

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/I/2020/36089192890444036

OPTIMÁLNA VRSTVA ZAISTENIA NADMERNÝCH
ŠKÔD

Diplomová práca

2020

Bc. Kinga Zánová

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

OPTIMÁLNA VRSTVA ZAISTENIA NADMERNÝCH
ŠKÔD

Diplomová práca

Študijný program: Aktuárstvo

Študijný odbor: Ekonómia a manažment

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva

Vedúci záverečnej práce: doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.

2020

Bc. Kinga Zánová

Pod'akovanie

Týmto by som sa chcela poďakovať mojej školiteľke, pani doc. RNDr. Galina Horáková, CSc., za jej odbornú pomoc, za usmernenie pri písaní diplomovej práce, za odborné informácie, trpezlivosť a ochotu.

ABSTRAKT

ZÁNOVÁ, Kinga: *Optimálna vrstva zaistenia nadmerných škôd.*– Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva. – doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.. – Bratislava: FHI, 2020, 53 s.

Cieľom záverečnej práce je nájsť optimálne zaistenie pre nadmerné, resp. katastrofické škody, ale aj pre bežné škody. Práca je rozdelená do troch kapitol. Obsahuje 7 tabuliek, 16 obrázkov a jednu schému. Prvá kapitola je venovaná teoretickým poznatkom ohľadom katastrofických škôd, rôznym matematickým opisom a taktiež aj objasneniu proporcionálneho a neproporcionálneho zaistenia, ako aj zaistenia katastrofických škôd. Obsahom druhej kapitoly sú metódy a ciele práce a skúmania vybranej problematiky. Záverečná kapitola sa zaoberá optimálnym nastavením výšky zaistovacích ochrán poisťovne, čo je znázornené na ilustračných príkladoch. Výsledkom skúmania danej problematiky je potreba využitia optimálneho zaistenia pre poisťovne z dôvodu minimalizácie rizika a nákladov na poistné plnenia.

Kľúčové slová:

Poistenie, zaistenie, nadmerné škody, optimalizácia

ABSTRACT

ZÁNOVÁ, Kinga: *Optimal Layers for Catastrophe Reinsurance.* – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Mathematics and Actuarial Science. – doc. RNDr. Galina Horáková, CSc.. – Bratislava: FHI, 2020, 53 s.

The aim of the final thesis is to find optimal reinsurance for catastrophic losses and for standard losses. The thesis is divided into three chapters. It contains 7 tables, 16 pictures and one scheme. The first chapter investigates theoretical information of catastrophic losses, various mathematical descriptions and clarification of proportional and nonproportional reinsurance as well as reinsurance of catastrophic losses. The second chapter is dedicated to methods and aims of the text and research of the selected topic. The aim of the last chapter is to find and set the optimal level of reinsurance for insurance companies, that is depicted on the illustrative examples. The result of the research is the necessity to apply the optimal reinsurance to insurance companies in order to minimise the risk and expenditures on indemnities.

Key words:

Insurance, reinsurance, catastrophic losses, optimalization

Obsah

Úvod.....	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí.....	11
1.1 Katastrofické škody	11
1.2 Matematický opis a rozdelenia	12
1.2.1 Rozdelenie s ľahkým koncom	13
1.2.2 Rozdelenie s ťažkým koncom.....	14
1.3 Metóda využitia kolektívneho modelu rozdelenia zložených rozdelení.....	15
1.3.1 Kolektívny model rizika	15
1.4 Individuálny model zaistenia.....	19
1.5 Zaistenie.....	19
1.5.1 Proporcionálne zaistenie	21
1.5.2 Neporcionálne zaistenie.....	25
1.5.3 Zaistenie katastrofických škôd.....	27
2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania	29
3 Výsledky práce a diskusia	32
3.1 Optimálne zaistenie bežných škôd	33
3.1.1 Kritérium minimalizácie hodnoty VaR.....	33
3.1.2 Kritérium maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl	35
3.1.3 Porovnanie výpočtu optimálnych zaistných ochrán	38
3.2 Tvorba modelu s optimálnym zaistením nadmerných škôd	38
3.2.1 Stanovenie limitu zaistovateľa prostredníctvom kritéria minimalizácie hodnoty VaR pre konkrétnu prioritu β	44
Záver	48
Zoznam použitej literatúry	49
Prílohy	51

Zoznam tabuliek:

Tabuľka 1 Výpočet celkového zisku a disperzie zisku pre kvótové a excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu využitím kritéria minimalizácie hodnoty VaR.....	35
Tabuľka 2 Výpočet celkového zisku a disperzie zisku pre kvótové a excedentné zaistenie využitím kritéria maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl.....	37
Tabuľka 3 Podiel zaist'ovateľa a zaist'ovateľa na celkovej škode.....	43
Tabuľka 4 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaist'ovateľa	45
Tabuľka 5 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaist'ovateľa pre fixnú prioritu β	46
Tabuľka 6 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaist'ovateľa pre fixnú prioritu β	46
Tabuľka 7 Nastavenie limitu zaist'ovateľa pre fixnú prioritu $\beta = 40$	47

Zoznam obrázkov:

Obrázok 1 Funkcia hustoty pre Gamma rozdelenie	14
Obrázok 2 Funkcia hustoty pre Fréchetovo rozdelenie.....	15
Obrázok 3 Miery rizika $VaR_p(S^{kol})$	18
Obrázok 4 Miery rizika $CVaR_p(S^{kol})$	19
Obrázok 5 Mechanizmus zaistenia.....	20
Obrázok 6 Kvótové zaistenie pre poisťovateľa a zaist'ovateľa	22
Obrázok 7 Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu pre zaist'ovateľa.....	23
Obrázok 8 Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu pre poisťovateľa	23
Obrázok 9 Kombinácia kvótového a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu	25
Obrázok 10 Zaistenie škodového nadmerku jednotlivých rizík.....	26
Obrázok 11 Zaistenie škodového nadmerku katastrofickej udalosti s limitom	28
Obrázok 12 Optimálna priorita a limit pri excedentnom zaistení katastrofických škôd pre poisťovateľa	43
Obrázok 13 Optimálna priorita a limit pri excedentnom zaistení katastrofických škôd pre zaist'ovateľa	43
Obrázok 14 Distribučná funkcia Fréchetovho rozdelenia.....	44
Obrázok 15 Funkcia hustoty Fréchetovho rozdelenia.....	44
Obrázok 16 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaist'ovateľa pre fixnú prioritu $\beta = 20$	47

Úvod

Katastrofické riziko predstavuje riziko vystavenia sa veľkého počet ľudí nadmernej strate vyplývajúcej z nebezpečenstva. Môže to byť prírodná katastrofa vo forme zemetrasení, povodní, sucha alebo dokonca teroristického útoku, ktorý má za následok stratu na životoch, zničenie infraštruktúry vo veľkom rozsahu. Katastrofy sa v histórii vyskytli mnohokrát na globálnej úrovni, ktoré ovplyvnili aj mnohé ekonomiky. Medzi najničivejšie globálne katastrofické riziká, ktoré vedú k stratám viac ako 10 miliónov životov, patrí povstanie Taiping (1851-1864) a hladomor Veľkého skoku v Číne, Čierna smrť v Európe, španielska pandémia chrípky, dve svetové vojny, nacistické genocídy, hladomor v britskej Indii, stalinistický totalitarizmus a decimácia pôvodnej americkej populácie prostredníctvom kiahní a iných chorôb. Bohužiaľ, aj v týchto mesiacoch sme svedkami pandémie Covid-19, ktorá značným spôsobom ovplyvní zdravotný stav a ekonomiku celého sveta.

Katastrofy môžu mať vážne následky na chudobné domácnosti, pretože nemajú dostatočné zdroje na to, aby sa mohli chrániť pred katastrofami. V prípade katastrofy sa chudobné komunity často uchýľujú k samopoisteniu a neformálnym prostriedkom riadenia rizika. Ak intenzita straty nie je príliš závažná a pravdepodobnosť je vysoká, efektívne je samofinancovanie a neformálne spôsoby riadenia rizika. Avšak v prípade nízkej pravdepodobnosti, vysokej intenzity straty, samofinancovania a neformálnych prostriedkov financovania rizika sú neúčinné. V tomto prípade je poistenie efektívna voľba riadenia rizika. Poistenie je mimoriadne prospešné, pretože poskytuje včasnú finančnú pomoc po extrémnych šokoch z udalostí; v dôsledku toho sa znížia dlhodobé následky katastrof.

Poisťovne, tak ako aj ľudia, sa chcú zabezpečiť na prípady, kedy katastrofické škody nastanú. Zaisťovatelia môžu slúžiť na diverzifikáciu rizík, ktoré jednotlivé poisťovacie spoločnosti nedokážu interne kompenzovať. Je to spôsob prístupu poisťovníctva k kapitálu, aby sa zaistil proti budúcej katastrofickej udalosti. Poisťovatelia znižujú možnosť vzniku veľkých strát nákupom zaistenia.

Práca pozostáva z troch kapitol. Obsahom prvej kapitoly je súčasný stav riešenej problematiky, kde predstavíme základy katastrofických škôd, zaistenia, ako spôsob na redukovanie rizika, ktoré sú spôsobené škodami nadmerného charakteru vzhľadom na to, že na vyplatenia poisťných plnení majú najväčší dopad a taktiež sú najväčším nebezpečenstvom na insolventnosť poisťovne. Druhá kapitola pozostáva zo stanovení primárnych a parciálnych cieľov, metodiky a metódy, ktoré sú využívané v práci a sú potrebné k naplneniu cieľa. V tretej kapitole sa zameriame najprv na teoretické matematické aparáty, ktoré následne využijeme pri

aplikácií na ilustračné príklady. Uvedieme kritéria skladania zaistných ochrán, ktoré poslúžia pri optimalizácii zaistných ochrán bežných a nadmerných škôd.

Cieľom diplomovej práce je porovnať ako vplyva na celkovú škodu poisťovateľa, ak sa rozhodne portfólio rizík nezaistiť, zaistiť iba bežné škody alebo zaistiť aj nadmerné škody. Taktiež uvedieme základnú terminológiu, odvodíme vzťahy na výpočet očakávanej škody poisťovateľa, zaistiťovateľa, ako aj optimálnych zaistiťovacích ochrán a miery rizika Var a $CVaR$. Nadobudnuté poznatky budeme aplikovať na kolektívny model rizika na bežných škodách, ale aj individuálny model rizika pri katastrofických škodách.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V tejto kapitole uvedieme základné informácie nielen o katastrofických škodách, ale aj o formách ich riadenia. Riadenie rizika je založené na stochastickom modelovaní, ktorého základ tvorí zaradený matematický aparát.

1.1 Katastrofické škody

Univerzálnu definíciu katastrofických škôd je veľmi ťažké určiť. Katastrofické škody predstavujú škody, ktoré majú nízky výskyt, ale vysoké riziko závažnosti, môžu nastať bez očakávania, alebo ich môžeme aj predpokladať. Môžu byť spôsobené ľudským zapríčinením, ale nevylučujú sa ani prírodné katastrofy. Výsledkom je buď ovplyvnený finančný, alebo hmotný majetok v husto zaľudnených miestach alebo na druhej strane to môže ovplyvniť zničené, neobývané miesta. Nezáleží na tom, či je meraný svojvoľným usmernením, alebo striktnými metódami.

Pre naše potreby môžeme definovať katastrofické udalosti ako málo pravdepodobné prírodné udalosti alebo udalosti vzniknuté ľudských zapríčinením, ktoré spôsobujú šok pre už existujúce sociálny, ekonomický a environmentálny rámec a majú potenciál spôsobiť veľmi výrazné ľudské alebo finančné straty. Katastrofická udalosť alebo škoda je vnímaná ako jedná veľká udalosť, ktorá spôsobuje dané straty – ako napríklad zemetrasenie alebo teroristický útok. Môže nastať situácia, že veľa malých udalostí alebo prípadov vedú k rovnakej škále strát a škôd. Mnohé z udalostí nie sú vyhodnotené ako katastrofické a až po určitom čase a sčítaní strát sa prehodnotia a stanú katastrofickými škodami. Táto situácia môže nastať po uplynutí pandémie Covid-19. Momentálne možno poisťovne nepovažujú pandémiu za katastrofickú udalosť, lenže zatiaľ nie sú známe celkové škody, ktoré spôsobí. Či už sa jedná o finančné straty, alebo o straty spôsobené na ľudských životoch.

Aj keď potenciál pre veľké škody existuje, katastrofické škody nie vždy vedú k stratám. Zatiaľ čo sa sústreďujeme na udalosti, ktoré môže spôsobiť škody a uvažujeme ako ich čo najviac zminimalizovať, nemôžeme zabudnúť ani na udalosti, ktoré neprinášajú stratu. Sú to napríklad zemetrasenia v oblastiach, ktoré nie sú zaľudnené. Aj tieto udalosti sa považujú za katastrofické.

Katastrofa je samotnou udalosťou a nie konkrétnym ľudským alebo finančným výsledkom udalostí. Je to dôležité, pretože každá nová udalosť bez ohľadu na to, či spôsobuje sociálne, alebo ekonomické škody, sa stáva súčasťou historických údajov, ktoré sú pri vývoji analytického rámca také dôležité. Z pohľadu čisto riadenia rizík sa samozrejme zaujíname predovšetkým o situácie, ktoré majú potenciál vytvárať straty na skutočných udalostiach.

1.2 Matematický opis a rozdelenia

Na modeláciu extrémnych hodnôt môžeme využiť viacero prístupov, najčastejšie sú však používané: metóda blokového maxima a metóda excedentov ponad vysoký prah. Postupy majú za úlohu skúmať možné limitné rozdelenia pre zodpovedajúce náhodné veličiny. Identifikácia extrémnych veličín nie je jediná dôležitá úloha, ale aj správne zvolenie spojitého rozhodnutia, ktoré opisuje extrémne škody. Extrémne škody predstavujú hodnoty, ktoré sú veľmi veľké a zároveň ich dosiahnutie sa predpokladá s malou pravdepodobnosťou, pričom konvergencia k nule nie je príliš rýchla. Najznámejšie sú to zovšeobecnené extrémne rozdelenia a zovšeobecnené Paretovo rozdelenie.

- **Metóda blokového maxima** – „za extrémne hodnoty sa považujú maximá, ktoré sa nadobúdajú v za sebou nasledujúcich obdobiach rovnakej dĺžky. Táto metóda delí navzájom nezávislé pozorovania do rovnako veľkých blokov a vyberá z nich lokálne maximá. Ak uvažujeme prípad, že jeden taký blok bol generovaný nezávislými a rovnako rozdelenými náhodnými veličinami X_1, X_2, \dots, X_n so spoločnou distribučnou funkciou $F_X(x) = P(X \leq x)$, potom $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ je blokové maximum za príslušné obdobie a pre distribučnú funkciu tohto maxima platí

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \quad (1.1)$$

čo môžeme vyjadriť aj vzťahom

$$P(M_n \leq x) = (F_X(x))^n = F_X^n(x) \quad (1.2)$$

V každom extrémnom modeli sa pre zodpovedajúce náhodné veličiny skúmajú limitné rozdelenia. Pre pôvodné náhodné premenné je jednoduchou funkciou distribučná funkcia daného maxima. Metóda blokového maxima je však nevýhodná, pretože z bloku berie do úvahy stále iba jednu hodnotu, aj keď môže nastať situácia, že v danom bloku sa nachádza viac veľmi vysokých hodnôt a taktiež vyžaduje veľkú základňu údajov.

- **Metóda excedentov ponad vysoký prah** – v porovnaní s metódou blokového maxima neberie do úvahy iba najvyššiu hodnotu z bloku, ale všetky hodnoty, ktoré prekročili vopred stanovený prah v . Rozdelenie excedentov ponad vysoký prah vieme vyjadriť buď prostredníctvom podmienenej strednej hodnoty ako funkcia zvoleného prahu v alebo aj podľa podmieneného zákona rozdelenia. Zovšeobecnené Paretovo rozdelenie je limitným rozdelením excedentov.

