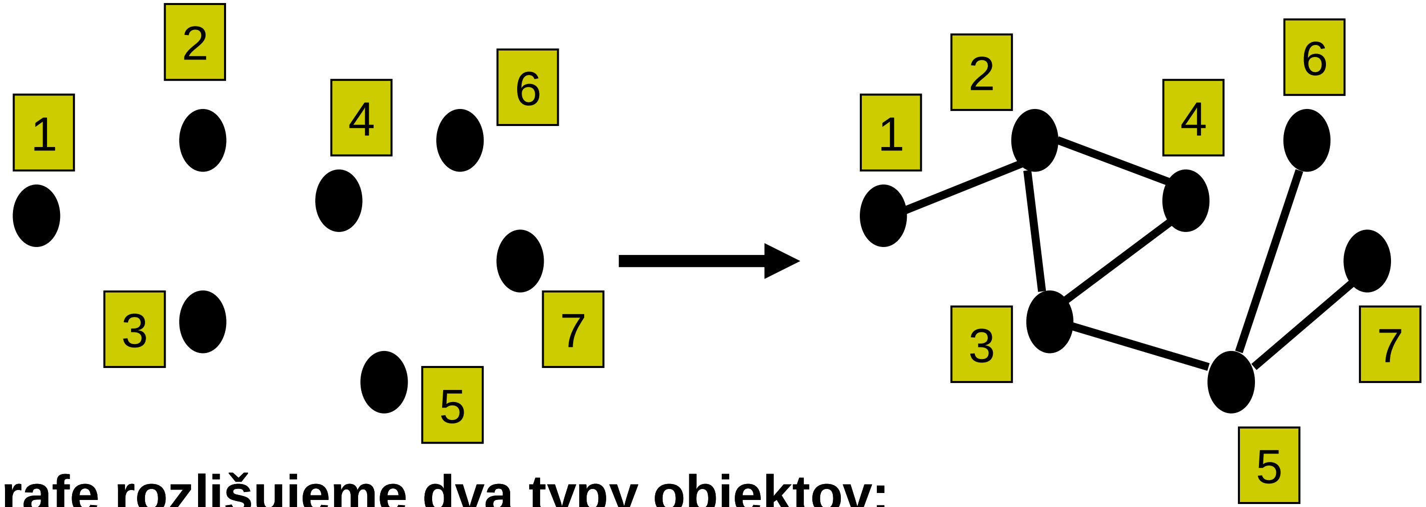
Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave



Definícia grafu

- **Graf je obrázok, ktorý vznikne pospájaním vrcholov (reprezentované bodmi) spojitými čiarami.**



- **V grafe rozlišujeme dva typy objektov:**

vrcholy (uzly) a hrany (čiary)

- pre graf je nepodstatné, akým spôsobom je hrana spájajúca dva vrcholy realizovaná, podstatné je, že dva vrcholy sú spojené hranou (vrcholy sú susedné)

Definícia grafu

Nech **U** = {u_i} (i=1, 2, ..., n) je ľubovoľná množina n prvkov, **K**= **U** x **U** a **H**$\subseteq$ **K** (**H** je ľubovoľná podmnožina množiny všetkých kombinácií druhej triedy prvkov množiny **U**).

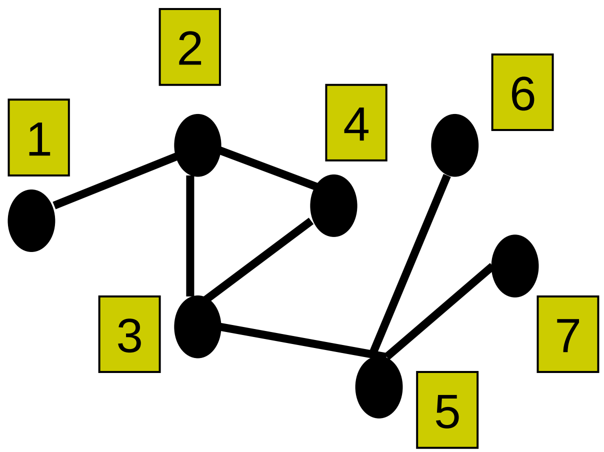
<u>Neorientovaným grafom</u> nazývame usporiadanú dvojicu **G** = [**U**, **H**].

V prípade obrázku množina **U =** {1,2,3,4,5,6,7}. Množina **K** obsahuje 21 prvkov ($\binom{7}{2} = 21$).

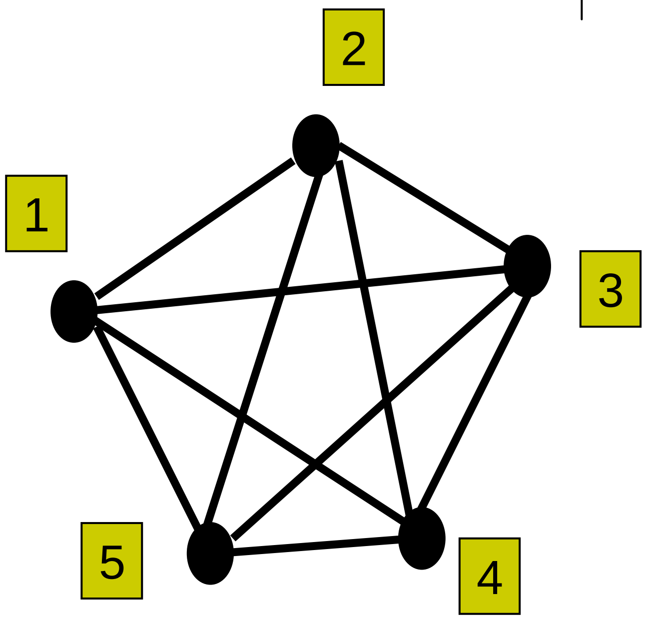
Z podmnožiny **H** vyberieme ľubovoľné kombinácie (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (5,6), (5,7) – *konečný neorientovaný graf.*

Definície

Konečný neorientovaný graf



Kompletný neorientovaný graf



Konečný graf **– obsahuje konečný počet prvkov – množina U ∪ H je konečná**

Definície

Prvky grafu – uzly a hrany grafu.

Vrcholy (*uzly*) – prvky množiny **U**.

Hrany – prvky množiny **H**. Označujeme ich h_{ij}, alebo ako neusporiadanú dvojicu [u_i, u_j].

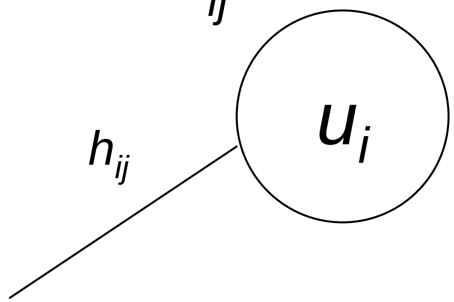
Orientovaná hrana – je daná začiatočným a koncovým vrcholom, v grafe označovaná šípkou, je to usporiadaná dvojica (u_i, u_j).

Definície

Relácia – vzťah dvoch prvkov grafu s rovnakou dimenziou (hrana-hrana, resp. uzol-uzol).

Incidencia – vzťah dvoch prvkov rôznej dimenzie (hrana-uzol).

Uzol $u_i \in$ **U** je *incidenčný* s hranou $h_{ij} \in$ **H** grafu G = [U, H], ak hrana h_{ij} začína alebo končí v uzle u_i.



