

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103004/I/2017/36069194047431172

METÓDY PÁROVÉHO POROVNÁVANIA
VARIANTOV -
ROZHODOVANIE ZA NEURČITOSTI

Diplomová práca

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

**METÓDY PÁROVÉHO POROVNÁVANIA
VARIANTOV -
ROZHODOVANIE ZA NEURČITOSTI**

Diplomová práca

Študijný program: Informačný manažment

Študijný odbor: Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Peter Bednár, PhD.

Bratislava 2017

Bc. Tomáš Lazar

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: 10. mája 2017, Bratislava

.....

Bc. Tomáš Lazar

Pod'akovanie

Touto cestoval by som sa chcel pod'akovať doc. Ing. Petrovi Bednárovi, PhD. za jeho cenné rady, odbornú pomoc, pripomienky, odporúčania a množstvo času, ktoré mi venoval pri písaní diplomovej práce.

Abstrakt

LAZAR, Tomáš: *Metódy párového porovnávania variantov - rozhodovanie za neurčitosti* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra aplikovanej informatiky. Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Peter Bednár, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2017, počet strán: 86.

Cieľom diplomovej práce je hĺbková analýza možností využitia metód párového porovnávania variantov v úlohách viackriteriálneho rozhodovania v podmienkach neurčitosti. Konkrétnym predmetom nášho skúmania je implementácia fuzzy prístupu do metód párového porovnávania variantov a následné riešenie rozhodovacích problémov za neurčitosti pomocou navrhovaných postupov a techník. Práca je rozdelená okrem úvodu a záveru aj do ďalších piatich kapitol, pričom obsahuje tri ilustrácie, dvadsaťštyri grafov a päťdesiatjeden tabuliek. Prvá kapitola je zameraná na základné pojmy viackriteriálnej analýzy, klasifikáciu rozhodovacích procesov, teoretický základ metód párového porovnávania variantov a teóriu fuzzy množín a fuzzy čísel. V druhej kapitole sú formulované ciele diplomovej práce. Tretia kapitola obsahuje navrhnutú metodiku práce a metódy skúmania. Vo štvrtej časti sú načrtnuté postupy implementácie metód párového porovnávania variantov využívajúcich fuzzy prístup na rozhodovací problém. V diskusii sú zosumarizované a porovnané výsledky práce. Záver obsahuje zhodnotenie prínosu práce.

Kľúčové slová:

viackriteriálne rozhodovanie, neurčitosť, metódy párového porovnávania variantov, teória fuzzy množín, fuzzy čísla

Abstract

LAZAR, Tomáš: *Methods of pairwise comparison of variants – decision making under uncertainty* - University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Applied Informatics. Thesis supervisor: doc. Ing. Peter Bednár, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2017, pages: 86.

The goal of the diploma thesis is in-depth analysis of possibilities of a usage of methods of pairwise comparison of variants in tasks of multi-criteria decision making under uncertainty. The particular subject of our investigation is an implementation of the fuzzy approach into methods of pairwise comparison of variants and the consecutive solution of decision-making problems under uncertainty by proposed ways and techniques. The thesis is divided apart from the introduction and the conclusion into another five chapters whereby contains three illustrations, twenty four graphs and fifty one tables. The first chapter is focused on basic terms of multi-criteria analysis, the classification of decision-making processes, the theoretical base of methods of pairwise comparison of variants and the theory of fuzzy sets and fuzzy numbers. At the second chapter are formulated goals of the diploma thesis. The third chapter contains proposed methodics of the thesis and methods of the investigation. At the fourth part of thesis there are described approaches of the implementation of methods of pairwise comparison of variants using the fuzzy technique on decision-making problem. At the discussion results of the thesis are summarized and compared. The conclusion contains an assessment of benefits of the thesis.

Key words:

multi-criteria decision making, uncertainty, methods of pairwise comparison of variants, theory of fuzzy sets, fuzzy numbers

Obsah

Abstrakt	- 5 -
Abstract.....	- 6 -
Zoznam ilustrácií	- 9 -
Zoznam grafov	- 9 -
Zoznam tabuliek	- 10 -
Úvod	- 12 -
1. Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	- 13 -
1.1 <i>Viackritériálne rozhodovanie</i>	<i>- 13 -</i>
1.1.1 Rozhodovací proces a rozhodovací problém	- 13 -
1.1.2 Rozhodovacia matica a váhy kritérií	- 13 -
1.1.3 Klasifikácia rozhodovacích procesov	- 14 -
1.1.4 Klasifikácia metód výberu kompromisného variantu	- 16 -
1.2 <i>Metódy párového porovnávania variantov</i>	<i>- 17 -</i>
1.2.1 AHP (Analytický hierarchický proces).....	- 17 -
1.2.2 PROMETHEE	- 19 -
1.2.3 AGREPREF	- 21 -
1.2.4 Metódy triedy ELECTRE	- 23 -
1.3 <i>Teória fuzzy množín.....</i>	<i>- 24 -</i>
1.3.1 Rozdiel medzi klasickými a fuzzy množinami	- 24 -
1.3.2 Vlastnosti fuzzy množín	- 26 -
1.3.3 Fuzzy čísla	- 27 -
1.3.4 Tvary fuzzy čísel.....	- 28 -
1.3.5 Operácie s fuzzy číslami	- 29 -
1.3.6 Defuzzifikácia	- 30 -
1.3.7 Porovnávanie fuzzy čísel	- 31 -
2. Cieľ práce.....	- 35 -

3. Metodika práce a metody skúmania.....	- 37 -
4. Výsledky práce.....	- 39 -
4.1 <i>Filozofia postupu riešenia</i>	<i>- 39 -</i>
4.2 <i>Posudzované metódy riešenia</i>	<i>- 40 -</i>
4.2.1 Fuzzy AHP	- 40 -
4.2.2 PROMETHEE	- 41 -
4.2.3 AGREPREF a ELECTRE III.....	- 42 -
4.3 <i>Implementácia metód párového porovnávania variantov.....</i>	<i>- 42 -</i>
4.3.1 Fuzzy AHP	- 43 -
4.3.2 PROMETHEE	- 50 -
4.3.3 AGREPREF	- 56 -
4.3.4 ELECTRE III.....	- 61 -
4.4 <i>Neurčitosť vyjadrená vo váhach kritérií.....</i>	<i>- 63 -</i>
4.4.1 Fuzzy AHP	- 66 -
4.4.2 PROMETHEE	- 67 -
4.4.3 AGREPREF	- 69 -
4.4.4 ELECTRE III.....	- 71 -
5. Diskusia	- 72 -
5.1 <i>Komparácia výsledkov - metóda AHP.....</i>	<i>- 72 -</i>
5.2 <i>Komparácia výsledkov - metóda PROMETHEE.....</i>	<i>- 74 -</i>
5.3 <i>Komparácia výsledkov - metódy AGREPREF a ELECTRE III.....</i>	<i>- 77 -</i>
5.4 <i>Komparácia metód párového porovnávania variantov.....</i>	<i>- 77 -</i>
Záver	- 80 -
Zoznam použitej literatúry	- 81 -

Zoznam ilustrácií

Obrázok 1: Klasifikácia rozhodovacích procesov	15 -
Obrázok 2: Klasifikácia metód výberu kompromisného variantu	16 -
Obrázok 3: Základná hierarchická štruktúra metódy AHP	17 -

Zoznam grafov

Graf 1: Tvar tretej preferenčnej funkcie metódy PROMETHEE	20 -
Graf 2: Tvar funkcie príslušnosti – klasická množina	25 -
Graf 3: Tvar funkcie príslušnosti – fuzzy množina	26 -
Graf 4: Trojuholníkové fuzzy číslo	28 -
Graf 5: Lichobežníkové fuzzy číslo	29 -
Graf 6: Porovnateľné fuzzy čísla metódou Fuzzy Max Order	33 -
Graf 7: Neporovnateľné fuzzy čísla metódou Fuzzy Max Order	33 -
Graf 8: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP I	46 -
Graf 9: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP II	47 -
Graf 10: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP III	49 -
Graf 11: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP IV	50 -
Graf 12: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE I	52 -
Graf 13: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE I	53 -
Graf 14: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE III	55 -
Graf 15: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE IV	55 -
Graf 16: Porovnanie trojuholníkových fuzzy čísel metódou Fuzzy Max Order I	60 -
Graf 17: Porovnanie trojuholníkových fuzzy čísel metódou Fuzzy Max Order II	60 -
Graf 18: Tvar fuzzy čísla pre súčet nenormovaných váh	65 -
Graf 19: Tvar fuzzy čísla pre súčet normovaných váh	66 -
Graf 20: Hodnotenie variantov metódou FAHP využívajúcej neurčité váhy	67 -
Graf 21: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE – neurčité váhy	69 -
Graf 22: Komparácia výsledkov metódy AHP	73 -
Graf 23: Komparácia výsledkov metódy PROMETHEE	75 -
Graf 24: Komparácia metód párového porovnávania variantov	78 -

Zoznam tabuliek

Tabuľka 1: Bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov	- 18 -
Tabuľka 2: Fuzzy bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov I.....	- 40 -
Tabuľka 3: Fuzzy bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov II.....	- 41 -
Tabuľka 4: Model rozhodovacej situácie I	- 43 -
Tabuľka 5: Matica párového porovnávania variantov S_1	- 43 -
Tabuľka 6: Normované geometrické priemery matice S_1	- 45 -
Tabuľka 7: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP I	- 45 -
Tabuľka 8: Usporiadanie variantov metódou FAHP I – Yagerov index	- 46 -
Tabuľka 9: Usporiadanie variantov metódou FAHP I - Medián	- 46 -
Tabuľka 10: Model rozhodovacej situácie II.....	- 47 -
Tabuľka 11: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP II	- 47 -
Tabuľka 12: Model rozhodovacej situácie III.....	- 48 -
Tabuľka 13: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP III.....	- 49 -
Tabuľka 14: Model rozhodovacej situácie IV	- 49 -
Tabuľka 15: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP IV.....	- 50 -
Tabuľka 16: Príklad rozdielu dôsledkov variantov kritérií I	- 51 -
Tabuľka 17: Hodnoty preferenčných indexov P I	- 51 -
Tabuľka 18: Preferenčné toky I	- 52 -
Tabuľka 19: Čistý tok a celkové poradie variantov I.....	- 52 -
Tabuľka 20: Čistý tok a celkové poradie variantov II	- 53 -
Tabuľka 21: Príklad rozdielu dôsledkov variantov kritérií III.....	- 54 -
Tabuľka 22: Hodnoty preferenčných indexov P III.....	- 54 -
Tabuľka 23: Preferenčné toky III	- 54 -
Tabuľka 24: Čistý tok a celkové poradie variantov III.....	- 54 -
Tabuľka 25: Čistý tok a celkové poradie variantov IV.....	- 55 -
Tabuľka 26: Číselné charakteristiky Yagerovho indexu I.....	- 56 -
Tabuľka 27: Číselné charakteristiky Mediánu I	- 57 -
Tabuľka 28: Preferenčná tabuľka metódy AGREPREF I.....	- 57 -
Tabuľka 29: Matica preferencie variantov V I	- 58 -
Tabuľka 30: Incidenčná matica P – prah preferencie 0,1 I.....	- 58 -
Tabuľka 31: Upravená incidenčná matica P – prah preferencie 0,1 I.....	- 59 -

Tabuľka 32: Upravená incidenčná matica P – prah preferencie 0,5 I.....	- 59 -
Tabuľka 33: Číselné charakteristiky Yagerovho indexu II.....	- 61 -
Tabuľka 34: Matica výpočtu charakteristiky D_i I.....	- 62 -
Tabuľka 35: Matica preferencie variantov V po eliminácii variantu x_1 I.....	- 62 -
Tabuľka 36: Matica výpočtu charakteristiky D_i po eliminácii variantu x_1 I.....	- 62 -
Tabuľka 37: Matica preferencie variantov V po eliminácii variantov x_1 a x_4 I.....	- 63 -
Tabuľka 38: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP - neurčité váhy.....	- 67 -
Tabuľka 39: Preferenčné indexy P variantu x_1	- 68 -
Tabuľka 40: Matica preferenčných indexov.....	- 68 -
Tabuľka 41: Preferenčné toky – neurčité váhy.....	- 69 -
Tabuľka 42: Poradie variantov metódou PROMETHEE – neurčité váhy.....	- 69 -
Tabuľka 43: Matica preferencie variantov V – neurčité váhy.....	- 70 -
Tabuľka 44: Defuzzifikácia fuzzy čísel metódou stredného maxima.....	- 70 -
Tabuľka 45: Defuzzifikácia fuzzy čísel metódou ťažiska.....	- 70 -
Tabuľka 46: Výsledky klasickej AHP metódy.....	- 72 -
Tabuľka 47: Výsledky metódy FAHP.....	- 73 -
Tabuľka 48: Výsledky klasickej metódy PROMETHEE.....	- 74 -
Tabuľka 49: Výsledky fuzzy metódy PROMETHEE – Yagerov index.....	- 75 -
Tabuľka 50: Výsledky fuzzy metódy PROMETHEE – metóda mediánu.....	- 75 -
Tabuľka 51: Komparácia metód párového porovnávania variantov.....	- 78 -

Úvod

Prijatie konkrétneho rozhodnutia je často ťažkou skúškou aj pre tých najskúsenejších investorov, ekonómov či manažérov. Žiaci na základných školách premýšľajú o budúcom štúdiu na strednej škole, ich starší spolužiaci sa snažia vybrať správnu univerzitu, aby po jej ukončení našli na trhu práce svoje uplatnenie. Študenti končiacich ročníkov na inžinierskom či magisterskom stupni rozmyšľajú o budúcom zamestnaní. Každý človek je denne vystavený situáciám, keď si musí z množiny variantov zvoliť takú alternatívu, ktorá mu prinesie uspokojenie svojich potrieb v čo „najvyššej“ miere.

Metódy párového porovnávania variantov tvoria skupinu metód v rámci viackriteriálnej analýzy, ktorá je spoľahlivým nástrojom pri riešení rozhodovacích problémov, ak uvažujeme konečnú množinu variantov hodnotenú podľa konečnej množiny kritérií. Základom týchto metód je párové porovnanie každej dvojice variantov, resp. ich výplatných funkcií, ktoré sú reprezentované deterministickými hodnotami. V takom prípade hovoríme o rozhodovaní v podmienkach istoty. Otázkou je, ako sa chovajú metódy párového porovnávania variantov v prípade, keď výplatné funkcie variantov, teda ich dôsledky sú určené nepresne. Príkladom neurčitých hodnôt je intervalové vyjadrenie, keď v konečnom dôsledku nikto nevie s istotou povedať, ktorá hodnota z intervalu je tá očakávaná. Iným príkladom vyjadrenia neurčitosti vo viackriteriálnom rozhodovaní môže byť teória fuzzy množín a fuzzy čísel, ktorá v porovnaní s intervalovým hodnotením počíta aj s „akousi“ mierou neurčitosti.

Predmetom tejto diplomovej práce je skúmanie použiteľnosti metód párového porovnávania variantov na rozhodovacie problémy v podmienkach neurčitosti, pričom je zameraná na analýzu a celkové zhodnotenie efektívnosti využitia fuzzy prístupu v posudzovaných metódach.

1. Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V úvodnej kapitole sú definované pojmy ako rozhodovací proces a rozhodovací problém a uvedené podmienky, v ktorých rozhodovací problém môže vzniknúť. Čitateľovi budú taktiež priblížené princípy metód párového porovnávania variantov. Posledná podkapitola pojednáva o teórii fuzzy množín a fuzzy čísel, ktorá je relevantná pri vyjadrení neurčitosti vo viackriteriálnych úlohách.

1.1 Viackriteriálne rozhodovanie

1.1.1 Rozhodovací proces a rozhodovací problém

„Rozhodovacie procesy chápeme ako procesy riešenia rozhodovacích problémov, t. j. problémov s viacerými variantmi riešenia.“¹

Rozhodovateľ ako subjekt rozhodovania rieši rozhodovací problém výberom kompromisného variantu, t. j. variantu, ktorý „najideálnejšie“ spĺňa kritéria rozhodovania, pričom samotný výber je realizovaný z množiny prípustných variantov. Riešenie rozhodovacieho problému je možné len v prípade vyhodnotenia všetkých možnosti vzhľadom na vytýčený cieľ rozhodovania. *„Cieľom rozhodovania rozumieme budúci stav okolia rozhodovateľa, vyplývajúci z nutnosti uspokojiť určité potreby.“²*

1.1.2 Rozhodovacia matica a váhy kritérií

Model rozhodovacej situácie vieme znázorniť pomocou rozhodovacej matice, ak poznáme konečnú množinu variantov $X_n, n \in (1, 2, \dots, n)$ hodnotenú podľa kritérií $K_m, m \in (1, 2, \dots, m)$, na základe ktorých jednotlivé varianty môžeme navzájom porovnávať a posudzovať ich vhodnosť. Prvky rozhodovacej matice, resp. dôsledky variantov vzhľadom k jednotlivým kritériám označíme $x_{ij}, i \in (1, 2, \dots, i), j \in (1, 2, \dots, j)$. Rozhodovaciu maticu potom vieme zapísať v tvare:

$$\begin{matrix} & K_1 & K_2 & \dots & K_m \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1.1)$$
$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & \dots & v_j \end{matrix}$$

¹ FOTR, J. – ŠVECOVÁ, L. - KOL. 2010. *Manažérske rozhodovanie: postupy, metódy a nástroje*. 2. vyd. Praha 4: Ekopress, 2010, s.28. ISBN 978-80-86929-59-0

² FOTR, J. – PÍŠEK, M. 1986. *Exaktní metody ekonomického rozhodování*. Praha: Academia, 1986, s.10. ISBN 21-013-86

Váhy $v_j, j \in (1, 2, \dots, j)$ informujú rozhodovateľa o dôležitosti jednotlivých kritérií. Čím je kritérium dôležitejšie, tým disponuje väčšou váhou. V prípade, ak sa súčet váh kritérií nerovná hodnote jeden, hovoríme o nenormovaných váhach $w_j, j \in (1, 2, \dots, j)$, ktoré je pre efektívnejšiu prácu potrebné normovať na základe vzťahu:

$$v_j = \frac{w_j}{\sum_{k=1}^m w_j} . \quad (1.2)$$

1.1.3 Klasifikácia rozhodovacích procesov

„Jedno z najdôležitejších hľadísk pri triedení rozhodovacích procesov predstavuje informácia o stavoch sveta a dôsledkoch variantov vzhľadom k jednotlivým kritériám rozhodovania.“³

„Stavy sveta chápeme ako budúce vzájomne sa vylučujúce situácie, ktoré môžu po realizácii variantov rozhodovania nastať“⁴

Informácia o stavoch sveta a dôsledkoch variantov môže byť buď úplná v zmysle jednoznačnosti možných stavov sveta a dôsledkov variantov rozhodovania alebo neúplná v zmysle ich náhodnosti, resp. stochastickosti. V prípade úplnej informácie, t. j. subjekt rozhodovania s istotou vie určiť, ktorý stav sveta nastane, a aké budú dôsledky variantov, ide o rozhodovanie v podmienkach istoty.

Pokiaľ rozhodovateľ pozná možné stavy sveta s pravdepodobnosťami ich výskytu, a tiež dôsledky variantov rozhodovania, hovoríme o rozhodovaní za rizika. V tomto prípade sa jedná už o neúplnú informáciu. Pri riešení takejto rozhodovacej situácii môžu byť využité rozhodovacie stromy alebo Bayesova veta.

O rozhodovaní za neistoty hovoríme práve vtedy, ak subjektu rozhodovania sú známe dôsledky variantov rozhodovania, taktiež možné budúce stavy sveta, ale nepozná pravdepodobnosti ich výskytu. Pri rozhodovaní o výbere kompromisného variantu je možné využiť viacero metód, pričom medzi najznámejšie zaradujeme, napr. Pravidlo maximaxu, Hurwiczovo pravidlo alebo Laplaceove pravidlo.

³ FOTR, J. – PÍŠEK, M. 1986. *Exaktní metody ekonomického rozhodování*.. Praha: Academia, 1986, s.10. ISBN 21-013-86

⁴ FOTR, J. – ŠVECOVÁ, L. - KOL. 2010. *Manažérske rozhodování: postupy, metody a nástroje*. 2. vyd. Praha 4: Ekopress, 2010, s.28. ISBN 978-80-86929-59-0

Posledným typom rozhodovacej situácie, ktorý môže nastať a súčasne aj predmetom skúmania záverečnej práce je rozhodovanie v podmienkach neurčitosti.

Obrázok 1: Klasifikácia rozhodovacích procesov



[Zdroj: vlastné spracovanie]

Rozhodovanie za neurčitosti vo viackriteriálnom rozhodovaní sa uplatňuje v prípade nedostatku informácií či už o možných stavoch sveta, alebo dôsledkov variantov rozhodovania. V takomto prípade, dôsledky variantov môžu nadobúdať nepresne stanovenú hodnotu alebo môžu byť popísané vágne. O vágnom popise hovoríme vtedy, ak konkrétny variant podľa určitého kritéria disponuje slovným hodnotením. Príkladom takejto rozhodovacej situácie je výber nového bývania v hlavnom meste, keď jeden z možných variantov je stredne veľký byt nachádzajúci sa blízko centra, neďaleko zastávky mestskej hromadnej dopravy, s pomerne hlučným prostredím.

V reálnom živote sa často stretávame so situáciami, keď musíme riešiť rozhodovací problém, ktorý je ovplyvňovaný prvkami neurčitosti. V takýchto podmienkach je ťažšie riešiť úlohu viackriteriálneho rozhodovania, keďže sa predpokladá stochastický prístup. V súčasnosti existuje viacero spôsobov riešenia rozhodovacích problémov v podmienkach neurčitosti.

Medzi najviac používané zaraďujeme intervalovú analýzu, teda ohodnotenie jednotlivých dôsledkov variantov x_{ij} , $i \in (1, 2, \dots, i)$, $j \in (1, 2, \dots, j)$ otvoreným alebo uzatvoreným intervalovým odhadom. Nevýhodou intervalovej analýzy je, že každému prvku z intervalu je priradená rovnaká dôležitosť.

Ďalšie možné spôsoby sú aplikácia pravdepodobnostného prístupu s využitím Bayesovej vety, teória Rough množín, pseudokritéria alebo Dempster-Schaferova teória, ktoré sú podrobnejšie charakterizované a popísané v literatúre (51).