¹ HORÁKOVÁ, Galina a Peter ZSOLDOS. Risk Measures for Extreme Losses: Miery rizika nadmerných škôd. *Investment Modelling in the Environment of Catastrophic Insurance Risk 2018: Reviewed Monographic Collection of Research Papers*. Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Economics. Department of Finance, 2018, , 12-21. ISBN 978-80-248-4224-0

Pri danej metóde sú dôležité dve základné miery rizika a to maximálna možná škoda a podmienená hodnota v riziku s vopred stanovenou pravdepodobnosťou. Hodnota *Value-at-Risk* je maximálne možná škoda, ktorá môže nastať s vopred stanovenou pravdepodobnosťou p . Je to p percentným kvantil, pre ktorý, ak p je z intervalu $(0; 1)$ platí

$$VaR_p(X) = \inf\{x \in R: F_X(x) \geq p\} \quad (1.3)$$

Hodnota $VaR_p(X)$ nehovorí o rozdelení extrémnych strát, ktoré sú väčšie ako táto hodnota. Z tohto dôvodu bola zavedená účinnejšia miera a to podmienená hodnota v riziku $CVaR_p(X)$, ktorá predstavuje očakávanú škodu z hodnôt, ktoré prekročia odpovedajúci kvantil. Táto hodnota predstavuje očakávanú stratu, ktorá môže byť spôsobená v danom časovom období zo všetkých škôd presahujúcich hodnotu $VaR_p(X)$. Môžeme ju vyjadriť aj ako súčet hodnoty kvantilu x_p a hodnoty $E(Y)$, čo predstavuje strednú hodnotu nadmernej škody

$$E(Y) = E[(X - x_p) | X > x_p] \quad (1.4)$$

kde náhodná premenná $Y = (X - x_p) | X > x_p$ má distribučnú funkciu, pre ktorú platí

$$F_{X|X>x_p}(x) = F_Y(x - x_p) = \frac{F_X(x) - p}{1 - p}, x \geq VaR_p(X) \quad (1.5)$$

Hodnotu $CVaR_p(X)$ vieme vyjadriť pre spojitú náhodnú premennú nasledovne

$$CVaR_p(X) = E(X | X > x_p) = \frac{\int_{x_p}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx}{P(X > x_p)} \quad (1.6)$$

Charakteristiky náhodných premenných a uvedené miery rizika, ktoré budeme potrebovať v aplikačnej časti, možno vyjadriť pre rozdelenia s ľahkým aj ťažkým koncom.

1.2.1 Rozdelenie s ľahkým koncom

Pravdepodobnostné rozdelenia, ktoré majú tenšie chvosty ako exponenciálne, sú rozdelenia s ľahkým koncom. Konvergujú k nule oveľa rýchlejšie a preto majú na koncoch menšiu hmotnosť. Gamma rozdelenie je príkladom rozdelenia s ľahkým koncom. Väčšina distribúcií boli zavedené v elementárnych štatistikách.

- **Gamma rozdelenie** – je to spojitú rozdelenie pravdepodobnosti s dvoma parametrami. Patrí k pravostranne zošikmeným rozdeleniam. Je vhodné pri použití modelovania výšky poistných plnení. Gamma rozdelenie je na rozdiel od exponenciálneho rozdelenia závislé od dvoch parametrov, vďaka čomu je flexibilnejšie a vhodnejšie. Napriek tomu neodhaduje dobre pravdepodobnosť extrémne vysokých poistných plnení.

Ak máme náhodnú premennú $X \sim \Gamma(m, \delta)$, tak jej distribučná funkcia má tvar

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{\delta^m}{\Gamma(m)} \cdot e^{-\delta t} \cdot t^{m-1} dt, \quad x > 0 \quad (1.7)$$

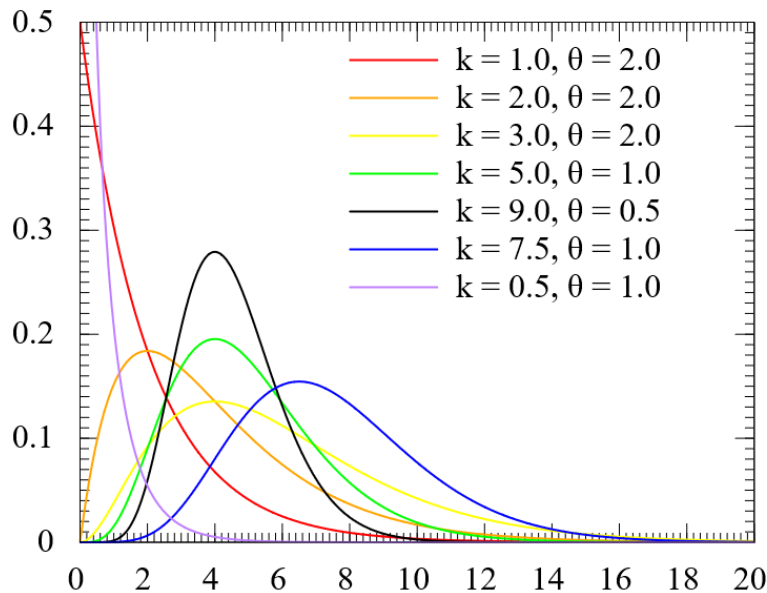
$\Gamma(m)$ označíme ako Gamma funkciu, ktorá je definovaná:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} dx \quad (1.8)$$

A funkcia hustoty vyzerá nasledovne

$$f_X(x) = \frac{\delta^m}{\Gamma(m)} \cdot e^{-\delta x} \cdot t^{m-1} \quad (1.9)$$

Obrázok 1 Funkcia hustoty pre Gamma rozdelenie



Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution#/media/File:Gamma_distribution_pdf.svg

1.2.2 Rozdelenie s ťažkým koncom

Distribúcia náhodne premennej X s reálnou hodnotou má ťažký pravý koniec, ak sa pravdepodobnosť konca $P(X > x)$ konverguje k nule pomalšie ako pravdepodobnosť akéhokoľvek exponenciálneho rozdelenia. Rozdelenia s ťažkým koncom sú zaujímavejšie, pretože sa dajú použiť na modelovanie procesov, ktoré majú tendenciu dosahovať extrémne výsledky.

- **Fréchetovo rozdelenie** – poznáme ho aj ako inverzné Weibullovo rozdelenie.

Je špecifickým prípadom Zovšeobecneného rozdelenia extrémnych hodnôt.

Distribučná funkcia Fréchetovho rozdelenia má tvar

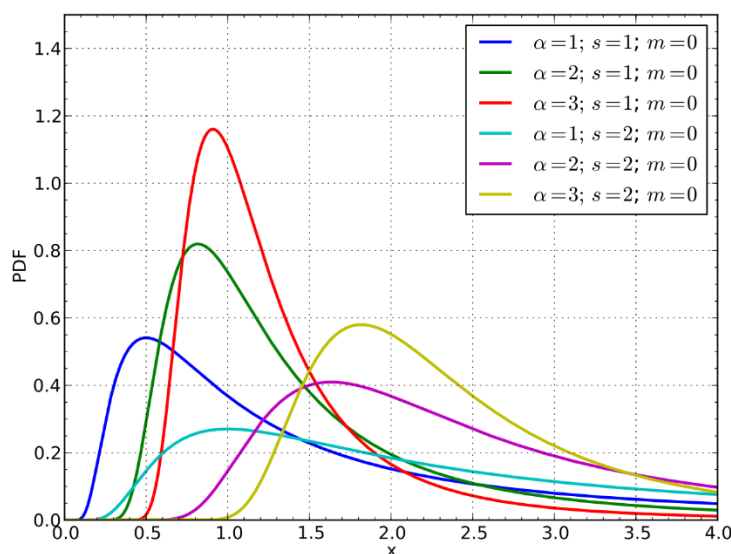
$$F(x, \alpha, m, s) = e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}} \quad (1.10)$$

kde s je parameter variability, m parameter polohy a pre α platí, že $\alpha = \frac{1}{\xi}$

a funkcia hustoty má tvar

$$f(x, \alpha, m, s) = e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}} \frac{\alpha}{s} \left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha-1} \quad (1.11)$$

Obrázok 2 Funkcia hustoty pre Fréchetovo rozdelenie



Zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Fr%C3%A9chet_distribution#/media/File:Fr%C3%A9chet_pdf.svg

Všetky uvedené rozdelenia možno zakomponovať do kolektívneho modelu rizika. Preto sa budeme v nasledujúcej časti venovať zloženým rozdeleniam v takej podobe, ktorá umožní priblížiť teoretické vzťahy, ktoré budú využité v aplikačnej časti.

1.3 Metóda využitia kolektívneho modelu rozdelenia zložených rozdelení

1.3.1 Kolektívny model rizika

Kolektívny model rizika má v poisťovníctve obrovský význam. Riziko, ako pojem, môže pre poisťovne znamenať vznik poistnej udalosti, ktorá môže nastať, ale nemusí. Pre poisťovňu predstavuje riziko to, či mu vybrané rizikové poistné a stanovené rezervy postačia na vyplatenie poistných plnení. Na posúdenie rizika sa skúmajú rôzne kritéria a atribúty, na základe ktorých je cena poistenia ovplyvnená a taktiež to, či sa rozhodne poisťovateľ dané riziko poistiť. „Medzi takéto podmienky, ako už bolo spomenuté, patria:

- riziko musí byť identifikovateľné,
- strata spôsobená prejavom rizika musí byť finančne vyčísliteľná,

- vznik poistnej udalosti musí byť aktom náhodnosti,
- poistenie rizika musí byť pre obe zainteresované strany ekonomicky únosné²

Stochastický model je zobrazený kolektívnym modelom rizika, prostredníctvom ktorého vieme posúdiť agregátne správanie súboru. Ako príklad uvedieme poistenie nehnuteľnosti. Nevieme s presnosťou určiť, v ktorej domácnosti nastane poistná udalosť a v akej výške, na základe čoho ani poisťovňa nevie stanoviť, akú škodu má čakať v stanovenom období. Štatistické údaje môžu pomôcť odhadnúť, v koľkých percentách poistených nehnuteľností nastane poistná udalosť. Pre poisťovňu nie je postačujúci údaj na modelovanie celkovej škody, nakoľko pri každej poistnej udalosti je poistné plnenie rôzne. Kvôli tomu musíme skonštruovať stochastický model výšky jednotlivých škôd. Po vyjadrení zákonov rozdelenia individuálnej škody a počtu škôd na jednu poistnú zmluvu, resp. celkového počtu škôd, môžeme tieto rozdelenia skladať. Výsledkom skladania je kolektívny model rizika, ktorého môžeme charakterizovať premennou celkovej škody S^{kol} .

Ak opisujeme kolektívny model rizika je potrebné, aby boli splnené nasledujúce podmienky:

- počet poistných zmlúv sa počas roka nemení,
- na každú poistnú zmluvu môže nastať viacero poistných plnení,
- jednotlivé riziká sú nezávislé.

Náhodnú premennú S^{kol} môžeme definovať ako celkovú škodu poisťovateľa vyplývajúca z portfólia, ktoré obsahuje nezávislé poistné zmluvy vzniknuté v určitom období, väčšinou jedného roka. Použijeme označenie X_i pre premennú opisujúcu výšku i -tej škody, kde X_i predstavujú nezávislé identické náhodné premenné a označenie N celkový počet škôd. Ďalej platí, že celkový počet škôd N a náhodná premenná X_i sú navzájom nezávislé. Následne celkovú škodu môžeme vyjadriť ako súčet všetkých individuálnych škôd, čo vyjadríme vzťahom

$$S^{kol} = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (1.12)$$

pričom s istotou môžeme tvrdiť, že v prípade, ak celkové poistné plnenie bude rovné nule, tak nenastane ani jedna poistná udalosť.

$$S^{kol} = 0 \Rightarrow N = 0 \quad (1.13)$$

² MELUCHOVÁ, Jitka. *Účtovníctvo a vykazovanie poisťovní podľa IFRS*. Bratislava: Iura Edition, 2009, 279 s. ISBN 978-80-8078-278-8

„Predpoklady vyjadrujú závislosť celkovej škody od počtu poistných udalostí, pričom rozdelenie individuálnej škody sa počas celého sledovaného obdobia, tak ako a počet poistných zmlúv, nemení.“³ Kolektívny model rizika teda berie do úvahy celkové riziko oproti riziku z jednotlivých poistných zmlúv, keďže môže nastať situácia, že na jednu poistnú zmluvu nastane viacero poistných plnení. Pre splnenie uvedených predpokladov musí existovať náhodná premenná so zloženým rozdelením:

$$S^{kol} \sim Co(p_N(n), F_X(x)) \quad (1.14)$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej S^{kol} má tvar

$$F_{S^{kol}}(x) = P(S^{kol} \leq x) \text{ pre } x \geq 0 \quad (1.15)$$

A pravdepodobnostná funkcia

$$p_{S^{kol}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) * p_x^{*n}(x) \quad (1.16)$$

kde $p_x^{*n}(x)$ predstavuje n -tú konvolúciu rozdelenia.

Základné charakteristiky celkovej škody S^{kol}

Medzi základné charakteristiky celkovej škody patrí stredná hodnota a disperzia. Na ich výpočet existuje viacero spôsobov, no my si uvedieme výpočet prostredníctvom distribučnej a pravdepodobnostnej funkcie.

Stredná hodnota, ktorá je definovaná ako začiatočný moment k -teho rádu $\nu_k(S^{kol})$ a vypočíta sa ako k -ta derivácia momentovej vytvárajúcej funkcie v bode $z = 0$. Nakoľko stredná hodnota je začiatočný moment prvého rádu, prvou deriváciou momentovej vytvárajúcej funkcie za podmienky, že parameter z položíme rovný nule, strednú hodnotu vyjadríme ako

$$\nu_1(S^{kol}) = \frac{d}{dz} m_{S^{kol}}(z) \Big|_{z=0} = E(S^{kol}) \quad (1.17)$$

Disperziu, definovanú ako centrálny moment druhého rádu, dostaneme ako rozdiel medzi začiatočným momentom druhého rádu a druhej mocniny začiatočného momentu prvého rádu

$$\mu_2(S^{kol}) = \nu_2(S^{kol}) - \nu_1^2(S^{kol}) = D(S^{kol}) \quad (1.18)$$

Celková škoda je ale závislá počtu škôd opísaných náhodnou premennou N a platí

$$E(S^{kol}) = E\left(E\left(\frac{S^{kol}}{N}\right)\right) \quad (1.19)$$

následnými úpravami dostaneme

³ HORÁKOVÁ, Galina, Michal PÁLEŠ a František SLANINKA. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015, 420 s. [21,07 AH]. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-273-5.

$$E(S^{kol} | N = n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \quad (1.20)$$

$$E(E(S^{kol} | N)) = E(N \cdot v_1(X)) = E(N)E(X) \quad (1.21)$$

(1.2) sme, že strednú hodnotu celkovej škody, ak poznáme strednú hodnotu počtu a výšky škôd vieme vypočítať ako

$$E(S^{kol}) = E(N)E(X) \quad (1.22)$$

Rovnakou úvahou budeme postupovať aj pri vyjadrení disperzie

$$D(S^{kol} | N = n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - n v_1^2(X) \quad (1.23)$$