Definície

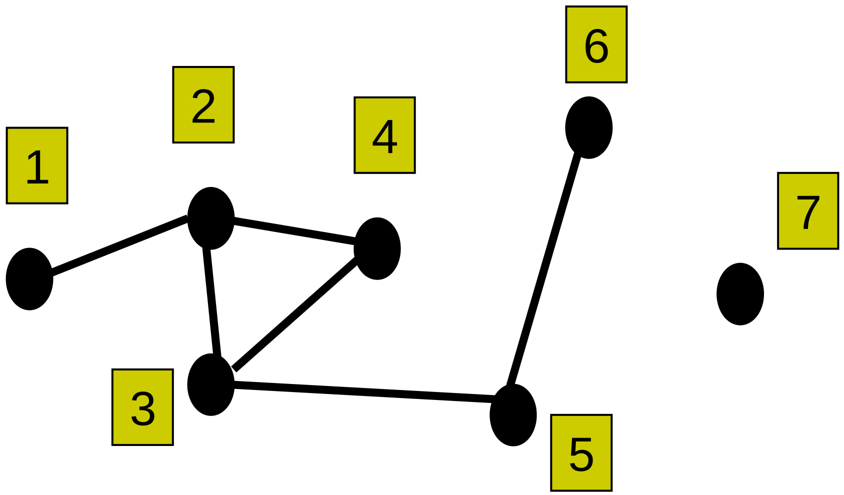
Stupeň uzla u_i – počet hrán, s ktorými je uzol u_i incidenčný – $\deg(u_i)$.

Izolovaný uzol – $\deg(u_i) = 0$.

Začiatočný, resp. *koncový* uzol – $\deg(u_i) = 1$.

Rozvetvovací uzol – $\deg(u_i) \geq 2$.

Súčet stupňov v grafe **G** = [**U**, **H**] sa rovná dvojnásobku počtu jeho hrán ($|$ **H** $|$=m), teda $\sum_{u \cup U} \deg(u_i) = 2m$

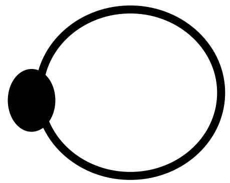


Definície

Priľahlé (*susedné*) uzly – také dva uzly, medzi ktorými existuje hrana, ktorá ich spája.

Priľahlé hrany – také dva hrany, ktoré majú spoločný uzol.

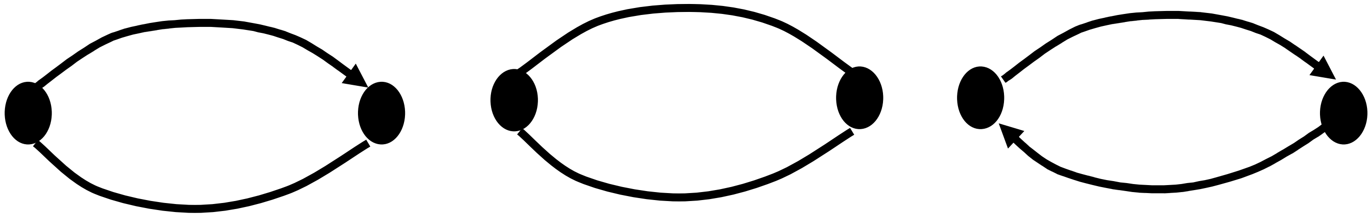
Slučka – hrana, ktorá začína a končí v tom istom uzle (je incidenčná s jediným uzlom).



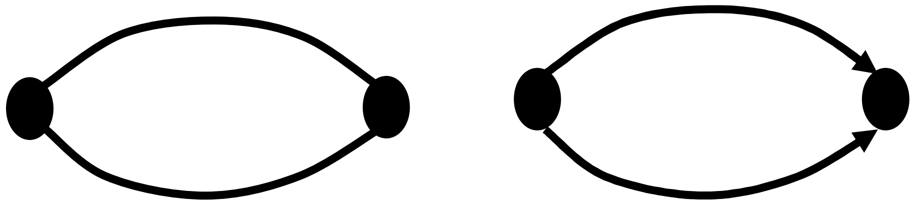
Linka – hrana incidenčná s dvoma rôznymi uzlami grafu.

Definície

Rovnobežné hrany – minimálne dve hrany, ktoré spájajú tú istú dvojicu uzlov.

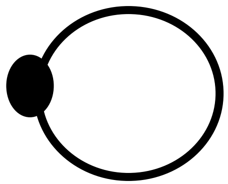


Násobné hrany – najmenej dve rovnobežné, ktoré začínajú a končia v tých istých uzloch. Sú to tie rovnobežné hrany, ktoré sú alebo všetky neorientované, alebo všetky súhlasne orientované.



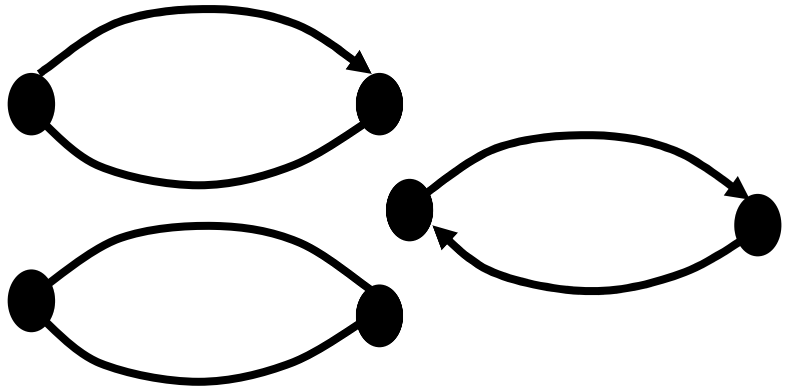
Definície

Slučka

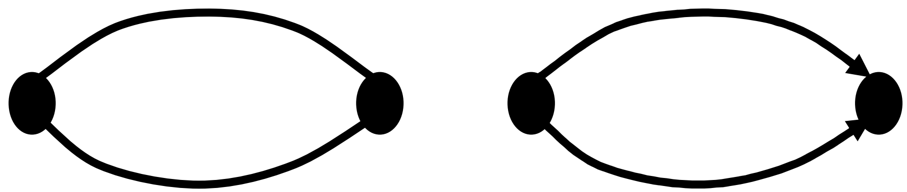


Linka

Rovnobežné hrany

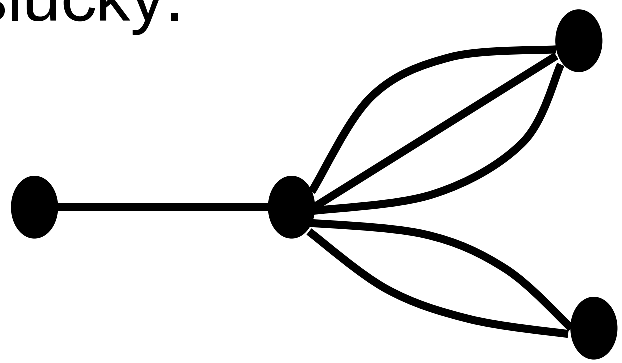


Násobné hrany

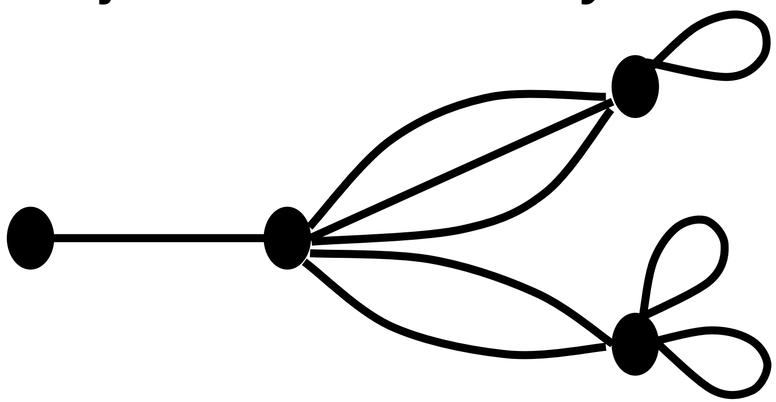


Definície

Multigraf – graf, ktorý obsahuje násobné hrany, nie však slučky.