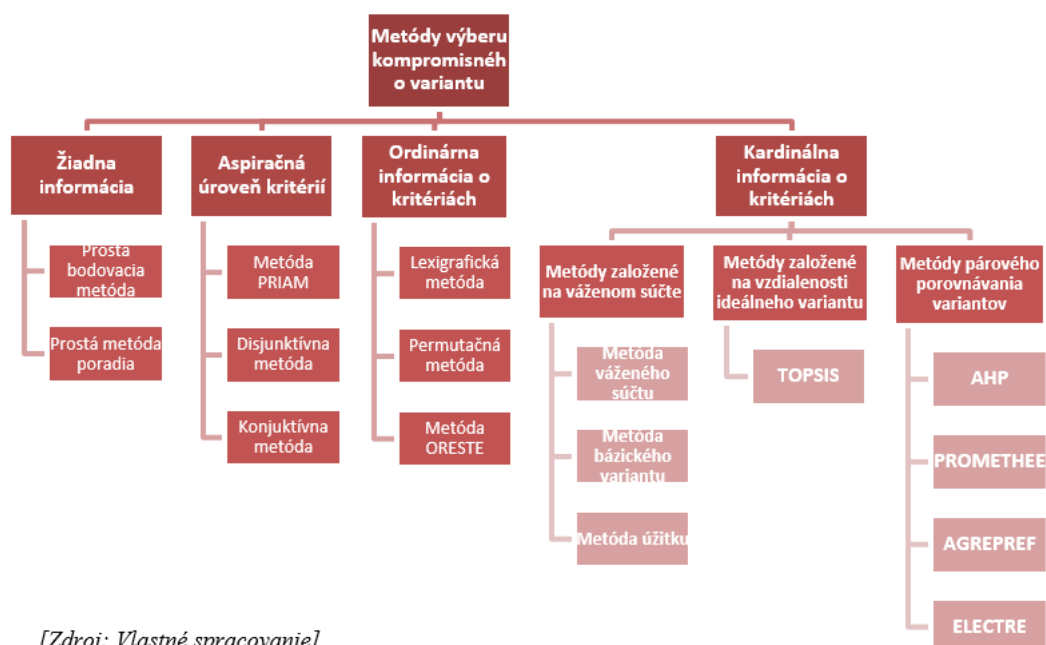
Pri porovnaní intervalovej analýzy s teóriou fuzzy množín pozorujeme, že fuzzy množiny reálnejšie vystihujú neurčitosť, keďže pracujú so stupňom príslušnosti, ktorý pripisuje každej časti danej množiny inú dôležitosť. Práve na základe spomenutej skutočnosti sme sa rozhodli, že neurčitosť v úlohe viackriteriálneho rozhodovania v tejto

záverečnej práci vyjadríme pomocou teórie fuzzy množín a fuzzy čísel. Jej detailný popis sa nachádza na konci prvej kapitoly.

1.1.4 Klasifikácia metód výberu kompromisného variantu

Teória viackriteriálneho rozhodovania poskytuje širokú škálu metód výberu kompromisného variantu, ktoré pomáhajú pri riešení akéhokoľvek rozhodovacieho problému. Nasledujúca klasifikácia metód uvažuje s konečným počtom variantov riešenia a konečným počtom kritérií, pričom pri rozdelení metód je zohľadnená úroveň preferencií medzi jednotlivými kritériami.

Obrázok 2: Klasifikácia metód výberu kompromisného variantu



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Prvá skupina metód nepredpokladá žiadnu informáciu o dôležitosti jednotlivých kritérií. Považuje každé hľadisko porovnávania variantov za rovnako dôležité, a preto im pripisuje rovnakú váhu. Pri druhej skupine metód subjekt rozhodovania disponuje s určitou nominálnou informáciou, ktorá napomáha k eliminácii nežiadúcich variantov. Ordinárna informácia určuje poradie dôležitosti kritérií rozhodovania. Posledná skupina vyžaduje kardinálnu informáciu o preferenciách medzi kritériami, ktorá nám okrem ich poradia dôležitosti udáva aj konkrétnu mieru preferencie medzi nimi, t. j. určuje o koľko je jedno kritérium relatívne dôležitejšie ako to druhé. Táto skupina metód je rozdelená na ďalšie tri podskupiny, ktoré sú založené na odlišných princípoch určovania kompromisného variantu. Jednou z týchto podskupín je skupina metód párového porovnávania variantov, ktorou sa budeme zaoberať v nasledujúcej podkapitole.

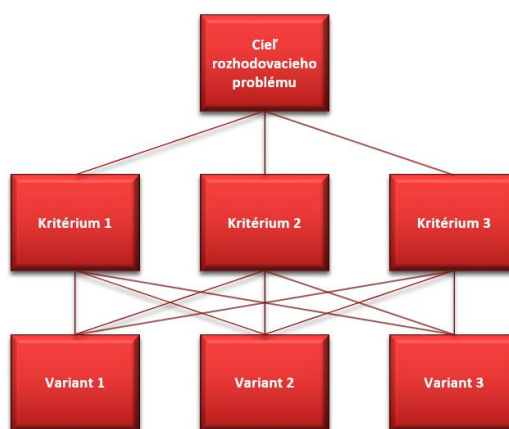
1.2 Metódy párového porovnávania variantov

Pre účely záverečnej práce bola vybraná skupina metód párového porovnávania variantov, ktorá patrí do skupiny metód vyžadujúcich kardinálnu informáciu o preferenciách medzi kritériami. Tieto metódy majú v praxi veľké využitie, nevedú len k určeniu kompromisného variantu, ale aj k celkovému poradiu dôležitosti osobitných alternatív.

1.2.1 AHP (*Analytický hierarchický proces*)

Analytický hierarchický proces je kvantitatívna metóda, ktorá poskytuje rámec pre riešenie ťažšie štruktúrovaných rozhodovacích problémov ich rozložením na jednoduchšie časti. Jednotlivé časti sú súčasťou viacerých úrovní, ktoré tvoria hierarchickú štruktúru. Usporiadanie hierarchie do jednotlivých úrovní zodpovedá usporiadaniu od všeobecného ku konkrétnemu, pričom na každej úrovni sa využíva Saatyho metóda párového porovnávania variantov. Prvá úroveň základného modelu metódy AHP je definovaná len jedným prvkom, čo zodpovedá globálnemu cieľu celej analýzy. Ďalšie úrovne obsahujú kritériá, resp. varianty hodnotenia, medzi ktoré je možné doplniť rôzne podkritériá podľa zložitosti posudzovaného problému.

Obrázok 3: Základná hierarchická štruktúra metódy AHP



[Zdroj: Spracované podľa⁵]

Pri určovaní kompromisného variantu pomocou metódy AHP sa najprv vytvára matica párového porovnávania variantov pre každé kritérium. V maticiach následne subjekt rozhodovania určuje veľkosť preferencie každej z dvojíc variantov, pričom využíva bodové hodnotenie, ktoré je zobrazené v tabuľke č. 1.

⁵ ROUYENDEGH, B. D. – ERKAN T. E. 2012. *Selection of academic staff using the fuzzy analytic hierarchy process (FAHP): A pilot study*. Ankara: Atilim University, 2012, s. 924. ISSN 1330-3651

Tabuľka 1: Bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov

Bodové hodnotenie	Miera preferencie
1	Rovnaká významnosť variantov
3	Slabá významnosť jedného z kritérií
5	Väčšia významnosť jedného z kritérií
7	Vysoká významnosť jedného z kritérií
9	Absolútna významnosť jedného z kritérií
2,4,6,8	Stredné hodnoty

[Zdroj: Spracované podľa⁶]

Maticu párového porovnávania variantov zloženú z prvkov s_{ij} , $i \in (1, 2, \dots, i)$, $j \in (1, 2, \dots, j)$, ktoré predstavujú bodové hodnotenie miery preferencie medzi i -tým a j -tým variantom označujeme ako maticu S . Prvky s_{ij} vyjadrujú koľkokrát je i -tý variant dôležitejší ako j -tý variant, pričom pre prvky s_{ji} platí vzťah:

$$s_{ji} = \frac{1}{s_{ij}}, \quad (1.3)$$

Hovoríme, že matica S je maticou recipročnou práve vtedy, keď vzťah (1.3) je platný pre každý prvok s_{ji} .⁷ Prvky nachádzajúce sa na diagonále matici S nadobúdajú hodnotu 1.

Po stanovení všetkých prvkov matic S pre každé kritérium, vypočítame geometrický priemer s_i pre každý variant:⁸

$$s_i = \sqrt[n]{s_{i1} * s_{i2} * \dots * s_{in}} \quad (1.4)$$

Následne sa každý geometrický priemer normuje podľa vzorca:

$$r_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^n s_i}, \quad (1.5)$$

Posledným krokom metódy AHP je určenie poradia dôležitosti posudzovaných variantov, a to na základe vzťahu:

$$u_i = \sum_{i=1}^n r_i * v_i, \quad (1.6)$$

⁶ ROUYENDEGH, B. D. – ERKAN T. E. 2012. *Selection of academic staff using the fuzzy analytic hierarchy process (FAHP): A pilot study*. Ankara: Atılım University, 2012, s. 924. ISSN 1330-3651

⁷ Spracované podľa: SLAVÍKOVÁ, M. 2010. *Saatyho Analytický hierarchický proces*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010, s. 21.

⁸ Spracované podľa: BACHÁR, M. 2015. *Využitie exaktných metód v logistike – aplikácia metódy AHP*. Trnava: STUBA, 2015, s. 17.

pričom, u_i – hodnota *i-teho* variantu, r_i – normovaný geometrický priemer *i-teho* variantu, v_i – normovaná váha *i-teho* variantu.

Alternatívu s najvyššou hodnotou u_i považujeme za kompromisný variant rozhodovacieho problému.

1.2.2 PROMETHEE

Pri vypracovaní tejto podkapitoly sme vychádzali z literatúry (13). Výsledkom porovnávania dvojice variantov x_i , $i \in (1, 2, \dots, i)$ a x_j , $j \in (1, 2, \dots, j)$ podľa kritéria k_h , $h \in (1, 2, \dots, h)$ pomocou metód triedy PROMETHEE je číslo $P_h(x_i, x_j) \in \langle 0, 1 \rangle$, ktoré vyjadruje intenzitu preferencie variantu x_i pred variantom x_j . Táto intenzita podstatne závisí na rozdiel hodnôt kritéria k_h :

$$d_h = k_h(x_i) - k_h(x_j). \quad (1.7)$$

Konkrétnu závislosť vyjadruje preferenčná funkcia $Q: R \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, pričom platí:

$$P_h(x_i, x_j) = Q(k_h(x_i) - k_h(x_j)) = Q(d_h). \quad (1.8)$$

Ak preferenčná funkcia nadobúda nasledujúce hodnoty, tak medzi *i-tým* a *j-tým* variantom sú platné tieto tvrdenia:

- $P_h(x_i, x_j) = 0 \rightarrow$ žiadna preferencia medzi *i-tým* a *j-tým* variantom,
- $P_h(x_i, x_j) \approx 0 \rightarrow$ *i-tý* variant je slabo preferovaný pred *j-tým* variantom,
- $P_h(x_i, x_j) = 1 \rightarrow$ *i-tý* variant je ostro preferovaný pred *j-tým* variantom,
- $P_h(x_i, x_j) \approx 1 \rightarrow$ *i-tý* variant je silne preferovaný pred *j-tým* variantom.

PROMETHEE poskytuje 6 základných tvarov preferenčnej funkcie $Q(d_h)$, $h \in (1, 2, \dots, h)$. Pri výpočtoch, ktoré budú realizované v praktickej časti záverečnej práce využijeme tretiu preferenčnú funkciu Q_3 , pretože ju považujeme za najvhodnejšiu pri rozhodovacích problémoch v podmienkach neurčitosti. V nasledujúcej časti sú stručne popísané jej teoretické základy.

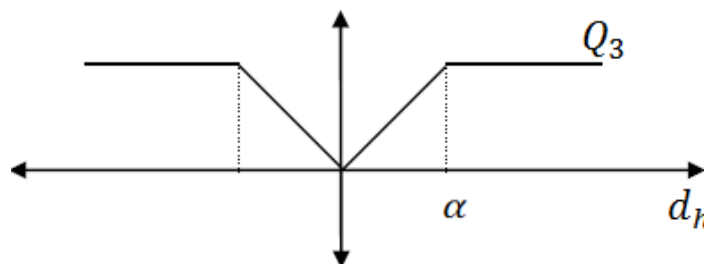
Najprv subjekt rozhodovania zadá prah preferencie α . Ak rozdiel hodnôt kritéria je menší ako nula, preferenčná funkcia Q_3 nadobudne hodnotu nula. V prípade, že rozdiel d_h je menší ako prah preferencie α , a zároveň väčší ako nula, hodnotou tretej preferenčnej funkcie je podiel rozdielu d_h a charakteristiky α . Preferenčná funkcia Q_3 je rovná jednej práve vtedy, keď rozdiel hodnôt kritéria je väčší ako hodnota α . V prípade záporného

rozdielu hodnôt kritéria, automaticky priradíme k príslušnej dvojici variantov nulovú intenzitu.

Tvar preferenčnej funkcie Q_3 a jej graf funkcie:⁹

$$Q_3 = \begin{cases} 0, & d_h \leq 0 \\ \frac{d_h}{\alpha}, & 0 \leq d_h \leq \alpha \\ 1, & d_h \geq \alpha \end{cases} \quad (1.9)$$

Graf 1: Tvar tretej preferenčnej funkcie metódy PROMETHEE



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Po stanovení hodnoty preferencie $P_h(x_i, x_j)$ pre každú dvojicu variantov za pomoci preferenčnej funkcie Q_3 , môžeme definovať globálny preferenčný index $P(x_i, x_j)$ ako vážený súčet hodnôt preferencií $P_h(x_i, x_j)$.

$$P(x_i, x_j) = \sum_{h=1}^m v_h P_h(x_i, x_j), \quad (1.10)$$

keď v_h , $h \in (1, 2, \dots, m)$ sú váhy kritérií.

Pri riešení rozhodovacieho problému metódami PROMETHEE je v neposlednom rade potrebné určiť preferenčné toky, konkrétne:

- Pozitívny tok:

$$\phi^+ = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m P(x_i, x_j), \quad (1.11)$$

- Negatívny tok:

$$\phi^- = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m P(x_j, x_i), \quad (1.12)$$

- Čistý tok, ktorý predstavuje rozdiel medzi pozitívnym a negatívnym tokom:

$$\phi_k = \phi_k^+ - \phi_k^-. \quad (1.13)$$

Jednou z najznámejších metód samotnej triedy PROMETHEE je metóda PROMETHEE II, ktorá bude využitá v praktickej časti záverečnej práce. Pomocou metódy

⁹ Spracované podľa: CHVOSTAL, A. 2015. *Viacriteriálna analýza: Použitie metódy PROMETHEE pre výber telefónneho operátora*. Bratislava: FHI EU, 2015, s.22. 103004/B/2015/3856062797

vieme určiť úplné usporiadanie variantov podľa klesajúcich hodnôt čistého toku ϕ_k , $k \in (1, 2, \dots, k)$, t. j. čím spomínaný tok nadobúda vyššiu hodnotu, tým je variant významnejší.

1.2.3 AGREPREF

Pri vypracovaní tejto časti záverečnej práce sa vychádzalo taktiež z literatúry (13). Metóda AGREPREF podobne ako metóda PROMETHEE pracuje s prahmi citlivosti. Prvým krokom samotného výpočtu je stanovenie matice preferencie variantov V .

Označme x_i i -tý a x_j j -tý variant rozhodovania. Pre každú dvojicu x_i a x_j definujeme reláciu preferencie P_α , reláciu indiferencie I_β a reláciu dispreferencie D_γ v závislosti na číslach $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$:

$$x_i P_\alpha x_j, \text{ ak } v_{ij} - v_{ji} \geq \alpha, \quad (1.14)$$

$$x_i I_\beta x_j, \text{ ak } v_{i \sim j} \geq \beta, \quad (1.15)$$

$$x_i D_\gamma x_j, \text{ ak } v_{i ? j} \leq \gamma. \quad (1.16)$$

Keď interpunkčne znamienko $\sim$ predstavuje indiferenciu a $?$ dispreferenciu.

Číslo α voláme prahom preferencie a udávame ním, aký veľký by mal byť rozdiel medzi súčtom váh kritérií, podľa ktorých je i -tý variant preferovaný pred j -tým variantom.

$$v_{ij} = \sum_{k \in P_\alpha} v_k. \quad (1.17)$$

Vzťah pre výpočet druhej alternatívy, t. j. rozdiel medzi súčtom váh kritérií, podľa ktorých je j -tý variant preferovaný pred i -tým variantom je:

$$v_{ji} = \sum_{k \in P_\alpha} v_k. \quad (1.18)$$

Číslo β sa nazýva prah indiferencie a udáva, aký veľký by mal byť súčet váh kritérií, podľa ktorého sú i -té a j -té varianty indiferentné. Výpočet je realizovaný podľa:

$$v_{i \sim j} = \sum_{k \in I_\beta} v_k. \quad (1.19)$$

Číslo γ sa nazýva prah dispreferencie a udáva, aký veľký by mal byť najvyšší súčet váh tých kritérií, podľa ktorých sú i -té a j -té varianty neporovnateľné:

$$v_{i?j} = \sum_{k \in D_\gamma} v_k. \quad (1.20)$$

Relácia $V_{\alpha\beta\gamma} = (P_\alpha, I_\beta, D_\gamma)$ je výsledkom agregovania relácií $P_\alpha, I_\beta, D_\gamma$, pričom má v čo najväčšej miere vyjadrovať ich vlastnosti. Agregovanú reláciu definujeme ako:

$$x_i V_{\alpha\beta\gamma} x_j, \text{ ak } (v_{ij} - v_{ji} \geq \alpha \text{ a/alebo } v_{i\sim j} \geq \beta) \text{ a zároveň } v_{i?j} \leq \gamma. \quad (1.21)$$

Zápis relácie $V_{\alpha\beta\gamma}$ je vo forme štvorcovej matice $V = [v_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, ktorá obsahuje nuly na hlavnej diagonále, jej počet riadkov je rovný počtu posudzovaných variantov a pre jej prvky v_{ij} platí, že sú výsledkom agregovania súčtov váh každej z relácií $P_\alpha, I_\beta, D_\gamma$. Reláciu $V_{\alpha\beta\gamma}$ nazývame maticou preferencie variantov rozhodovania.

Z matice preferencie variantov $V_{\alpha\beta\gamma} = [v_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ je potrebné následne stanoviť incidenčnú maticu $P = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ preferenčnej relácie P_α pomocou vzťahu:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ak súčet váh preferencie } i - \text{teho variantu} \\ \text{je významnejší ako } j - \text{teho,} \\ 0, \text{ inak} \end{cases}. \quad (1.22)$$

Takto vytvorená matica P musí spĺňať pravidlo tranzitívnosti, preto je potrebné zostaviť tranzitívny uzáver. Pokiaľ je i -tý variant preferovaný pred j -tým, ktorý je preferovaný pred k -tým, pre zaistenie tranzitívnosti i -tý variant musí byť preferovaný aj pred k -tým variantom. Ak takéto tvrdenie neplatí, musíme vykonať určité zmeny a opraviť maticu tak, aby splnila požadované pravidlo.

Pokiaľ je pravidlo tranzitívnosti platné, overíme či platí aj pravidlo asymetrie, ktoré hovorí, že ak prvok $p_{ij} = 1$, tak prvok $p_{ji} = 0$.

Ak platí aj pravidlo asymetrie, môžeme usporiadať riadky a stĺpce matice do takého tvaru, keď v časti nad hlavnou diagonálou matice sú len samé jednotky a v časti pod ňou sa objavujú nuly.

Následne pre každý variant x_i vypočítame hodnotu D_i , $i \in (1, 2, \dots, i)$, ktorá udáva rozdiel medzi počtom variantov pred koľkými je i -tý variant preferovaný a počtom variantov, ktoré sú preferované pred ním z celkového počtu variantov n . Charakteristiku D_i môžeme vyjadriť pomocou nasledujúceho vzťahu:

$$D_i = \sum_j p_{ij} - \sum_j p_{ji}. \quad (1.23)$$

Riadky matice usporiadame podľa klesajúcich hodnôt D_i , čím získavame maticu R , ktorá nám predstavuje výsledné usporiadanie variantov podľa vzťahu od najlepšej po najhoršiu.

1.2.4 Metódy triedy ELECTRE

Metódy triedy ELECTRE rozdeľujeme do troch podmnožín podľa dosahovaných výsledkov. Prvá podmnožina metód triedy ELECTRE slúži na triedenie variantov. Druhá podmnožina metód sa používa na rozdelenie variantov do skupín. Tretia podskupina metód okrem triedenia variantov poskytuje aj ich usporiadanie.¹⁰ Súčasťou tretej podskupiny je metóda ELECTRE III, ktorú sme si zvolili ako zástupcu triedy ELECTRE, pretože ju považujeme za najvhodnejšiu pre realizovanie výpočtov s prvkami neurčitosti.

„Metóda ELECTRE III je založená na postupnom znižovaní množiny variantov riešenia elimináciou najlepších alebo najhorších alternatív.“¹¹

Pri riešení rozhodovacieho problému metódou ELECTRE III vychádzame z rovnakej matice preferencie variantov rozhodovania V ako pri metóde AGREPREF, t. j. obe metódy majú rovnaký teoretický základ.

Najprv určíme prvok s najvyššou hodnotou V^0 z matice V :

$$V^0 = \max\{V_{ij} : X_i, X_j \in X\} \quad (1.24)$$

Taktiež druhý najvyšší prvok V^1 , ktorý označuje prah citlivosti preferencie:

$$V^1 = \max\{V_{ij} : X_i, X_j \in X, V_{ij} < V^0\} \quad (1.25)$$

Pre každý variant vypočítame charakteristiku D_i podľa vzťahu:

$$D_i = \sum_j P_{ij} - \sum_j Q_{ij}. \quad (1.26)$$

Pričom $\sum_j P_{ij}$, $i \in (1, 2, \dots, i)$, $j \in (1, 2, \dots, j)$ je počet prvkov variantu x_i , ktorých hodnota je väčšia ako prah citlivosti preferencie V^1 , potom $\sum_j Q_{ij}$, $i \in (1, 2, \dots, i)$, $j \in (1, 2, \dots, j)$ je počet prvkov variantu x_j , ktorých hodnota je väčšia ako prah citlivosti preferencie V^1 .