Ak pre n platí, že je z prirodzených čísiel, tak

$$D(S^{kol} | N) = N(v_2(X) - v_1^2(X)) \quad (1.24)$$

$$D(S^{kol}) = E\left(N(v_2(X) - v_1^2(X))\right) + D(N v_1(X)) \quad (1.25)$$

Po úprave dostaneme disperziu celkovej škody

$$D(S^{kol}) = E(N)D(X) + E^2(X)D(N) \quad (1.26)$$

Miery rizika VaR a $CVaR$ zložených rozdelení vieme vyjadriť nasledovne

$$VaR_p(S^{kol}) = x_p \quad (1.27)$$

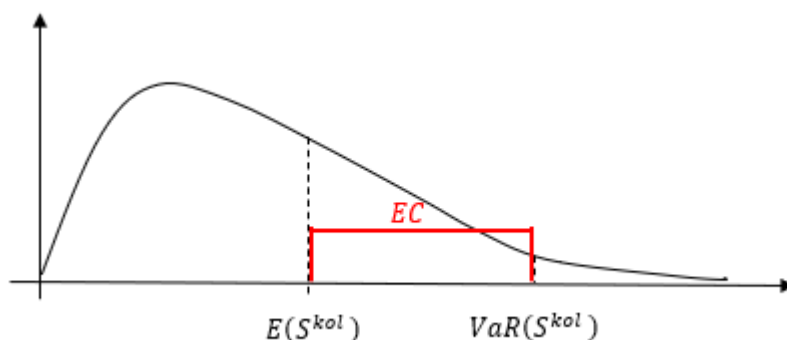
kde hodnota v riziku $VaR_p(S^{kol})$ predstavuje najhoršiu možnú škodu, ktorú môže nadobudnúť náhodná premenná zloženého rozdelenia S^{kol} s pravdepodobnosťou p .

$$F_{S^{kol}}(x_p) = p \quad (1.28)$$

$$F_{S^{kol}}(VaR_p(S^{kol})) = p \Rightarrow P(S^{kol} \leq VaR_p(S^{kol})) = \quad (1.29)$$

$$P(E(S^{kol}) + EC - S^{kol} \geq 0) = p \quad (1.30)$$

Obrázok 3 Miery rizika $VaR_p(S^{kol})$



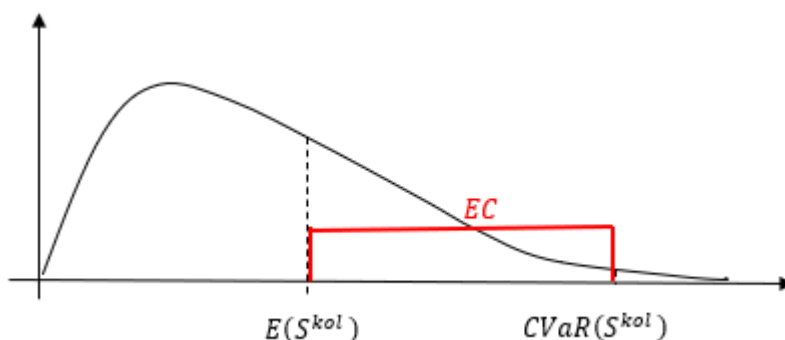
Zdroj: vlastné spracovanie

Hodnota $VaR_p(S^{kol})$ má však aj nedostatok, ktorým je, že neberie do úvahy extrémne, resp. vyššie hodnoty rozdelenia, ktorých hodnota je v porovnaní s $VaR_p(S^{kol})$ vyššia. Vďaka tomu bola zavedená efektívnejšia miera pri posudzovaní rizika, a to $CVaR_p(S^{kol})$.

„Podmienená hodnota v riziku $CVaR_p(S^{kol})$ je očakávaná škoda zo všetkých škôd prekračujúcich hodnotu kvantilu x_p príslušného rozdelenia.“⁴

$$CVaR_p(S^{kol}) = E(S^{kol} | S^{kol} > VaR_p(S^{kol})) \quad (1.31)$$

Obrázok 4 Miery rizika $CVaR_p(S^{kol})$



Zdroj: vlastné spracovanie

Ako rozložiť riziko medzi poisťovňu a zaisťovňu sa pokúsime priblížiť v nasledujúcej časti.

1.4 Individuálny model zaistenia

V predchádzajúcej podkapitole sme uviedli, že celková škoda kolektívneho rizika sa spája so zloženým rozdelením. V životnom poistení pri opise celkovej škody z vybraného portfólia zmlúv môžeme využiť individuálny model, pri ktorom je škoda z jedného rizika opísaná zloženým alternatívnym rozdelením.

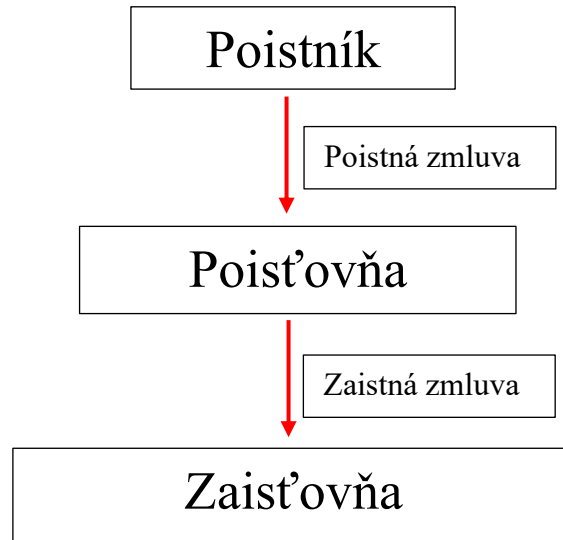
1.5 Zaistenie

Zaistenie je forma poistenia zakúpeného poisťovňami s cieľom zmierniť riziko. Zaistenie môže v zásade obmedziť výšku straty, ktorú môže poisťovateľ potenciálne utrpieť. Inými slovami, chráni poisťovacie spoločnosti pred finančným zničením, čím chráni ich zákazníkov pred nekrytými stratami. Jednoduchým vysvetlením je, že zaistenie predstavuje

⁴ HORÁKOVÁ, Galina, Michal PÁLEŠ a František SLANINKA. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015, 420 s. [21,07 AH]. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-273-5.

poistenie pre poisťovacie spoločnosti. Je to mechanizmus, ktorý poisťovne používajú na zníženie rizika alebo zníženie vystavenia konkrétnej katastrofickej udalosti.

Obrázok 5 Mechanizmus zaistenia



Zdroj: vlastné spracovanie

Zaistenie katastrofy slúži na ochranu prebytku poisťovateľa pred výraznými výkyvmi spôsobenými veľkými stratami v dôsledku katastrofy. Nákupom zaistenia proti katastrofám poisťovňa obchoduje s časťou svojho zisku, aby získala stabilitu vo svojich upisovaných a finančných výsledkoch. Za predpokladu dokonalého finančného trhu, keď sú katastrofické riziká nezávislé od iných zdrojov rizika, ktoré sú diverzifikovateľné v rovnováhe, by sa zaistná prirážka za ochranu pred katastrofickými mala rovnať očakávaným nákladom na zaistenie. Poisťovňa, ktorá má averziu k riziku, bude hľadať ochranu pred veľkými udalosťami pri zabezpečovaní vrstiev s nízkou rezervou. Ak by mal zaistený dostatok peňazí na to, aby mohol zabezpečiť plnú ochranu proti bankrotu, optimálnym zaistným dojednaním je dohoda o úplnej strate s najväčšou možnou odpočítateľnou hodnotou.

V praxi nie sú finančné trhy dokonalé, ceny zaistenia sú výrazne vyššie a pre poisťovne to nie je ekonomicky výhodné, aby sa zaistili na plnú hodnotu. Čeliac realite o relatívne vysokých cenách zaistenia a praktické ekonomické obmedzenia kupujúcich katastrofických zaistení, primárne poisťovne sa zdráhajú vzdať sa veľkej časti ich zisku pre obmedzené katastrofické zaistenie. Takto zaistení často nakupujú nízke vrstvy zaistenia, ktoré sú vystavené vysokej pravdepodobnosti preniknutia.

Ekonomovia ponúkli veľa vysvetlení na neefektívnosť zaist'ovacieho trhu. Borsch skúmal rovnováhu na zaistnom trhu a zistiť, že zaistený trh nedosiahne Pareto optimum, ak

sa bude snažiť každý účastník maximalizovať jeho užitočnosť. Froot identifikoval osem teoretických dôvodov na vysvetlenie, prečo poisťovne kupujú relatívne malé zaist'ovacie ochrany proti veľkým katastrofickým udalostiam. Zistil obmedzenia, ktoré sú spojené s nedostatkami kapitálového trhu (nedostatočný kapitál v oblasti zaistenia, trhová sila zaist'ovateľov a neefektívne podnikové formy pre zaist'ovne) určuje najpodstatnejšie vysvetlenie. Existujú významné obmedzenia v možnostiach zaist'ovateľa diverzifikovať riziko. Vzhľadom na katastrofické zaistenie, ani jedna zaist'ovňa nie je natoľko veľká, aby mohla plne diverzifikovať katastrofické riziko. Za účelom zabezpečenia rizika, zaist'ovateľ musí mať dostatočne veľký kapitál a musí zabezpečiť aj návratnosť daného kapitálu.

Poisťovne kupujú katastrofické zaistenie pre zníženie potenciálnej volatility výnosov a pre poskytnutie ochrany pred katastrofickými udalosťami. Avšak, zaistenie predstavuje pre poisťovne náklad a teda dosiahnutie optimálnej rovnováhy medzi úrovňami zisku po katastrofickom zaistení a zníženie rizika vzniku je veľmi dôležité. Kupovaním nepotrebnnej alebo nadmernej zaist'ovacej ochrany by sa vzdali viac z upísaného zisku ako je to potrebné alebo nevyhnutné. Veľkosť zaist'ovacej ochrany, ktorá predstavuje stabilitu alebo zníženie rizika a nákladov, je poisťné zaplatené po odčítaní nožnej straty. Analýza zaist'ovacej dohody je proces kvantifikácie nákladov. Podľa klasickej dohody o strednej hodnote vo finančnej ekonomike, zaistený bude kupovať zaistenie, ktoré zabezpečí dosiahnutie maximálneho zisku, ktorý je upravený o riziko.

V nasledujúcej časti stručne priblížime typy zaistenia, redukcii individuálnej škody zaistením a jej implementáciu do kolektívneho modelu rizika.

1.5.1 Proporciónálne zaistenie

Proporciónálne zaistenie, ako napríklad kvótové zaistenie a excedentné zaistenie vzhľadom na poisťnú sumu, vyžadujú, aby si poisťovateľ a zaist'ovateľ zdieľali poisťné, straty a náklady na vyrovanie strát na základe vopred stanoveného vzorca, ako je napríklad pevné alebo variabilné percento. Takéto dohody sa riadia zásadou proporcionality, ak sú poisťovateľ a zaist'ovateľ zapojené za rovnakých podmienok. Proporciónálne zaistenie má za následok určité postúpenie a alokovanie škôd. Výhodou pre poisťovateľa pri využití proporciónálneho zaistenia je vymáhanie malých strát a ochrana.

Proporciónálne zaistenie predstavuje poistenie, kde si poisťnú sumu S , poisťné P a poisťné plnenie X poisťovňa a zaist'ovňa delia medzi sebou vo vopred stanovenom pomere. Dôležitý je pomer, prostredníctvom ktorého sa v každej poisťnej zmluve rozdelí pôvodné riziko

medzi poisťovňou a zaisťovňou, ale taktiež aj poistné a poistné plnenie. Daný pomer nie je závislý od výšky škody.

V našej práci sa budeme venovať dvom typom proporcionálneho zaistenia, a to kvótové a surplus zaistenie.

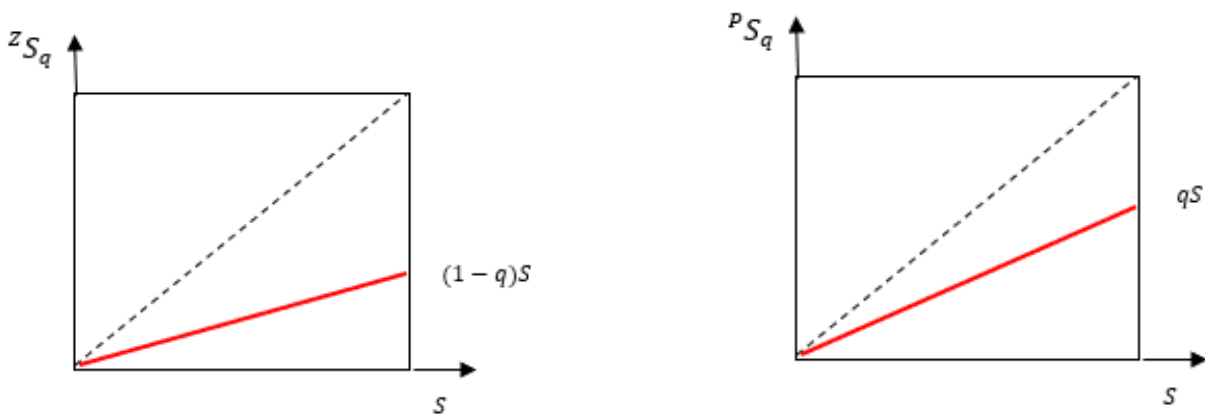
Kvótové zaistenie

Kvótové zaistenie predstavuje také zaistenie, kde sa poistná suma S , poistné P a poistné plnenie X delia medzi poisťovňu a zaisťovňu v pevne stanovenej percentuálnej sadzbe označenej ako kvóta q . Cedované poistné a poistné plnenie, môžeme zapísať vzťahmi

$${}^Z S_q = (1 - q)S \quad {}^Z X_q = (1 - q)X \quad {}^Z P_q = (1 - q)P \quad (1.32)$$

$${}^P S_q = qS \quad {}^P X_q = qX \quad {}^P P_q = qP \quad (1.33)$$

Obrázok 6 Kvótové zaistenie pre poisťovateľa a zaisťovateľa



Zdroj: vlastné spracovanie

Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu

Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu, nazývané aj ako surplus zaistenie, predstavuje také zaistenie, kde zaisťovateľ preberá tú časť poistnej sumy S , ktorá prevyšuje vopred dohodnutý vlastný vrub poisťovne α , kde $\alpha > 0$

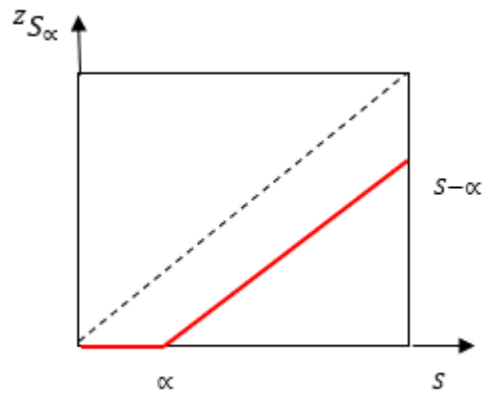
Pre poistnú sumu S , poistné plnenie X a poistné P v prípade zaisťovne je nasledovné

$${}^Z S_\alpha = \begin{cases} 0 & S \leq \alpha \\ S - \alpha & S > \alpha \end{cases} \quad (1.34)$$

$${}^Z X_\alpha = \begin{cases} 0 & S \leq \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)X & S > \alpha \end{cases} \quad (1.35)$$

$${}^Z P_\alpha = \begin{cases} 0 & S \leq \alpha \\ \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)P & S > \alpha \end{cases} \quad (1.36)$$

Obrázok 7 Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu pre zaistovateľa



Zdroj: vlastné spracovanie

a pre poisťovňu, na základe delenia poistnej sumy

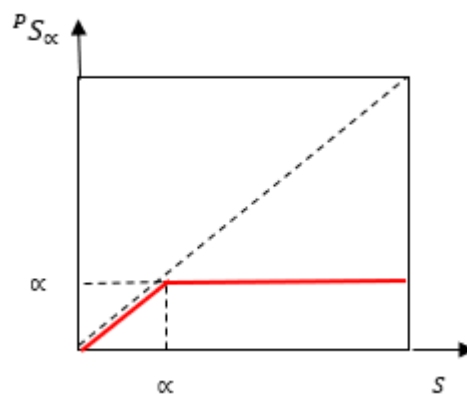
$${}^P S_\alpha = \begin{cases} S & S \leq \alpha \\ \alpha & S > \alpha \end{cases} \quad (1.37)$$

Pre individuálnu škodu a poistné platí

$${}^P X_\alpha = \begin{cases} X & S \leq \alpha \\ \left(\frac{\alpha}{S}\right) X & S > \alpha \end{cases} \quad (1.38)$$

$${}^P P_\alpha = \begin{cases} P & S \leq \alpha \\ \left(\frac{\alpha}{S}\right) P & S > \alpha \end{cases} \quad (1.39)$$

Obrázok 8 Excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu pre poisťovateľa



Zdroj: vlastné spracovanie

„Na rozdiel od kvótového zaistenia môže byť pomer pre delenia rizika pri surplus zaistení pre každú poistnú zmluvu iný. Tento typ zaistenia je administratívne zložitejší, ale je to dobrý nástroj pre homogenizáciu poistného kmeňa prvopoisťovateľa. Poistné zmluvy

s nízkymi poistnými sumami kryje z veľkej časti alebo úplne poisťovateľ, pričom poistné zmluvy s vysokými sumami sú z väčšej časti kryté zaistovateľom.“⁵

Skladanie kvótového zaistenia a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu

V predchádzajúcich častiach sme priblížili, ako sa delí poistné plnenie medzi poisťovateľom a zaistovateľom pri kvótovom zaistení a excedentnom zaistení vzhľadom na poistnú sumu. Poisťovňa sa však môže rozhodnúť, že prebraté záväzky od svojich klientom poistí nie len jedným spôsobom, ale viacerými, čím prenesie väčšiu časť záväzkov na zaistovňu. V našej práci si ukážeme, ako ovplyvní poisťovňa vyplatenie záväzkov voči klientov pri nastáti poistnej udalosti, ak sa rozhodne využiť kvótové a surplus zaistenie.