Pseudograf – graf, ktorý obsahuje násobné hrany naviac aj násobné slučky.



Definície orientovaného grafu

Orientovaný graf – všetky jeho hrany sú orientované, každá z nich spája usporiadanú dvojicu vrcholov grafu (*orientovaná hrana* – je daná začiatočným a koncovým vrcholom, v grafe označovaná šípkou, je to usporiadaná dvojica (u_i, u_j)). Je to skôr dynamický model reality.

Nech **U** = $\{u_i\}$ (i=1, 2, ..., n) je ľubovoľná množina n prvkov a **H** je ľubovoľná podmnožina množiny **W** všetkých variácií druhej triedy prvkov množiny **U** ($\mathbf{H} \subseteq \mathbf{W}$). Potom usporiadanú dvojicu **G** = [**U**, **H**] nazývame *orientovaný graf*.

Neorientovaný graf – špeciálny prípad orientovaného grafu (každá neorientovaná hrana je nahradená dvojicou orientovaných hrán s opačnou orientáciou). Je to skôr statický model reality.

Definície orientovaného grafu

Stupeň orientovaného grafu:

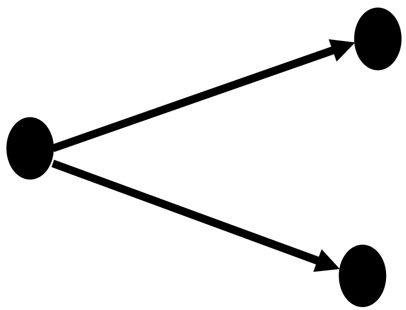
- *vnútorný (vstupný) stupeň* $\deg^{-}(u)$ – počet hrán vstupujúcich do vrcholu u
- *vonkajší (výstupný) stupeň* $\deg^{+}(u)$ – počet hrán vystupujúcich do vrcholu u

Platí

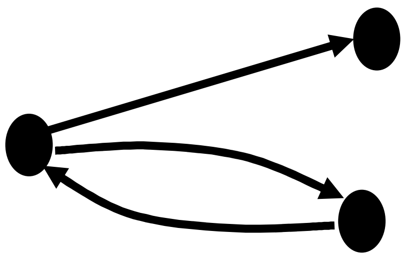
$$\deg(u) = \deg^{-}(u) + \deg^{+}(u)$$

Definície orientovaného grafu

Orgraf (*oriented graph*) – najjednoduchší typ orientovaného grafu, ktorý neobsahuje ani rovnobežné hrany, ani slučky.

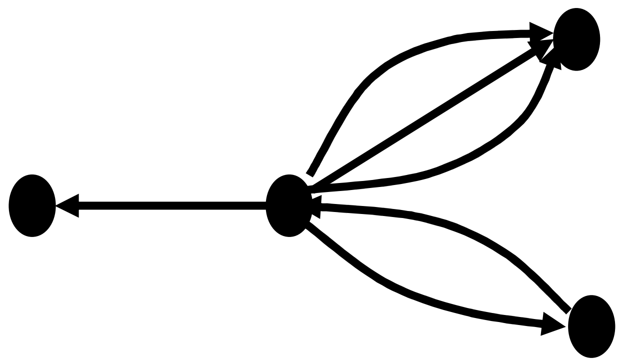


Digraf (*directed graph*) – orientovaný graf, ktorý neobsahuje násobné hrany, ani slučky, môže však obsahovať rovnobežné hrany.

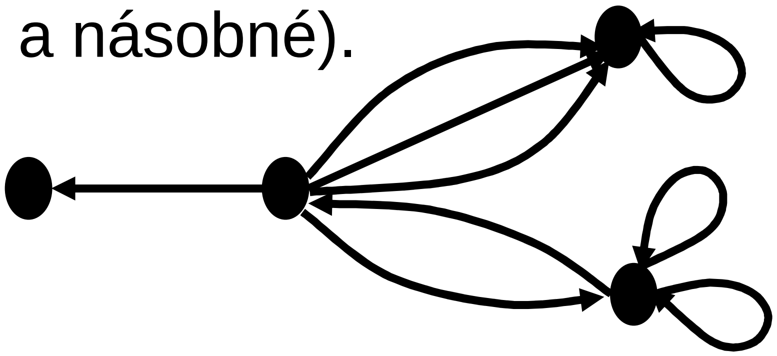


Definície orientovaného grafu

Multidigraf – orientovaný graf, ktorý neobsahuje slučky (rovnobežné a násobné hrany môže).



Pseudodigraf – orientovaný graf, ktorý môže obsahovať rovnobežné a násobné hrany a aj slučky (jednoduché a násobné).



Definície orientovaného grafu

Pre orientované grafy platí:

- každý orgraf je digrafom
- každý digraf je multidigrafom
- každý multigraf je pseudodigrafom

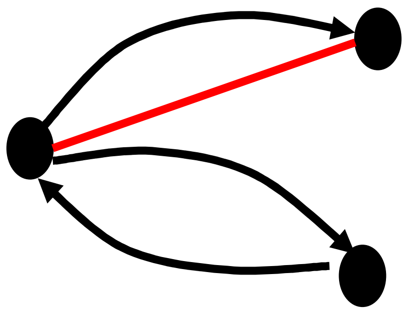
- opačné tvrdenia neplatia

Definície zmiešaného grafu

Zmiešaný graf – jeho hrany sú aj neorientované, aj orientované.

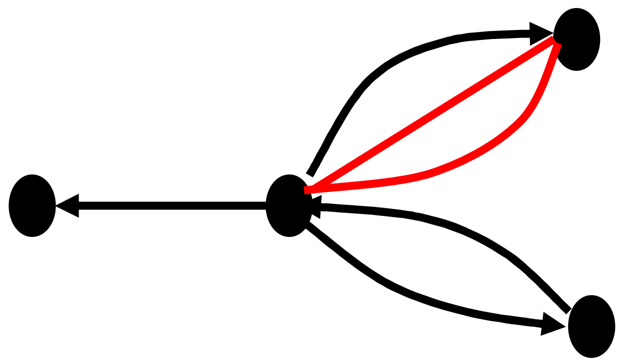
Definície zmiešaného grafu

Migraf (*mixed graph*) – zmiešaný graf, ktorý neobsahuje násobné hrany, ani slučky, môže však obsahovať rovnobežné hrany.

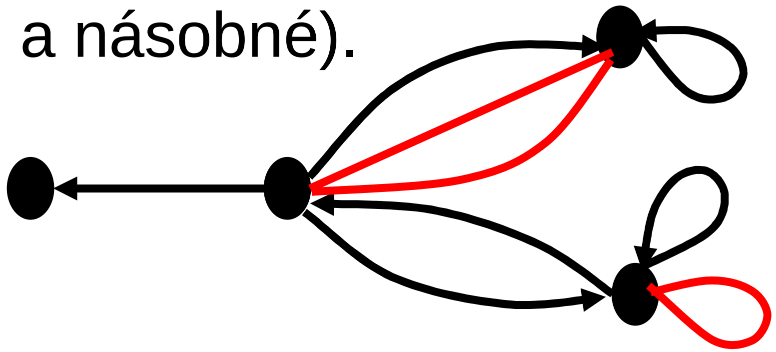


Definície zmiešaného grafu

Multimigraf – zmiešaný graf, ktorý neobsahuje slučky (rovnobežné a násobné hrany môže).