¹⁰ Spracované podľa: ČERNÝ, M. – GLUCKAUFOVÁ, D. 1982. *Vícekriteriální vyhodnocování v praxi*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1982, s.39. 04-325-82

¹¹ KOUBOVÁ, K. 2008. *Víackriteriální hodnocení variant za jistoty – metody rozhodování založené na párovém srovnávání variant*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2008, s.22.

Pokiaľ je vypočítaná charakteristika D_i^1 maximálna len pre jeden variant x_i , ktorý prislúcha jednoprvkovej množine A^1 , oddelíme daný variant od množiny variantov X . Variantu x_i prikladáme najvyššiu dôležitosť. Následne z matice V vypustíme príslušný riadok aj stĺpec a pre zvyšnú časť množiny variantov X , ktorú môžeme označiť ako podmnožinu Y , opakujeme celý algoritmus stanovenia prahu citlivosti preferencie.

V prípade, že vypočítaná charakteristika D_i^1 je maximálna pre viacero variantov, oddelíme množinu týchto variantov od množiny X . Novú množinu označíme písmenom A^2 , pričom platí $A^2 \subset X$ a zároveň A^2 je viacprvkovou množinou.

Z množiny A^2 vyberieme dva prvky s najvyššími hodnotami a označíme ich V^2 a V^3 . Ďalej vypočítame charakteristiku D_i^2 obdobným spôsobom ako charakteristiku D_i^1 podľa vzorca (1.25). Tento proces opakujeme, až kým charakteristika D_i^2 nebude maximálna práve pre jeden variant, čím vznikne jednoprvková indiferentná trieda. V takom prípade prvok tejto triedy vylúčime z množiny A^2 a pokračujeme v zmenšovaní množiny A^2 , kým sa nestane tiež jednoprvkovou.

Následne sa varianty množiny A^2 oddelia od celkovej množiny variantov X , čím dostávame podmnožinu Y a opäť opakujeme algoritmus stanovenia prahu citlivosti preferencie pre podmnožinu Y , kým nedostaneme poradie dôležitosti všetkých variantov.

1.3 Teória fuzzy množín

Pri vypracovávaní nasledujúcej podkapitoly autor záverečnej práce čerpal z literatúry (8) a (14).

1.3.1 Rozdiel medzi klasickými a fuzzy množinami

„Teória fuzzy množín predstavuje matematický aparát, ktorý je svojou podstatou mimoriadne vhodný pri riešení úloh viackriteriálneho rozhodovania, keď vstupné hodnoty majú neurčitý charakter.“¹²

Ak vychádzame z teórie klasických množín, množinu A vieme definovať ako podmnožinu univerzálnej množiny X , v skratke univerzum, pričom o každom prvku x z univerza X ($x \in X$) vieme jednoznačne určiť či patrí, resp. nepatrí do množiny A . Inak povedané, každý prvok x disponuje alebo nedisponuje vymedzenou vlastnosťou, ktorou sa

¹² TALAŠOVÁ, J. 2003. *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2003, s.15. ISBN 80-244-0614-4

množina A definuje. Z uvedeného vyplýva, že klasické množiny definujeme pomocou dvojhodnotovej funkcie, ktorá sa nazýva charakteristická funkcia množiny a označujeme ju φ_A . Vzťah pre jej výpočet je nasledovný:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.27)$$

Klasické množiny môžeme chápať ako špeciálny prípad fuzzy množín.

„Nech je daná množina U , t. j. univerzum. Fuzzy množina A na univerze U je definovaná zobrazením:“¹³

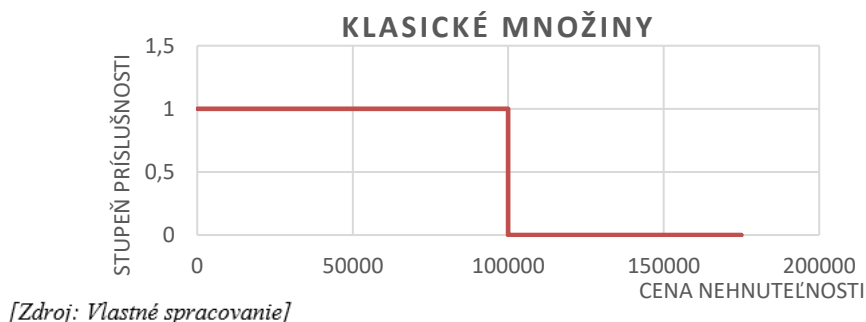
$$\mu_A: U \rightarrow \langle 0,1 \rangle. \quad (1.28)$$

Funkciu μ_A nazývame funkcia príslušnosti fuzzy množiny A . Pre každé $x \in U$ nazveme $\mu_A(x)$ stupeň príslušnosti prvku x k fuzzy množine A .

Rozdiel medzi fuzzy a klasickými množinami si vieme lepšie priblížiť na nasledujúcom príklade.

Absolvent Ekonomickej univerzity v Bratislave disponujúci s určitým množstvom finančného kapitálu si plánuje zaobstarat' v hlavnom meste bývanie. Jeho horná hranica pre kúpu novej nehnuteľnosti je 100 000€. Pri teórii klasických množín výsledkom prieskumu by boli dve množiny. Prvou sú byty s cenou nižšou ako vyššie spomínaná čiastka, ktoré nadobúdajú stupeň príslušnosti $\mu = 1$. Do druhej množiny spadajú tie prvky, ktorých cenové ohodnotenie je vyššie ako nastavená horná hranica a ich príslúchajúci stupeň príslušnosti $\mu = 0$. Podľa grafu č. 2 je zrejmé, že v prípade ak cena nehnuteľnosti nadobudne hornú hranicu, tak absolvent stále uvažuje o jej kúpe. Akonáhle však potencionálny byt je drahší o jedno euro, tak takáto nehnuteľnosť sa vylučuje, a to aj napriek tomu, že stále sa môže jednať o lepší výber ako v prípade toho prvého.

Graf 2: Tvar funkcie príslušnosti – klasická množina



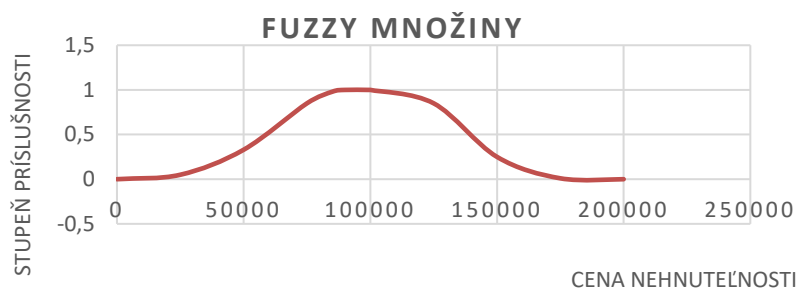
¹³ TALAŠOVÁ, J. 2003. *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2003, s.15. ISBN 80-244-0614-4

Na základe spomínaného vidíme, že teóriou klasických množín nevieme najlepšie zachytiť situáciu z reálneho sveta. V takom prípade je lepšie danú situáciu vyjadriť pomocou fuzzy množín, ktoré problémy tých klasických odstraňujú.

Stupeň príslušnosti fuzzy množín nenadobúda len dvojhodnotovú úroveň, ale akúkoľvek hodnotu z uzavretého intervalu $\langle 0,1 \rangle$, čo znamená, že stupeň príslušnosti $\mu = 0$ úplne nesplňuje podmienky, stupeň príslušnosti $\mu = 1$ úplne splňuje podmienky a hodnoty nachádzajúce sa medzi hranicami uzavretého intervalu hovoria o tom, nakoľko danú podmienku prvok x spĺňa.

Z grafu č. 3 vyplýva, že v prípade bytu, ktorého cena je 100 001€, stupeň príslušnosti μ nenadobúda hodnotu 0, ako to bolo v prípade klasických množín, ale hodnotu 0,99, čo považujeme za hodnotu odzrkadľujúcu reálny stav významnejšie.

Graf 3: Tvar funkcie príslušnosti – fuzzy množina



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

1.3.2 Vlastnosti fuzzy množín

Nasledujúce pojmy sú dôležité pri popise fuzzy množín, preto je relevantné každú z týchto vlastností fuzzy množín charakterizovať a definovať.

- **Nosič**

Nosič fuzzy množiny A je ostrá množina s vlastnosťou:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}. \quad (1.29)$$

- **Jadro**

Do jadra zaraďujeme všetky prvky, ktorých stupeň príslušnosti sa rovná hodnote jeden.

$$\text{core}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}. \quad (1.30)$$

- **Výška**

Výška fuzzy množiny A je najväčšia hodnota stupňa príslušnosti z prvkov patriacich do množiny A .

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x). \quad (1.31)$$

- **Normálna fuzzy množina**

Fuzzy množina je normálna, ak stupeň príslušnosti aspoň jedného prvku sa rovná hodnote jeden.

$$\exists x \in X, \mu_A(x) = h(A) = 1. \quad (1.32)$$

- **Konvexná fuzzy množina**

Množina A je konvexnou fuzzy množinou, ak pre každé $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ platí:

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle: \mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)). \quad (1.33)$$

- **Alfa rez fuzzy množiny**

Alfa rez množiny A je ostrá množina $A^{(\alpha)}$, do ktorej patria všetky prvky, ktoré majú stupeň príslušnosti do fuzzy množiny A väčší alebo rovnajúci sa hodnote α , pričom $\alpha \in (0,1)$.

$$A^{(\alpha)} = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}, \forall x \in X. \quad (1.34)$$

1.3.3 Fuzzy čísla

Fuzzy čísla považujeme za podmnožinu fuzzy množín, pričom reprezentujú približné hodnoty konkrétnych reálnych čísel. Vo veľkej miere slúžia na vyjadrenie neurčitosti v úlohách viackriteriálneho rozhodovania. Neurčitosť pomocou fuzzy čísel vieme vyjadriť, napr. v prípade nepresných výsledkov merania, neurčito zadaných číselných hodnotách alebo jazykovo zadaných matematických dátach.

Fuzzy množina A nad univerzálnou množinou X je fuzzy číslom, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

- A je konvexná fuzzy množina,
- Nosič ($\text{supp}(A)$) je ohraničený,
- A je normálna fuzzy množina.

Fuzzy množina A je fuzzy číslom práve vtedy, ak pre reálne čísla x_1, x_2, x_3, x_4 platí vzťah $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ tak, že pre funkciu príslušnosti $A(\cdot)$ potom platí:

$$A(x) = \begin{cases} L(x), & \text{pre } x \in (-\infty, x_2) \\ 1, & \text{pre } x \in (x_2, x_3) \\ P(x), & \text{pre } x \in (x_3, \infty) \end{cases} \quad (1.35)$$

keď:

- funkcia $L: (-\infty, x_2) \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je neklesajúca, spojitá sprava a $L(x) = 0$, pre $x \in (-\infty, x_1)$,
- funkcia $P: (x_3, \infty) \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je nerastúca, spojitá zľava a $P(x) = 0$, pre $x \in (x_4, \infty)$.

1.3.4 Tvary fuzzy čísel

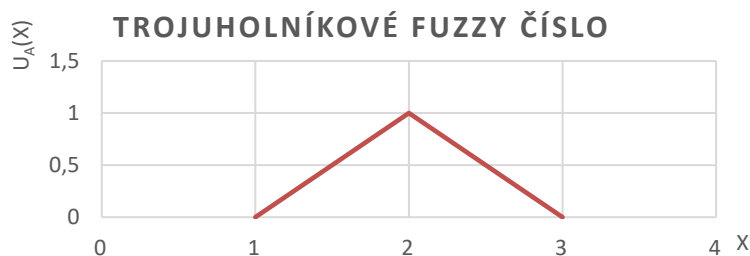
V tejto časti záverečnej práce sú uvedené základne typy fuzzy čísel, konkrétne trojuholníkové a lichobežníkové fuzzy čísla, ktoré budú využité v úlohe viackriteriálneho rozhodovania vo výsledkoch práce. Iné typy fuzzy čísel uvažovať nebudeme.

• Trojuholníkové fuzzy číslo

Toto číslo definujeme dolným ohraničením a , horným ohraničením b nosiča a hodnotou m , v ktorej dosahuje najväčšiu hodnotu stupňa príslušnosti:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = m \\ \frac{x-a}{m-a}, & x \in (a, m) \\ \frac{b-x}{b-a}, & x \in (m, b) \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \quad (1.36)$$

Graf 4: Trojuholníkové fuzzy číslo



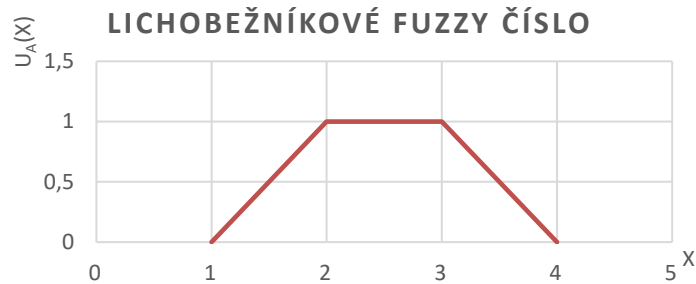
[Zdroj: Vlastné spracovanie]

• Lichobežníkové fuzzy číslo

Lichobežníkové fuzzy číslo je definované dolným a a horným ohraničením d nosiča a dolnou b a hornou hranicou c jadra:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \vee x \geq d \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \in (b, c) \\ \frac{d-x}{d-c}, & x \in (c, d) \end{cases} \quad (1.37)$$

Graf 5: Lichobežníkové fuzzy číslo



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

1.3.5 Operácie s fuzzy číslami

Ako už bolo spomenuté, v praktickej časti neurčitost' v úlohe viackriteriálneho rozhodovania bude vyjadrená pomocou trojuholníkových a lichobežníkových fuzzy čísel, tak práve preto si uvedieme logiku aritmetických operácií nad takýmito fuzzy číslami. Autor záverečnej práce vychádzal z literatúry (23), (35) a (45).

Nech $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\tilde{C} = (c_1, c_2, c_3)$ sú dve trojuholníkové fuzzy čísla, potom sčítanie týchto dvoch čísel vyjadruje vzťah:

$$\tilde{A} + \tilde{C} = (a_1 + c_1, a_2 + c_2, a_3 + c_3). \quad (1.38)$$

Ich odčítanie je definované ako:

$$\tilde{A} - \tilde{C} = (a_1 - c_3, a_2 - c_2, a_3 - c_1). \quad (1.39)$$

Násobenie trojuholníkových fuzzy čísel sa vypočíta podľa:

$$\tilde{A} \times \tilde{C} = (\min(a_1c_1, a_1c_3, a_3c_1, a_3c_3), a_2c_2, \max(a_1c_1, a_1c_3, a_3c_1, a_3c_3)). \quad (1.40)$$

Delenie takýchto čísel je potom definované podľa vzťahu:

$$\tilde{A} \div \tilde{C} = \left(\min\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_1}{c_3}, \frac{a_3}{c_1}, \frac{a_3}{c_3}\right), \frac{a_2}{c_2}, \max\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_1}{c_3}, \frac{a_3}{c_1}, \frac{a_3}{c_3}\right) \right). \quad (1.41)$$

Sčítavanie a odčítavanie dvoch lichobežníkových fuzzy čísel $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ a $\tilde{D} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ vychádza zo vzťahov (1.38) a (1.39), ktoré rozšírime o posledné prvky b_4 a d_4 oboch fuzzy čísel s príslušným operátorom.

Násobenie lichobežníkových fuzzy čísel je dané vzťahom: (1.42)

$$\tilde{B} \times \tilde{D} = (\min(b_1 d_1, b_1 d_4, b_4 d_1, b_4 d_4), \\ \min(b_2 d_2, b_2 d_3, b_3 d_2, b_3 d_3), \max(b_2 d_2, b_2 d_3, b_3 d_2, b_3 d_3), \max(b_1 d_1, b_1 d_4, b_4 d_1, b_4 d_4))$$

Delenie lichobežníkových fuzzy čísel vyjadríme pomocou vzorca:

$$\tilde{B} \div \tilde{D} = \left(\min\left(\frac{b_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_4}, \frac{b_4}{d_1}, \frac{b_4}{d_4}\right), \right. \\ \left. \min\left(\frac{b_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_3}, \frac{b_3}{d_2}, \frac{b_3}{d_3}\right), \max\left(\frac{b_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_3}, \frac{b_3}{d_2}, \frac{b_3}{d_3}\right), \max\left(\frac{b_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_4}, \frac{b_4}{d_1}, \frac{b_4}{d_4}\right) \right) \quad (1.43)$$

1.3.6 Defuzzifikácia

Pod pojmom defuzzifikácia fuzzy čísel rozumieme nahradzovanie fuzzy čísel číslami reálnymi, ktoré sa snažia presne vystihnúť dané fuzzy čísla. Existuje viacero metód defuzzifikácie, ktoré sa navzájom líšia v ich výpočtovej náročnosti. Medzi najviac využívané skupiny metód zaraďujeme:

- Metódy využívajúce tvar funkcie príslušnosti:
 - Metódy maxima
 - Metódy ťažiska
- Metódy očakávanej hodnoty fuzzy čísla

Pre účely záverečnej práce si bližšie popíšeme metódy využívajúce tvar funkcie príslušnosti, pričom druhou skupinou metód sa zaoberať nebudeme z dôvodu dodržania obsahu tejto práce. Z metód maxima si predstavíme metódu stredného maxima, ktorá bude výpočtovo jednoduchšia ako druhá vybraná metóda, metóda ťažiska. Metóda stredného maxima sa zameriava iba na časť funkcie príslušnosti, kde nájdeme jej maximálne hodnoty. Metóda ťažiska berie do úvahy jej celý tvar.

1.3.6.1 Metóda stredného maxima

Pri nahradzovaní fuzzy čísel číslami reálnymi pomocou tejto metódy je najprv potrebné nájsť také hodnoty, pre ktoré funkcia príslušnosti dosahuje maximálnu hodnotu, t. j. hľadáme také čísla, pre ktoré výška fuzzy množiny je maximálna:

$$x^0 = \arg\{\max \mu_A(x)\}. \quad (1.44)$$

V prípade, ak $\mu_A(x)$ dosahuje maximálnu hodnotu pre jeden argument, potom daný argument je riešením defuzzifikácie. Ak $\mu_A(x)$ nadobúda maximálnu hodnotu pre viacero argumentov, riešením defuzzifikácie bude reálne číslo vyjadrené podľa vzťahu:

$$x^0 = \frac{x_1^0 + x_d^0}{2}. \quad (1.45)$$

Keď x_1^0 je najmenší argument dosahujúci maximálny stupeň príslušnosti a naopak x_d^0 je najväčší argument.

Metóda stredného maxima sa často využíva pri lineárnych fuzzy číslach najmä vďaka jej jednoduchosti.

1.3.6.2 Metóda ťažiska

Táto metóda vypočítava reálne číslo pomocou ťažiska plochy, ktorú vytvára fuzzy množina nasledovne:

$$x^0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x) x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x) dx} \quad (1.46)$$

V prípade trojuholníkových fuzzy čísel, výpočet ich ťažísk vieme zjednodušiť.

Nech $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ je trojuholníkové fuzzy číslo, potom pre ťažisko x^0 platí vzťah:¹⁴

$$x^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_3^2 - a_1^2 + a_2 a_3 - a_1 a_2}{a_3 - a_1}. \quad (1.47)$$

Pri lichobežníkovom fuzzy čísle $\tilde{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, vzorec pre výpočet jeho ťažiska je:

$$x^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_4 c_3 - c_2 c_1}{c_4 + c_3 - c_2 - c_1}. \quad (1.48)$$

1.3.7 Porovnávanie fuzzy čísel

Pri vypracovávaní tejto podkapitoly sme vychádzali z literatúry (19). Porovnanie dvoch fuzzy čísel nie je také jednoduché ako porovnávanie dvoch reálnych, keďže fuzzy čísla sú zadane nejednoznačne, predstavujú nejasné hodnoty, a taktiež môže nastať ich vzájomné prekrývanie. V takom prípade nevieme s istotou určiť, ktoré z porovnávaných fuzzy čísel je dominujúce a naopak, ktoré z nich je dominované.

¹⁴ Spracované podľa: NOVOSÁDOVÁ, L. 2012. *Metody defuzzifikace fuzzy čísel*. Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, s.27.

Existuje viacero metód, pomocou ktorých fuzzy čísla vieme navzájom porovnávať. Tieto metódy sa líšia princípmi, na základe ktorých pracujú. Každá z nich má svoje výhody ale aj nevýhody, pričom je zrejmé, že neposkytujú rovnaké výsledky. Klasifikácia kategórií metód porovnávania fuzzy čísel je:

- Relácie preferencie
- Fuzzy bodovanie
- Lingvistické vyjadrovanie
- Usporiadanie podľa číselnej charakteristiky

Do kategórie relácie preferencií zaraďujeme metódu Alfa-rezov alebo metódu Fuzzy Max Order. Tieto metódy určujú nakoľko je jedno fuzzy číslo preferované pred druhým. Fuzzy bodovanie je založené na porovnávaní veľkosti plochy dvoch fuzzy čísel, resp. vzdialenosti medzi nimi. Ako je z názvu zrejmé pri metódach kategórie lingvistické vyjadrovanie, číselné hodnoty budú nahradzované ich jazykovými ekvivalenciami, ktoré poukazujú na stupeň dôležitosti daných výrazov. Poslednou kategóriu metód porovnávania fuzzy čísel sú centroidné metódy, t. j. usporiadanie fuzzy čísel podľa vypočítanej deterministickej hodnoty, ktorá predstavuje číselnú charakteristiku daného fuzzy čísla.

Pre porovnávanie fuzzy čísel v záverečnej práci využijeme metódu Fuzzy Max Order a niektoré z centroidných metód, konkrétne Yagerov index a metódu mediánu. Metóda Fuzzy Max Order pracuje na inom princípe ako metódy využívajúce číselný index, preto bude zaujímavé tieto rôznorodé prístupy porovnať.

1.3.7.1 Fuzzy Max Order

Pri tejto metóde porovnávania dvoch fuzzy čísel $\tilde{A}$ a $\tilde{C}$ je potrebné určiť ich minimum a maximum. Najprv je však nevyhnutné definovať operácie nad fuzzy číslami, konkrétne prienik a zjednotenie.