Poisťovňa sa ako prvé rozhodla zaistiť svoje portfólio kvótovým zaistením a následne surplus zaistenie, ktoré aplikuje na riziká po kvótovom poistení.

$${}^P S_{q,\alpha} = \begin{cases} qS & S \leq \alpha \\ q\alpha & S > \alpha \end{cases} \quad {}^P X_\alpha = \begin{cases} qX & S \leq \alpha \\ q\frac{\alpha}{S}X & S > \alpha \end{cases} \quad (1.40)$$

V prípade kvótového zaistenia ako prvého sa prvý zaistovateľ podieľa na poistnej sume a škode veľkosťou

$${}^{Z_1} S_q = (1 - q)S \quad {}^{Z_1} X_q = (1 - q)X \quad (1.41)$$

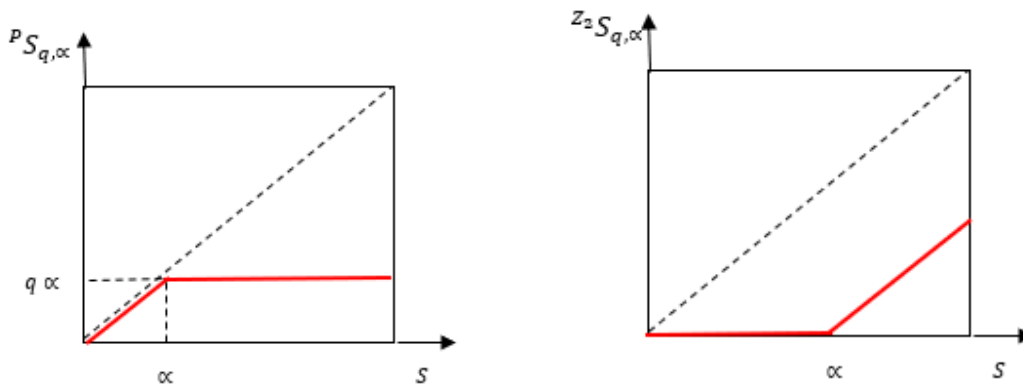
Ak sa poisťovňa rozhodne využiť aj ďalšie zaistenie, a to surplus zaistenie, pre druhého zaistovateľa sú veľkosti poistnej sumy a škody nasledujúce

$${}^{Z_2} S_{q,\alpha} = \begin{cases} 0 & S \leq \alpha \\ q\left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) & S > \alpha \end{cases} \quad (1.42)$$

$${}^{Z_2} X_{q,\alpha} = \begin{cases} 0 & S \leq \alpha \\ q\left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)X & S > \alpha \end{cases}$$

⁵ CIPRA, Tomáš. *Zajištění a přenos rizik v pojištvnictví*. Praha: GRADA Publishing, 2004, 260 s. Finance. ISBN 80-247-0838-8

Obrázok 9 Kombinácia kvótového a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu



Zdroj: vlastné spracovanie

Danú teóriu využijeme pri hľadaní optimálnych zaist'ovacích ochrán, ktorú opíšeme v nasledujúcej kapitole. To isté platí aj pre neproporcionálne zaistenie.

1.5.2 Neproporcionálne zaistenie

Už názov napovedá, že neproporcionálne zaistenie zahŕňa všetky zmluvy, ktoré svojou štruktúrou nespĺňajú vlastnosti podobnosti medzi sadzbami postúpeného poistného a postúpených nárokov. Zodpovednosť za prevzaté zmluvy od klientov si poisťovňa a zaist'ovňa rozdelia medzi sebou na základe vzniku a výšky škody. Pri neproporcionálnom poistení sa zaist'ovateľ podieľa na krytí výšky škody iba v prípade, ak škoda presiahne vopred stanovenú prioritu. Záväzky si medzi sebou poisťovateľ a zaist'ovateľ rozdelia nie na základe výšky poistnej sumy, ako pri proporcionálnom zaistení, ale na základe výšky škody. Hlavným rozdielom medzi proporcionálnym a neproporcionálnym zaistením je to, že pri proporcionálnom zaistení sa zaist'ovateľ podieľa na každej jednej škode, no pri neproporcionálnom zaistení zaist'ovateľ kryje škodu, ktorá je vyššia ako vopred dohodnutá priorita, resp. po dohodnutý limit.

Ďalším významným rozdielom je, že výška zaist'ného je ovplyvnená škodovým priebehom a pravdepodobnosťou vzniku škody a nie percentom z prijatého poistného.

Poisťovňa sa môže rozhodnúť rozdeliť zaistenú ochranu do viacerých vrstiev, ktoré predstavujú maximálnu časť vzniknutej škody, ktorú hradí zaist'ovateľ. Pri neproporcionálnom zaistení dochádza k významnej redukcii fluktuácií všetkých hodnôt, ktoré zostali poisťovateľovi ako jeho vlastný vrub. Najznámejšie neproporcionálne zaistenia sú:

- zaistenie škodového nadmerku jednotlivých rizík (WXL/R – Working Excess of Loss per Risk)

- zaistenie škodového nadmerku jednotlivých udalostí (WXL/E – Working Excess of Loss per Event)
- zaistenie škodového nadmerku katastrofických udalostí (CatXL – Catastrophe Excess of Loss)
- zaistenie časového nadmerku (SL – Stop Loss)

Zaistenie škodového nadmerku jednotlivých rizík (WXL/R)

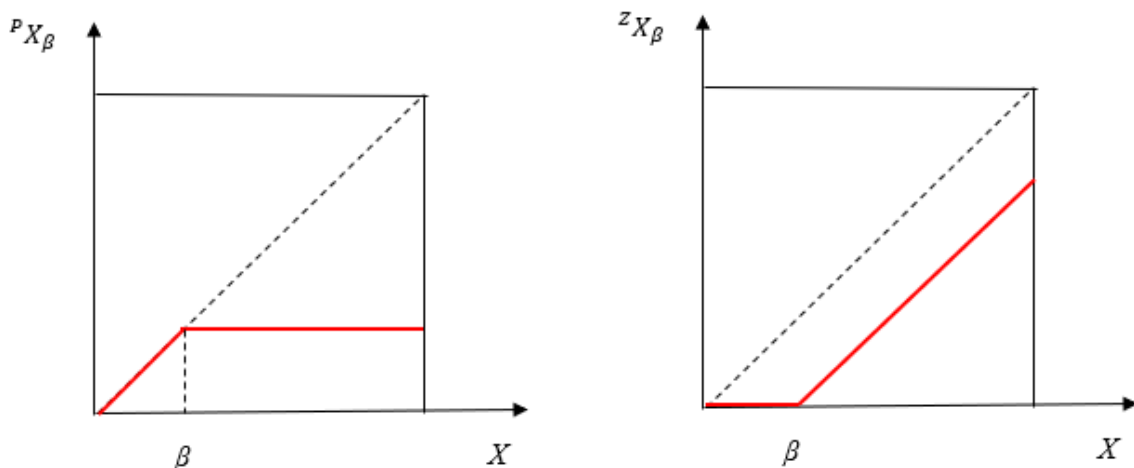
Zaistenie škodového nadmerku jednotlivých rizík môžeme označiť aj ako excedentné zaistenie vzhľadom na výšku škody s prioritou β vyhovuje pre portfólia tých rizík, ktoré môžu svojou vysokou škodou ohroziť poisťovňu. V prípade nastátia udalosti, škodu hradí poisťovňa, ak je táto škoda do výšky priority β . Zaist'ovni do tejto výšky nevznikajú žiadne náklady. Ak poistná škoda je vyššia ako priorita β , poisťovňa sa na úhrade podieľa veľkosťou β a zaist'ovateľ $X - \beta$, kde X predstavuje veľkosť poistnej škody.

Pre poisťovňu je neproporcionálne zaistenie nákladnejšie ako proporcionálne. Celkové poistné plnenie zaistenia pre poisťovateľa a zaist'ovateľa môžeme vyjadriť:

$$P_{X\beta} = \begin{cases} X & X \leq \beta \\ \beta & X > \beta \end{cases} \quad (1.43)$$

$$Z_{X\beta} = \begin{cases} 0 & X \leq \beta \\ X - \beta & X > \beta \end{cases} \quad (1.44)$$

Obrázok 10 Zaistenie škodového nadmerku jednotlivých rizík



Zdroj: vlastné spracovanie

pričom vieme, že pre celkové poistné plnenie platí:

$$X_{\beta} = {}^P X_{\beta} + {}^Z X_{\beta} \quad (1.45)$$

1.5.3 Zaistenie katastrofických škôd

Ak by poisťovne mohli slobodne zvyšovať svoje poistné bez toho, aby potrebovali schválenie od štátnych alebo nadnárodných regulačných orgánov, ich potreba zaistenia katastrof by sa výrazne znížila. Poisťovne by jednoducho zvýšili poistné na kompenzáciu zvýšeného rizika straty, najmä z dôsledku udalosti. V praxi sa však poistné nemôže zvýšiť podľa vlastnej vôle, čo znamená, že zaistenie katastrof zostáva základným nástrojom riadenia rizika. Poisťovatelia vnímajú katastrofu ako udalosť, ktorá môže spôsobiť finančné ťažkosti – nejednoznačnosť na konci rozdelenia strát znamená, že zaistenie je potrebné, aby sa znížila pravdepodobnosť finančnej tiesne, pretože akýkoľvek dôkaz finančnej slabosti môže viesť k okamžitej strate podnikanie. Štúdie naznačujú, že poisťovne ktoré čelia väčšej pravdepodobnosti finančných ťažkostí sú ochotnejšie zaplatiť za katastrofické zaistenie.

Zaisťovatelia, ktorý katastrofu vnímajú ako jednu veľkú udalosť, ktorá spôsobí stratu pre jedného alebo viacerých poisťovateľov alebo mnoho menších udalostí, ktoré spôsobujú straty veľkému počtu poisťovateľov, sú ochotní poskytnúť poistné krytie na ochranu poisťovní pred finančnými problémami, ak môžu získať spravodlivú návratnosť.

Poisťovňa môže pomocou rôznych metód určiť optimálnu mieru zadržania a postúpenia katastrofy. Toto rozhodnutie sa stáva obzvlášť zložitým, keďže poistné za katastrofické škody je vysoké. Poisťovňa môže vytvoriť významnú podnikovú hodnotu tým, že si namiesto zachovania rizík ponechá riziká, ale zvyšuje pravdepodobnosť, že sa stretne s finančnými problémami.

Zaistenie škodového nadmerku katastrofickej udalosti (CatXL)

Podstata zaistenia škodového nadmerku katastrofickej udalosti spočíva v tom, že chráni poisťovateľa, ak nastane kumulácia škôd. Môže to byť:

- jedna, príp. rovnaká škodová udalosť, ktorá nemá charakter katastrofy (napr. cestovné alebo úrazové poistenie)
- jedna katastrofická udalosť (napr. zemetrasenie)

V prípade, že nastane niekoľko, prípadne veľké množstvo poistných udalostí na poistné zmluvy z portfólia, ktoré bolo zaistené, škodu vyššiu ako prioritá poisťovateľa β hradí zaisťovateľ. Vzhľadom na to, že neproporcionálne zaistenie je nákladnejšie, by si mala poisťovňa nastaviť vhodný limit L , ktorý predstavuje maximálnu výšku poistnej škody, do ktorej sa bude aj zaisťovňa podieľať na výplate.

Poistné plnenie poisťovateľa a zaistovateľa vieme vyjadriť ako:

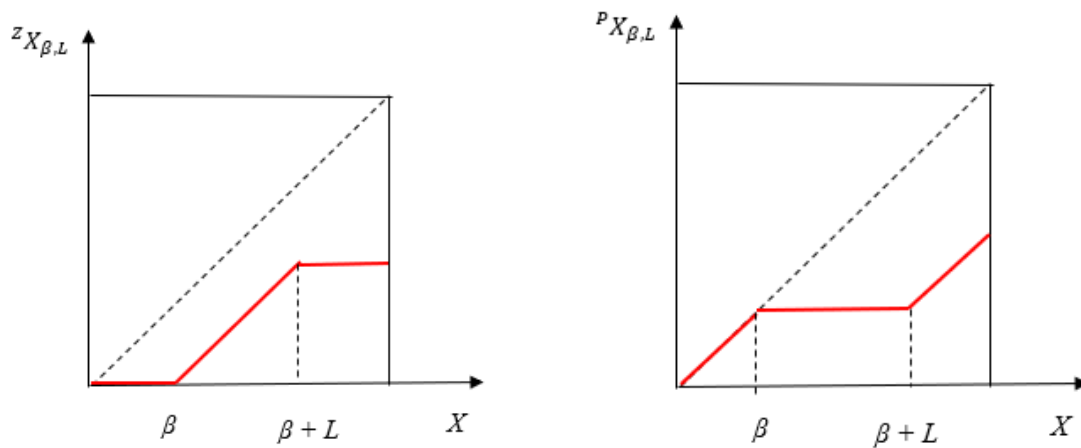
$$z_{X_{\beta,L}} = \begin{cases} 0 & X \leq \beta \\ X - \beta & \beta < X \leq \beta + L \\ L & X > \beta + L \end{cases} \quad (1.46)$$

$$p_{X_{\beta,L}} = \begin{cases} X & X \leq \beta \\ \beta & \beta < X \leq \beta + L \\ X - L & X > \beta + L \end{cases} \quad (1.47)$$

pričom vieme, že pre celkové poistné plnenie platí:

$$X_{\beta,L} = p_{X_{\beta,L}} + z_{X_{\beta,L}} \quad (1.48)$$

Obrázok 11 Zaistenie škodového nadmerku katastrofickej udalosti s limitom



Zdroj: vlastné spracovanie

2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

V predchádzajúcej časti diplomovej práce sme sa snažili priblížiť nadmerné škody a proces zaistenia z matematického hľadiska v takej hĺbke a forme, ktorá po rozšírení a doplnení o konkrétne postupy môže byť dostatočná na realizáciu stanovenia optimálneho zaisťovacieho programu konkrétneho portfólia poistných zmlúv. V súvislosti s cieľene pripraveným aparátom, teda v súvislosti s uvedenými skutočnosťami v predchádzajúcej časti práce, možno ciele diplomovej práce deklarovať nasledovne:

- Priblížiť optimalizáciu zaisťovacieho procesu
- Definovať nástroje optimalizácie
- Charakterizovať dostupné základné optimalizačné kritériá a ich vzájomné vzťahy
- Priblížiť stratégiu maximalizácie zisku poisťovne
- V aplikačnej časti realizovať vybrané kritériá aj v súvislosti s nadmernými škodami
- Dosiahnuté výsledky zhrnúť a diskutovať

Hlavným cieľom diplomovej práce je stanovenie optimálneho zaistenia a nastavenie hodnôt parametrov, ktoré sú súčasťou reťazca zaisťovacích ochrán. Využijeme optimalizačné kritériá, ktoré sú založené na mierach rizika, rozptyle a očakávanom zisku.