Pseudomigraf – zmiešaný graf, ktorý môže obsahovať rovnobežné a násobné hrany a aj slučky (jednoduché a násobné).



Definície zmiešaného grafu

Pre orientované grafy platí:

- každý migraf je multimigrafom
- každý multimigraf je pseudomigrafom

- opačné tvrdenia neplatia

- pseudomigraf je najvšeobecnejšou grafovou štruktúrou

- OBYČAJNÝ GRAF – neorientovaný graf bez slučiek a násobných hrán

Definície

Prázdny graf – graf, ktorý neobsahuje vrcholy, množina **U** = ∅, označuje sa K_0.

Triviálny graf – graf s jediným vrcholom s nulovým stupňom, označuje sa K_1.

Diskrétny graf – graf obsahujúci len izolované vrcholy, neobsahuje hany.

Súvislý graf – graf, v ktorom ľubovoľné dva vrcholy súvisia.

Kompletný (úplný) graf – graf bez slučiek a rovnobežných hrán, v ktorom sú každé dva rôzne vrcholy susedné (spojené hranou).

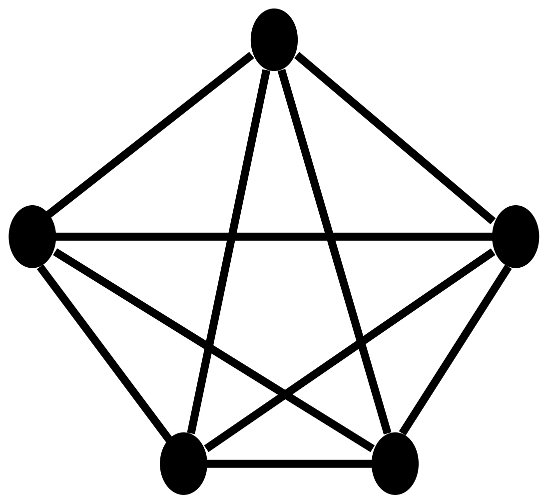
Kompletný (úplný) graf

Kompletný (úplný) graf – graf bez slučiek a rovnobežných hrán, v ktorom sú každé dva rôzne vrcholy susedné (spojené hranou).

Počet hrán kompletného grafu = $\binom{n}{2}$

Stupeň každého uzla = $n - 1$

Označenie K_n

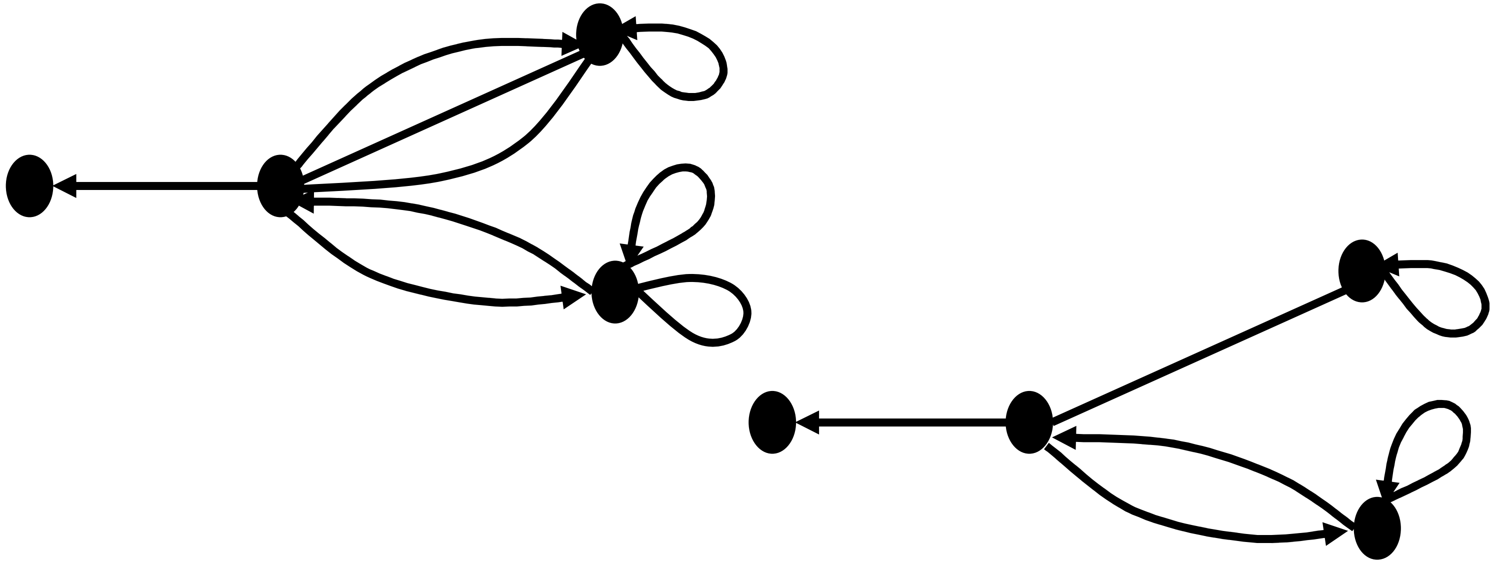


Podgraf

Podgraf grafu **G** = [**U**, **H**] – graf **G´** = [**U´**, **H´**], pre ktorý platí

$$U' \subseteq U \text{ a } H' \subseteq H$$

Naddgraf grafu **G** = [**U**, **H**] – graf **G´´** = [**U´´**, **H´´**], pre ktorý je graf **G** podgrafom.



Sled

Sled – každá alternujúca postupnosť uzlov a hrán, ktorá začína a končí vrcholom.

Sled v grafe z vrcholu u_1 *do vrcholu* u_n – konečná postupnosť hrán $(u_1,u_2),(u_2,u_3),...(u_{n-1},u_n)$ s vlastnosťou, že dve po sebe nasledujúce hrany majú spoločný vrchol.

Sled v grafe z vrcholu u_1 *do vrcholu* u_n – konečná postupnosť vrcholov u_1, u_2,...u_n s vlastnosťou, že dva po sebe nasledujúce vrcholy (u_i,u_{i+1}) sú spojené hranou.

Sled dĺžky n – sled, ktorý obsahuje práve *n* hrán.

Vlastnosti sledu

Otvorený sled – začiatočný a konečný vrchol sledu sú rôzne, teda $u_1 \neq u_n$.

Uzavretý sled – začiatočný a konečný vrchol sledu sú totožné, teda $u_1 = u_n$.

Ťah – sled, v ktorom sa neopakuje žiadna hrana.

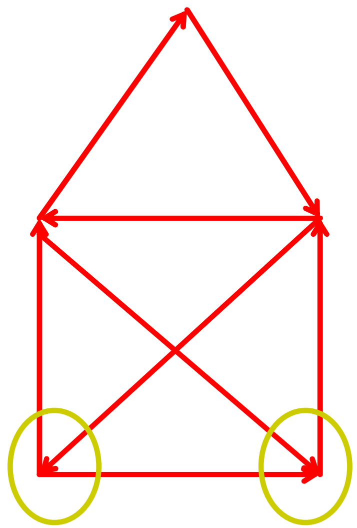
Cesta – sled, v ktorom sa neopakuje žiaden vrchol.