Prienikom dvoch fuzzy čísel je:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{C}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)], \forall x \in X. \quad (1.49)$$

Zjednotenie dvoch fuzzy čísel je definované ako:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{C}}(x) = \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)], \forall x \in X. \quad (1.50)$$

Fuzzy číslo $\tilde{A}$ je väčšie nanajvýš rovné fuzzy číslu $\tilde{C}$, $\tilde{A} \geq \tilde{C}$, ak platí:

$$\tilde{A} = \tilde{A} \cup \tilde{C}, \text{ resp. } \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{C}. \quad (1.51)$$

Dve fuzzy čísla sú zhodné, ak platí rovnosť medzi ich stupňami príslušnosti:

$$\tilde{A} = \tilde{C} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{C}}(x), \forall x \in X. \quad (1.52)$$

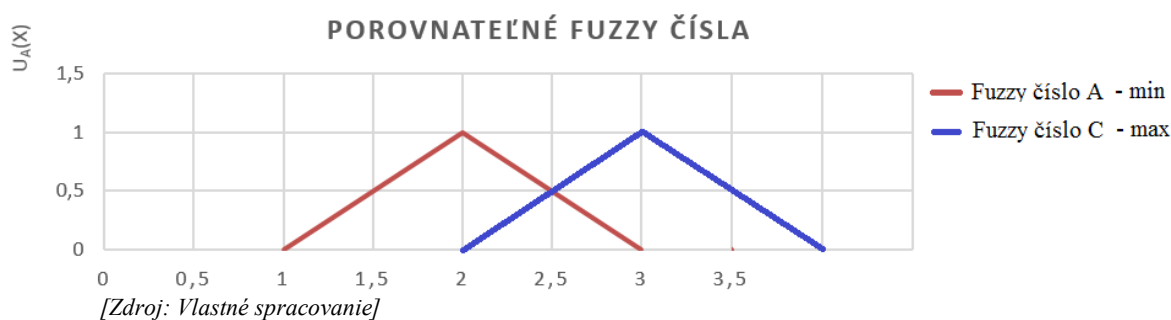
Pre fuzzy čísla $\tilde{A}$ a $\tilde{C}$ platí, že fuzzy číslo $\tilde{A}$ je väčšie ako fuzzy číslo $\tilde{C}$, $\tilde{A} > \tilde{C}$, práve vtedy, keď platí vzťah (1.51) a zároveň $\tilde{A} \neq \tilde{C}$.¹⁵

Fuzzy čísla $\tilde{A}$ a $\tilde{C}$ považujeme za neporovnateľné, ak:

- fuzzy číslo $\tilde{A}$ nie je väčšie ako fuzzy číslo $\tilde{C}$, $\tilde{A} \not> \tilde{C}$,
- fuzzy číslo $\tilde{C}$ nie je väčšie ako fuzzy číslo $\tilde{A}$, $\tilde{A} \not< \tilde{C}$,
- neplatí vzťah (1.52).

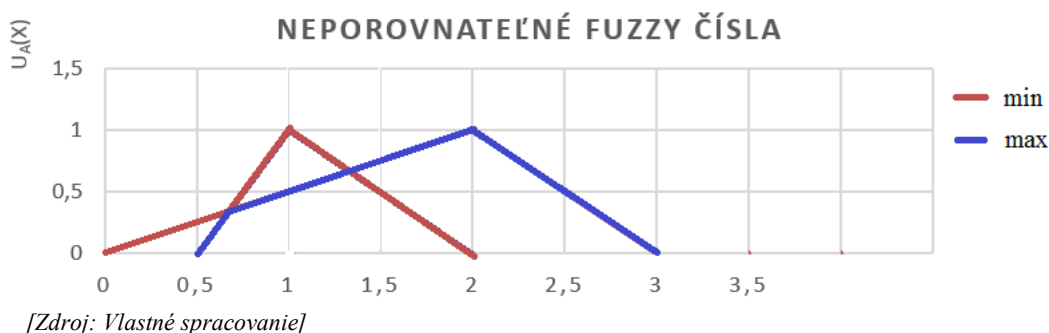
Na grafe č. 6 je vidieť porovnanie dvoch fuzzy čísel $\tilde{A}$ a $\tilde{C}$, pričom je zrejmé, že fuzzy číslo $\tilde{C}$ v tomto prípade je väčšie ako fuzzy číslo $\tilde{A}$.

Graf 6: Porovnateľné fuzzy čísla metódou Fuzzy Max Order



Graf č. 7 poukazuje na situáciu, keď dve fuzzy čísla nie je možné porovnať pomocou metódy Fuzzy Max Order, keďže fuzzy číslo $\tilde{C}$ nie je väčšie ako fuzzy číslo $\tilde{A}$ na celej svojej časti.

Graf 7: Neporovnateľné fuzzy čísla metódou Fuzzy Max Order



¹⁵ Spracované podľa: DOROHONCEANU, B. 2012. *Comparing Fuzzy Numbers*. [Online: 4.marec 2017], Dostupné na internete: <<http://www.drdobbs.com/jvm/comparing-fuzzy-numbers/184405225?pgno=1>>

Z uvedeného vyplýva, že len veľmi málo fuzzy čísel je porovnateľných metódou Fuzzy Max Order. Vysloviť výrok, že jedno z čísel je väčšie ako to druhé je možné len v prípade, ak to bude jednoznačne preukázateľné.

1.3.7.2 Yagerov index

Základom pre vývoj novších centroidných metód je Yagerov index. Charakteristika vypočítaná týmto indexom sa nazýva aj ťažiskom fuzzy čísla a vzťah pre jej výpočet je rovnaký ako formula (1.46) popísaná v podkapitole Defuzzifikácia v sekcii metódy ťažiska.

Je zrejmé, že pri porovnávaní dvoch fuzzy čísel $\tilde{A}$ a $\tilde{C}$ pomocou Yagerovho indexu hovoríme, že fuzzy číslo $\tilde{A}$ je väčšie nanajvýš rovné fuzzy číslu $\tilde{C}$ práve vtedy, keď vypočítaná číselná charakteristika fuzzy čísla $\tilde{A}$ pomocou vzťahu (1.46) je väčšia nanajvýš rovná číselnej charakteristike druhého fuzzy čísla.

1.3.7.3 Medián

Vzorec pre medián fuzzy čísla $\tilde{A} = \{[\underline{a}(\alpha), \bar{a}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0,1 \rangle\}$ je nasledovný:¹⁶

$$m_A = \int_0^1 \frac{\underline{a}(\alpha) + \bar{a}(\alpha)}{2} d\alpha. \quad (1.53)$$

Podobne ako pri Yagerovom indexe aj pri mediáne si vieme jeho výpočet pre trojuholníkové alebo lichobežníkové fuzzy číslo zjednodušiť. Nech $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ je trojuholníkové fuzzy číslo, potom pre jeho medián platí vzťah:

$$m_C = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4}. \quad (1.54)$$

Pre lichobežníkové fuzzy číslo $\tilde{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ vzorec pre výpočet mediánu je:

$$m_A = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}. \quad (1.55)$$

Pri porovnávaní fuzzy čísel na základe mediánu hovoríme, že v prípade ak medián m_A je väčší nanajvýš rovný mediánu m_C , tak fuzzy číslo $\tilde{A}$ je väčšie nanajvýš rovné fuzzy číslu $\tilde{C}$.

Pomocou popísaných dvoch číselných charakteristík fuzzy čísel vieme tieto čísla úplne usporiadať, t. j. každé z takýchto fuzzy čísel je navzájom porovnateľné, preto výsledkom riešenia rozhodovacieho problému je poradie dôležitosti jednotlivých variantov.

¹⁶ Spracované podľa: HAJJARI, T. *New centroid index for ordering fuzzy numbers*. International Scientific Journal, Journal of Mathematics, <<http://mathematics.scientific-journal.com/articles/1/2.pdf>>

2. Cieľ práce

Vo viackriteriálnej analýze sú často využívané metódy párového porovnávania variantov pre výber kompromisného variantu z množiny posudzovaných variantov, resp. určenie poradia ich dôležitosti. Tieto metódy boli svojimi autormi (3), (6) a (13) navrhnuté pre rozhodovanie za istoty. Namiesto je preto otázka, ako sa tieto metódy chovajú v prípade rozhodovania v podmienkach neurčitosti.

Ako už bolo uvedené v prvej kapitole záverečnej práce, neurčitosť v rozhodovacích procesoch je možné popísať viacerými spôsobmi. Medzi najviac využívané zaradujeme intervalovú analýzu a pravdepodobnostný prístup, ktorý pracuje s Bayesovou vetou. V literatúre (51) sú detailne charakterizované a popísané prístupy ako teória Rough množín, pseudokritéria a Dempster-Schaferova teória.

Najnovšie práce (33) a (41), zaoberajúce sa rozhodovaním v podmienkach neurčitosti, sú orientované na vyjadrenie neurčitosti použitím teórie fuzzy množín, a to najmä vďaka vlastnostiam, ktorými tieto množiny disponujú. Konkrétne hovoríme o exaktnosti pri definovaní miery neurčitosti, ktorú napr. intervalová analýza nezahŕňa.

V literatúre (14) sa využitie fuzzy prístupu sústreďí hlavne na metódy založené na váženom súčte. Použitie v metódach párového porovnávania variantov je pomerne zriedkavé a orientuje sa skôr na vyjadrenie neurčitosti pomocou rôznych typov intervalov pri opise stupňov podobnosti či ekvivalencie. Až v publikáciách (21) a (24) bol navrhnutý algoritmus založený na fuzzy prístupe pre metódu AHP. Keďže sa nepodarilo nájsť dostupnú literatúru pre ostatné metódy párového porovnávania variantov, fuzzy prístup pri metóde AHP môžeme považovať za odrazový mostík pri návrhu algoritmov spomínaných metód, čo považujeme ako jeden z vlastných prínosov tejto práce.

Z uvedených dôvodov, hlavným cieľom záverečnej práce je analýza možností využitia fuzzy prístupu v metódach párového porovnávania variantov v podmienkach neurčitosti. Očakávaným výsledkom analýzy je odpoveď na otázku, či je vôbec potrebné sa zaoberať metódami párového porovnávania variantov v prípade rozhodovania za neurčitosti.

Vychádzajúc z doterajších výsledkov v oblasti využívania fuzzy prístupu v metódach párového porovnávania variantov medzi cieľe záverečnej práce zaradujeme:

- Popis logiky fuzzy algoritmu metódy AHP a jeho implementácia na rôzne typy fuzzy čísel. Porovnanie dosiahnutých výsledkov s klasickým deterministickým prístupom metódy AHP.
- Použitie metódy PROMETHEE v podmienkach neurčitosti s využitím rôznych typov fuzzy čísel. Aplikácia fuzzy aritmetických operácií pri výpočtoch. Komparácia dosiahnutých výsledkov analýzy s klasickou metódou PROMETHEE a s výsledkami Fuzzy AHP prístupu.
- Použitie metódy AGREPREF a ELECTRE III v podmienkach neurčitosti. Párové porovnávanie výplatných funkcií variantov na základe metód porovnávania fuzzy čísel. Komparácia dosiahnutých výsledkov analýzy v rámci spomínaných metód, a taktiež s výsledkami Fuzzy AHP prístupu a metódy PROMETHEE.
- Analýza možnosti vyjadrenia neurčitosti vo váhach kritérií, následná implementácia na konkrétny rozhodovací problém s využitím Fuzzy AHP prístupu a metód PROMETHEE, AGREPREF a ELECTRE III. Porovnanie výsledkov s už dosiahnutými, keď neurčitosť vo váhach nebola obsiahnutá.
- Súhrn dosiahnutých výsledkov celej analýzy využitia metód párového porovnávania variantov pracujúcich s teóriou fuzzy množín a fuzzy čísel v podmienkach neurčitosti. Zhodnotenie vhodnosti a efektívnosti využitia fuzzy prístupu v porovnaní s deterministickým prístupom.

3. Metodika práce a metody skúmania

Vychádzajúc z názvu tejto záverečnej práce je zrejmé, že predmetom jej skúmania sú metódy párového porovnávania variantov, konkrétne metódy AHP, PROMETHEE, AGREPREF a ELECTRE III. Každá z týchto metód disponuje spoľahlivým algoritmom, na základe ktorého jednotlivec, resp. skupina jednotlivcov vie prísť ľahko k záveru riešenia rozhodovacieho problému, výberu kompromisného variantu alebo stanovenia poradia dôležitosti posudzovaných variantov, ak sa uvažuje ich konečná množina. Tvrdenie je platné v prípade podmienok istoty, t. j. subjekt rozhodovania s určitosťou vie, aké budú výplatné funkcie jednotlivých variantov.

Cieľom práce je hĺbková analýza možnosti využitia metód párového porovnávania variantov v rozhodovacích problémoch obsahujúcich prvky neurčitosti. Prvotným skúmaním a získavaním znalostí o tejto problematike sme zistili, že dostupnej literatúry, ktorá opisuje využitie spomínaných metód v podmienkach neurčitosti je málo.

Práce (14) a (54) pojednávajú o rozhodovaní v podmienkach neurčitosti využívajúc metódy založené na váženom súčte. Pri vyjadrení neurčitosti autori spomínanej literatúry využili teóriu fuzzy množín a fuzzy čísel, ktorú sme sa taktiež rozhodli použiť a aplikovať na metódy párového porovnávania variantov.

V literatúre (21) a (24) je popísaný algoritmus metódy AHP využívajúcej fuzzy prístup, ktorý použijeme pri riešení rozhodovacieho problému vo výsledkoch práce. Známa literatúra o využití teórie fuzzy množín v ostatných metódach párového porovnávania variantov sa nenašla, preto postupy pri týchto metódach sú vlastnými návrhmi autora.

Metóda PROMETHEE predstavuje spojenie prístupu klasickej metódy a teórie fuzzy čísel, najmä aritmetických operácií medzi nimi. Metódy AGREPREF a ELECTRE III vychádzajú z rovnakej matice preferencie variantov V . Pri jej stanovení sa vo veľkej miere využívajú metódy porovnávania fuzzy čísel.

Existuje mnoho metód, na základe ktorých je možné dvojicu fuzzy čísel porovnávať. Medzi najnovšiu skupinu patria metódy centroidné, ktoré umožňujú vyjadriť číselnú charakteristiku prislúchajúcu ku konkrétnemu fuzzy číslu. Deterministické hodnoty číselných charakteristík je možné medzi sebou ľahko porovnávať, čím je uskutočnená aj komparácia fuzzy čísel. Najviac využívané centroidné metódy sú Yagerov index a metóda mediánu, a práve tieto dve využijeme vo výsledkoch práce. Ďalšou skupinou metód

porovnávania fuzzy čísel sú metódy, ktoré uskutočňujú komparáciu na základe ich tvaru. Sem zaraďujeme metódu Fuzzy Max Order, ktorá bude tiež použitá pri metódach AGREPREF a ELECTRE III. Pri tejto metóde však vzniká obava, že nie každú dvojicu fuzzy čísel bude možné podľa nej porovnať.

Každá z metód párového porovnávania variantov bude aplikovaná na konkrétny rozhodovací problém. Na mieste je však otázka, aký tvar fuzzy čísel ako reprezentantov neurčitosti v rozhodovacom probléme použiť? Najmä vďaka zložitosti výpočtov s viacerými druhmi fuzzy čísel, pre účely tejto práce sa využijú lineárne trojuholníkové a lichobežníkové fuzzy čísla, konkrétne ich rôznostranné a rovnoramenné podoby. Z uvedeného vyplýva, že každá z metód párového porovnávania variantov sa použije na rozhodovaciu situáciu využívajúcu štyri rozličné druhy fuzzy čísel.

Výpočtová náročnosť aj napriek lineárnym fuzzy číslam ostáva vysoká, preto dosiahnuté výsledky porovnáme s výsledkami metód využívajúcich deterministické hodnoty, kde sa tak vysoká výpočtová náročnosť nepredpokladá. Deterministické hodnoty stanovíme defuzzifikáciou fuzzy čísel podľa metódy ťažiska. Cieľom tejto komparácie je odpoveď na otázku, či využitie fuzzy prístupu v metódach párového porovnania variantov je zmysluplné.

V neposlednom rade je potrebné podotknúť, že neurčitosť, ktorá bola doteraz spomínaná sa týka výplatných funkcií, resp. dôsledkov jednotlivých variantov. Jedným z parciálnych cieľov práce je analýza možností implementácie neurčitosti aj na váhy kritérií, keď sa opäť berú do úvahy metódy párového porovnávania variantov, ktoré riešia rozhodovací problém za podmienok neurčitosti, ktorá je reprezentovaná rôznostrannými trojuholníkovými fuzzy číslami. Skúmanie využitia neurčitosti vo váhach kritérií považujeme ako jeden z ďalších vlastných prínosov diplomovej práce.

4. Výsledky práce

Štvrtá kapitola popisuje aplikáciu metód párového porovnávania variantov na konkrétny rozhodovací problém viackriteriálnej analýzy v podmienkach neurčitosti s využitím fuzzy prístupu. Predtým ako si predstavíme konkrétnu rozhodovaciu situáciu, poukážeme na filozofiu navrhovaného postupu riešenia problému, a taktiež na prepojenie metód párového porovnávania variantov s teóriou fuzzy množín.

4.1 Filozofia postupu riešenia

Ako už bolo uvedené, pri rozhodovaní za neurčitosti riešiteľ rozhodovacieho problému musí rátať s neurčitými, nejasnými výplatnými funkciami jednotlivých variantov riešenia. Fuzzy čísla sú jednou z možností ako neurčitosť v spomenutých výplatných funkciách vyjadriť. Autor diplomovej práce sa fuzzy čísla rozhodol využiť práve na základe ich vlastností, ktoré pri riešení rozhodovacieho problému poskytujú.

Čitateľovi je známe, že existuje viacero typov fuzzy čísel. Vo všeobecnosti ich delíme na lineárne a nelineárne. Pre účely tejto práce boli zvolené lineárne fuzzy čísla, a to najmä pre náročnosť aritmetických výpočtov, ktoré je potrebné realizovať s nelineárnymi fuzzy číslami.

Medzi najviac využívané lineárne fuzzy čísla zaradujeme trojuholníkové, lichobežníkové, R a L fuzzy čísla, a singleton. Z простého dôvodu singleton vylúčujeme z množiny posudzovaných fuzzy čísel, keďže reprezentuje konkrétnu deterministickú hodnotu, teda neuvažuje o neurčitosti. Rovnako neuvažujeme ani využitie R a L fuzzy čísel kvôli vlastnostiam, ktoré nadobúdajú. Ide o tvar predpisu ich funkcií, keď interval, na ktorom sa stupeň príslušnosti rovná jednej, môže byť nekonečný, čo podobne ako pri nelineárnych fuzzy číslach vedie k zložitým výpočtom.

Preto ďalej uvažujeme len trojuholníkové a lichobežníkové fuzzy čísla, konkrétne dva rozličné typy. Prvým typom sú rôznostranné trojuholníkové, resp. lichobežníkové fuzzy čísla, druhým typom sú rovnoramenné. Takéto rozdelenie má svoje opodstatnenie, lebo vedie k diverzite výsledkov, čím sa overuje správnosť navrhovaného postupu. V neposlednom rade pri rovnoramenných fuzzy číslach je tendencia, že výsledky budú totožné s výsledkami dosiahnutými pomocou aproximovanej reálnej hodnoty, a práve túto skutočnosť považujeme za jeden z cieľov skúmania.

Z uvedeného vyplýva, že pri každej metóde párového porovnávania variantov, budú využité štyri rozličné fuzzy čísla. Výsledky jednotlivých metód budú porovnané v kapitole Diskusia s výsledkami dosiahnutými simuláciou rovnakého rozhodovacieho problému, avšak s využitím deterministických hodnôt, t. j. hodnôt, ktoré určíme defuzzifikáciou fuzzy čísel.

4.2 Posudzované metódy riešenia

4.2.1 Fuzzy AHP

Detailnejší popis algoritmu riešenia rozhodovacieho problému v podmienkach neurčitosti metódou Fuzzy AHP je vysvetlený v literatúre (21), z ktorej sme vo veľkej miere čerpali.

Metóda Fuzzy AHP rozširuje východiskovú metódu o fuzzy čísla, pričom celý koncept metódy ostáva podobný ako sme popísali v podkapitole 1.2.1. Prvým krokom metódy je vytvorenie matice párového porovnávania variantov S pre každé kritérium. Vo vytvorených maticiach expert následne určí veľkosť preferencie medzi každou dvojicou variantov, pričom opäť využíva bodové ohodnotenie, ktoré je však v tomto prípade rozšírené o fuzzy čísla podľa tabuľky č. 2:

Tabuľka 2: Fuzzy bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov I

Bodové hodnotenie	Trojuholníkové fuzzy čísla	Lichobežníkové fuzzy čísla
1	(1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1)
2	(1, 2, 4)	(1, 3/2, 5/2, 4)
3	(1, 3, 5)	(1, 2, 4, 5)
5	(3, 5, 7)	(3, 4, 6, 7)
7	(5, 7, 9)	(5, 6, 8, 9)
9	(7, 9, 11)	(7, 8, 10, 11)

[Zdroj: Spracované podľa:¹⁷]

Prvky s_{ij} v matici S vyjadrujú koľkokrát je i -tý variant dôležitejší ako j -tý variant, pričom prvky nachádzajúce sa pod diagonálou matice $s_{ji}, i \in (1, 2, \dots, i), j \in (1, 2, \dots, j)$ určíme podľa tabuľky č. 3:

¹⁷ ROUYENDEGH, B. D. – ERKAN T. E. 2012. *Selection of academic staff using the fuzzy analytic hierarchy process (FAHP): A pilot study*. Ankara: Atilim University, 2012, s. 925. ISSN 1330-3651

Tabuľka 3: Fuzzy bodové ohodnotenie miery preferencie dvoch variantov II

Bodové hodnotenie	Trojuholníkové fuzzy čísla	Lichobežníkové fuzzy čísla
1/1	(1/1, 1/1, 1/1)	(1/1, 1/1, 1/1, 1/1)
1/2	(1/4, 1/2, 1/1)	(1/4, 2/5, 2/3, 1/1)
1/3	(1/5, 1/3, 1/1)	(1/5, 1/4, 1/2, 1/1)
1/5	(1/7, 1/5, 1/3)	(1/7, 1/6, 1/4, 1/3)
1/7	(1/9, 1/7, 1/5)	(1/9, 1/8, 1/6, 1/5)
1/9	(1/11, 1/9, 1/7)	(1/11, 1/10, 1/8, 1/7)

[Zdroj: Spracované podľa:¹⁸]

Ak sú stanovené všetky S matice, môžeme prejsť k vyčísleniu geometrického priemeru variantov $s_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ podľa vzťahu (1.4). Trojuholníkové fuzzy čísla násobíme pomocou vzťahu (1.40), tie lichobežníkové podľa (1.42). N -tu odmocninu vypočítavame z každého prvku v rámci daného fuzzy čísla osobitne.