V diplomovej práci použijeme rôzne štatistické a matematické metódy, taktiež aj teórie portfólia a rozhodovania. Na skoncipovanie zámerov využijeme aj nasledujúce metódy:

- Pozorovanie, ktoré patrí medzi najuniverzálnejšie a najpoužívanejšie metódy. Danú metódu čiastočne aplikujeme pri rozdelení výšky a počtu škôd.
- Analýza, ktorá je charakteristická postupným zberom informácií, ich triedením na časti a následným hodnotením, resp. interpretáciou. Analýzu využijeme v každej časti diplomovej práce.
- Syntéza, ktorá je úzko spätá s metódou analýzy. Syntéza nám napomáha skúmať jav ako celok, nakoľko jeho hlavným cieľom je zhrnúť časti problému do celku. V práci ju využijeme napr. pri optimalizácii zaistných ochrán.
- Komparácia, ktorú využijeme pri porovnaní dosiahnutých výsledkov.

V našej práci je veľmi dôležitá metodika založená na hľadaní viazaných extrémov, prostredníctvom ktorých vieme podľa vybraných kritérií určiť optimálne zaisťovacie ochrany.

„Predpokladajme, že funkcia $f: Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je definovaná na neprázdnej množine S , ktorá je podmnožinou n rozmerného Euklidovského priestoru“⁶

⁶ FECENKO, Jozef a Katarína SAKÁLOVÁ. *Matematika 2. 2. preprac. vyd.* Bratislava: IURA EDITION, 2004, 272 s. Ekonómia. ISBN 80-89047-73-4

$$f(X), \text{ kde } X \in S \subset R^n \quad (2.1)$$

Funkcia $f(X)$ nadobúda lokálne minimum, resp. maximum v bode $A \in S$, ak existuje také neúplné okolie $\tilde{O}_\delta(A)$ bodu A , že pre každý bod $x \in \tilde{O}_\delta(A) \cap D(f)$ platí:

$$f(X) \geq f(A) \text{ resp. } f(X) \leq f(A) \quad (2.2)$$

Ak uvedené podmienky platia, tak bod A je lokálne minimum, resp. maximum. Predpokladajme, že funkcia $f(X)$ je dvakrát diferencovateľná, potom môžeme sformulovať podmienky existencie lokálneho extrému takto:

Aby bola splnená nutná podmienka, funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ musí byť definovaná v nejakom okolí bode A a musí mať v bode, v ktorom je definovaná lokálny extrém a musí byť v tomto bode diferencovateľná. Potom $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0$, pre všetky také $i=1, 2, 3, \dots, n$, pre ktoré parciálna derivácia existuje.

Bod $A \in D(f)$ nazývame stacionárnym bodom funkcie f , v ktorom má funkcia nulové všetky derivácie prvého rádu.

Overovanie postačujúcej podmienky existencie lokálneho extrému je založené na kvadratickej forme, resp. výpočte determinantov. Z nich vieme stanoviť, či daná funkcia má alebo nemá v stacionárnom bode extrém a keď má, či je to lokálne minimum, alebo maximum.

Predpokladajme, že funkcia $f(X) = f(\bar{x})$ pri ohraničeníach $g_j(\bar{x}) = 0$, „kde funkcie

$$f: R^n \rightarrow R,$$

$$g_j: R^n \rightarrow R, \text{ a } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

sú dvakrát diferencovateľné a pre počet premenných resp. počet väzieb platí $m < n$.“⁷

„Existujú 3 metódy na určovanie viazaných lokálnych extrémov:

- a) dosadzovacia metóda,
- b) metóda Lagrangeových multiplikátorov,
- c) kombinovaná metóda.“⁸

Ak na základe podmienky $g_j(\bar{x}) = 0, j = 1, 2, 3, \dots, m$ vieme jednoznačne vyjadriť niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie $f(\bar{x})$ a hľadáme lokálne extrémum funkcie jednej premennej (dosadzovacia metóda).

„Ak z väzby $g_j(\bar{x}) = 0, j = 1, 2, 3, \dots, m$, nie je možné jednoznačne vyjadriť žiadnu premennú, zostrojíme tzv. Lagrangeovu funkciu, ktorá je definovaná nasledovne:

⁷ HORÁKOVÁ, Galina, Michal PÁLEŠ a František SLANINKA. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015, 420 s. [21,07 AH]. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-273-5

⁸ FECENKO, Jozef a Katarína SAKÁLOVÁ. *Matematika 2*. 2. preprac. vyd. Bratislava: IURA EDITION, 2004, 272 s. Ekonómia. ISBN 80-89047-73-4

$$L(\bar{x}, \bar{\gamma}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot g_j(\bar{x}), \quad (2.3)$$

kde γ_j pre $j = 1, 2, 3, \dots, m$ sú tzv. Lagrangeove multiplikátory⁹, prostredníctvom ktorých hľadáme extrém funkcie $L(\bar{x}, \bar{\gamma})$, pretože lokálny extrém funkcie L je viazaným extrémom funkcie $f(\bar{x})$.

Pomocou vyššie opísanej nutnej podmienky, čo znamená, že prvá derivácia by sa mala rovnať nule, vieme určiť stacionárne body a multiplikátor γ Lagrangeovej funkcie vypočítaním sústav rovníc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ g_j(\bar{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Prostredníctvom postačujúcej podmienky môžeme overiť, či nadobúda funkcia $L(\bar{x}, \bar{\gamma})$ v stacionárnom bode maximum alebo minimum.

Ak pre funkciu $L(\bar{x}, \bar{\gamma})$ platí, že má v stacionárnom bode lokálny extrém a je splnená podmienka väzby $g_j(\bar{x}) = 0$, tak funkcia $f(\bar{x})$ má v tom bode aj viazaný lokálny extrém.

V praktickej časti opíšeme optimalizačné kritériá, pri ktorých využijeme skúmanie a hľadanie ostrých lokálnych extrémov na určenie optimálnych parametrov.

⁹ HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: Teória rizika v poistení II. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. ISBN 978- 80 -225 2549-7

3 Výsledky práce a diskusia

Nadobudnuté znalosti, ktoré sme opísali v teoretickej časti teraz využijeme na znázornenie ilustračných príkladov a pri riešení nasledujúcich situácií.

Predpokladajme, že budeme pracovať s portfóliom poistných zmlúv, ktoré budú charakterizované počtom a výškou škôd. Náhodná premenná výšky škôd je charakterizovaná Poissonovým rozdelením, náhodná premenná individuálnej škody sa riadi Gamma rozdelením. Ďalej budeme pracovať s rizikovou prirážkou θ a taktiež s rizikovými prirážkami vzhľadom na kvótové zaistenie ξ_q a surplus zaistenie ξ_α .

Nadmerná škoda, ktorú budeme analyzovať je opísaná Fréchetovým rozdelením. Pravdepodobnosť vzniku nadmernej škody označíme q . Analýza takéhoto portfólia bude pozostávať z viacerých čiastkových výpočtov, ktoré budeme komentovať.

Praktická časť pozostáva z viacerých čiastkových výpočtov, ktorých výsledky následne porovnáme a opíšeme.

- Ako prvé uvedieme, akú stratu môže poisťovne očakávať, ak sa rozhodne nevyužiť možnosť zaistenia daného portfólia rizík.
- prostredníctvom kritéria minimalizácie hodnoty VaR a kritéria maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl stanovíme optimálne parametre zaistovacieho reťazca kvóta a surplus.
- S využitím neproporcionálneho zaistenia stanovíme optimálny limit zaistovateľa.

Nech náhodná premenná výšky škôd má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda = 250$, náhodná premenná počtu škôd sa riadi Gamma rozdelením s parametrami $m = 7$ a $\delta = 3$. Ďalej uvažujme o rizikovej prirážke $\theta = 0,1$ a o rizikových prirážkach vzhľadom na kvótové zaistenie $\xi_q = 0,16$ a surplus zaistenie $\xi_\alpha = 0,2$.

Prostredníctvom charakteristík jednotlivých rozdelení vypočítame ich strednú hodnotu a disperziu, ktoré ďalej využijeme na výpočet strednej hodnoty a disperzie pre náhodnú premennú celkovej škody S^{kol} , ktorá má zložené rozdelenie.

$$E(X) = \frac{m}{\delta} = \frac{7}{3}$$

$$D(X) = \frac{m}{\delta^2} = \frac{7}{9}$$

$$E(N) = \lambda = D(N) = 250$$

Na základe vzťahov (1.22) a (1.26) vypočítame očakávanú škodu a disperziu poisťovateľa

$$E(S^{kol}) = E(N)E(X) = 583,3333$$
$$D(S^{kol}) = E(N)D(X) + E^2(X)D(N) = 1555,556$$

Očakávaná škoda poisťovateľa je 583,3333 p.j. a disperzia poisťovateľa 1555,556 p.j. Zatiaľ uvažujeme iba o možnosti, že poisťovateľ sa rozhodne nevyužiť zaistenie a vzhľadom na veľkosť celkovej škody a počtu škôd sa bude podieľať na úhrade sám.

3.1 Optimálne zaistenie bežných škôd

Medzi hlavné ciele riadenia rizika patrí ocenenie, ale aj zlepšenie výkonu finančných organizácií kvôli tomu, že riziko, ktoré poisťovňa prevezme napomáha k dosiahnutiu zisku. Pre poisťovňu je hlavným zdrojom zisku poisťné. Vďaka tomu, pri uzatvorení zmluvy so zaistovňou majú tieto dve inštitúcie protichodné záujmy. Každá jedna má záujem o minimalizovanie rizika pri dosiahnutí čo najvyššieho príjmu z poisťného. „Na druhej strane, keďže obidve spoločnosti majú spoločné ciele v riadení rizika, ktoré zdieľajú, poisťovateľ a zaistovateľ majú spoločné záujmy a môžeme ich považovať za partnerov. Dôležitá podmienka pre dosiahnutie solventnosti a finančnej stability spočíva v minimalizovaní maximálnej straty, ktorá môže nastať s určitou pravdepodobnosťou.“¹⁰

Tým, že sa poisťovňa rozhodne zaistiť riziká, vznikajú poisťovní náklady na zaistenie, čo v konečnom dôsledku znižuje zisk poisťovne. Preto je pre poisťovňu dôležité, aby určila optimálne zaistovacie parametre, ktoré môžeme zistiť použitím jedného z optimalizačných kritérií. V našej práci použijeme niektoré kritériá a to kritérium minimalizácie hodnoty *VaR* a kritérium maximalizácie zisku poisťovateľa s väzbou na konštantný rozptyl.

3.1.1 Kritérium minimalizácie hodnoty *VaR*

Naša úloha spočíva v stanovení a analyzovaní optimálneho zaistovacieho reťazca, ktorý uplatní kvótové zaistenie a potom excedent vzhľadom na poisťnú sumu prostredníctvom miery rizika *VaR*. Pri kvótovom a surplus zaistení budeme kvótu q a vlastný vrub α považovať za optimálne, ak budú minimalizovať mieru rizika *VaR* a aj náklady, ktoré vznikajú na základe zaistenia.

¹⁰ Zhi Li, Optimal Reinsurance Retentions under Ruin-Related Optimization Criteria, dizertačná práca, 2008

S určitou vieme povedať, že celkové náklady poisťovateľa ${}^P_C X_{q,\alpha}$ spočívajú v samotných nákladoch poisťovne ${}^P X$ a nákladoch, ktoré vyplývajú z platenia zaistného $\Pi(ZX)$.

$${}^P_C X_{q,\alpha} = {}^P X_{q,\alpha} + \Pi(ZX_{q,\alpha}) \quad (3.1)$$

Vďaka invariantnosti poisťného vieme vyjadriť maximálnu možnú škodu $VaR_p({}^P_C X)$ vyjadriť ako

$$VaR_p({}^P_C X_{q,\alpha}) = VaR_p({}^P X_{q,\alpha}) + \Pi(ZX_{q,\alpha}) \quad (3.2)$$

Dané vzťahy využijeme na aplikáciu ilustračného príkladu. Náhodná premenná S^{kol} , ktorá predstavuje celkovú škodu daného portfólia má distribučnú funkciu

$$F_{S^{kol}}(x) = 1 - e^{-3x} \sum_{i=0}^{7n-1} \frac{x^i \cdot 3^i}{i!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-250} \cdot 250^n}{n!}$$

Na základe vzťahu 1.27 vieme, že maximálnu možnú škodu vieme vyjadriť

$$VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol}) = x_{0,99}$$

$$F_{S_{q,\alpha}^{kol}}(x_{0,99}) = 0,99 \Rightarrow F_{S_{q,\alpha}^{kol}}(VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol})) = 0,99$$

$$1 - e^{-3VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol})} \sum_{i=0}^{7n-1} \frac{(VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol}))^i \cdot 3^i}{i!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-250} \cdot 250^n}{n!} = 0,99$$

Využitím softvérov na zjednodušenie a výpočet maximálnej možnej škody dostaneme

$$VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol}) = 675,0857$$

S pravdepodobnosťou 0,99 bude maximálna možná škoda vo výške 675,0857 p.j.

Pri kvótovom a následne surplus zaistení vieme vyjadriť $VaR_{0,99}({}^P X)$ následovne

$$VaR_{0,99}({}^P X_{q,\alpha}) = q \frac{\alpha}{S} VaR_{0,99}(S_{q,\alpha}^{kol}) \quad (3.3)$$

a náklady na zaistenie kalkulované pomocou princípu disperzie

$$\begin{aligned} \Pi(ZX_{q,\alpha}) &= (1-q)E(S^{kol}) - (1-q)^2 D(S^{kol}) \xi_q - q \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) \\ &\quad - q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \xi_\alpha - q \frac{\alpha}{S} E(S^{kol}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teda

$$\begin{aligned} VaR_{0,99}({}^P_C S_{q,\alpha}^{kol}) &= \\ &= q \frac{\alpha}{S} VaR_{0,99}(S^{kol}) + (1-q)E(S^{kol}) - (1-q)^2 D(S^{kol}) \xi_q \\ &\quad - q \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) - q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \xi_\alpha - q \frac{\alpha}{S} E(S^{kol}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na to, aby sme našli optimálne q a α budeme pre $VaR_{0,99}(P_C S_{q,\alpha}^{kol})$ hľadať extrém funkcie dvoch premenných. Na derivovanie funkcie $VaR_{0,99}(P_C S_{q,\alpha}^{kol})$ podľa premenných q a α a následne vyjadrenie optimálnych hodnôt využijeme program Derive6.

Minimum danej funkcie je v stacionárnom bode $q^* = 0,8051263$ a $\alpha^* = 771,0620628$ (viď Príloha 1). Teda q^* a α^* predstavujú optimálne zaistenie pri využití metódy minimalizácie hodnoty VaR .