Cyklus (kružnica) – uzavretá cesta, ktorá má aspoň jednu hranu (neopakuje sa v nej žiaden vrchol okrem začiatočného, ktorý je súčasne konečným).

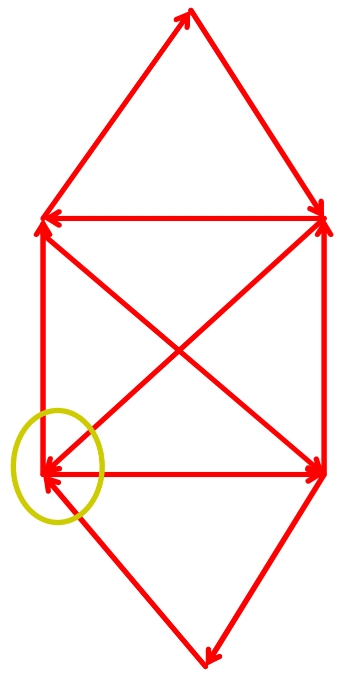
Acyklický graf – graf, ktorý neobsahuje cykly.

Vlastnosti sledu

Otvorený ťah

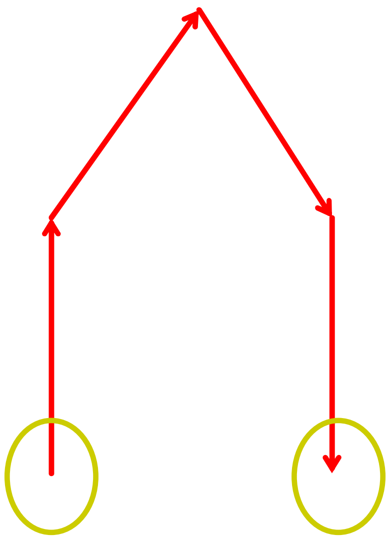


Uzavretý ťah

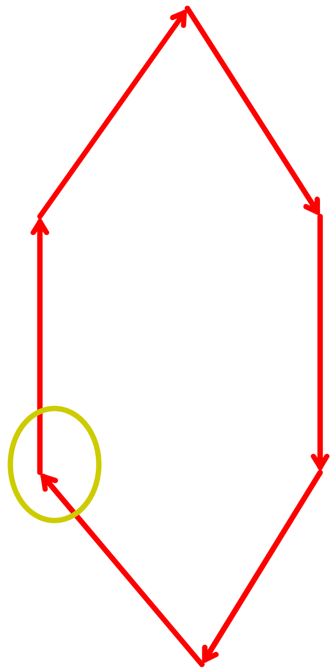


Vlastnosti sledu

Otvorená cesta



Uzavretá cesta (cyklus)



Vlastnosti sledu

Eulerovský sled – sled obsahujúci všetky prvky grafu (všetky vrcholy a všetky hrany).

Uzavretý eulerovský ťah – neprázdny, konečný, súvislý graf, ktorého každý vrchol má párny stupeň.

Otvorený eulerovský (semieulerovský) ťah – neprázdny, konečný, súvislý graf, ktorý obsahuje práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

Hamiltonovský sled – sled obsahujúci všetky uzly grafu.

Eulerovský graf – graf obsahujúci Eulerov cyklus, teda uzatvorený sled obsahujúci všetky prvky grafu (všetky vrcholy a všetky hrany).

Hamiltonovský graf – graf obsahujúci hamiltonovský cyklus, teda uzatvorený sled obsahujúci všetky uzly grafu.

Acyklické grafy

Acyklický graf – graf neobsahujúci cykly.

Strom – neprázdny súvislý a acyklický graf (neobsahuje kružnice).

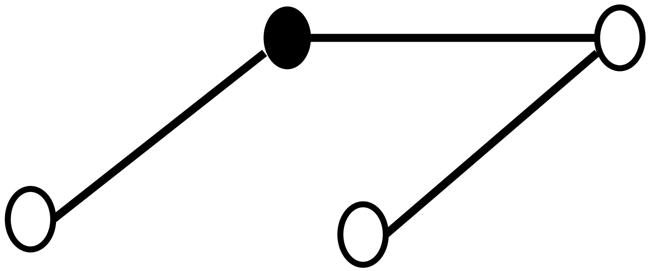
Strom – neprázdny súvislý acyklický graf s minimálnym počtom hrán rovnajúcim sa $n - 1$ (n je počet vrcholov).

Strom – neprázdny konečný súvislý graf s n vrcholmi a m hranami, pre ktorý platí $n = m + 1$.

Koreň stromu – uzol, pre ktorý platí:

$$\deg^{-}(u) = 0 \text{ a } \deg^{+}(u) > 0.$$

Koreňový strom – strom, ktorý má jednoznačne určený koreň.

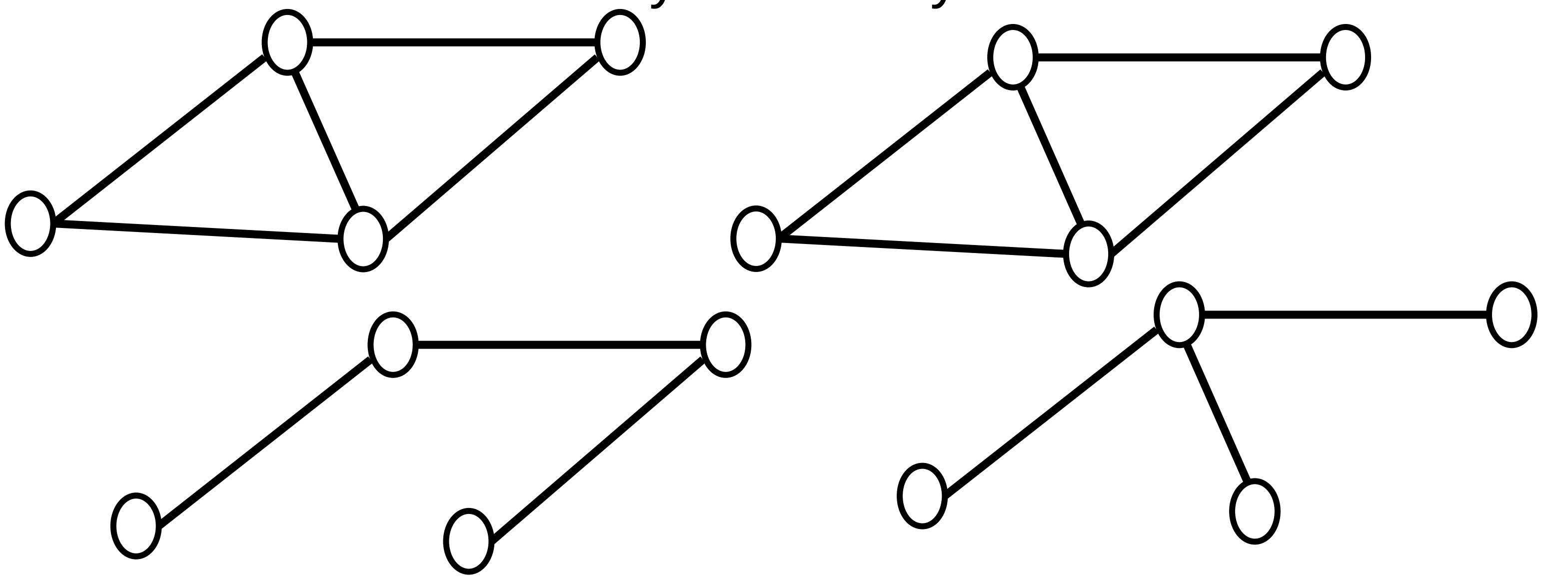


Kostra grafu

Kostra grafu – taký strom grafu **G** = [**U**, **H**], pre ktorého podrgaf **G´** = [**U´**, **H´**] platí **U´**= **U** a **H´**$\subset$ **H** (faktor grafu).