Po stanovení geometrického priemeru pre každý variant je potrebné tieto hodnoty normovať podľa vzorca (1.5). Súčet geometrických priemerov variantov s_i matice S je vypočítaný pomocou vzťahu (1.38). Samotné delenie realizujeme pre trojuholníkové fuzzy čísla vzťahom (1.41), pre lichobežníkové (1.43).

Ďalším krokom metódy FAHP je určenie poradia dôležitosti posudzovaných variantov na základe formuly (1.6), keď váha $v_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ v tomto prípade predstavuje konštantu, ktorá násobí každý prvok nachádzajúci sa vo fuzzy čísle.

Výsledné fuzzy čísla reprezentujúce hodnoty variantov $u_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ je potrebné usporiadať podľa dôležitosti, ktoré dosahujú. Pre samotné usporiadanie využívame niektorú z metód porovnávania fuzzy čísel, ktoré sme popísali v podkapitole 1.3.7. Ako aj pri metóde AHP aj pri metóde FAHP platí, variant s najväčšou hodnotou u_i považujeme za kompromisný variant.

4.2.2 PROMETHEE

Metóda je navrhovaná autorom záverečnej práce, pričom využíva princíp teórie fuzzy množín a teoretický základ metódy PROMETHEE. V porovnaní s klasickou metódou jediný rozdiel vzniká pri výpočtoch, keď neuvažujeme deterministické hodnoty, ale práve fuzzy čísla.

¹⁸ ROUYENDEGH, B. D. – ERKAN T. E. 2012. *Selection of academic staff using the fuzzy analytic hierarchy process (FAHP): A pilot study*. Ankara: Atilim University, 2012, s. 925. ISSN 1330-3651

Podobne ako pri klasickom PROMETHEE je potrebné určiť rozdiel hodnôt kritéria $k_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ na základe vzťahu (1.7). Pri vyjadrení rozdielu hodnôt $d_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ nastáva odčítanie fuzzy čísel podľa vzorca (1.39). Následne sa určia hodnoty preferencií $P_h(x_i, x_j), h \in (1, 2, \dots, h)$ pre každú dvojicu variantov za pomoci preferenčnej funkcie Q_3 , ktorá bola zvolená pre účely záverečnej práce. Preferenčná funkcia Q_3 , ktorej predpis sme uviedli v prvej kapitole (1.9) využíva prah preferencie α , ktorý nadobúda rozličné hodnoty pre každé kritérium. Pri vyčísľovaní hodnôt preferencií P_h posudzujeme každú zložku fuzzy čísla rozdielu hodnôt d_h osobitne.

Globálny preferenčný index $P(x_i, x_j)$ je rovný sume súčinov váh kritérií $v_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ a hodnôt preferencií P_h vyjadrených fuzzy číslami. V takom prípade pri realizovaní vzťahu (1.10) sa váhy kritérií chovajú ako konštanty, ktoré násobia každú zložku fuzzy čísla.

Určenie pozitívneho ϕ^+ (1.11) a negatívneho toku ϕ^- (1.12) vedie k výpočtu čistého toku ϕ (1.13), netreba však zabúdať, že samotný výpočet je realizovaný stále s fuzzy číslami.

Obdobne ako pri FAHP aj pri tejto metóde je potrebné fuzzy hodnotenie čistého toku $\phi_k, k \in (1, 2, \dots, k)$ medzi sebou porovnať. Aplikovaním metód porovnávania fuzzy čísel určíme poradie dôležitosti posudzovaných variantov.

4.2.3 AGREPREF a ELECTRE III

Metódy AGREPREF a ELECTRE III vychádzajú z matice preferencie variantov V . Na to, aby bolo možné stanoviť maticu V je potrebné párovo porovnať každú dvojicu variantov. Problém nastáva pri párovom porovnávaní variantov, ktorých výplatné funkcie sú vyjadrené pomocou fuzzy čísel. Riešením je aplikácia vybraných metód porovnávania fuzzy čísel, ktoré boli popísané v podkapitole 1.3.7. Pomocou týchto metód vieme jednoznačne určiť, ktorý variant je preferovaný z dvojice posudzovaných variantov podľa konkrétneho kritéria, čo vedie k zostaveniu matice V , a teda k realizácii ďalších výpočtov, ktorých teoretické postupy už boli uvedené.

4.3 Implementácia metód párového porovnávania variantov

V rámci tretej podkapitoly praktickej časti aplikujeme každú z metód párového porovnávania variantov na konkrétny rozhodovací problém, keď výplatné funkcie variantov podľa kritérií budú postupne reprezentovať štyri rozličné fuzzy čísla. Postupne rozhodovací

problém riešime metódami AHP, PROMETHEE, AGREPREF a ELECTRE III pre rôznostranné a rovnoramenné trojuholníkové, a rôznostranné a rovnoramenné lichobežníkové fuzzy čísla.

4.3.1 Fuzzy AHP

4.3.1.1 Využitie rôznostranných trojuholníkových fuzzy čísel

Našou rozhodovacou situáciou je výber kompromisného variantu z množiny štyroch variantov $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, ktoré sú hodnotené podľa štyroch kritérií $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ disponujúcimi rozdielnou dôležitosťou, o čom pojednávajú normované váhy kritérií $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Hodnotenie jednotlivých variantov je reprezentované trojuholníkovými fuzzy číslami, ktoré sú uvedené v tabuľke č. 4:

Tabuľka 4: Model rozhodovacej situácie I

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
X ₁	(4, 6, 8)	(20, 34, 40)	(450, 520, 570)	(75, 85, 100)
X ₂	(1, 5, 7)	(14, 30, 37)	(390, 450, 520)	(80, 96, 107)
X ₃	(6, 8, 9)	(19, 25, 30)	(520, 540, 550)	(50, 62, 84)
X ₄	(3, 6, 7)	(24, 28, 33)	(470, 500, 530)	(67, 73, 93)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Každé z uvádzaných kritérií je maximalizačného typu, t. j. dôsledky variantov majú rastúci charakter, preto nie je potrebná žiadna ďalšia transformácia.

Vychádzajúc zo štyroch kritérií je najprv potrebné vytvoriť štyri matice párového porovnávania variantov S_i , v ktorých je potrebné určiť veľkosti preferencií každej dvojice variantov podľa tabuliek č. 2 a 3.

V nasledujúcej tabuľke uvádzame príklad matice párového porovnávania variantov pre prvé kritérium k_1 . Matice pre ostávajúce kritéria boli zhotovené rovnakým princípom.

Tabuľka 5: Matica párového porovnávania variantov S_1

Matica S_1	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₁	(1, 1, 1)	(1, 5/2, 4)	(1/4, 2/5, 1)	(1, 3/2, 2)
X ₂	(1/4, 2/5, 1)	(1, 1, 1)	(1/7, 1/5, 1/3)	(1/3, 1/2, 1)
X ₃	(1, 5/2, 4)	(3, 5, 7)	(1, 1, 1)	(2, 7/2, 5)
X ₄	(1/2, 2/3, 1)	(1, 2, 3)	(1/5, 2/7, 1/2)	(1, 1, 1)

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ak máme všetky matice S môžeme prejsť k výpočtom geometrického priemeru $s_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ pre každý variant matíc. Najprv pri vyčísľovaní geometrického priemeru

vypočítame súčin hodnôt $g_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ nachádzajúcich sa pod odmocninou. Stanovenie geometrického priemeru si ukážeme na názornom príklade pre prvý variant matice S_1 .

Násobením štyroch fuzzy čísel stanovíme hodnotu nachádzajúcu sa pod štvrtou odmocninou vo výpočte geometrického priemeru:

$$g_1 = (1, 1, 1) \times \left(1, \frac{5}{2}, 4\right) \times \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, 1\right) \times \left(1, \frac{3}{2}, 2\right). \quad (4.1)$$

Pri súčine je potrebné najprv vynásobiť prvé dve fuzzy čísla podľa vzťahu (1.38):

$$\left(\min(1 \times 1, 1 \times 4, 1 \times 1, 1 \times 4), 1 \times \frac{5}{2}, \max(1 \times 1, 1 \times 4, 1 \times 1, 1 \times 4, 1 \times \frac{5}{2})\right). \quad (4.2)$$

Taktiež druhú dvojicu fuzzy čísel:

$$\left(\min(\frac{1}{4} \times 1, \frac{1}{4} \times 2, 1 \times 1, 1 \times 2), \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}, \max(\frac{1}{4} \times 1, \frac{1}{4} \times 2, 1 \times 1, 1 \times 2)\right). \quad (4.3)$$

Výsledné fuzzy čísla z výrazov (4.2) a (4.3) je opäť potrebné medzi sebou vynásobiť:

$$\left(\left(\left(1, \frac{5}{2}, 4\right) \times \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, 2\right)\right) = \left(\min\left(1 \times \frac{1}{4}, 1 \times 2, 4 \times \frac{1}{4}, 4 \times 2\right), \frac{5}{2} \times \frac{3}{5}, \max\left(1 \times \frac{1}{4}, 1 \times 2, 4 \times \frac{1}{4}, 4 \times 2\right)\right)\right). \quad (4.4)$$

Výsledok násobku uvádzaných fuzzy čísel je hodnota pod odmocninou geometrického priemeru s_1 :

$$g_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 8\right). \quad (4.5)$$

Geometrický priemer prvého variantu matice S_1 je rovný štvrtej odmocnine z hodnoty g_1 podľa formuly (1.4):

$$s_1 = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 8\right)} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{4}}, \sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \sqrt[4]{8}\right) = (0,7071; 1,1067; 1,6818). \quad (4.6)$$

Pokiaľ máme vyjadrený geometrický priemer variantu s_1 , celý postup jeho výpočtu opakujeme pre každý variant S matíc. Následne je potrebné v rámci matíc S najprv stanoviť súčet geometrických priemerov, potom vyjadriť normované geometrické priemery variantov $r_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ podľa (1.5). Vychádzajúc zo súčtu geometrických priemerov matice $S_1 = (3,1648; 4,9113; 6,9881)$ normovaný geometrický priemer pre prvý variant r_1 vyjadríme podielom:

$$r_1 = \frac{(0,7071; 1,1067; 1,6818)}{(3,1648; 4,9113; 6,9881)}. \quad (4.7)$$

Pri realizácii tejto aritmetickej operácii vychádzame zo vzťahu (1.41) nasledovne:

$$r_1 = \left(\min \left(\frac{0,7071}{3,1648}, \frac{0,7071}{6,9881}, \frac{1,6818}{3,1648}, \frac{1,6818}{6,9881} \right), \frac{1,1067}{4,9113}, \max \left(\frac{0,7071}{3,1648}, \frac{0,7071}{6,9881}, \frac{1,6818}{3,1648}, \frac{1,6818}{6,9881} \right) \right). \quad (4.8)$$

Normovaný geometrický priemer prvého variantu je rovný:

$$r_1 = (0,1012; 0,2253; 0,5314). \quad (4.9)$$

Opäť je potrebné vypočítať normovaný geometrický priemer pre každý variant matice S . V tabuľke č. 6 uvádzame hodnoty g_1 , geometrické priemery s_1 a normované geometrické priemery r_1 matice S_1 .

Tabuľka 6: Normované geometrické priemery matice S_1

Matica S_1	G_1	S_1	R_1
X_1	(1/4, 3/2, 8)	(0,7071; 1,1067; 1,6818)	(0,1012; 0,2253; 0,5314)
X_2	(1/84, 1/25, 1/3)	(0,3303; 0,4472; 0,7598)	(0,0473; 0,0911; 0,2401)
X_3	(6, 175/4, 140)	(1,5651; 2,5718; 3,4398)	(0,224; 0,5236; 1,0869)
X_4	(1/10, 8/21, 3/2)	(0,5623; 0,7856; 1,1067)	(0,0805; 0,16; 0,3497)
ΣS_i		(3,1648; 4,9113; 6,9881)	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ďalším krokom metódy FAHP je agregovanie parciálnych normovaných geometrických priemerov jednotlivých variantov s váhami kritérií podľa vzťahu (1.6), čím sú vypočítané výsledne hodnoty dôležitosti posudzovaných variantov vyjadrené trojuholníkovými fuzzy číslami.

Tabuľka 7: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP I

	Fuzzy hodnotenie u_i
X_1	(0,2057; 0,4037; 0,8122)
X_2	(0,0809; 0,1736; 0,3676)
X_3	(0,103; 0,2269; 0,464)
X_4	(0,0981; 0,1958; 0,4204)

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Cieľom rozhodovacej situácie je určiť kompromisný variant, ktorý rozhodovateľovi prináša najlepší úžitok. Aby sme ho vedeli určiť je potrebné výsledne fuzzy hodnotenie medzi sebou porovnať. Jednotlivé fuzzy čísla najprv porovnáme pomocou Yagerovho indexu, potom pomocou metódy mediánu. Výber práve týchto dvoch metód porovnávania fuzzy čísel je podmienený ich jednoduchým algoritmom a schopnosťou kompletného usporiadania alternatív.

Po dosadení fuzzy čísla prvého variantu do vzťahu pre výpočet Yagerovho indexu (1.45) dostávame nasledujúci výraz:

$$X_1 = \frac{1}{3} \times \frac{0,8122^2 - 0,2057^2 + 0,4037 \times 0,8122 - 0,2057 \times 0,4037}{0,8122 - 0,2057} = 0,4739. \quad (4.10)$$

Rovnakým spôsobom vyjadríme číselnú charakteristiku aj pre ostávajúce varianty, čím vyjadríme tabuľku č. 8, z ktorej je zrejmé aj poradie jednotlivých variantov riešenia rozhodovacieho problému.

Tabuľka 8: Usporiadanie variantov metódou FAHP I – Yagerov index

	Fuzzy hodnotenie u_i	Yagerov index	Poradie
X_1	(0,2057; 0,4037; 0,8122)	0,4739	1
X_2	(0,0809; 0,1736; 0,3676)	0,2074	4
X_3	(0,103; 0,2269; 0,464)	0,2646	2
X_4	(0,0981; 0,1958; 0,4204)	0,2381	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Druhým spôsobom porovnania výsledkov metódy FAHP je číselná charakteristika medián, ňou si tiež vyjadríme hodnotu prvého variantu x_1 .

$$X_1 = \frac{0,2057 + 2 \times 0,4037 + 0,8122}{4} = 0,45633. \quad (4.11)$$

V tabuľke č. 9 uvádzame hodnoty mediánu pre všetky varianty a ich poradie.

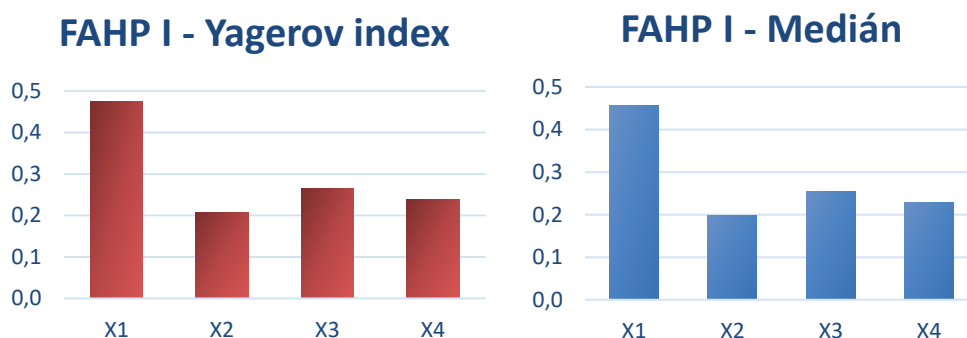
Tabuľka 9: Usporiadanie variantov metódou FAHP I - Medián

	Fuzzy hodnotenie u_i	Medián	Poradie
X_1	(0,2057; 0,4037; 0,8122)	0,45633	1
X_2	(0,0809; 0,1736; 0,3676)	0,19893	4
X_3	(0,103; 0,2269; 0,464)	0,25520	2
X_4	(0,0981; 0,1958; 0,4204)	0,22753	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ako je možné pozorovať na nasledujúcich grafoch, kompromisným variantom je variant x_1 , ktorý bol určený oboma metódami porovnávania fuzzy čísel. Poradie ostatných variantov, ktorých výplatné funkcie reprezentovali rôžnostranné trojuholníkové fuzzy čísla je taktiež v oboch prípadoch rovnaké.

Graf 8: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP I



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.1.2 Využitie rovnoramenných trojuholníkových fuzzy čísel

Východiskovú rozhodovaciu situáciu, ktorá je uvedená v tabuľke č. 4 pozmeníme o rovnoramenné trojuholníkové fuzzy čísla, čo spôsobí, že číselná charakteristika vyjadrená pomocou metód porovnávania fuzzy čísel má tendenciu byť rovná stredným hodnotám fuzzy čísel. V kapitole Diskusia si znázorníme výsledky deterministického prístupu metódy AHP, ktorá bude využívať práve stredné hodnoty rovnoramenných trojuholníkových fuzzy čísel, čo v konečnom dôsledku bude zaujímavé pri porovnávaní oboch prístupov.

Tabuľka 10: Model rozhodovacej situácie II

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
X ₁	(4, 6, 8)	(20, 30, 40)	(460, 520, 580)	(75, 85, 95)
X ₂	(3, 5, 7)	(14, 25, 36)	(390, 450, 510)	(85, 96, 107)
X ₃	(6, 8, 10)	(20, 25, 30)	(520, 540, 560)	(50, 67, 84)
X ₄	(3, 6, 9)	(24, 28, 32)	(470, 500, 530)	(67, 80, 93)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Daný problém riešime rovnakým spôsobom ako pri predchádzajúcom prípade. Yagerovým indexom a metódou mediánu usporiadame varianty podľa dôležitosti, ktoré uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

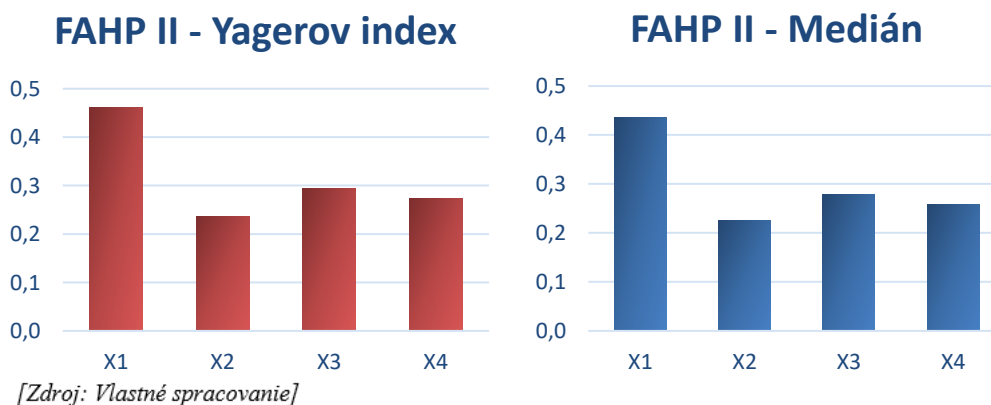
Tabuľka 11: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP II

	Fuzzy hodnotenie u _i	Yagerov index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X ₁	(0,1497; 0,3602; 0,871)	0,4603	1	0,43528	1
X ₂	(0,0927; 0,1944; 0,4238)	0,2370	4	0,22633	4
X ₃	(0,096; 0,2333; 0,553)	0,2941	2	0,27890	2
X ₄	(0,0805; 0,2123; 0,5246)	0,2733	3	0,25743	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Poradie variantov pri Yagerovom indexe aj pri mediáne je totožné, čo platí aj pri porovnaní metódy FAHP využívajúcej rôznostranné trojuholníkové fuzzy čísla.

Graf 9: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP II



4.3.1.3 Využitie rôznostranných lichobežníkových fuzzy čísel

Celý proces stanovenia kompromisného variantu viackriteriálnej úlohy metódou FAHP si ukážeme najprv aj pre rôznostranné, neskôr pre rovnoramenné lichobežníkové fuzzy čísla. Vychádzame z rovnakej rozhodovacej situácie, keď posudzujeme štyri varianty $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, podľa štyroch kritérií $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$. Jedinou zmenou sú dôsledky variantov, ktoré reprezentuje nasledujúca tabuľka.

Tabuľka 12: Model rozhodovacej situácie III

	K_1	K_2	K_3	K_4
X_1	(4, 5, 7, 8)	(20, 32, 36, 40)	(450, 500, 540, 570)	(75, 80, 90, 100)
X_2	(1, 4, 6, 7)	(14, 27, 33, 37)	(390, 425, 475, 520)	(80, 93, 99, 107)
X_3	(6, 15/2, 17/2, 9)	(19, 23, 27, 30)	(520, 535, 545, 550)	(50, 60, 64, 84)
X_4	(3, 11/2, 13/2, 7)	(24, 26, 30, 33)	(470, 490, 510, 530)	(67, 70, 76, 93)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pri tvorbe matic párového porovnávania variantov S sú pre nás relevantné bodové hodnotenia pre lichobežníkové fuzzy čísla nachádzajúce sa v tabuľkách č. 2 a 3.

Ďalej postupujeme vyjadrením hodnoty $g_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ obdobne ako sme to uviedli pri rôznostranných trojuholníkových fuzzy číslach využívajúc vzťah (1.42) pre násobenie lichobežníkových fuzzy čísel pre každý riadok matic S .

Následne vypočítame geometrické priemery variantov $s_i, i \in (1, 2, \dots, i)$, ktoré sú rovné štvrtej odmocnine jednotlivých hodnôt g_i podľa vzťahu (1.4).

Pre každú maticu S stanovíme súčty geometrických priemerov s_i , ktoré sú potrebné pre výpočet normovaných geometrických priemerov $r_i, i \in (1, 2, \dots, i)$. Pri vyčíslení normovaných geometrických priemerov r_i pre každý variant dochádza k deleniu lichobežníkových fuzzy čísel, ktoré je uskutočnené podľa vzorca (1.43).

Agregovaním parciálnych normovaných geometrických priemerov jednotlivých variantov s váhami kritérií podľa (1.6) dostávame výsledne hodnoty dôležitosti posudzovaných variantov vyjadrené lichobežníkovými fuzzy číslami.

