

NIEKOĽKO APLIKÁCIÍ DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC V EKONÓMII

Katarína Sakálová

Dôležitou úlohou pri riešení mnohých problémov v rôznych oblastiach vedy je určenie neznámej funkcie na základe jej vlastností. V matematickej analýze (aj pri jej využití v ekonómii) sú tieto vlastnosti obvykle vyjadrené pomocou derivácií alebo diferenciálov. Ak takéto vlastnosti popisujú vzťahy medzi deriváciami funkcie a funkciou a nazývame ich diferenciálnymi rovnicami. Diferenciálne rovnice môžu popisovať vlastnosti funkcií jednej i viac premenných. My sa budeme ďalej zaoberať len reálnou funkciou jednej reálnej premennej.

Diferenciálne rovnice majú mnohostranné využitie. My uvedieme niekoľko aplikácií diferenciálnych rovníc v ekonómii.

Príklad 1. Cenová elasticita dopytu. Nájdime dopytovú funkciu, ak elasticita

dopytu je daná vzťahom $\eta = -\frac{p}{(100-p)}$ a vieme, že hodnota dopytu pri cene

$p = 36$ je $q(36) = 16$.

Riešenie. Ak použijeme vzorec na určenie elasticity pre spojitú dopytovú funkciu, dostaneme

$$\eta = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = -\frac{p}{100-p}$$

a po úprave diferenciálnu rovnicu prvého rádu so separovanými premennými

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dp}{100-p}.$$

Rovnicu zintegrujeme

$$\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dp}{100-p}$$

a dostaneme

$$\ln|q| = \ln|100-p| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Ak $C_1 = \ln C$, $C \in \mathbb{R}^+$ a použijeme známe pravidlá pre úpravu logaritmov, potom

$$\ln|q| = \ln C|100-p|, \quad C \in \mathbb{R}^+.$$

Nakoniec porovnáme výrazy za logaritmom na oboch stranách rovnice, pričom berieme do úvahy len kladné hodnoty q a hodnoty $p \in (0,100)$, a dostaneme

$$q = C(100 - p), \quad C \in R^+,$$

čo je všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice. Nájdime ešte partikulárne riešenie, ktoré spĺňa podmienku $q(36) = 16$. Dosadíme uvedenú podmienku do všeobecného riešenia

$$16 = C(100 - 36)$$

a určíme $C = \frac{1}{4}$. Potom hľadané partikulárne riešenie, a teda aj dopytová funkcia, pre ktorú $q(36) = 16$, je

$$q = 25 - \frac{p}{4}.$$

Príklad 2. Spojité úrokovanie. Zákon exponenciálneho rastu.

Predpokladajme, že kapitál je investovaný pri zloženom úrokovaní s ročnou úrokovou mierou i , pričom úroky sa počítajú m -krát do roka (počet konverzií je m). Nech funkcia $K(t)$ udáva množstvo kapitálu v čase t , t. j. t rokov od začiatku investovania. Konkrétnu začiatočnú hodnotu kapitálu označíme $K(0) = K_0$. Keďže úroky sa pripisujú m -krát do roka, každá úroková perióda má dĺžku $\frac{1}{m}$ a označíme ju ako Δt .

Na konci prvej periódy je teda úrok pripísaný k hodnote kapitálu zo začiatku tejto periódy. Táto hodnota je potom začiatočnou hodnotou kapitálu pre druhú periódu atď. Ak začiatok periódy je v čase t a perióda má dĺžku Δt , potom nárast kapitálu za periódu (úrok) je

$$K(t + \Delta t) - K(t) = \Delta K.$$

Úrok ΔK za tento čas je priamo úmerný začiatočnej hodnote kapitálu, úrokovej miere a času, t. j.