Kostra grafu – každý súvislý graf má kostru*.*

Minimálna kostra grafu – taká kostra grafu, v ktorej je súčet ohodnotení hrán kostry minimálny*.*



Opisy štruktúry grafu

Matica susednosti $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ **pre** $\boldsymbol{i, j = 1, 2, \ldots, n}$ *(uzlová matica)* neohodnoteného grafu $\mathbf{G} = [\mathbf{U}, \mathbf{H}]$ rozmeru $n.n$ (n – počet vrcholov), pre ktorej prvky platí

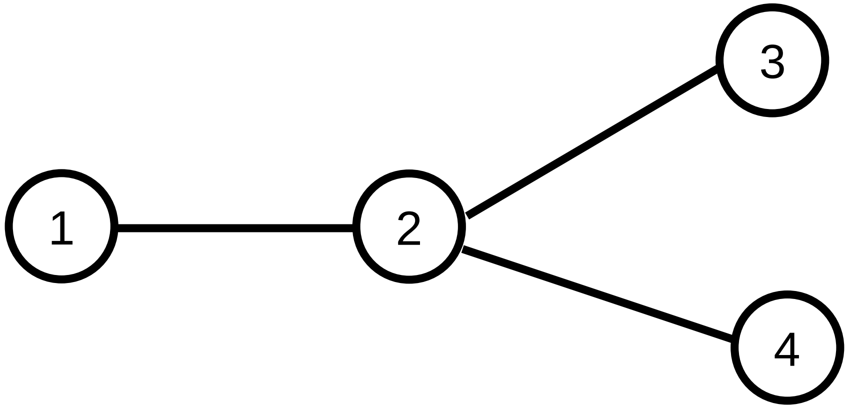
$a_{ij} = 1$, ak $h_{ij} \in \mathbf{H}$ (resp. $[u_i, u_j] \in \mathbf{H}$) – hrana existuje,

$a_{ij} = 0$, ak $h_{ij} \notin \mathbf{H}$ (resp. $[u_i, u_j] \notin \mathbf{H}$) – hrana neexistuje.

Pri násobných hranách je hodnota $\boldsymbol{a_{ij}}$ definovaná ako $\boldsymbol{a_{ij} = m.h_{ij}}$, resp. $\boldsymbol{a_{ij} = m.}$ $(\boldsymbol{u_i, u_j})$.

Opisy štruktúry grafu

Neorientovaný graf



Matica susednosti $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$

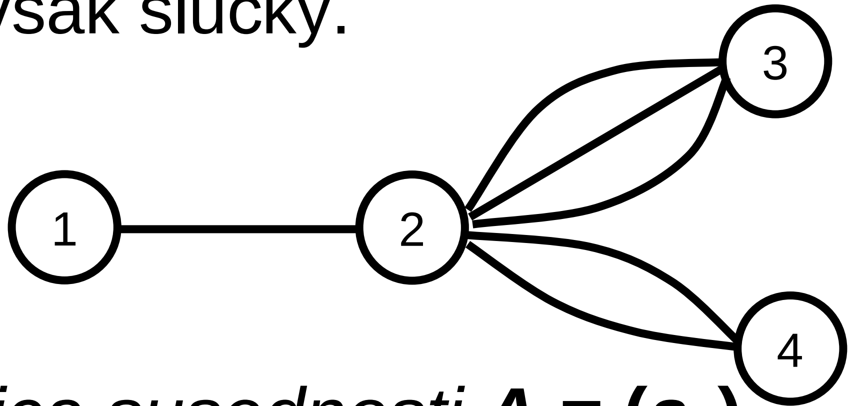
Vlastnosti **–** symetrická matica

– súčet prvkov *i*-tého riadku predstavuje stupeň vrcholu deg(u_i)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisy štruktúry grafu

Multigraf – graf, ktorý obsahuje násobné hrany, nie však slučky.



Matica susednosti $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$

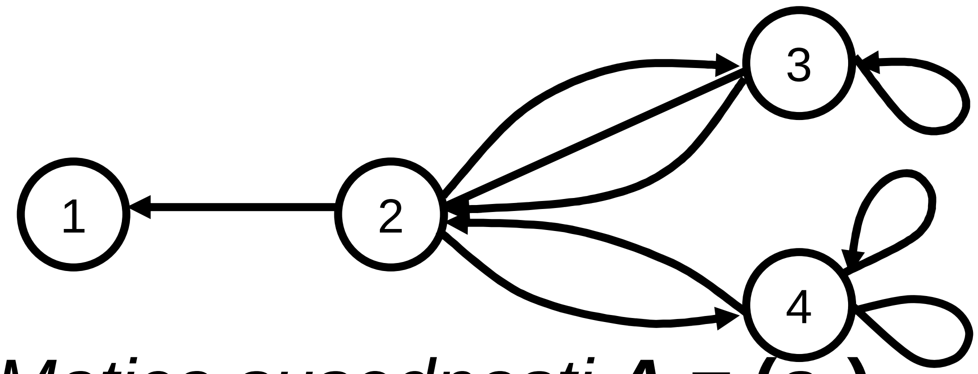
Vlastnosti **–** symetrická matica

– súčet prvkov *i*-tého riadku predstavuje stupeň vrcholu deg(u_i)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisy štruktúry grafu

Pseudomigraf – zmiešaný graf, ktorý môže obsahovať rovnobežné a násobné hrany a aj slučky (jednoduché a násobné).



Matica susednosti ***A* = (*a*$_{ij}$)**

Vlastnosti – súčet prvkov *i*-tého riadku predstavuje vnútorný stupeň vrcholu deg^{-}(u_i) a *i*-tého stĺpca vonkajší stupeň deg^{+}(u_i)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Opisy štruktúry grafu

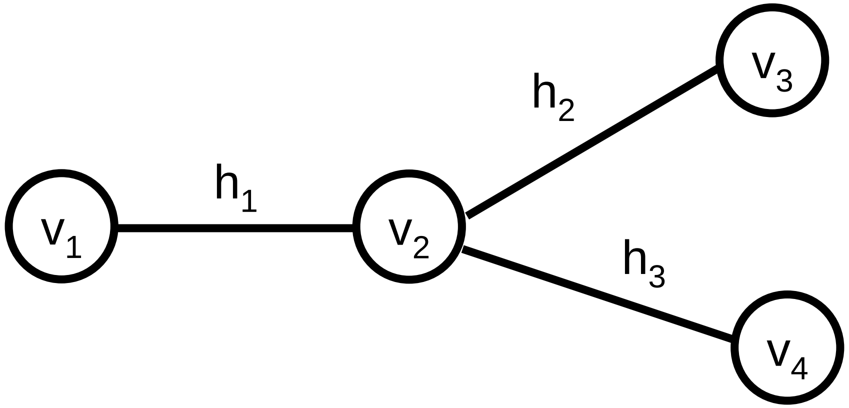
Matica incidencie $\mathbf{S} = (s_{ij})$ **pre** n **vrcholov a** m **hrán** *(uzlovo-hranová matica)* neohodnoteného grafu **G** = [**U**, **H**] rozmeru $n.m$, pre ktorej prvky platí

s_{ij} = 1, ak vrchol u_i je incidentný s hranou h_j,

s_{ij} = 0, ak vrchol u_i nie je incidentný s hranou h_j.