Opäť pre stanovenie poradia alternatív rozhodovacieho problému využijeme Yagerov index, konkrétne vzťah platný pre lichobežníkové fuzzy čísla (1.48) a metódu mediánu pomocou formuly (1.55). Výsledné usporiadanie ako aj fuzzy hodnotenie dôležitosti jednotlivých variantov uvádzame v tabuľke č. 13:

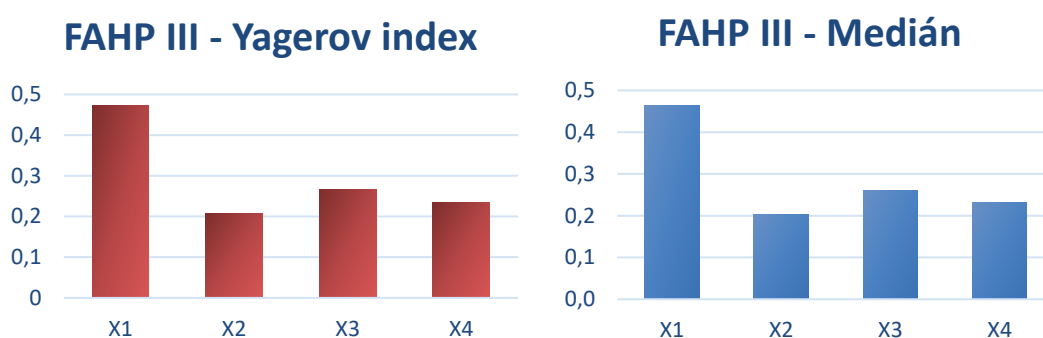
Tabuľka 13: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP III

	Fuzzy hodnotenie u_i	Yagerov I.	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	(0,20561; 0,31532; 0,51892; 0,81697)	0,47206	1	0,46421	1
X_2	(0,08088; 0,13418; 0,23163; 0,36849)	0,20723	4	0,20380	4
X_3	(0,10304; 0,17055; 0,2991; 0,47184)	0,26534	2	0,26113	2
X_4	(0,0947; 0,14938; 0,25539; 0,42315)	0,23548	3	0,23066	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Podľa tabuľky č. 13 a grafu č. 10 vidíme, že doterajšie dosiahnuté výsledky sú totožné vo všetkých troch použitých typoch fuzzy čísel.

Graf 10: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP III



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.1.4 Využitie rovnoramenných lichobežníkových fuzzy čísel

Dôvod výberu rovnoramenných lichobežníkových fuzzy čísel je rovnaký ako aj výber rovnoramenných trojuholníkových fuzzy čísel, keď dosiahnuté výsledky porovnáme s deterministickým prístupom metódy AHP a posúdime, či fuzzy prístup dáva zmysel.

Tabuľka 14: Model rozhodovacej situácie IV

	K_1	K_2	K_3	K_4
X_1	(4, 5, 7, 8)	(20, 25, 35, 40)	(460, 500, 540, 580)	(75, 80, 90, 95)
X_2	(3, 4, 6, 7)	(14, 20, 30, 36)	(390, 425, 475, 510)	(85, 95, 97, 107)
X_3	(6, 7, 9, 10)	(20, 23, 27, 30)	(520, 535, 545, 560)	(50, 65, 69, 84)
X_4	(3, 5, 7, 9)	(24, 26, 30, 32)	(470, 490, 510, 530)	(67, 78, 82, 93)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Postup riešenia rozhodovacieho problému nám už je dôverne známy. Yagerovým indexom a metódou mediánu opäť usporiadame alternatívy podľa dôležitosti, ktoré sú uvedené v tabuľke.

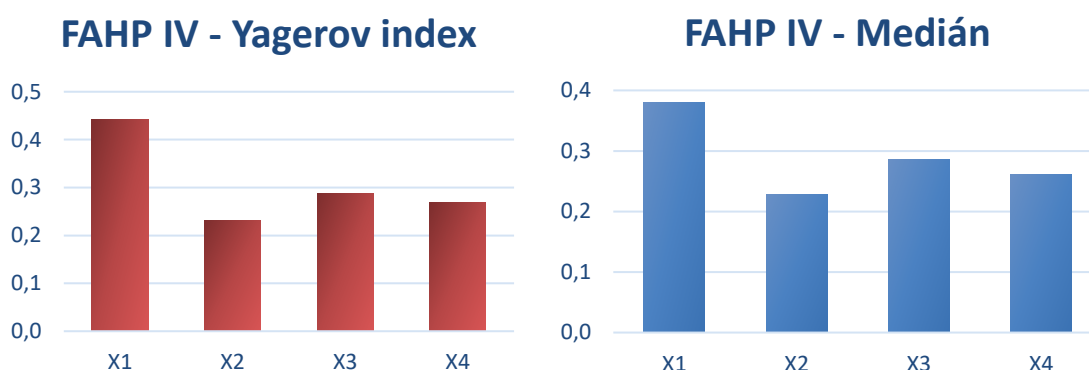
Tabuľka 15: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP IV

	Fuzzy hodnotenie u_i	Yagerov index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	(0,1497; 0,2267; 0,2735; 0,871)	0,44130	1	0,38023	1
X_2	(0,0827; 0,1367; 0,2692; 0,4238)	0,23179	4	0,22810	4
X_3	(0,103; 0,1547; 0,333; 0,553)	0,28846	2	0,28593	2
X_4	(0,0805; 0,1389; 0,3035; 0,5246)	0,26810	3	0,26188	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Záverom implementácie fuzzy prístupu pri metóde AHP na štyri rôzne typy fuzzy čísel je, že výsledné poradie variantov je pri každom riešení rovnaké. Bude zaujímavé pozorovať aké výsledky dosiahneme pri riešení daných rozhodovacích problémov inými metódami párového porovnávania variantov, a taktiež ako už bolo spomínané pri použití deterministického prístupu metódy AHP.

Graf 11: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou FAHP IV



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.2 PROMETHEE

Táto metóda je navrhnutá autorom záverečnej práce. Tvorí syntézu klasického prístupu a teórie fuzzy množín. Postupne metódu aplikujeme na rozhodovací problém využívajúci štyri rozličné fuzzy čísla rovnako ako pri metóde FAHP.

4.3.2.1 Využitie rôznostranných trojuholníkových fuzzy čísel

Vychádzame z tabuľky č. 4, ktorá reprezentuje rozhodovací problém výberu kompromisného variantu, keď výplatné funkcie alternatív sú rôznostrannými trojuholníkovými fuzzy číslami.

Z rozhodovacej matice je nevyhnutné určiť rozdiely hodnôt $d_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ pre každé kritérium $k_h, h \in (1, 2, \dots, h)$. Nižšie je uvedený príklad tabuľky s rozdielom hodnôt

variantu x_1 a ostatných variantov, keď jednotlivé hodnoty boli vyjadrené pomocou vzťahu (1.39).

Tabuľka 16: Príklad rozdielu dôsledkov variantov kritérií I

X_1	K_1	K_2	K_3	K_4
X_2	(-3, 1, 7)	(-17, 4, 26)	(-70, 70, 180)	(-32, -11, 20)
X_3	(-5, -2, 2)	(-10, 9, 21)	(-100, -20, 20)	(-9, 23, 50)
X_4	(-3, 0, 5)	(-13, 6, 16)	(-80, 20, 100)	(-18, 12, 33)
Prah α	2,5	5	60	25

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Z tabuľky sú zrejmé nami stanovené prahy preferencie α pre každé kritérium, ktoré sú potrebné pri stanovení parciálnych hodnôt intenzity preferencie $P_h(x_i, x_j) \in (0,1)$. Ako je uvedené v prvej kapitole, pri výpočtoch intenzity preferencie budeme využívať tretiu preferenčnú funkciu Q_3 (1.9). Dosadením jednotlivých rozdielov dôsledkov variantov d_h do predpisu preferenčnej funkcie vyjadríme hodnoty preferencií $P_h, h \in (1,2, \dots, h)$ medzi každou dvojicou variantov. Opäť uvádzame príklad tabuľky s hodnotami preferenčných indexov pre prvý variant.

Tabuľka 17: Hodnoty preferenčných indexov P I

X_1	K_1	K_2	K_3	K_4	$P(x_i, x_j)$
X_2	(0; 0,4; 1)	(0; 0,8; 1)	(0; 1; 1)	(0; 0; 0,8)	(0; 0,65; 0,96)
X_3	(0; 0; 0,8)	(0; 1; 1)	(0; 0; 0,33)	(0; 0,92; 1)	(0; 0,634; 0,8125)
X_4	(0; 0; 1)	(0; 1; 1)	(0; 0,33; 1)	(0; 0,48; 1)	(0; 0,6285; 1)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Preferenčný index variantu x_1 porovnávaný s variantom x_2 , bol vyjadrený agregovaním parciálnych preferenčných hodnôt s váhami kritérií podľa (1.10).

Všetky preferencie medzi jednotlivými variantmi zapíšeme do tabuľky preferenčných tokov, v ktorej si vyčíslime pozitívny tok ϕ^+ (1.11) a negatívny tok ϕ^- (1.12). Pri realizovaní týchto výpočtov sú využité aritmetické operácie fuzzy čísel.

Príkladom výpočtu pozitívneho toku ϕ^+ pre variant x_1 je výraz:

$$\phi_1^+ = \left(\left(\frac{0+0+0+0}{3} \right); \left(\frac{0+0,13+0,634+0,629}{3} \right); \left(\frac{0+0,96+0,812+1}{3} \right) \right)$$

$$\phi_1^+ = (0; 0,638; 0,924).$$
(4.12)

Tabuľka 18: Preferenčné toky I

	X_1	X_2	X_3	X_4	ϕ^+
X_1	(0; 0; 0)	(0; 0,13; 0,96)	(0; 0,634; 0,812)	(0; 0,629; 1)	(0; 0,638; 0,924)
X_2	(0; 0,088; 1)	(0; 0; 0)	(0; 0,65; 0,69)	(0; 0,184; 0,958)	(0; 0,307; 0,883)
X_3	(0; 0,163; 0,872)	(0; 0,35; 0,832)	(0; 0; 0)	(0; 0,248; 0,936)	(0; 0,253; 0,88)
X_4	(0; 0; 0,944)	(0; 0,248; 0,904)	(0; 0,358; 0,733)	(0; 0; 0)	(0; 0,202; 0,86)
ϕ^-	(0; 0,084; 0,939)	(0; 0,416; 0,899)	(0; 0,547; 0,745)	(0; 0,353; 0,965)	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Rozdielom negatívneho toku ϕ^- od pozitívneho ϕ^+ vyjadríme čistý tok ϕ metódy PROMETHEE pre každý variant, ktorý pojednáva o dôležitosti posudzovaných variantov. Aby bolo možné určiť poradie variantov opäť využívame pri porovnávaní fuzzy čísel centoridné metódy porovnania, konkrétne Yagerov index a metódu mediánu.

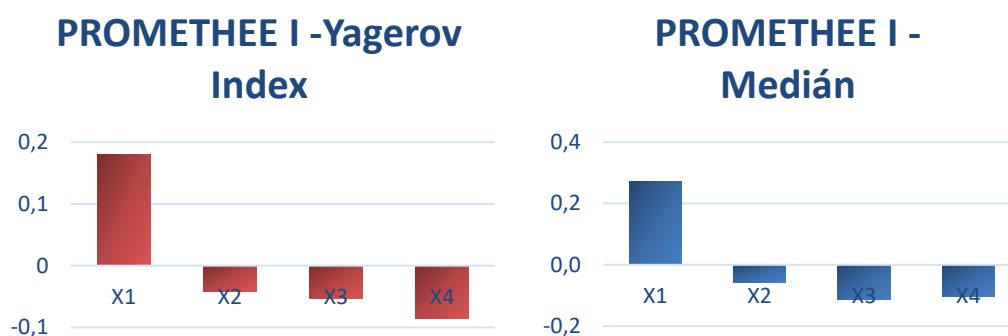
Tabuľka 19: Čistý tok a celkové poradie variantov I

	ϕ	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	(-0,9397; 0,554; 0,9242)	0,1795	1	0,2731	1
X_2	(-0,8987; -0,1085; 0,8825)	-0,0416	2	-0,0583	2
X_3	(-0,745; -0,294; 0,88)	-0,053	3	-0,1133	4
X_4	(-0,9645; -0,1515; 0,8602)	-0,0853	4	-0,1018	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Výsledkom riešenia rozhodovacieho problému je opäť variant x_1 rovnako ako to bolo pri všetkých uvedených riešeniach metódou FAHP. Môžeme však pozorovať, že poradie variantov je odlišné v porovnaní s poradím pri FAHP. Taktiež vidíme odlišnosti v poradí variantu x_3 a x_4 metódou PROMETHEE, keď na poslednom mieste podľa Yagerovho indexu sa nachádza štvrtý variant a podľa mediánu tretí variant. Najmä pri Yagerovom indexe rozdiel medzi hodnotami týchto variantov je len v troch stotinách, čo považujeme za zanedbateľné.

Graf 12: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE I



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.2.2 Využitie rovnoramenných trojuholníkových fuzzy čísel

Pri rovnoramenných trojuholníkových fuzzy číslach vychádzame z rozhodovacej matice nachádzajúcej sa v tabuľke č. 10. Postup stanovenia poradia dôležitosti variantov je rovnaký ako v predošlom prípade. Taktiež ako bolo napísané uvažujeme totožné hodnoty prahov preferencií α . Stanovením pozitívneho ϕ^+ , negatívneho toku ϕ^- vyjadríme čistý tok ϕ . Keďže čistý tok ϕ je vyjadrený fuzzy hodnotením, Yagerovým indexom a metódou mediánu porovnávame jednotlivé fuzzy ohodnotenia čistého toku ϕ a vyjadríme poradie variantov.

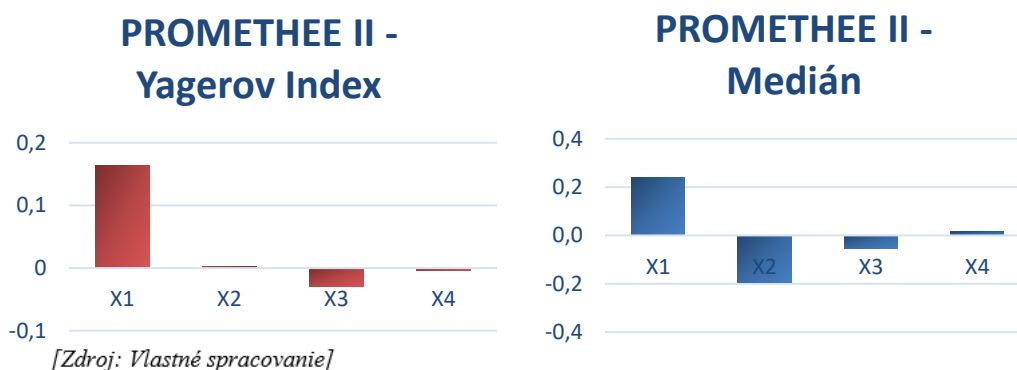
Tabuľka 20: Čistý tok a celkové poradie variantov II

	ϕ	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
x_1	(-0,9245; 0,462; 0,9533)	0,1636	1	0,2382	1
x_2	(-0,848; -0,3971; 0,855)	0,0018	2	-0,1968	4
x_3	(-0,8208; -0,136; 0,8693)	-0,0292	4	-0,0559	3
x_4	(-0,9512; 0,0712; 0,8668)	-0,0044	3	0,0145	2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Výsledky dosiahnuté aplikovaním rovnoramenných trojuholníkových fuzzy čísel sú trochu odlišné s predošlými výsledkami. Zhoda nastala v prípade kompromisného variantu, ktorý je opäť variant x_1 .

Graf 13: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE I



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.2.3 Využitie rôznostranných lichobežníkových fuzzy čísel

Metódu PROMETHEE aplikujeme aj na lichobežníkových fuzzy číslach, keď vychádzame z rozhodovacej situácie znázornenej v tabuľke č. 12, v ktorej sú výplatné funkcie reprezentované rôznostrannými lichobežníkovými fuzzy číslami.

Najprv vyjadríme rozdiely hodnôt $d_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ pre každú dvojicu variantov podľa každého kritéria. Uvádzame príklad s rozdielmi hodnôt variantu x_1 a ostatných variantov.

Tabuľka 21: Príklad rozdielu dôsledkov variantov kritérií III

X_1	K_1	K_2	K_3	K_4
X_2	(-3, -1, 3, 7)	(-17, -1, 9, 26)	(-70, 25, 115, 180)	(-32, -19, -3, 20)
X_3	(-5, -7/2, -1/2, 2)	(-10, 5, 13, 21)	(-100, -45, 5, 50)	(-9, 16, 30, 50)
X_4	(-3, -3/2, 3/2, 5)	(-13, -10, 10, 16)	(-80, -10, 50, 100)	(-18, -1, 20, 33)
Prah α	2,5	5	60	25

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Dosadením do preferenčnej funkcie Q_3 vyjadríme parciálne preferenčné hodnoty, z ktorých následne agregovaním s váhami kritérií aj preferenčné indexy $P_h(x_i, x_j)$. Príklad prvej tabuľky preferenčných indexov je uvedený nižšie.

Tabuľka 22: Hodnoty preferenčných indexov P III

X_1	K_1	K_2	K_3	K_4	$P(x_i, x_j)$
X_2	(0; 0; 1; 1)	(0; 0; 1; 1)	(0; 0,417; 1; 1)	(0; 0; 0; 0,8)	(0; 0,1043; 0,8; 0,96)
X_3	(0; 0; 0; 0,8)	(0; 1; 1; 1)	(0; 0; 0,083; 1)	(0; 0,64; 1; 1)	(0; 0,578; 0,6708; 0,98)
X_4	(0; 0; 0,6; 1)	(0; 0; 1; 1)	(0; 0; 0,833; 1)	(0; 0; 0,8; 1)	(0; 0; 0,8783; 1)
Váhy	0,1	0,45	0,25	0,2	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Každý preferenčný index vložíme do tabuľky preferenčných tokov, v ktorej vyjadríme pozitívny tok ϕ^+ a negatívny tok ϕ^- .

Tabuľka 23: Preferenčné toky III

	X_1	X_2	X_3	X_4	ϕ^+
X_1	(0; 0; 0; 0)	(0; 0,1; 0,8; 0,96)	(0; 0,58; 0,67; 0,98)	(0; 0; 0,88; 1)	(0; 0,23; 0,78; 0,98)
X_2	(0; 0,02; 0,28; 1)	(0; 0; 0; 0)	(0; 0,2; 0,65; 0,69)	(0; 0,14; 0,67; 0,96)	(0; 0,12; 0,53; 0,88)
X_3	(0; 0,02; 0,29; 0,87)	(0; 0,31; 0,35; 0,83)	(0; 0; 0; 0)	(0; 0,14; 0,42; 0,94)	(0; 0,16; 0,35; 0,88)
X_4	(0; 0; 0,56; 0,94)	(0; 0,25; 0,62; 0,9)	(0; 0,05; 0,58; 0,73)	(0; 0; 0; 0)	(0; 0,1; 0,59; 0,86)
ϕ^-	(0; 0,02; 0,38; 0,94)	(0; 0,22; 0,59; 0,9)	(0; 0,28; 0,63; 0,8)	(0; 0,09; 0,66; 0,97)	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Podľa vzorca (1.13) vyjadríme čistý tok ϕ , ktorého fuzzy hodnoty porovnáme podľa Yagerovho indexu a metódy mediánu.

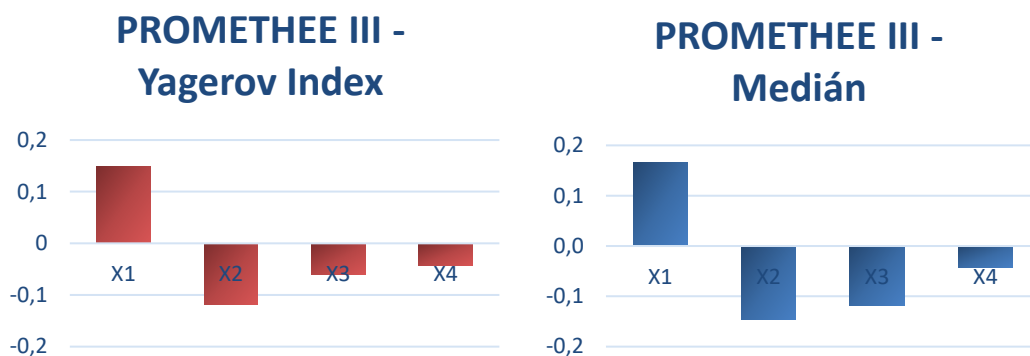
Tabuľka 24: Čistý tok a celkové poradie variantov III

	ϕ	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	(-0,9387; -0,149; 0,7683; 0,98)	0,1481	1	0,1652	1
X_2	(-0,8987; -0,5129; -0,056; 0,8828)	-0,1189	4	-0,1462	4
X_3	(-0,8006; -0,4748; 0,077; 0,88)	-0,0609	3	-0,1181	3
X_4	(-0,9648; -0,5566; 0,4925; 0,8599)	-0,0432	2	-0,0423	2

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Metódou PROMETHEE pri rôznostranných lichobežníkových fuzzy číslach sme zistili, že kompromisný variant, teda variant, ktorý v „najvyššej“ miere spĺňa kritéria rozhodovania je variant x_1 .

Graf 14: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE III



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.2.4 Využitie rovnoramenných lichobežníkových fuzzy čísel

Uvažujeme rozhodovaciu situáciu uvedenú v tabuľke č. 14. Rovnakým postupom, ktorý sme uviedli pri troch rôznych typoch fuzzy čísel metódou PROMETHEE, určíme čistý tok ϕ , a taktiež celkové poradie variantov.

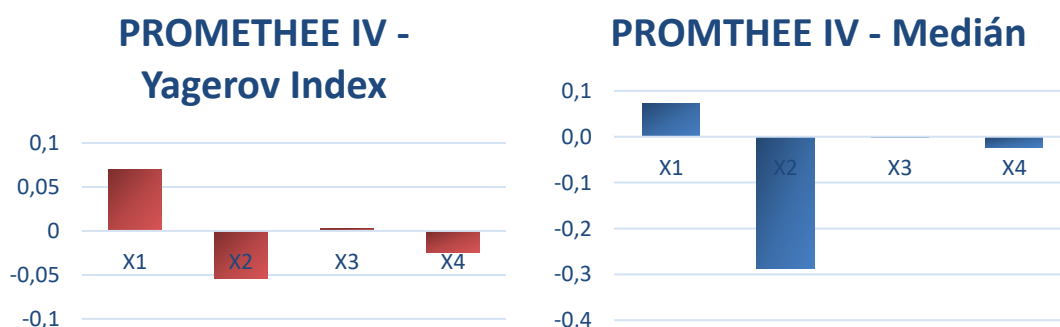
Tabuľka 25: Čistý tok a celkové poradie variantov IV

	ϕ	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X ₁	(-0,9248; -0,4897; 0,7551; 0,9533)	0,0695	1	0,0735	1
X ₂	(-0,8453; -0,6853; 0,457; 0,8411)	-0,0545	4	-0,2866	4
X ₃	(-0,8067; -0,5042; 0,4423; 0,8666)	0,0023	2	-0,0005	2
X ₄	(-0,9509; -0,5571; 0,5507; 0,8666)	-0,0242	3	-0,0227	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Vidíme, že znovu nastávajú isté odlišnosti v poradí prvkov. Taktiež je zreteľné, že jednotlivé hodnoty pri Yagerovom indexe si sú podobné. Kompromisný variant ostatným variantom nedominuje v takej miere ako to bolo v predošlých prípadoch.