$$\Delta K = K(t) \cdot i \cdot \Delta t,$$

po úprave

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = iK(t).$$

Ak predpokladáme, že úrok sa bude pripisovať spojite, t. j. $\Delta t \rightarrow 0$ a $m = \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \infty$, potom aj $\frac{\Delta K}{\Delta t} \rightarrow \frac{dK}{dt}$ a predchádzajúca rovnica bude mať tvar

$$\frac{dK}{dt} = iK(t).$$

Táto diferenciálna rovnica vyjadruje skutočnosť, že v prípade spojitého úrokovania je miera nárastu kapitálu v čase t je úmerná hodnota kapitálu v čase t . Na určenie funkcie $K(t)$ potrebuje vyriešiť uvedenú diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými. Separujeme premenné a integrujeme

$$\int \frac{dK}{K(t)} = \int i dt.$$

Dostaneme

$$\ln K(t) = it + C_1, K(t) > 0$$

a po úprave

$$K(t) = e^{it+C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Nahradíme $C = e^{C_1} > 0$ a dostaneme

$$K(t) = Ce^{it}, \quad C > 0.$$

Určíme integračnú konštantu C a zároveň partikulárne riešenie, ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $K(0) = K_0$. Potom

$$K_0 = Ce^{i0} = C.$$

Hľadané partikulárne riešenie potom je

$$K(t) = K_0 e^{it}.$$

Existuje mnoho príkladov z rôznych oblastí (rast populácie, ochladzovanie telesa, rádioaktívny rozpad), keď rýchlosť zmeny nejakej veličiny je priamo úmerná momentálnemu stavu tejto veličiny. Potom rast alebo pokles takejto veličiny sa riadi zákonom exponenciálneho rastu.

Príklad 3 Rast populácie. Logistická krivka.

Ak použijeme zákon exponenciálneho rastu na rast populácie, riešením analogickej diferenciálnej rovnice ako v Príklade 2

$$\frac{dN}{dt} = kN(t)$$

dostaneme vzťah

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

kde N_0 je stav populácie v čase $t = 0$, $N(t)$ je stav populácie v čase t a k je konštanta. Na základe tohto zákona by však populácia s časom neobmedzene

rástla. V skutočnosti, v prípade nárastu populácie na určitú hodnotu, začnú tento rast spomaľovať iné faktory (napr. environmentálne). Preto je vhodné určiť limitnú hodnotu M ($0 < N(t) < M$) takú, že $N(t) \rightarrow M$ a súčasne $\frac{dN(t)}{dt} \rightarrow 0$.

Rast populácie by sa potom v prvej časti riadil zákonom exponenciálneho rastu, ale po čase by sa tento rast spomalil vplyvom rôznych činiteľov.

Takýto model by sme dostali, ak by sme pravú stranu diferenciálnej rovnice popisujúcej rast populácie vynásobili konštantou $\frac{M - N(t)}{M}$. Tento model by potom popisovala diferenciálna rovnica

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \frac{M - N(t)}{M} N(t).$$

Všimnime si, že ak $N(t) \rightarrow M$, tak $M - N(t) \rightarrow 0$ a $\frac{dN(t)}{dt} \rightarrow 0$, ako sme

požadovali pri tvorbe modelu. Pretože k, M sú konštanty, označíme $K = \frac{k}{M}$ a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $N(t)$ premennej t . Ďalej budeme pre jednoduchosť písať $N(t) = N$. Potom

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N),$$

ktorá hovorí, že miera rastu je priamo úmerná súčinu aktuálneho stavu populácie $N(t)$ a rozdielu medzi limitnou hodnotou populácie a aktuálneho stavu populácie $M - N(t)$.

Diferenciálna rovnica popisujúca tento model je separovateľná diferenciálna rovnica. Separujeme teda premenné a zintegrujeme. Dostaneme

$$\int \frac{dN}{N(M - N)} = \int K dt.$$

Integrál na ľavej strane je integrál racionálnej funkcie, ktorú musíme najprv rozložiť na parciálne zlomky

$$\frac{1}{M - N} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M - N}$$

a známym spôsobom určiť konštanty $A = B = \frac{1}{M}$. Po zintegrovaní

$$\int \frac{dN}{MN} + \int \frac{dN}{M(M - N)} = \int K dt$$

dostaneme riešenie v implicitnom tvare

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{N}{M-N} \right| = Kt + C_1,$$

ktoré môžeme upraviť ($N > 0$, $M - N > 0$)