Tabuľka 1 Výpočet celkového zisku a disperzie zisku pre kvótové a excedentné zaistenie vzhľadom na poistnú sumu využitím kritéria minimalizácie hodnoty VaR

q	α	E(Z)	D(Z)	$EC_{P_{S_{q,\alpha}}}$
0,726162	695,43201	121,97429	396,69974	46,33462
0,75125	732,97585	127,63571	471,66519	50,52328
0,8051263	771,0620628	135,5338	599,5051	56,95997
0,816792	783,27654	137,45278	636,70567	58,7008
0,842687	839,24873	143,68725	778,03566	64,8895
0,871292	880,67245	148,06954	915,8868	70,4037

Zdroj: vlastné spracovanie

Podľa Tabuľky 1 môžeme vidieť, že čím väčšia časť portfólia zostáva nezaistená, tým vyšší bude očakávaný zisk, ale aj ekonomický kapitál, ktorý poisťovňa potrebuje. Poisťovňa musí určiť optimálne zaistenie tak, aby mala čo najvyšší očakávaný zisk, ale aby mala čo najnižšie náklady pri poistnom plnení.

3.1.2 Kritérium maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl

Kritérium je založené na stanovení viazaných extrémov. Na určenie viazaného maxima, resp. minima funkcie $f(\bar{x})$ pri ohraničeniach $g_j(\bar{x}) = 0$ využijeme metódu Lagrangeových multiplikátorov. Funkcie sú diferencované dvakrát. Skonstruovaním Lagrangeovej funkcie

$$L(\bar{x}, \bar{\gamma}) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot g_j(\bar{x}) \quad (3.6)$$

„kde γ_j pre $j = 1, 2, \dots, m$ sú Lagrangeove multiplikátory a hľadáme extrém funkcie $L(\bar{x}, \bar{\gamma})$, pretože ostrý lokálny extrém funkcie L je viazaným extrémom funkcie f .“¹¹

¹¹ HORÁKOVÁ, Galina, Michal PÁLEŠ a František SLANINKA. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015, 420 s. [21,07 AH]. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-273-5.

Pomocou nutnej podmienky vieme určiť stacionárne body, následne využitím postačujúcej podmienky zistíme, či v stacionárnom bode funkcie L nadobúda maximum, resp. minimum.

Na určenie optimálnych zaistných ochrán budeme pracovať s kolektívnym modelom rizika. Pri skladaní kvótového zaistenia a excedentného zaistenia vzhľadom na poistnú sumu dostaneme **očakávanú škodu poist'ovateľa**

$$E\left({}^P S^{kol}_{q,\alpha}\right) = q \frac{\alpha}{S} E(S^{kol}) \quad (3.7)$$

Na určenie **disperzie** využijeme vzťah pre podmienené náhodné premenné, ktoré môžeme upraviť nasledovne

$$D\left({}^P S^{kol}_{q,\alpha}\right) = \left(q \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \quad (3.8)$$

pričom vieme, že disperzia celkovej škody je rovná disperzií náhodnej premennej, ktorá predstavuje zisk poist'ovateľa

$$D(Z) = D\left({}^P S^{kol}_{q,\alpha}\right) \quad (3.9)$$

Celkové náklady na kvótové zaistenie vyjadrené princípom disperzie vyjadríme ako očakávanú škodu, ktorú by mala zaist'ovňa kryť v prípade nastátia udalosti

$$E\left({}^Z S^{kol}_q\right) = (1 - q)E(S^{kol}) + (1 - q)^2 D(S^{kol}) \xi_q \quad (3.10)$$

V prípade **celkových nákladov pre druhého zaist'ovateľa**, ktorý kryje škody po kvótovom zaistení surplus zaistením

$$E\left({}^Z S^{kol}_{q,\alpha}\right) = q \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) + q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \quad (3.11)$$

Celkový zisk poist'ovne v prípade, ak sa rozhodne využiť kombináciu kvótového a surplus zaistenia v tomto poradí je

$$\begin{aligned} E(Z) = & E(S^{kol}) + D(S^{kol})\theta - (1 - q)E(S^{kol}) - (1 - q)^2 D(S^{kol}) \xi_q \\ & - q \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol}) - q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \xi_\alpha - q \frac{\alpha}{S} E(S^{kol}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nakoľko je aj poist'ovňa podnikateľský subjekt, jej cieľom je dosiahnuť čo najvyšší zisk. Na to, aby dosahovala čo najvyšší zisk mali by byť nastavené optimálne zaist'ovacie parametre q , α . Optimálne parametre môžeme zistiť doplnením do Lagrangeovej funkcie, pričom platí väzba $D(Z) = D({}^P S^{kol}_{q,\alpha})$. Potom Lagrangeova funkcia vyzerá nasledovne

$$L(q, \alpha, \gamma) = RP - (1 - q)E(S^{kol}) - (1 - q)^2 D(S^{kol}) \xi_q - q \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) E(S^{kol})$$

$$\begin{aligned}
& -q^2 \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 D(S^{kol}) \xi_{\alpha} - q \frac{\alpha}{S} E(S^{kol}) \\
& -\gamma \left[\left(q \frac{\alpha}{S} \right)^2 D(S^{kol}) - k^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Pre vyčíslenie optimálnych parametrov uvedeného zaistenia je potrebné určiť k^2 , ktoré predstavuje fixný rozptyl. Najprv položíme k^2 rovnú $D(Z)$. Disperziu vysvietenú v Tabuľke 1 využijeme na

$$D(Z) = \left(\frac{q \alpha}{S} \right)^2 D(S^{kol}) = k^2 \tag{3.14}$$

Následne $k^2 = 599,50507 = 24,48479^2$. Pri aplikácii daných poznatkov na ilustračný príklad budeme postupovať obdobne, ako pri predchádzajúcej metóde.

Využitím kritéria maximalizácie očakávaného zisku pri fixnom rozptyle zaist'ovacie ochrany sú vo veľkosti $q^* = 0,7893348$, $\alpha^* = 786,488373$ a $\gamma = -0,0542949$.

Tabuľke 2 uvádza, ako sa budú zmenou fixného rozptylu meniť ostatné veličiny. Pre výpočet celkového zisku $E(Z)$ využijeme vzťah 3.12, pre $D(Z)$ vzťah 3.14 a ekonomický kapitál $EC_{P_{S_{q,\alpha}}}$ potrebný na krytie rizika pre zvolený zaist'ovací reťazec nasledovne

$$EC_{P_{S_{q,\alpha}}} = q \frac{\alpha}{S} [VaR_{0,99}(S^{kol}) - E(S^{kol})] \tag{3.15}$$

Tabuľka 2 Výpočet celkového zisku a disperzie zisku pre kvótové a excedentné zaistenie využitím kritéria maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl

k	q	α	γ	$E(Z)$	$D(Z)$	$EC_{P_{S_{q,\alpha}}}$
20	0,726162	698,3182	-0,086402	121,9613	399,9993	46,52692
22,5	0,761377	749,27251	-0,066926	130,046	506,2495	52,3428
24,48479	0,789335	786,48837	-0,054295	135,5338	599,5051	56,9601
25	0,796592	795,72178	-0,051344	137,0196	624,9998	58,15869
28	0,83885	846,31307	-0,03632	143,9213	784,0003	65,13775
29,89	0,86547	875,64896	-0,0284	147,4476	893,4076	69,53436

Zdroj: vlastné spracovanie

Na základe výsledkov v tabuľke môžeme konštatovať, že ak sa poisťovňa rozhodne zvýšiť fixný rozptyl, ktorý je ochotný akceptovať, zvýši sa aj podiel poisťovateľa pri kvótovom aj surplus zaistení. Teda klesá podiel zaist'ovateľa na kvótovom zaistení a taktiež sa zvyšuje vlastný vrub poisťovateľa. Čím sa poisťovňa podieľa väčšou časťou na celkovej škode, tým má

nižšie náklady na zaistenie a teda aj očakávaný zisk poisťovne je vyšší. Zvyšujúcim fixným rozptylom sa navyšuje aj ekonomický kapitál, ktorý poisťovňa musí zabezpečiť na krytie rizika.

3.1.3 Porovnanie výpočtu optimálnych zaistných ochrán

Naším cieľom bolo stanoviť optimálny zaistovací reťazec na základe kalkulácií poistného prostredníctvom princípu disperzie.

Ako prvé sme si vybrali optimalizačné kritérium minimalizácií hodnoty VaR . V podmienkach kolektívneho modelu rizika považujeme kvótu a vlastný vrub za optimálne, ak minimalizujú príslušnú hodnotu VaR . Optimálne zaistovacie parametre, ktoré zodpovedajú danému kritériu sú $q^* = 0,8051263$ a $\alpha^* = 771,0620628$.

Následne sme sa rozhodli využiť kritérium maximalizácie zisku s väzbou na konštantný rozptyl. Toto kritérium je založené na stanovení viazaných extrémov, ktorým je ostrý lokálny extrém. Na základe nutnej podmienky sme určili stacionárne body funkcie, ktoré sme následne prostredníctvom postačujúcej podmienky overili, či v danom stacionárnom bode funkcia nadobúda minimum. Hodnoty, ktoré vyhovujú daným podmienkam a maximalizujú očakávaný zisk sú $q^* = 0,7893348$, $\alpha^* = 786,488373$.

Vidíme, že jednotlivé zaistovacie ochrany sa rôznymi výpočtami môžu mierne líšiť, čo je zapríčinené zaokrúhľovaním. Pri veľkom množstve zmlúv, ktoré patria do zaisteného portfólia môže mať veľký vplyv na poistné plnenie poisťovne, ako aj zaistovne. Ak sa rozhodne poisťovňa, že by chcela, aby jej očakávaný zisk bol vyšší, zníži sa jej bezpečnosť a tým pádom aj vlastný vrub bude vyšší. Ak nastane situácia, že sa zvýši vlastný vrub, zvýši sa aj kvóta.

3.2 Tvorba modelu s optimálnym zaistením nadmerných škôd

Pri nadmerných, resp. katastrofických škodách budeme uvažovať o zaistení škodového nadmerku katastrofickej udalosti (CatXL). Z využitím vzťahov (1.46) a (1.47) vyjadríme stredné hodnoty škôd poisťovateľa a zaistovateľa s limitom zaistovateľa L .

Očakávanú škodu poisťovateľa $E(PX_{\beta,L}^{Cat})$ pre zaistenie katastrofických škôd s limitom zaistovateľa môžeme vyjadriť nasledovne

$$\begin{aligned}
 E(PX_{\beta,L}^{Cat}) &= \int_0^{\beta} xf(x)dx + \int_{\beta}^{\beta+L} \beta f(x)dx + \int_{\beta+L}^{\infty} (x-L)f(x)dx = \quad (3.16) \\
 &= \int_0^{\beta} (1-F(x))dx + \beta[F(\beta+L) - F(\beta)] + \int_{\beta+L}^{\infty} (1-F(x))dx - L[1-F(\beta+L)]
 \end{aligned}$$

Očakávaná škoda zaistovateľa $E(ZX)$ pre zaistenie katastrofických škôd s limitom zaistovateľa má tvar

$$\begin{aligned}
 E(ZX_{\beta,L}^{Cat}) &= \int_{\beta}^{\beta+L} xf(x)dx - \beta \int_{\beta}^{\beta+L} f(x)dx + L \int_{\beta+L}^{\infty} f(x)dx = \\
 &= \int_{\beta}^{\beta+L} (1 - F(x))dx - \beta [F(\beta + L) - F(\beta)] + L[1 - F(\beta + L)]
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Vieme, že stredná hodnota celkovej škody je rovná súčtu strednej hodnote škody poisťovateľa a strednej hodnote škody zaistovateľa. Teda musí platiť vzťah:

$$E(X_{\beta,L}^{Cat}) = E(PX_{\beta,L}^{Cat}) + E(ZX_{\beta,L}^{Cat}) \tag{3.18}$$

Na základe vyjadrenia vzťahov 3.16 a 3.17 platí:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\beta} (1 - F(x))dx + \beta[F(\beta + L) - F(\beta)] + \int_{\beta+L}^{\infty} (1 - F(x))dx - L[1 - F(\beta + L)] + \\
 &+ \int_{\beta}^{\beta+L} (1 - F(x))dx - \beta [F(\beta + L) - F(\beta)] + L[1 - F(\beta + L)] = \\
 &= \int_0^{\beta} (1 - F(x))dx + \int_{\beta}^{\beta+L} (1 - F(x))dx + \int_{\beta+L}^{\infty} (1 - F(x))dx
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

a preto stredná hodnota celkovej škody je rovná

$$E(X_{\beta,L}^{Cat}) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx \tag{3.20}$$

Pre udalosť, ktorú môžeme opísať náhodnou premennou X^{Cat} platí, že s ňou môžeme pracovať ako so zloženým alternatívne rozdelením, čo môžeme matematicky zapísať ako

$$X^{Cat} = \begin{cases} C^{Cat} & N = 1 \\ 0 & N = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

teda X^{Cat}

$$X^{Cat} \sim CoA(q; F_{C^{Cat}}(x)) \tag{3.22}$$

Vieme, že pre strednú hodnotu a disperziu počtu škôd alternatívneho rozdelenia platí

$$E(N) = q \quad (3.23)$$

$$D(N) = p q \quad (3.24)$$

Ďalej C^{Cat} predstavuje škody zo zmlúv v prípade katastrofy a q pravdepodobnosť vzniku škody. Predpokladajme, že C^{Cat} vieme vyjadriť buď rozdelením alebo pomerovou časťou, napr. nehnuteľnosti.

Ak zvolíme vyjadrenie pomerovou časťou, môžeme škodu vyjadriť ako

$$C^{Cat} = B \cdot U^{Cat} \quad (3.25)$$

kde B predstavuje hodnotu majetku a U^{Cat} škodový pomer, premenná nadobúda hodnoty z intervalu (0,1).

Preto môžeme premennú X^{Cat} vyjadrenú vzťahom (3.21) vyjadriť vzťahom

$$X^{Cat} = B \cdot Y^{Cat} \quad (3.26)$$

kde

$$Y^{Cat} = \begin{cases} U^{Cat} & N = 1 \\ 0 & N = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

teda opäť pomocou zloženého alternatívneho rozdelenia .

Pre náhodnú premennú definovanú vzťahom (3.26) vieme vyjadriť jednoduchým spôsobom očakávanú katastrofickú škodu a disperziu katastrofickej škody takto:

$$E(X^{Cat}) = E(N) \cdot E(C^{Cat}) = E(N) \cdot B \cdot E(U^{Cat}) = q \cdot B \cdot E(U^{Cat}) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} D(X^{Cat}) &= E(N) \cdot D(C^{Cat}) + D(N) \cdot E^2(C^{Cat}) \\ &= q \cdot B^2 \cdot D(U^{Cat}) + p \cdot q \cdot B^2 \cdot E^2(U^{Cat}) \\ &= B^2 [q \cdot D(U^{Cat}) + p \cdot q \cdot E^2(U^{Cat})] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Využitím odvodených vzťahov (3.16) a (3.17) môžeme vyjadriť potrebné charakteristiky týkajúce sa poisťovateľa aj zaistovateľa v súvislosti s limitom zaistovateľa pre použitie zvoleného optimalizačného kritéria.

Druhou možnosťou je opísať nadmernú škodu rozdelením, postup uvidíme v nasledujúcich ilustračných príkladoch.

Ilustračný príklad

Predpokladajme, že náhodná premenná počtu nadmerných škôd má Fréchetovo rozdelenie $X \sim Fréchet(x, \alpha, \mu, \theta)$, kde platí, že $x > \mu$ a zároveň $\alpha, \theta > 0$. Parametre Fréchetovho rozdelenia sú $\mu = 0$, $\theta = 1$ a $\alpha = 2$. Predpokladajme, že celková škoda poisťovateľa je definovaná zloženým alternatívnym rozdelením, kde pravdepodobnosť nastátia

nadmerných škôd je q . Uvažujme o prirážke na zaistenie ξ_β vo veľkosti 0,3. Odvodíme vzťahy potrebné na výpočet optimálnej priority β za podmienky, že limit L nastavíme vo veľkosti 40.