Graf 15: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE IV



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.3.3 AGREPREF

Metóda AGREPREF vychádza z párového porovnania dvojíc variantov, z ktorých subjekt rozhodovania určí viac významnejší. Aby sme mohli porovnávať jednotlivé dvojice variantov, ktorých hodnoty sú reprezentované fuzzy číslami, potrebujeme použiť niektorú z metód porovnávania fuzzy čísel. Najprv si postup riešenia rozhodovacieho problému ukážeme na centroidných metódach, keď použijeme Yagerov index a medián, neskôr sa pokúsime porovnávať fuzzy čísla metódou Fuzzy Max Order, ktorá pracuje na inom princípe ako už dve spomínané.

Celý postup si znázorníme na trojuholníkových aj lichobežníkových fuzzy číslach. Nastáva však menšia zmena v porovnaní s predošlými metódami, keď na základe princípu metódy AGREPREF nemá zmysel uvažovať rozličné druhy trojuholníkových, resp. lichobežníkových fuzzy čísel, preto pre účely tejto práce využijeme len rôznostranné typy.

Dôvod je prostý, pri vytváraní matice preferencie variantov V , párovo porovnávame každú dvojicu variantov a určíme z nich nami preferovaný. Keďže rozhodovacie situácie pri metódach FAHP a PROMETHEE sú podobné, párovým porovnaním variantov by sme dospeli k rovnakej matici preferencie variantov V , a teda aj k rovnakému poradiu prvkov. S vysokou pravdepodobnosťou nadobudneme rovnaké výsledky či už pre trojuholníkové alebo lichobežníkové fuzzy čísla, ale napriek tomu si celý postup ukážeme na obidvoch typoch fuzzy čísel.

Keďže metóda ELECTRE III má rovnaký teoretický základ a vychádza z rovnakej matice preferencie variantov V , taktiež nevidíme zmysel aplikovať metódu na rozhodovací problém využívajúci štyri rozličné fuzzy čísla.

4.3.3.1 Využitie trojuholníkových fuzzy čísel

Pri trojuholníkových fuzzy číslach vychádzame z rozhodovacej situácie znázornenej v tabuľke č. 4. Po dosadení do vzťahu (1.47) metódou Yagerovho indexu vyjadríme fuzzy čísla deterministickými hodnotami.

Tabuľka 26: Číselné charakteristiky Yagerovho indexu I

Yagerov index	K_1	K_2	K_3	K_4
X_1	6,0000	31,3333	513,3333	86,6667
X_2	4,3333	27,0000	453,3333	94,3333
X_3	7,6667	24,6667	536,6667	65,3333
X_4	5,3333	28,3333	500,0000	77,6667

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Vyjadrenie fuzzy čísel hodnotami reálnymi spravíme aj pomocou metódy mediánu dosadením do vzorca (1.54), čím dostávame tabuľku:

Tabuľka 27: Číselné charakteristiky Mediánu I

Medián	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
X ₁	6,00	32,00	515,00	86,25
X ₂	4,50	27,75	452,50	94,75
X ₃	7,75	24,75	537,50	64,50
X ₄	5,50	28,25	500,00	76,50

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pomocou charakteristík Yagerovho indexu a mediánu teraz vieme párovo porovnať každú dvojicu variantov. Vychádzajúc z tabuľky Yagerovho indexu si ukážeme na príklade porovnanie variantu x_1 s variantom x_2 . Vidíme, že variant x_1 má vyššie ohodnotenie v prípade prvého kritéria K_1 , druhého kritéria K_2 a tretieho kritéria K_3 . Naopak variant x_2 je významnejší podľa štvrtého kritéria K_4 , preto do relácie preferencie môžeme zapísať tvrdenie $P_{12}(1,2,3)$, čo znamená, že variant x_1 preferujeme pred variantom x_2 podľa prvého, druhého a tretieho kritéria a tvrdenie $P_{21}(4)$, ktoré hovorí, že variant x_2 preferujeme pred variantom x_1 podľa štvrtého kritéria.

Takýmto spôsobom je potrebné porovnať všetky dvojice, výsledky zapíšeme do preferenčnej tabuľky.

Tabuľka 28: Preferenčná tabuľka metódy AGREPREF I

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₁		P ₁₂ (1,2,3)	P ₁₃ (2,4)	P ₁₄ (1,2,3,4)
X ₂	P ₂₁ (4)		P ₂₃ (2,4)	P ₂₄ (4)
X ₃	P ₃₁ (1,3)	P ₃₂ (1,3)		P ₃₄ (1,3)
X ₄	P ₄₁ ()	P ₄₂ (1,2,3)	P ₄₃ (2,4)	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Keďže metóda mediánu pracuje na rovnakom princípe ako Yagerov index, párovým porovnaním každej dvojice variantov dostaneme rovnakú tabuľku preferencie, čo vedie aj k rovnakému výsledku riešenia rozhodovacieho problému.

Z tabuľky preferencie vytvoríme maticu preferencie variantov V , ktorá na hlavnej diagonále obsahuje nuly. Ostatné miesta sú doplnené o také súčty váh kritérií, podľa ktorých je daný variant preferovaný pred iným konkrétnym variantom. Ako príklad si uvedieme preferenčnú reláciu $P_{12}(1,2,3)$, keď na jej miesto dosadíme hodnotu 0,8, ktorá je súčtom váh prvého, druhého a tretieho kritéria.

Popísaný proces aplikujeme na celú reláciu, výsledkom je matica V :

Tabuľka 29: Matica preferencie variantov V I

Matica V	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0,8	0,65	1
X_2	0,2	0	0,65	0,2
X_3	0,35	0,35	0	0,35
X_4	0	0,8	0,65	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Z matice preferencie variantov V tvoríme incidenčnú maticu P podľa vzťahu (1.14). Ak rozdiel medzi súčtom váh $v_{ij}, i \in (1, 2, \dots, i), j \in (1, 2, \dots, j)$ a $v_{ji}, i \in (1, 2, \dots, i), j \in (1, 2, \dots, j)$ je väčší ako hodnota α , môžeme tvrdiť, že variant $x_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ je preferenčne významnejší ako variant $x_j, j \in (1, 2, \dots, j)$ a na prislúchajúce miesto matici P zapisujeme hodnotu 1, inak 0 podľa funkcie (1.10).

Ako prah preferencie α pri metóde AGREPREF sme si zvolili hodnotu 0,1. Hodnota prahu preferencie α môže nadobúdať akúkoľvek hodnotu z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, platí pravidlo ak nie je uvedená, tak automaticky sa uvažuje hodnota rovná nule. Neskôr si uvedieme prípad, keď α bude rovná inej hodnote ako 0,1.

Pri porovnaní preferencie $x_1 P_{0,1} x_2$ s preferenciou $x_2 P_{0,1} x_1$, odpočítavame súčet váh $v_{ij} = 0,8$ od súčtu váh $v_{ji} = 0,2$. Výsledkom odčítania je hodnota 0,6, ktorá je väčšia ako prah preferencie α , preto relácií $x_1 P_{0,1} x_2$ prislúcha hodnota 1 a automaticky relácií $x_2 P_{0,1} x_1$ hodnota 0. Takýmto spôsobom stanovíme celú incidenčnú maticu P :

Tabuľka 30: Incidenčná matica P – prah preferencie 0,1 I

Matica P	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	1	1	1
X_2	0	0	1	0
X_3	0	0	0	0
X_4	0	1	1	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pre incidenčnú maticu P musí platiť pravidlo tranzitívnosti a asymetrie, ako bolo písané v prvej kapitole záverečnej práce. Ak obe pravidlá platia, maticu P je potrebné pretransformovať do podoby, keď nad hlavnou diagonálou sú jednotky a pod ňou nuly.

Vypočítaním charakteristiky $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ podľa (1.23) určíme poradie variantov rozhodovacieho problému.

Tabuľka 31: Upravená incidenčná matica P – prah preferencie 0,1 I

Matica P	x_1	x_4	x_2	x_3	D_i	Poradie
x_1	0	1	1	1	3	1
x_4	0	0	1	1	1	2
x_2	0	0	0	1	-1	3
x_3	0	0	0	0	-3	4

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Kompromisným variantom rozhodovacieho problému určeného metódou AGREPREF je variant x_1 . Poradie variantov sa však líši od poradia pri ostatných metódach.

Skúsme si zvoliť za prah preferencie α hodnotu 0,5. V takom prípade incidenčná matica vyzerá nasledovne:

Tabuľka 32: Upravená incidenčná matica P – prah preferencie 0,5 I

Matica P	x_1	x_3	x_4	x_2	D_i	Poradie
x_1	0	0	1	1	2	1
x_3	0	0	0	0	0	2
x_4	0	0	0	1	0	2
x_2	0	0	0	0	-2	4

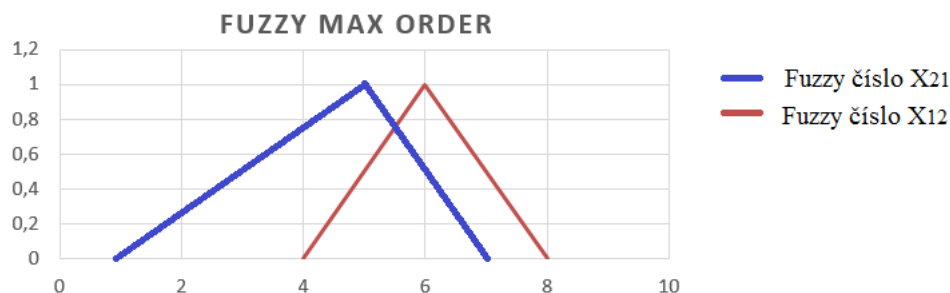
[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Rozdiel súčtov váh kritérií väčší ako prah preferencie α je len v troch prípadoch. Na základe incidenčnej matice tvrdíme, že variant x_1 je kompromisným variantom. Nastáva však situácia, keď dva varianty, konkrétne x_3 a x_4 sú indiferentné podľa vypočítanej charakteristiky $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$. Taktiež môžeme pozorovať, že tretí variant neberúc v ohľad charakteristiku D_i nie je dominovaný žiadnym iným variantom. Na základe týchto skutočností si myslíme, že nie je vhodné za prah preferencie α voliť takú vysokú hodnotu, preto v ďalších výpočtoch nebudeme uvažovať hodnotu 0,5.

Druhým spôsobom riešenia rozhodovacej situácie metódou AGREPREF je porovnávanie fuzzy čísel metódou Fuzzy Max Order.

Pri tejto metóde je opäť potrebné párovo porovnať každú dvojicu variantov. Príkladom môže byť porovnanie variantu x_1 s variantom x_2 podľa prvého kritéria K_1 . Graficky zmieňované porovnanie vyzerá nasledovne:

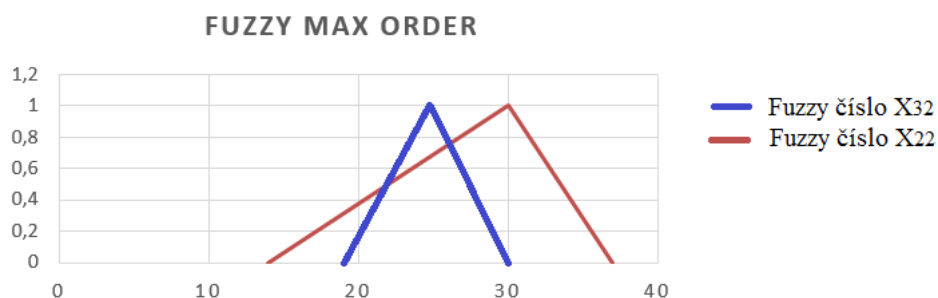
Graf 16: Porovnanie trojuholníkových fuzzy čísel metódou Fuzzy Max Order I



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Na grafe č. 16 môžeme pozorovať, že fuzzy číslo $x_{12} = (4, 6, 8)$ je väčšie ako fuzzy číslo $x_{21} = (1, 5, 7)$. Avšak ak si porovnáme variant x_2 s variantom x_3 podľa kritéria K_2 na im prislúchajúcom grafe vidíme, že tieto 2 fuzzy čísla sú neporovnateľné pomocou metódy Fuzzy Max Order, keďže ani jedno z dvoch porovnávajúcich čísel nedosahuje maximum na celej svojej časti.

Graf 17: Porovnanie trojuholníkových fuzzy čísel metódou Fuzzy Max Order II



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Metóda Fuzzy Max Order je príjemným riešením porovnávania a usporiadania fuzzy čísel, keďže netransformuje fuzzy čísla na ich číselné charakteristiky, ale pracuje so samotnými fuzzy číslami. Jej nevýhodou je častá nemožnosť porovnať jednotlivé fuzzy čísla, keďže stále jedno z nich musí byť väčšie celým svojím tvarom od toho druhého. Nám sa touto metódou nepodarilo porovnať každú dvojicu variantov, preto pre riešenie nášho rozhodovacieho problému je metóda Fuzzy Max Order nepoužiteľná a v nasledujúcich výpočtoch sa nebude vyskytovať či už pri trojuholníkových, alebo aj lichobežníkových fuzzy číslach.

4.3.3.2 Využitie lichobežníkových fuzzy čísel

Ako základ pre využitie lichobežníkových fuzzy čísel uvažujeme tabuľku č. 12 obsahujúcu rôznostranné lichobežníky. Jednotlivé fuzzy čísla pretransformujeme na číselné charakteristiky pomocou Yagerovho indexu a mediánu.

Tabuľka 33: Číselné charakteristiky Yagerovho indexu II

Yagerov index	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄
X ₁	6,00000	31,55556	514,16667	86,42857
X ₂	4,41667	27,31034	452,87037	94,48485
X ₃	7,70833	24,71111	537,08333	65,15789
X ₄	5,40000	28,28205	500,00000	77,22917

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Použitím vzorca (1.55) zistujeme, že číselné charakteristiky lichobežníkových fuzzy čísel vypočítané pomocou mediánu sú rovnaké ako to bolo pri trojuholníkových fuzzy číslach. Tieto indexy sa nachádzajú v tabuľke č. 27.

Po párovom porovnávaní každej dvojice variantov vidíme rovnakú preferenčnú tabuľku č. 28 ako aj pri trojuholníkových fuzzy číslach. Preto ďalšie riešenie rozhodovacieho problému metódou AGREPREF využívajúcej lichobežníkové fuzzy čísla nedáva zmysel, keďže by viedlo k totožným výsledkom nachádzajúcim sa v predchádzajúcej podkapitole.

4.3.4 ELECTRE III

Poslednou metódou párového porovnávania variantov, ktorú použijeme je metóda ELECTRE III, ktorá je založená na postupnom znižovaní množiny variantov ich elimináciou. Ako bolo uvedené pri tejto metóde uvažujeme len dva typy fuzzy čísel, rôznostranné trojuholníkové a lichobežníkové fuzzy čísla.

4.3.4.1 Využitie trojuholníkových fuzzy čísel

Vychádzajúc z prvej kapitoly záverečnej práce je čitateľovi zrejmé, že metóda ELECTRE III má rovnaký teoretický základ ako metóda AGREPREF. Aplikovaním metód porovnávania fuzzy čísel, metódou mediánu a Yagerovým indexom dospejeme k rovnakej preferenčnej tabuľke č. 28, z ktorej vyjadríme maticu preferencie variantov V , ktorá je znázornená v tabuľke č. 29.

Z matice preferencie variantov V je potrebné určiť prvok s najvyššou hodnotou V^0 a prvok s druhou najvyššou hodnotou V^1 , ktorý označuje prah citlivosti preferencie. Ak sa pozrieme do tabuľky č. 29 vidíme, že $V^0 = 1$ a prah citlivosti preferencie $V^1 = 0,8$.

Po stanovení hodnôt V^0 a V^1 zostavíme maticu A , v ktorej realizujeme výpočet charakteristiky $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ podľa vzťahu (1.26). V matici preferencie variantov V vidíme, že hodnota vyššia ako prah citlivosti preferencie V^1 sa v riadku nachádza iba pri

prvom variante x_1 , pričom zároveň táto hodnota prislúcha štvrtému stĺpcu, ktorý patrí variantu x_4 . Preto matica A nadobúda nasledujúci tvar:

Tabuľka 34: Matica výpočtu charakteristiky D_i I

Matica A	x_1	x_2	x_3	x_4
P^1_i	1	0	0	0
Q^1_i	0	0	0	1
D^1_i	1	0	0	-1

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Výsledná charakteristika $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ pre každý variant bola vypočítaná rozdielom charakteristiky $P_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ a $Q_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ a je zrejmá z tabuľky č. 34, kde vidíme, že maximálnu hodnotu $D_i = 1$ nadobúda pri prvom variante, ktorý vylúčime z množiny posudzovaných variantov a priradíme mu najvyššiu dôležitosť.

Nami novo-vytvorená matica preferencie variantov V obsahuje už len 3 varianty a jej tvar je nasledovný:

Tabuľka 35: Matica preferencie variantov V po eliminácii variantu x_1 I

Matica V	x_2	x_3	x_4
x_2	0	0,65	0,2
x_3	0,35	0	0,35
x_4	0,8	0,65	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

V novej matici variantov V opäť určíme prvok s najvyššou hodnotou $V^0 = 0,8$ a prvok s druhou najvyššou hodnotou, čiže aj prah preferencie $V^1 = 0,65$. V tabuľke č. 35 hľadáme tie hodnoty, ktoré sú väčšie ako prah preferencie V^1 a vidíme, že to je práve hodnota 0,8, ktorá prislúcha štvrtému variantu x_4 v riadku a druhému variantu x_2 v stĺpci. Preto tvar matice A je nasledovný:

Tabuľka 36: Matica výpočtu charakteristiky D_i po eliminácii variantu x_1 I

Matica A	x_2	x_3	x_4
P^1_i	0	0	1
Q^1_i	1	0	0
D^1_i	-1	0	1

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Podľa tabuľky č. 36 z množiny posudzovaných variantov vyradíme variant x_4 a úlohu riešime pre ostávajúce dva varianty x_2 a x_3 .

Tabuľka 37: Matica preferencie variantov V po eliminácii variantov x_1 a x_4

Matica V	x_2	x_3
x_2	0	0,65
x_3	0,35	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ako je v tabuľke č. 37 vidieť tvorba matice A a výpočet charakteristiky $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ už nie sú potrebné, lebo variant x_2 je preferovaný pred variantom x_3 .

Riešením úlohy viackriteriálneho rozhodovania pomocou metódy ELECTRE III je poradie dôležitosti variantov $x_1 > x_4 > x_2 > x_3$. Celkové usporiadanie alternatív je odlišné v porovnaní s poradím pri metóde AGREPREF, a to aj napriek tomu, že metódy využívajú rovnaký teoretický základ. Poradie variantov metódou ELECTRE III sa líši aj od ostatných metód.

4.3.4.2 Využitie lichobežníkových fuzzy čísel

Riešením rozhodovacieho problému s využitím lichobežníkových fuzzy čísel nachádzajúcich sa v tabuľke č. 12 metódou ELECTRE III je výsledok dosiahnutý tou istou metódou pri použití trojuholníkových fuzzy čísel. Rovnako ako sme spomínali pri metóde AGREPREF, párové porovnávanie lichobežníkových fuzzy čísel Yagerovým indexom a metódou mediánu vedie k rovnakej východiskovej matici preferencie variantov V , a keďže ďalší postup je rovnaký, aj celkové poradie variantov a ich bodové ohodnotenie bude rovnaké.

4.4 Neurčitost' vyjadrená vo váhach kritérií

Doteraz sme analyzovali vplyv metód párového porovnávania variantov na rozhodovací problém výberu kompromisného variantu v podmienkach neurčitosti, keď samotná neurčitost' bola zahrnutá v dôsledkoch variantov a reprezentovaná viacerými typmi fuzzy čísel. Účelom tejto podkapitoly je obsiahnuť neurčitost' aj na váhy kritérií, keď dôležitosť hľadísk, na základe ktorých sa rozhoduje, nebude deterministicky daná, ale vyjadrená fuzzy číslami.

Najčastejší spôsob stanovenia váh kritérií je expertné určovanie, keď skupina expertov na základe posudzovanej rozhodovacej situácie ohodnotí dôležitosť každého kritéria číslom z vopred definovanej škály, pričom obvykle horná hranica intervalu reprezentuje najlepšiu hodnotu a dolná hranica najhoršiu.

Predpokladajme neurčitost v dôležitosti jednotlivých váh, potom opýtaní experti, ak uvažujeme teóriu fuzzy množín ako reprezentanta neurčitosti vo viackriteriálnom rozhodovaní, sú povinní vyjadriť svoju preferenciu v podobe fuzzy čísel. Pre účely neurčitosti vo váhach kritérií sa autor záverečnej práce rozhodol použiť trojuholníkové fuzzy čísla, a to najmä na základe dosiahnutých skúseností pri predchádzajúcich riešeniach rozhodovacieho problému.

Ak vychádzame z teórie váh kritérií, tak vieme, že súčtom normovaných váh je hodnota jeden. V prípade, ak tvrdenie nie je pravdivé rozhodovací problém s takými váhami nie je možné riešiť. Vtedy je potrebné váhy kritérií stanoviť znovu tak, aby podmienke vyhovovali.

Pokiaľ disponujeme s nenormovanými neurčitými váhami $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ vyjadrenými pomocou trojuholníkových fuzzy čísel, logika nám hovorí, že podľa vzťahu (1.38) vyjadríme sumu nenormovaných neurčitých váh kritérií. Potom normovanú neurčitú váhu v_1 vyjadríme ako podiel nenormovanej neurčitej váhy w_1 a vypočítanej sumy neurčitých váh podľa vzorca (1.40).