$$\ln \frac{N}{M-N} = MKt + MC_1.$$

Pokúsime sa vyjadriť N

$$\frac{N}{M-N} = e^{MKt} e^{MC_1}$$

tak, že najprv budeme písať $C = e^{MC_1}$

$$\frac{N}{M-N} = Ce^{MKt}.$$

Potom dostaneme

$$N = (M-N)Ce^{MKt}$$

$$N = M Ce^{MKt} - N Ce^{MKt}$$

$$N = \frac{M Ce^{MKt}}{Ce^{MKt} + 1},$$

čo je explicitný tvar všeobecného riešenia tejto diferenciálnej rovnice. Ak vydelíme čitateľ aj menovateľ výrazom Ce^{MKt} , dostaneme

$$N = \frac{M}{1 + \frac{1}{C} e^{-MKt}}.$$

Táto funkcia je známa ako tzv. **logistická funkcia** a uvádza sa v tvare ($b = \frac{1}{C}$, $c = MK$)

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}$$

Príklad 4 Funkcia prežitia. Intenzita úmrtnosti. Vieme, že základnou funkciou v úmrtnostných tabuľkách je funkcia prežitia l_x (l_x je počet osôb vo veku x), kde x nadobúda celočíselné hodnoty z intervalu $\langle \alpha, \omega \rangle$ (často $\langle 0, \omega \rangle$), l_x je nerastúca, nezáporná funkcia, pričom hodnota l_α (často l_0) sa nazýva koreň úmrtnostnej tabuľky. Ak ďalej predpokladáme, že l_x je spojitá

a diferencovateľná funkcia, môžeme nazvať podiel poklesu hodnoty l_x pripadajúci na malý prírastok veku x (teda času t) k hodnote l_x intenzita úmrtnosti μ_x . Teda

$$\frac{dl_x}{dt} = -\mu_t \cdot l_x.$$

Uvedený vzorec je diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými, ktorú upravíme separáciou premenných na tvar

$$\frac{dl_x}{l_x} = -\mu_t dt.$$

Keďže nebudeme hľadať všeobecné riešenie, ale priamo partikulárne riešenie spĺňajúce Cauchyho začiatočné podmienky $l_\alpha = l(\alpha)$, integrujeme

$$\int_{l_\alpha}^{l_x} \frac{dl_x}{l_x} = -\int_{\alpha}^x \mu_t dt.$$

a dostaneme

$$\ln \frac{l_x}{l_\alpha} = -\int_{\alpha}^x \mu_t dt$$

a po úprave partikulárne riešenie je

$$l_x = l_\alpha e^{-\int_{\alpha}^x \mu_t dt}.$$

Vzorec nám umožňuje vypočítať hodnoty funkcie prežitia za predpokladu, že poznáme koreň úmrtnostnej tabuľky a funkciu intenzity úmrtnosti.

Literatúra:

- [1] Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R., W.: *Mathematical Economics*. Thomson South-Western 2005. ISBN 0-324-18332-1.
- [2] Bilíková, M.: *Spojité metódy v poistnej matematike*. Bratislava Ekonóm 2003. ISBN 80-225-1698-8.
- [3] McCutcheon, J., J., Scott, W., F.: *An Introduction to the Mathematics of Finance*. Oxford 1991. ISBN 0 7506 0092 6.
- [4] Neil, A.: *Life Contingencies*. Oxford: The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries 1977.

[5] Peller, F., Pinda, L., Fecenko, J.: *Matematika 3*. IURA Edition Bratislava 2001. ISBN 80-88715-97-0.

Abstrakt

V príspevku je uvedených niekoľko aplikácií separovateľných diferenciálnych rovníc prvého rádu v ekonómii. V príklade 1 hľadáme dopytovú funkciu, ak je daný vzorec na elasticitu dopytu a hodnota dopytu pri danej cene. Príklad 2 je venovaný hľadaniu vzorca na nárast kapitálu v časovom intervale, ak je určená hodnota kapitálu na začiatku intervalu za predpokladu, že úrok sa pripisuje spojitě. Výsledkom je vzorec na spojitě úrokovanie. Príklad 3 popisuje použitie zákona exponenciálneho rastu na rast populácie za určitých obmedzujúcich podmienok. Výsledkom je tzv. logistická krivka. V Príklade 4 je odvodený vzorec na určenie funkcie prežitia z funkcie intenzity úmrtnosti.