Distribučná funkcia náhodnej premennej má tvar

$$F_x(x, \alpha, \mu, \theta) = e^{\left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right]} \quad (3.30)$$

Ak dosadíme hodnoty parametrov do distribučnej funkcie dostaneme

$$F_x(x, 2, 0, 1) = e^{[-(x)^{-\alpha}] = e^{[-(x)^{-2}]}$$

Funkciu hustoty môžeme vyjadriť

$$f_x(x, 2, 0, 1) = 2 \cdot (x)^{-3} \cdot e^{-(x)^{-2}}$$

Strednú hodnotu vyjadríme ako

$$E(X) = \mu + \theta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 1,7725$$

Funkciu $VaR_p(X)$ môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} F_x(VaR_p(X)) &= p \\ e^{\left[-\left(\frac{VaR_p(X)-\mu}{\theta}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right]} &= p \\ -\left(\frac{VaR_p(X)-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha} &= \ln(p) \\ \frac{VaR_p(X)-\mu}{\theta} &= \sqrt[-\alpha]{(-\ln(p))} \\ VaR_p(X) &= \sqrt[-\alpha]{(-\ln(p))} \cdot \theta + \mu \\ VaR_{0,99}(X) &= 9,9749 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Celková škoda poisťovateľa má zložené alternatívne rozdelenie

$$S^{Cat} \sim CoA(q; F_{P_X, \beta, L}) \quad (3.32)$$

Náklady na zaistenie môžeme vyjadriť nasledovne

$$(1 + \xi_\beta)E(ZS^{Cat}) = (1 + \xi_\beta)E(S^{Cat} - {}^P S^{Cat}) \quad (3.33)$$

pričom ZS^{Cat} predstavuje celkovú škodu zaistovateľa a ξ_β prirážku na zaistenie vo veľkosti 0,3.

Obdobne, ako pri bežných škodách môžeme odvodiť funkciu celkového zisku poisťovateľa

$$E(Z(\beta, L)) = RP - {}^P S_{\beta, L}^{Cat} - \pi(ZS_{\beta, L}^{Cat}) =$$

$$\begin{aligned}
&= RP - q \left[\int_0^{\beta} (1 - F(x)) dx + \beta[F(\beta + L) - F(\beta)] \right. \\
&\quad \left. + \int_{\beta+L}^{\infty} (1 - F(x)) dx - L[1 - F(\beta + L)] \right] - \\
&-(1 + \xi_{\beta})q \left[\int_{\beta}^{\beta+L} (1 - F(x)) dx - \beta[F(\beta + L) - F(\beta)] + L[1 - F(\beta + L)] \right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Na zostrojenie Lagrangeovej funkcie si ešte potrebuje vyjadriť disperziu zisku poisťovateľa, ktorý má tvar

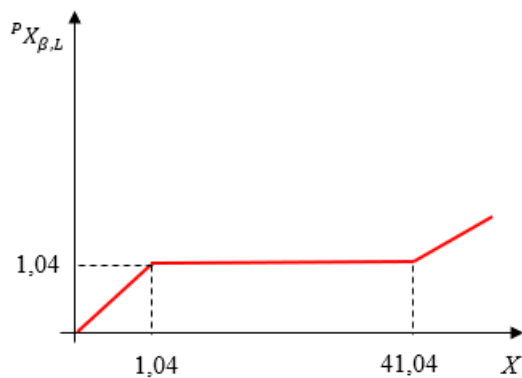
$$D(Z(\beta, L)) = p \cdot q \left[\int_0^{\beta} x^2 f_X(x) dx + \beta^2[F(\beta + L) - F(\beta)] \right] \tag{3.35}$$

Na určenie optimálnej priority β nastavíme limitu L vo výške 40. Na výpočet využijeme kritérium maximálneho zisku poisťovateľa s väzbou na konštantný rozptyl

$$\begin{aligned}
L(\beta, L, \gamma) &= E(Z) + \gamma(D(Z) - k^2) = \\
&= RP - q \left[\int_0^{\beta} (1 - F(x)) dx + \beta[F(\beta + L) - F(\beta)] \right. \\
&\quad \left. + \int_{\beta+L}^{\infty} (1 - F(x)) dx - L[1 - F(\beta + L)] \right] - \\
&-(1 + \xi_{\beta})q \left[\int_{\beta}^{\beta+L} (1 - F(x)) dx - \beta[F(\beta + L) - F(\beta)] + L[1 - F(\beta + L)] \right] \\
&+ \gamma \left[p \cdot q \left[\int_0^{\beta} x^2 f_X(x) dx + \beta^2[F(\beta + L) - F(\beta)] \right] - k^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

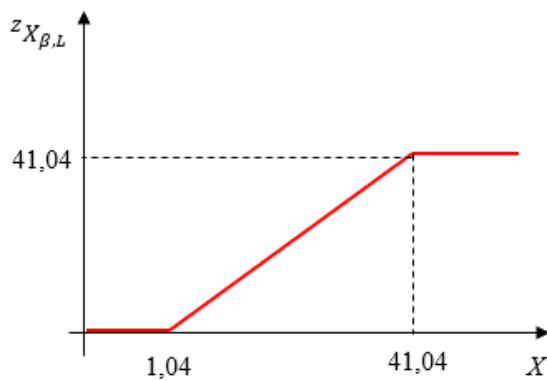
Prostredníctvom softvéru Derive6 sme vypočítali optimálnu prioritu β rovnú **1,04 p.j** pri vopred stanovenom limite $L= 40$ p.j.

Obrázok 12 Optimálna priorita a limit pri excedentnom zaistení katastrofických škôd pre poisťovateľa



Zdroj: vlastné spracovanie

Obrázok 13 Optimálna priorita a limit pri excedentnom zaistení katastrofických škôd pre zaistovateľa



Zdroj: vlastné spracovanie

Tabuľka 3 Podiel zaistovateľa a poisťovateľa na celkovej škode

	$X < 1,04$	$1,04 \leq X < 41,04$	$X \geq 41,04$
Poisťovateľ	X	1,04	$X - 41,04$
Zaistovateľ	0	$X - 1,04$	41,04

Zdroj: vlastné spracovanie

Graficky sme znázornili, akou veľkou časťou sa podieľa poisťovateľ a zaistovateľ na škody. V prípade, ak je škoda nižšia ako 159,9999 p.j. poisťovateľ hradí celú škodu sám, zaistovňa sa nepodieľa na úhrade. Ak je škoda vyššia ako 159,9999 p.j., ale zároveň nižšia ako 7 159,9999 p.j. poisťovateľ sa podieľa na úhrade škody vo výške 159,9999 p.j. a zaistovateľ zvyšnú časť škody. V prípade, ak je škoda vyššia ako 7 159,9999 p.j. zaistovňa sa podieľa na škode maximálnou výškou 7 159,9999 p.j. a zvyšnú časť škody hradí poisťovateľ.

3.2.1 Stanovenie limitu zaistovateľa prostredníctvom kritéria minimalizácie hodnoty VaR pre konkrétnu prioritu β

Ilustračný príklad

Predpokladajme, že náhodná premenná X^{Cat} má Fréchetovo rozdelenie s parametrami $\mu = 0$, $\theta = 15$ a $\alpha = 2$.

$$X^{Cat} \sim \text{Frechet}(x, \alpha, \mu, \theta) \quad (3.40)$$

Pričom distribučná funkcia má tvar

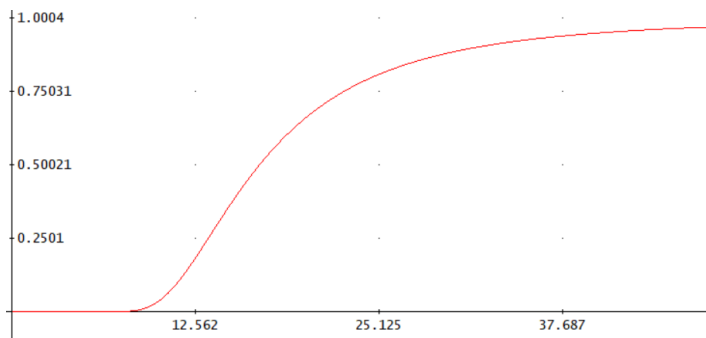
$$F_{X^{Cat}}(x, \alpha, \mu, \theta) = e^{\left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right]} \quad (3.41)$$

Po dosadení hodnôt parametrov funkcie dostaneme

$$F_{X^{Cat}}(x, 2, 0, 15) = e^{\left[-\left(\frac{x}{15}\right)^{-2}\right]}$$

Graf distribučnej funkcie má tvar grafu pre $x > 0$

Obrázok 14 Distribučná funkcia Fréchetovho rozdelenia

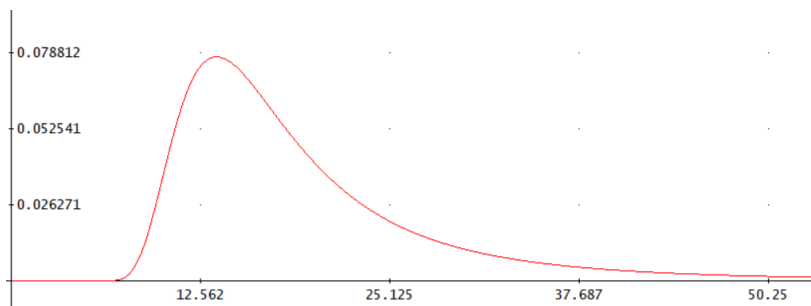


Zdroj: vlastné spracovanie

a funkcia hustoty, ktorú sme vyjadrili deriváciou distribučnej funkcie a jej graf môžeme vyjadriť ako

$$f_{X^{Cat}}(x, 2, 0, 15) = 2 \cdot \left(\frac{x}{15}\right)^{-3} \cdot e^{-\left(\frac{x}{15}\right)^{-2}}$$

Obrázok 15 Funkcia hustoty Fréchetovho rozdelenia



Zdroj: vlastné spracovanie

Strednú hodnotu funkcie vyjadríme ako

$$E(X^{Cat}) = \int_0^{\infty} x f_{X^{Cat}} dx \quad (3.42)$$

alebo

$$E(X^{Cat}) = \mu + \theta \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 26,5868$$

Vypočítame, aká je maximálna možná škoda, ktorá môže nastať v pravdepodobnosťou 0,99

$$VaR_{0,99}(X^{Cat}) = (-\ln(0,99))^{(-0,5)} \cdot 15 = 149,6239$$

Pre očakávanú škodu poisťovateľa platí:

$$E(PX^{Cat}) = E(X^{Cat}) - E(ZX^{Cat}) = 26,5868 - E(ZX^{Cat})$$

Na to, aby sme vedeli určiť očakávanú škodu poisťovateľa, potrebujeme si vyjadriť očakávanú škodu zaistovateľa, ktorú určíme cez funkciu nadmernej škody nasledovne

$$\begin{aligned} E(ZX^{Cat}) &= e_X(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} (x - \beta) \frac{f_{X^{Cat}}}{P(X > \beta)} dx \\ &= \int_{149,6239}^{\infty} (x - 149,6239) \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{15}\right)^{-3} \cdot e^{-\left(\frac{x}{15}\right)^{-2}}}{0,01} dx = 1,5013 \end{aligned}$$

V nasledujúcej tabuľke uvedieme, ako sa zmení očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa, ak bude priorita β rovná maximálne možnej škode $VaR_{0,99}(X^{Cat})$ a v prípadoch, kedy bude priorita vyššia alebo nižšia ako $VaR_{0,99}(X^{Cat})$.

Tabuľka 4 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa

β	$E(ZX_{\beta}^{Cat})$	$E(PX_{\beta}^{Cat})$
10	16,7396	9,8472
100	2,2416	24,3452
149,6239	1,5013	25,0855
200	1,1239	25,4629

Zdroj: vlastné spracovanie

Ak nastavíme prioritu β rovnú maximálne možnej škode vo výške 149,6239 p.j., tak očakávaná škoda poisťovateľa je 25,0855 p.j. a zaistovateľa 1,5013 p.j. Čím je hodnota priority β nižšia, tým je aj očakávaná škoda poisťovateľa nižšia a zaistovateľa vyššia.

Uvažujme o situácií, kedy poisťovateľ využijeme zaistenie s limitom. Pomocou fixne stanovenej priority β a limitu zaistovateľa L určíme očakávanú škodu pre poisťovateľa a zaistovateľa.

Tabuľka 5 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa pre fixnú prioritu β

$\beta = 10$	$E(PX_{\beta,L}^{Cat})$	$E(ZX_{\beta,L}^{Cat})$	$E(X^{Cat})$
$L = 20$	17,04962	9,53719	26,6
$L = 54,86$	13,3	13,3	26,6
$L = 100$	11,96	14,7	26,6
$L = 150$	11,24	15,36	26,6

Zdroj: vlastné spracovanie

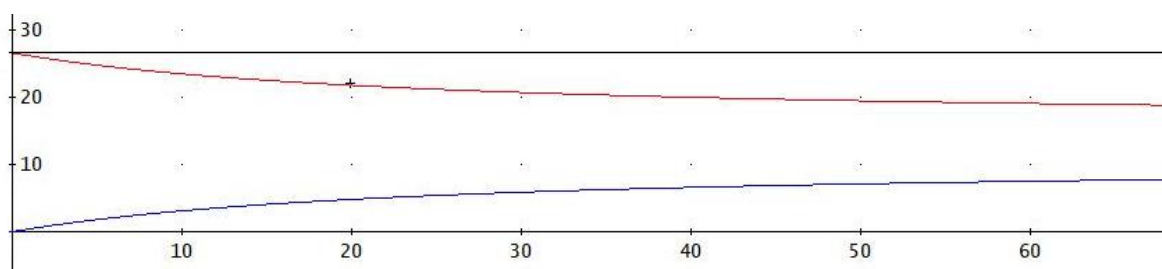
Ak porovnáme hodnoty uvedené v Tabuľke 4 a Tabuľke 5 môžeme vidieť, že v prípade, ak poisťovňa využije zaistenie bez limitu zaistovateľa, tak so zvyšujúcou sa prioritou rastie aj podiel poisťovateľa na celkovej škode, nakoľko sa zaistovateľ podieľa iba na škodách, ktoré sú vyššie ako priorita. Na druhej strane pri fixne stanovenej prioritě a so zvyšujúcim sa limitom zaistovateľa podiel poisťovateľa na celkovej škode klesá kvôli tomu, že ak je škoda vyššia ako priorita a zároveň nižšia ako limit, poisťovateľ sa na úhrade škody podieľa iba vo veľkosti priority a rozdiel medzi celkovou škodou a prioritou hradí zaistovateľ. V prípade, že škoda je vyššia ako limit zaistovateľa, tak zaistovateľ sa podieľa na úhrade vo výške stanoveného limitu a rozdiel hradí poisťovňa. Zo zvyšujúcim sa limitom zaistovateľa klesá pravdepodobnosť, že škoda bude vyššia ako limit, na základe čoho teda klesá aj podiel poisťovateľa na celkovej škode. Napríklad pre fixne nastavenej prioritě $\beta = 10$ nastala situácia, kedy očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa sa rovnajú a to v prípade, že limit zaistovateľa je vo veľkosti 54,86 p.j.

Tabuľka 6 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa pre fixnú prioritu β

$\beta = 20$	$E(PX_{\beta,L}^{Cat})$	$E(ZX_{\beta,L}^{Cat})$	$E(X^{Cat})$	$E(PZ_{\beta,L})$
$L = 40$	19,99521	6,59159	26,6	3,355718
$L = 100$	11,96	14,7	26,6	2,803328

Zdroj: vlastné spracovanie

Obrázok 16 Očakávaná škoda poisťovateľa a zaistovateľa pre fixnú prioritu $\beta=20$



Zdroj: vlastné spracovanie

Na základe vyššie uvedenej tabuľky a grafického znázornenia môžeme vidieť vplyv limitu zaistovateľa pri fixne nastavenej priorite $\beta = 20$. So zvyšujúcim limitom zaistovateľa sa očakávaná škoda poisťovateľa znižuje, zatiaľ čo očakávaná škoda zaistovateľa stúpa. Z takého vyjadrenia však neurčíme, ktorá alternatíva je pre poisťovateľa optimálna. Aj v tomto prípade môžeme použiť niektorý už z uvedených postupov.