Opisy štruktúry grafu

Neorientovaný graf



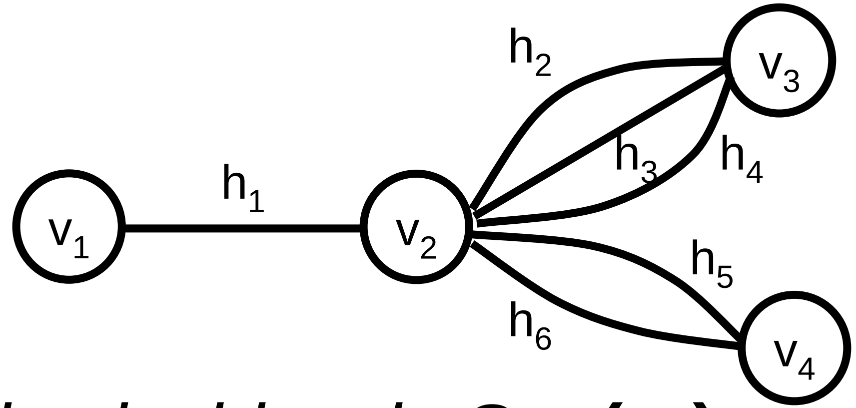
Matica incidencie ***S = (s**$_{ij}$**)***

Vlastnosti – súčet prvkov *i*-tého riadku predstavuje stupeň vrcholu deg(u_i)

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Opisy štruktúry grafu

Multigraf



Matica incidencie ***S* = (*s*$_{ij}$)**

$$\mathbf{S}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Opisy štruktúry grafu

Matica incidencie **S = (s_{ij}) pre *n* vrcholov a *m* hrán** *(uzlovo-hranová matica)* neohodnoteného grafu **G** = [**U**, **H**] rozmeru $n.m$ s násobnými hranami a slučkami, pre ktorej prvky platí

s_{ij} = 1, ak vrchol u_i je incidentný s neorientovanou hranou h_j, alebo orientovaná hrana h_j vystupuje z vrcholu u_i,

s_{ij} = – 1, ak orientovaná hrana h_j vstupuje do vrcholu u_i,

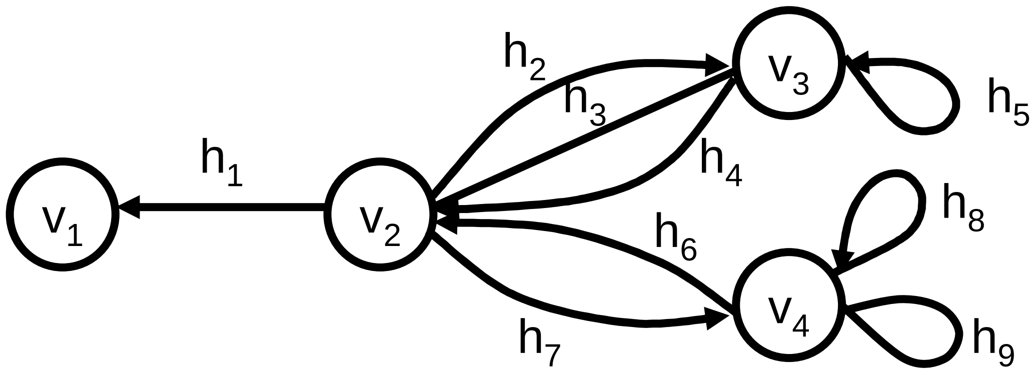
s_{ij} = 2, ak neorientovaná hrana h_j je slučka incidenčná s vrcholom u_i,

s_{ij} = – 2, ak orientovaná hrana h_j je slučka pri vrchole u_i,

s_{ij} = 0, ak vrchol u_i nie je incidentný s hranou h_j.

Opisy štruktúry grafu

Pseudomigraf



Matica incidencie ***S = (s***

Matica incidencie $\boldsymbol{S} = (s_{ij})$

Vlastnosti – každý stĺpec matice obsahuje najviac dva nenulové prvky a súčet ich absolútnych hodnôt je rovný 2

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c|ccccccccc|} & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 \\ v_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}$$

Opisy štruktúry grafu

Dištančná matica **D = (d_{ij}) pre *n* vrcholov** neohodnoteného grafu **G** = [**U**, **H**] rozmeru $n.n$, pre ktorej prvky platí

$d_{ij} = k_{ij}$, ak $h_{ij} \in$ **H** (resp. $[u_i, u_j] \in$ **H**) – hrana existuje,

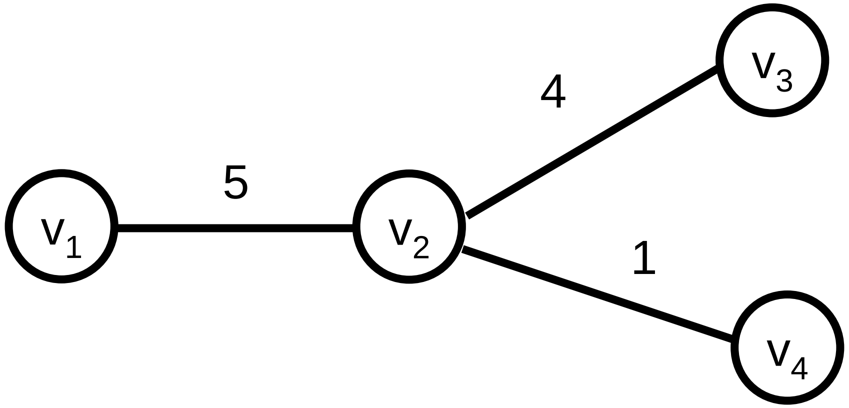
$d_{ij} = 0$ pre $i = j$ (prvky na diagonále),

$d_{ij} =$ M, ak $h_{ij} \notin$ **H** (resp. $[u_i, u_j] \notin$ **H**) – hrana neexistuje.

M – dostatočne veľké kladné číslo, niekedy zapisované aj ∞.

Opisy štruktúry grafu

Neorientovaný graf

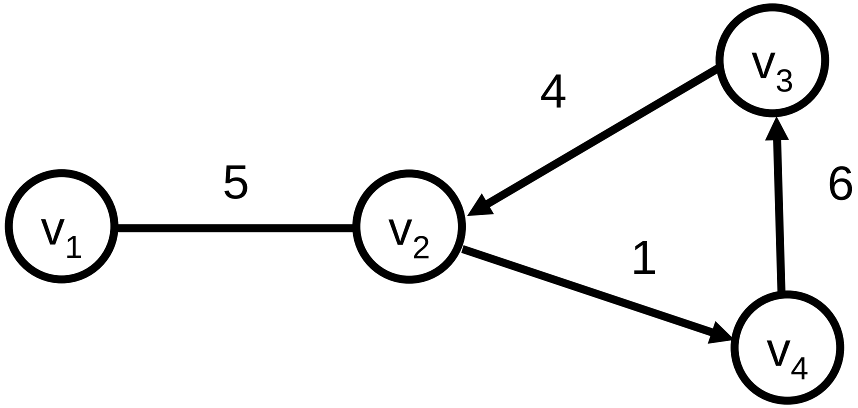


Dištančná matica ***D = (d$_{ij}$)***

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisy štruktúry grafu

Zmiešaný graf



Dištančná matica $\mathbf{D} = (d_{ij})$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Opisy štruktúry grafu