Budeme hľadať vhodnú hodnotu nastavenia limitu zaistovateľa prostredníctvom hodnoty $VaR_{0,99}({}^P X_{\beta,L})$, minimalizovaním funkcie, ktorá má tvar

$$VaR_{0,99}({}^P X_{\beta,L}) = VaR_{0,99}({}^P X_{\beta,L}) + (1 + \xi_{\beta})E({}^Z X_{\beta,L}) \quad (3.31)$$

Pričom platí

$$VaR_{0,99}({}^P X_{\beta}) = \begin{cases} \beta & 0 \leq \beta < VaR_p(X) \\ VaR_p(X) & \beta \geq VaR_p(X) \end{cases} \quad (3.32)$$

Minimalizáciou funkcie definovanej vzťahom (3.31) s prihliadnutím na konkrétnu prioritu zistíme, či podľa tohto kritéria existuje optimálne riešenie.

Pre $\xi_{\beta} = 0,3$ dostaneme

Tabuľka 7 Nastavenie limitu zaistovateľa pre fixnú prioritu $\beta=40$

$\beta = 40$	$E({}^P X_{\beta,L}^{Cat})$	$E({}^Z X_{\beta,L}^{Cat})$	$E(X^{Cat})$	$E({}^P Z_{\beta,L})$
$L = 43,90411$	23,77066	2,82934	26,6	3,75572

Zdroj: vlastné spracovanie

Zopakovaním už použitého postupu vieme aj v tomto prípade dopočítať zisk poisťovateľa.

Záver

Katastrofické škody predstavujú také škody, ktorých výskyt je zriedkavý a teda aj pravdepodobnosť vzniku takýchto škôd je veľmi malá. No poisťovne musia myslieť na situácie, že by preda nastali, či už sú to škody, ktoré vznikli prírodnou činnosťou, ako napríklad zemetrasenie, záplavy, epidémie, alebo ľudskou činnosťou.

Poisťovne preto využívajú zaistenie. Zaistením môžu znížiť celkové škody, ktoré vznikli na základe poistnej udalosti na tých zmluvách, ktoré boli zaistené. Tým, že sa poisťovňa rozhodne zaistiť portfólio zmlúv, vznikajú aj náklady na zaistenie, ktoré znižujú zisk poisťovne.

Cieľom diplomovej práce bolo vyjadriť optimálne zaist'ovacie ochrany, teda nájsť také zaistenie, pri ktorom poisťovňa zníži celkové náklady na škody a zároveň dosiahne najvyšší možný zisk. Práca pozostáva z definície katastrofických škôd, ich matematickým opisom rozdelení s ľahkým a ťažkým koncom. Zadefinované rozdelenia sme využili v praktickej časti na ilustračných príkladoch. V práci sme sa sústredili na využitie individuálneho kolektívneho modelu rizika, ich základných charakteristík a mier rizika. Značná časť práce je venovaná zaisteniu, foriem zaistenia, ako je proporcionálne a neproporcionálne zaistenie. Pri proporcionálnom zaistení sme sa podrobne venovali kvótovému zaisteniu a excedentnému zaisteniu vzhľadom na poistnú sumu a kombinácií týchto zaistných ochrán. Pri neproporcionálnom zaistení sme sa venovali zaisteniu škodového nadmerku jednotlivých rizík a zaisteniu škodového nadmerku katastrofických rizík. Tým sme pripravili model pre analýzu rizika, ktorému je poisťovňa je vystavená, ktorý bude súčasne posudzovať škody bežné s nadmernými.

Teoretické poznatky sme využili v praktickej časti, kde sme na ilustračnom príklade určili optimálne zaist'ovacie ochrany viacerými kritériami pre bežné škody, ktoré sme následne porovnali. Keďže poisťovňa musí zaistiť aj nadmerné škody, ktorých nastátie má katastrofické dopady, na ilustračnom príklade sme na základe maximálne možnej škody určili prioritu, ktorá bola nižšia, vyššia a rovná maximálnej škode. Na základe vopred stanovenej priority sme vypočítali, aká je celková škoda poisťovateľa, ktorá s rastúcou prioritou stúpa a naopak celková škoda zaist'ovateľa klesá. Následne sme uvažovali o zaistení s limitom, kde sme pri fixne nastavenej prioritě a so zvyšujúcim limitom vyjadrili, aká je očakávaná škoda poisťovateľa a zaist'ovateľa.

Zoznam použitej literatúry

Odborné knižné zdroje:

1. HORÁKOVÁ, Galina, Michal PÁLEŠ a František SLANINKA. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015, 420 s. [21,07 AH]. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-273-5
2. CIPRA, Tomáš. *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. Praha: GRADA Publishing, 2004, 260 s. Finance. ISBN 80-247-0838-8
3. FECENKO, Jozef a Katarína SAKÁLOVÁ. *Matematika 2*. 2. preprac. vyd. Bratislava: IURA EDITION, 2004, 272 s. Ekonómia. ISBN 80-89047-73-4
4. MELUCHOVÁ, Jitka. *Účtovníctvo a vykazovanie poisťovní podľa IFRS*. Bratislava: Iura Edition, 2009, 279 s. ISBN 978-80-8078-278-8
5. HORÁKOVÁ, G. – MUCHA, V.: *Teória rizika v poistení II*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. ISBN 978-80-225-2549-7
6. WOO, Gordon. *The Mathematics of Natural Catastrophes*, Imperial College Pr., 1999, 292 s. ISBN 978-1860941825
7. DEELSTRA, Griselda – Plantin Guillaume, *Risk Theory and Reinsurance*, Springer – Verlag London, 2014, 78 s. ISBN 978-1447155676
8. ALBRECHER, Hansjörg, Jan BEIRLANT a Jozef L. TEUGELS. *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Hoboken: WILEY, 2017, 352 s. Wiley Series in Probability and Statistics. ISBN 978-0-470-77268-3
9. XIANG ZHU, Hu. *Theory and Application of Optimal Reinsurance Actuarial Model*. 2018, ppb. ISBN 9787514190168

Článok v tlačennom časopise:

10. HORÁKOVÁ, Galina a Peter ZSOLDOS. Risk Measures for Extreme Losses: Miery rizika nadmerných škôd. *Investment Modelling in the Environment of Catastrophic Insurance Risk 2018: Reviewed Monographic Collection of Research Papers*. Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Economics. Department of Finance, 2018, , 12-21. ISBN 978-80-248-4224-0
11. Zhi Li, *Optimal Reinsurance Retentions under Ruin-Related Optimization Criteria*, dizertačná práca, 2008
12. XIANG ZHU, Hu. *Theory and Application of Optimal Reinsurance Actuarial Model*. 2018, ppb. ISBN 9787514190168

13. KRÁTKA, Zuzana. Reinsurance of Catastrophic Insurance Risks: Zaistenie katastrofických poistných rizík. *Investment Modelling in the Environment of Catastrophic Insurance Risk 2019: Reviewed Monographic Collection of Research Papers in the Field of Catastrophic = Recenzovaný monografický vedecký zborník vedeckých prác z oblasti katastrofického poistného rizika*. Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Economics. Department of Finance, 2019., 32-37. ISBN 978-80-248-4355-1
14. HORÁKOVÁ, Galina. Podpora výučby matematiky informačno-komunikatívnymi technológiami: Using Information Communication Technology to Support Mathematics Teaching. *Softvérová podpora v ekonomicko-matematických a aktuárskych modeloch: recenzovaný monografický zborník vedeckých prác*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2018, , 24-28. ISBN 978-80-225-4512-9

Internetové zdroje:

15. Funkcia hustoty pre Gamma rozdelenie. Dostupné na internete: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution#/media/File:Gamma_distribution_pdf.svg
16. Funkcia hustoty pre Fréchetovo rozdelenie. Dostupné na internete: https://en.wikipedia.org/wiki/Fr%C3%A9chet_distribution#/media/File:Fr%C3%A9chet_distribution_pdf.svg

Prílohy

Príloha 1: Výpočet optimálnych zaist'ovacích ochrán prostredníctvom minimalizácie

Var

$$\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot d$$

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot d \right)$$

$$\frac{\text{Var} \cdot \alpha + 2 \cdot d \cdot (q \cdot (s \cdot (\xi q + \xi \alpha) - 2 \cdot s \cdot \alpha \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot \xi \alpha) - s \cdot \xi q) - e \cdot s \cdot \alpha}{s^2}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \cdot d \right)$$

$$\frac{q \cdot (\text{Var} \cdot s + 2 \cdot d \cdot q \cdot \xi \alpha \cdot (\alpha - s) - e \cdot s)}{s^2}$$

$$\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q)^2 \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot d$$

$$\frac{d}{dq} \left[\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q)^2 \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot d \right]$$

$$\frac{\text{Var} \cdot s \cdot \alpha + 2 \cdot d \cdot (q \cdot (s \cdot (\xi q + \xi \alpha) - 2 \cdot s \cdot \alpha \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot \xi \alpha) - s \cdot \xi q) - e \cdot s \cdot \alpha}{s^2}$$

$$\frac{d}{dq} \left[\frac{q \cdot \alpha}{s} \cdot \text{Var} + (1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q)^2 \cdot d + q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot e + \xi \alpha \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 \cdot d \right]$$

$$\frac{q \cdot (\text{Var} \cdot s + 2 \cdot d \cdot q \cdot \xi \alpha \cdot (\alpha - s) - e \cdot s)}{s^2}$$

$$\frac{388889 \cdot q \cdot (\alpha^2 - 2000 \cdot \alpha + 1800000) + 57345250 \cdot \alpha - 311111200000}{625000000}$$

$$\frac{q \cdot (777778 \cdot q \cdot (\alpha - 1000) + 143363125)}{1562500000}$$

$$\text{SOLVE} \left[\frac{388889 \cdot q \cdot (\alpha^2 - 2000 \cdot \alpha + 1800000) + 57345250 \cdot \alpha - 311111200000}{625000000}, \frac{q \cdot (777778 \cdot q \cdot (\alpha - 1000) + 143363125)}{1562500000} \right], [q, \alpha]$$

$$\left[q = 0 \wedge \alpha = \frac{1244444800}{229381}, q = \frac{\sqrt{1527716992046}}{3111112} + \frac{5075319}{12444448} \wedge \alpha = \frac{1600 \cdot \sqrt{1527716992046}}{229381} - \frac{1800746600}{229381}, q = \frac{5075319}{12444448} - \frac{\sqrt{1527716992046}}{3111112} \wedge \alpha = \frac{1600 \cdot \sqrt{1527716992046}}{229381} - \frac{1800746600}{229381} \right]$$

$$\left[q = 0 \wedge \alpha = 5425.230511, q = 0.8051263477 \wedge \alpha = 771.0620628, q = 0.01054968708 \wedge \alpha = -1.647198410 \cdot 10^4 \right]$$

Príloha 2: Výpočet optimálnych zaist'ovacích ochrán prostredníctvom kritéria maximalizácie zisku poisťovateľa s väzbou na konštantný rozptyl

$$(e + \theta \cdot d) - \frac{\alpha \cdot q}{s} \cdot e - ((1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d) - \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot e + \xi q \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot d \right) + \gamma \cdot \left(\left(\frac{\alpha \cdot q}{s} \right)^2 \cdot d - k \right)^2$$

$$\frac{d}{dq} \left((e + \theta \cdot d) - \frac{\alpha \cdot q}{s} \cdot e - ((1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d) - \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot e + \xi q \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot d \right) + \gamma \cdot \left(\left(\frac{\alpha \cdot q}{s} \right)^2 \cdot d - k \right)^2 \right)$$

$$\frac{2 \cdot d \cdot (s \cdot \xi q - q \cdot (s \cdot (\xi q + \xi \alpha) - 2 \cdot s \cdot \alpha \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot (\xi \alpha - \gamma)))}{s^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left((e + \theta \cdot d) - \frac{\alpha \cdot q}{s} \cdot e - ((1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d) - \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot e + \xi q \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot d \right) + \gamma \cdot \left(\left(\frac{\alpha \cdot q}{s} \right)^2 \cdot d - k \right)^2 \right)$$

$$\frac{2 \cdot d \cdot q \cdot (s \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot (\gamma - \xi \alpha))}{s^2}$$

$$\frac{d}{dy} \left((e + \theta \cdot d) - \frac{\alpha \cdot q}{s} \cdot e - ((1 - q) \cdot e + \xi q \cdot (1 - q) \cdot d) - \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot e + \xi q \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{s} \right) \cdot d \right) + \gamma \cdot \left(\left(\frac{\alpha \cdot q}{s} \right)^2 \cdot d - k \right)^2 \right)$$

$$\frac{d \cdot q \cdot \alpha^2}{s^2} - k$$

$$\text{SOLVE} \left[\frac{2 \cdot d \cdot (s \cdot \xi q - q \cdot (s \cdot (\xi q + \xi \alpha) - 2 \cdot s \cdot \alpha \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot (\xi \alpha - \gamma)))}{s^2}, \frac{2 \cdot d \cdot q \cdot (s \cdot \xi \alpha + \alpha \cdot (\gamma - \xi \alpha))}{s^2}, \frac{d \cdot q \cdot \alpha^2}{s^2} - k \right], [q, \alpha, \gamma]$$

$$q = 0 \wedge k \cdot s^2 = 0 \wedge s \cdot \xi q = 0, q = \frac{k \cdot \xi \alpha \cdot \text{SIGN}(\xi q + \xi \alpha)}{\sqrt{d \cdot (\xi q + \xi \alpha)}}, \alpha = \frac{k \cdot s \cdot (\xi q + \xi \alpha) \cdot (\sqrt{d \cdot \xi q \cdot \text{SIGN}(\xi q + \xi \alpha)} - k \cdot \xi \alpha)}{\sqrt{d \cdot \xi q} \cdot d \cdot \xi q - k \cdot \xi \alpha}, \gamma = \frac{\xi q \cdot \xi \alpha}{\xi q + \xi \alpha} - \frac{\sqrt{d \cdot \xi q \cdot \xi \alpha}}{k \cdot |\xi q + \xi \alpha|}, q =$$

$$\frac{\sqrt{d \cdot \xi q} - k \cdot \xi \alpha \cdot \text{SIGN}(\xi q + \xi \alpha)}{\sqrt{d \cdot (\xi q + \xi \alpha)}} \wedge \alpha = \frac{k \cdot s \cdot (\xi q + \xi \alpha) \cdot (\sqrt{d \cdot \xi q \cdot \text{SIGN}(\xi q + \xi \alpha)} + k \cdot \xi \alpha)}{k \cdot \xi \alpha - d \cdot \xi q} \wedge \gamma = \frac{\sqrt{d \cdot \xi q \cdot \xi \alpha}}{k \cdot |\xi q + \xi \alpha|} + \frac{\xi q \cdot \xi \alpha}{\xi q + \xi \alpha}$$

$$\left[\text{false}, q = \frac{2448479 \cdot \sqrt{3888890}}{14000004000} + \frac{4}{9} \wedge \alpha = \frac{7051619520000 \cdot \sqrt{3888890}}{3960508986559} - \frac{10791088944193800}{3960508986559} \wedge \gamma = \frac{4}{45} - \frac{1600 \cdot \sqrt{3888890}}{22036311}, q = \frac{4}{9} - \frac{2448479 \cdot \sqrt{3888890}}{14000004000} \wedge \alpha = \frac{7051619520000 \cdot \sqrt{3888890}}{3960508986559} - \frac{10791088944193800}{3960508986559} \wedge \gamma = \frac{4}{45} + \frac{1600 \cdot \sqrt{3888890}}{22036311} \right]$$

$$[\text{false}, q = 0.7893348025 \wedge \alpha = 786.4883730 \wedge \gamma = -0.05429492267, q = 0.09955408630 \wedge \alpha = -6235.832879 \wedge \gamma = 0.2320727004]$$