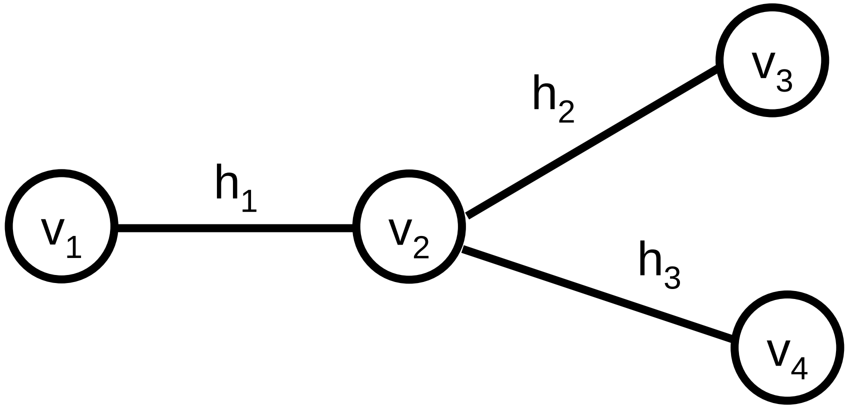
Matica stupňov uzlov matice **Deg = (deg_{ij}) pre *n* vrcholov** neohodnoteného grafu **G** = [**U**, **H**] rozmeru $n.n$ je diagonálna matica, pre ktorej prvky platí

deg_{ij} = *počet stupňov zodpovedajúceho uzla* pre $i = j$ (prvky na diagonále),

$deg_{ij} = 0$ pre $i \neq j$.

Opisy štruktúry grafu

Neorientovaný graf

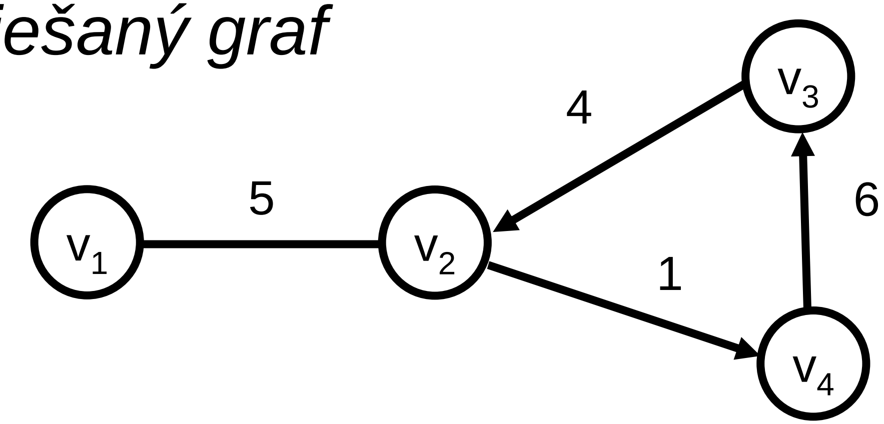


Matica stupňov uzlov matice **Deg = (*deg$_{ij}$*)**

$$\mathbf{Deg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vzťah medzi maticou susednosti a dištančnou maticou

Zmiešaný graf



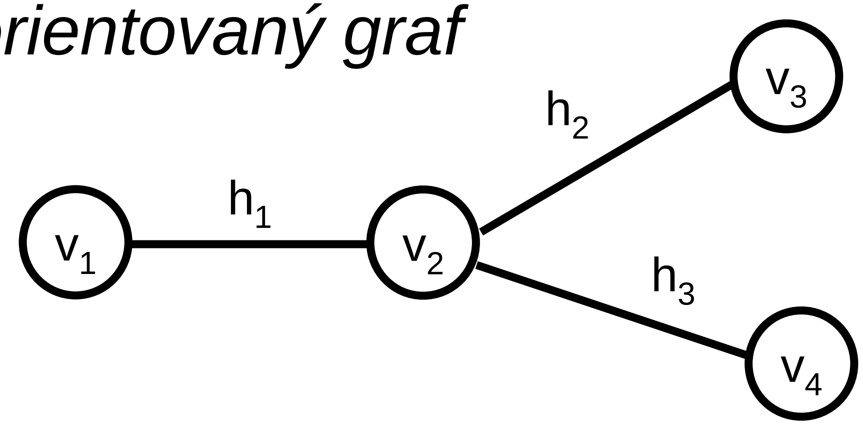
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Vzťah medzi maticou susednosti a incidenčnou maticou

$$\mathbf{S}.\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} + \mathbf{Deg}$$

Vzťah medzi maticou susednosti a incidenčnou maticou

Neorientovaný graf



$$\mathbf{S.S^T = A + Deg}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica výpočtu kostier grafu

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}.\mathbf{S}^{\mathbf{T}}$$

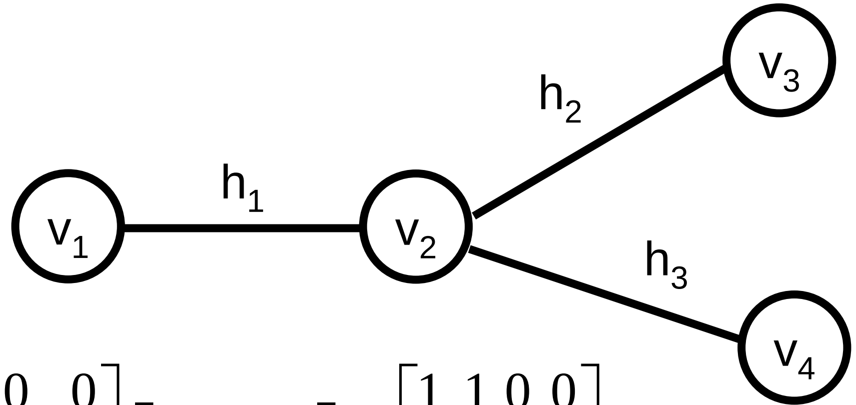
Matica M(i) – vynechanie ľubovoľného *i*-tého riadku a *i*-tého stĺpca matice **M.**

Počet kostier grafu – determinant matice **M:**

$$\left|\mathbf{M}\right|$$

Matica výpočtu kostier grafu

Neorientovaný graf



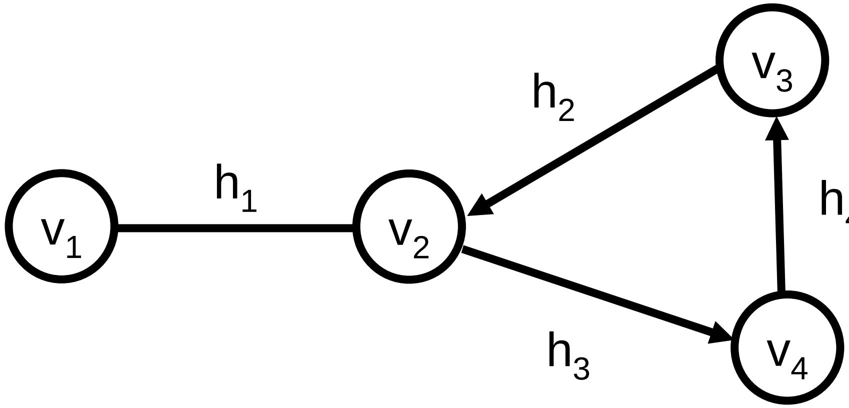
$$\mathbf{M} = \mathbf{S}.\mathbf{S}^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left|\mathbf{M}\right| = (3.1.1 + 1.0.1 + 1.1.0) - (1.1.1 + 0.0.1 + 1.1.1) = 1$$

Matica výpočtu kostier grafu

Zmiešaný graf



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{M}| = (1.3.2 + 1.-1.0 + 1.-1.0) - (0.3.0 + 1.1.2 + 1.-1.-1) = 3$$