Pre overenie pravdivosti podmienky o súčte normovaných váh kritérií rovnajúcich sa hodnote jeden sa využije defuzzifikácia fuzzy hodnotenia. V podkapitole 1.3.6 boli predstavené dve metódy defuzzifikácie, metóda stredného maxima a metóda ťažiska. Keďže pri stanovení normovaných váh sa používa delenie fuzzy čísel, tak na základe konceptu metódy ťažiska je s vysokou pravdepodobnosťou nemožné vyjadriť deterministickú hodnotu rovnajúcu sa jednej. Odôvodnením je samotný proces delenia, keď prvá zložka výsledného fuzzy čísla je rovná minimu podielov prvých a tretích prvkov posudzovaných fuzzy čísel, a práve naopak tretia zložka výsledku je rovná maximu ich podielov. Preto najčastejšie dochádza, pri vyčíslení prvej zložky výsledku, k deleniu prvého prvku čitateľa a tretieho prvku menovateľa vzťahu. Pri stanovení tretej zložky výsledku, k deleniu tretieho prvku čitateľa a prvého prvku menovateľa. Z uvedeného vyplýva, že pomer medzi prvkami nenormovanej váhy a pomer normovanej váhy je odlišný, preto normovaná váha nadobúda iné ťažisko.

Z teórie metódy stredného ťažiska je zrejmé, že defuzzifikáciou fuzzy čísla je stanovená deterministická hodnota, v ktorej fuzzy číslo nadobúda najvyšší stupeň príslušnosti. V prípade, ak stredná zložka súčtu normovaných váh kritérií reprezentovanými trojuholníkovými fuzzy číslami je rovná hodnote jeden, tak podmienka o súčte váh kritérií

je splnená a daný rozhodovací problém je možné ďalej riešiť. Pri defuzzifikácii fuzzy čísel ďalej uvažujeme len metódu stredného maxima.

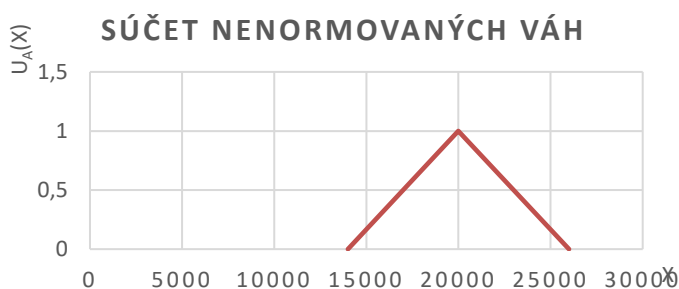
Zvoľme si súčty parciálnych fuzzy hodnotení pre jednotlivé váhy kritérií stanovené expertmi nasledovne:

- $w_1 = (1000, 2000, 2800)$,
- $w_2 = (7000, 9000, 10000)$,
- $w_3 = (2500, 5000, 7700)$,
- $w_4 = (3500, 4000, 5500)$.

Nenormované váhy je nevyhnutné normovať podľa vzťahu (1.2). Pri stanovení súčtu nenormovaných váh využívame vzorec (1.38), čím dostávame

$$\sum_{i=1}^4 w_i = (14000, 20000, 26000). \quad (4.13)$$

Graf 18: Tvar fuzzy čísla pre súčet nenormovaných váh



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Príkladom stanovenia normovanej váhy prvého kritéria je zápis:

$$v_1 = \frac{w_1}{\sum_{i=1}^4 w_i} = \frac{(1000, 2000, 2800)}{(14000, 20000, 26000)} =$$

$$\left(\min \left(\frac{1000}{14000}, \frac{1000}{26000}, \frac{2800}{14000}, \frac{2800}{26000} \right), \frac{2000}{20000}, \max \left(\frac{1000}{14000}, \frac{1000}{26000}, \frac{2800}{14000}, \frac{2800}{26000} \right) \right) =$$

$$(0,04; 0,10; 0,20). \quad (4.14)$$

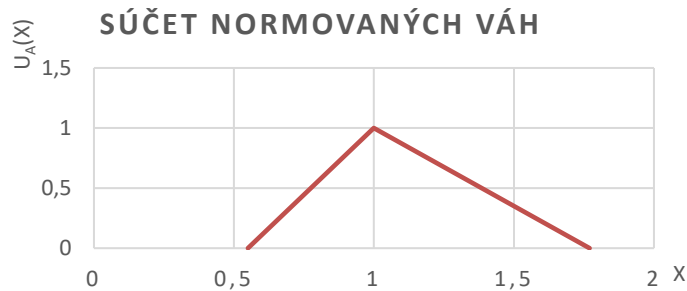
Nech $\{v_2, v_3, v_4\}$ sú ostávajúce normované neurčité váhy kritérií $\{K_2, K_3, K_4\}$ vyjadrené trojuholníkovými fuzzy číslami, potom ich samotný tvar je:

- $v_2 = (0,27; 0,45; 0,71)$,
- $v_3 = (0,10; 0,25; 0,55)$,
- $v_4 = (0,13; 0,20; 0,39)$.

Pre overenie platnosti podmienky normovaných váh vyjadríme ich súčet podľa (1.38):

$$\sum_{i=1}^4 v_i = (0,04 + 0,27 + 0,10 + 0,13; 0,10 + 0,45 + 0,25 + 0,20; 0,12 + 0,71 + 0,55 + 0,39) = (0,54; 1; 1,77). \quad (4.15)$$

Graf 19: Tvar fuzzy čísla pre súčet normovaných váh



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ak porovnáme fuzzy čísla uvedené na oboch predchádzajúcich grafoch, je možné pozorovať ich rozdielny tvar, keď vzdialenosť prvkov s nulovým stupňom príslušnosti bola od prvku s najvyššou hodnotou stupňa príslušnosti pri súčte nenormovaných váh kritérií rovnaká a vzdialenosti pri súčte normovaných váh kritérií odlišná. Práve kvôli tejto vlastnosti nie je možné overiť podmienku súčtu normovaných váh rovnajúcim sa jednej metódou ťažiska.

Aplikovaním metódy stredného maxima vidíme, že deterministická hodnota súčtu normovaných váh je rovná jednej, preto nami uvedené váhy budú použité v nastávajúcich metódach párového porovnávania variantov.

Takto stanovené neurčité normované váhy kritérií použijeme na rozhodovací problém, ktorý využíval rôznostranné trojuholníkové fuzzy čísla ako reprezentantov výplatných funkcií jednotlivých variantov, nachádzajúceho sa v tabuľke č. 4.

4.4.1 Fuzzy AHP

Postup riešenia príkladu pomocou metódy FAHP je totožný s postupom nachádzajúcim sa v podkapitole 4.3.1.1, keď po stanovenie normovaných geometrických priemerov $r_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ nepracujeme s váhami, preto hodnoty r_i sú rovnaké.

Pri agregovaní normovaných geometrických priemerov r_i s váhami kritérií nepovažujeme váhu $v_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ ako konštantu, ale ako trojuholníkové fuzzy číslo, ktoré násobíme s druhým trojuholníkovým fuzzy číslom podľa vzťahu (1.41). Z tohto dôvodu vzťah vyjadrujúci hodnotu dôležitosti konkrétneho variantu $u_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ (1.6) je súčtom štyroch fuzzy čísel, ktoré sú výsledkom súčinu príslušného normovaného

geometrického priemeru r_i a príslušnej váhy kritéria v_i . Príklad výpočtu prvého súčinu, teda fuzzy hodnotenia pre prvý variant je vzťah:

$$u_1 = [(0,04 \times 0,1012) + (0,27 \times 0,3126) + (0,10 \times 0,1221) + (0,13 \times 0,1221)]; [(0,10 \times 0,2253) + (0,45 \times 0,5763) + (0,25 \times 0,2555) + (0,20 \times 0,2896)]; [(0,20 \times 0,5314) + (0,71 \times 1,0218) + (0,55 \times 0,6343) + (0,39 \times 0,7032)] = (0,1165; 0,4036; 1,4549). \quad (4.16)$$

V tabuľke č. 38 uvádzame fuzzy hodnotenie každého variantu vyjadreného pomocou vzťahu (1.6) a následne ich porovnanie na základe Yagerovho indexu a metódy mediánu.

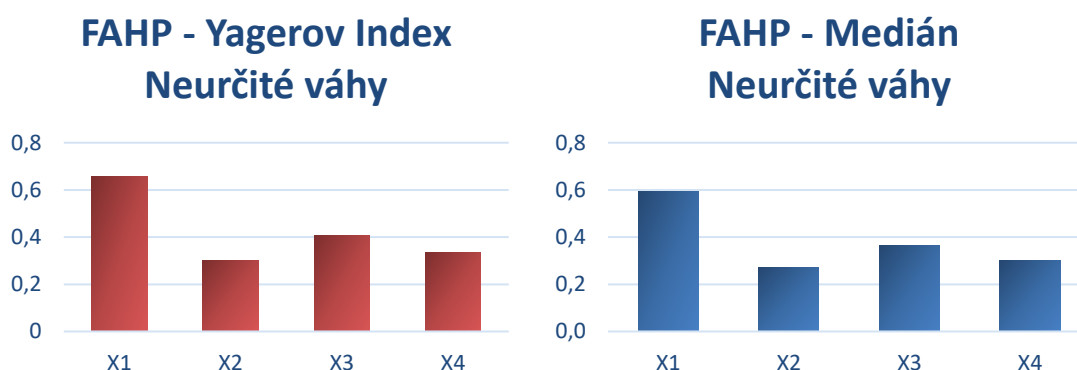
Tabuľka 38: Fuzzy hodnotenie variantov metódou FAHP - neurčité váhy

	Fuzzy hodnotenie U_i	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	(0,1165; 0,4036; 1,4549)	0,6583	1	0,59465	1
X_2	(0,0483; 0,1737; 0,6868)	0,3029	4	0,27063	4
X_3	(0,0464; 0,227; 0,9513)	0,4082	2	0,36293	2
X_4	(0,0535; 0,1958; 0,761)	0,3368	3	0,30153	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ak porovnáme výsledky dosiahnuté pri deterministických váhach, ktoré boli použité pri rovnakej rozhodovacej situácii, s týmito výsledkami, vidíme, že poradie jednotlivých variantov ostáva nezmenené, avšak ich číselné indexy, či už Yagerov index alebo medián majú vyššie hodnoty. Tie sú spôsobené väčším rozptylom medzi samotnými prvkami v rámci trojuholníkového fuzzy čísla hodnotenia u_i .

Graf 20: Hodnotenie variantov metódou FAHP využívajúcej neurčité váhy



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.4.2 PROMETHEE

Na metódu PROMETHEE rovnako ako aj pri fuzzy prístupe metódy AHP vieme aplikovať neurčité normované váhy. Opäť vychádzame z tabuľky č. 4, ktorá obsahuje rôznostranné trojuholníkové fuzzy čísla ako dôsledky variantov.

Postup riešenia problému je rovnaký ako postup uvedený v podkapitole 1.3.2.1, keď najprv sa určia jednotlivé rozdiely hodnôt kritérií $d_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ a parciálne hodnoty preferencií $P_h(x_i, x_j), h \in (1, 2, \dots, h)$ pre každú dvojicu variantov za pomoci preferenčnej funkcie Q_3 . Hodnoty preferencií sú totožné ako v spomínanej podkapitole.

Pri určovaní globálneho preferenčného indexu $P(x_i, x_j)$ je potrebné agregovať parciálne hodnoty preferencií s váhami kritérií, ktoré sú reprezentované fuzzy číslami. Pri samotnom výpočte týchto indexov využívame vzťah (1.10) pričom dochádza k násobeniu dvoch trojuholníkových čísel podľa (1.41) a k následnému agregovaniu týchto násobkov.

Pre lepšiu ilustráciu uvádzame nasledujúcu tabuľku preferenčných indexov prvého variantu, keď v jej druhom riadku posledného stĺpca je preferenčný index voči variantu x_2 , ktorý bol vypočítaný následne agregovaním:

$$P(x_1, x_2) = ([(0 \times 0,05) + (0 \times 0,27) + (0 \times 0,10) + (0 \times 0,13)]; [(0,4 \times 0,10) + (0,8 \times 0,45) + (1 \times 0,25) + (0 \times 0,20)]; [(1 \times 0,20) + (1 \times 0,71) + (1 \times 0,55) + (0,8 \times 0,39)]) = (0; 0,65; 1,77). \quad (4.17)$$

Tabuľka 39: Preferenčné indexy P variantu x_1

X_1	K_1	K_2	K_3	K_4	$P(x_i, x_j)$
X_2	(0; 0,4; 1)	(0; 0,8; 1)	(0; 1; 1)	(0; 0; 0,8)	(0; 0,65; 1,77)
X_3	(0; 0; 0,8)	(0; 1; 1)	(0; 0; 0,33)	(0; 0,92; 1)	(0; 0,63; 1,44)
X_4	(0; 0; 1)	(0; 1; 1)	(0; 0,33; 1)	(0; 0,48; 1)	(0; 0,63; 1,85)
Váhy	(0,04; 0,1; 0,2)	(0,27; 0,45; 0,71)	(0,1; 0,25; 0,55)	(0,13; 0,2; 0,39)	

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Preferenčné indexy variantu x_1 z tabuľky č. 39, ale aj preferenčné indexy zvyšných troch variantov si zapíšeme do tabuľky preferenčných tokov.

Tabuľka 40: Matica preferenčných indexov

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	(0; 0; 0)	(0; 0,65; 1,772)	(0; 0,634; 1,4415)	(0; 0,6285; 1,85)
X_2	(0; 0,088; 1,85)	(0; 0; 0)	(0; 0,65; 1,18)	(0; 0,184; 1,7565)
X_3	(0; 0,1625; 1,6004)	(0; 0,35; 1,5224)	(0; 0; 0)	(0; 0,2475; 1,7252)
X_4	(0; 0; 1,7408)	(0; 0,2475; 1,6628)	(0; 0,358; 1,2735)	(0; 0; 0)

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pozitívny tok ϕ^+ počítame ako sumu trojuholníkových fuzzy čísel podľa vzorca (1.38), ktorú predelíme číslom tri ako to je popísané vo vzťahu (1.11). Potom negatívny tok ϕ^- rátame rovnakým spôsobom, ale pre stĺpce matice preferenčných tokov.

Čistý tok ϕ vyjadríme ako rozdiel pozitívneho toku ϕ^+ a negatívneho toku ϕ^- . Keďže ide odčítanie trojuholníkových fuzzy čísel, túto operáciu vykonávame podľa formuly (1.39).

Tabuľka 41: Preferenčné toky – neurčité váhy

	ϕ^+	ϕ^-	ϕ
X_1	(0; 0,6375; 1,6878)	(0; 0,0835; 1,7304)	(-1,7304; 0,554; 1,6878)
X_2	(0; 0,3073; 1,5955)	(0; 0,4158; 1,6524)	(-1,6524; -0,1085; 1,5955)
X_3	(0; 0,2533; 1,616)	(0; 0,5473; 1,2983)	(-1,2983; -0,294; 1,616)
X_4	(0; 0,2018; 1,559)	(0; 0,3533; 1,7772)	(-1,7772; -0,1515; 1,559)

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Posledným krokom je stanovenie poradia dôležitosti prvkov pomocou Yagerovho indexu a mediánu.

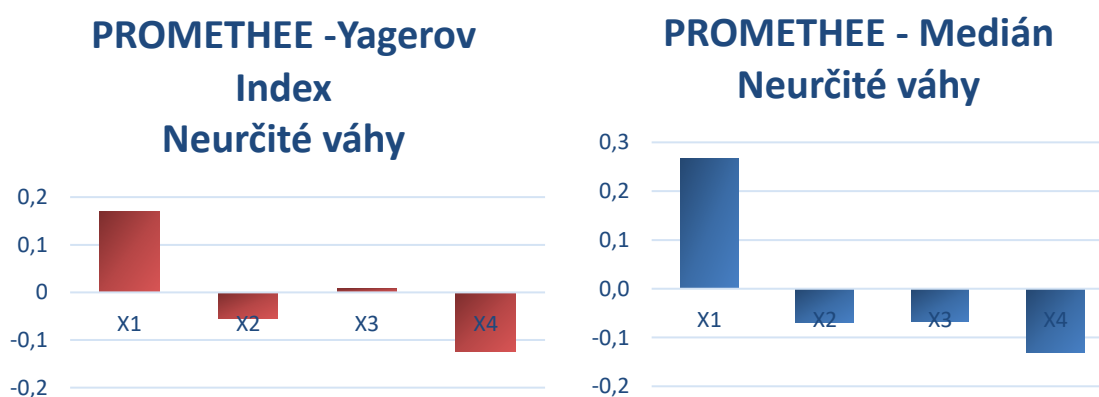
Tabuľka 42: Poradie variantov metódou PROMETHEE – neurčité váhy

	Yagerov Index	Poradie YI	Medián	Poradie M
X_1	0,1705	1	0,2664	1
X_2	-0,0551	3	-0,0685	3
X_3	0,0079	2	-0,0676	2
X_4	-0,1232	4	-0,1303	4

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Vo výslednom poradí variantov môžeme pozorovať odchýlky oproti poradiu už dosiahnutých výsledkov metódou PROMETHEE pri rôznostranných trojuholníkových fuzzy číslach ako dôsledkov variantov, keď neboli uvažované neurčité váhy kritérií.

Graf 21: Hodnotenie variantov rozhodovania metódou PROMETHEE – neurčité váhy



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

4.4.3 AGREPREF

Opäť pri metóde AGREPREF ako aj pri deterministických váhach je potrebné párovo porovnať jednotlivé dvojice variantov. Keďže nebola uskutočnená žiadna zmena

v samotných dôsledkov variantov, tak vychádzame z tabuľky č. 28, kde sú uvedené jednotlivé preferencie medzi variantmi.

Z tabuľky preferencie vyjadríme maticu preferencie variantov V . Prvky matice V sú tvorené súčtami neurčitých váh, reprezentovanými fuzzy číslami.

Tabuľka 43: Matica preferencie variantov V – neurčité váhy

Matica V	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	(0, 0, 0)	(0,41; 0,80; 1,46)	(0,40; 0,65; 1,10)	(0,54; 1; 1,85)
X_2	(0,13; 0,20; 0,39)	(0, 0, 0)	(0,40; 0,65; 1,10)	(0,13; 0,20; 0,39)
X_3	(0,14; 0,35; 0,75)	(0,14; 0,35; 0,75)	(0, 0, 0)	(0,14; 0,35; 0,75)
X_4	(0, 0, 0)	(0,41; 0,80; 1,46)	(0,40; 0,65; 1,10)	(0, 0, 0)

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Aby bolo možné vytvoriť z matice V incidenčnú maticu P je potrebné fuzzy hodnoty nachádzajúce v tabuľke č. 43 defuzzifikovať, a to z toho dôvodu, že rozdiel dvoch súčinov váh kritérií konkrétnych variantov je predmetom porovnávania s prahom preferencie α , čo ústi k vytvoreniu incidenčnej matice.

Metódou stredného maxima vyberáme také reálne hodnoty, v ktorých fuzzy číslo nadobúda najvyšší stupeň príslušnosti. Defuzzifikácia metódou stredného maxima je uvedená v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 44: Defuzzifikácia fuzzy čísel metódou stredného maxima

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0,8	0,65	1
X_2	0,2	0	0,65	0,2
X_3	0,35	0,35	0	0,35
X_4	0	0,8	0,65	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Druhá metóda defuzzifikácie, ktorú sme si uviedli pre účely tejto záverečnej práce je metóda ťažiska, ktorá ako už bolo uvedené využíva rovnaký princíp ako Yagerov index. Realizovaním vzťahu (1.47) získavame následné hodnoty:

Tabuľka 45: Defuzzifikácia fuzzy čísel metódou ťažiska

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0,89	0,72	1,13
X_2	0,24	0	0,72	0,24
X_3	0,41	0,41	0	0,41
X_4	0	0,89	0,72	0

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Ak berieme do úvahy rovnaký prah preferencie α ako pri určitých váhach, tak z oboch tabuliek s defuzzifikovanými hodnotami vieme vyjadriť totožnú incidenčnú maticu ako sme uvideli v tabuľke č. 30 v prípade určitých váh kritérií, čo vedie k totožnému riešeniu rozhodovacieho problému, keď variant x_1 považujeme za kompromisný variant a poradie ostatných prvkov je $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$.

4.4.4 ELECTRE III

Základom metódy ELECTRE III je rovnaká matica preferencie variantov V ako pri metóde AGREPREF, ktorá je známa z tabuľky č. 43.

Samotný proces metódy ostáva nezmenený. Využitím metódy ťažiska defuzzifikujeme fuzzy čísla uvedené v matici preferencie variantov V , keď výsledkom je tabuľka č. 45.

Zo spomínanej tabuľky určíme prah citlivosti preferencie $V^1 = 0,89$. Pri zostavovaní matice A vypočítavame charakteristiku $D_i, i \in (1, 2, \dots, i)$ podľa vzťahu (1.26). Keďže podľa tabuľky č. 45 je zrejmé, že prvok väčší ako prah citlivosti preferencie sa v nej nachádza iba raz, tak matica A má rovnaký tvar ako to bolo uvedené v tabuľke č. 34, preto prvý variant, ktorý eliminujeme je variant x_1 . Ďalším skúmaním vidíme, že výpočet dôležitosti poradia vedie k rovnakému výsledku ako to boli pri určitých váhach kritérií, čo je $x_1 > x_4 > x_2 > x_3$.

5. Diskusia

Táto kapitola sa zameriava na komparáciu dosiahnutých výsledkov vzhľadom na ciele záverečnej práce. Najprv je uvedené porovnanie prístupu využívajúceho fuzzy čísla s klasickým prístupom, ktorý pri stanovovaní poradia variantov využíva deterministické hodnoty, ktoré vznikli defuzzifikáciou fuzzy čísel metódou ťažiska. Porovnávanie fuzzy prístupu oproti rozhodovaniu za istoty je realizované v rámci jednotlivých metód párového porovnávania variantov samostatne. V poslednej podkapitole uvádzame celkové porovnanie výsledkov metód využívajúcich fuzzy prístup.

5.1 Komparácia výsledkov - metóda AHP

Pre možnosti porovnania oboch prístupov je potrebné určiť poradie a prislúchajúce bodové ohodnotenie pre každý variant zo známej rozhodovacej situácií klasickou AHP metódou. Keď pri rôznostranných trojuholníkových fuzzy číslach vychádzame z tabuľky č. 4, pri rovnoramenných trojuholníkových fuzzy číslach z tabuľky č. 10, pri rôznostranných lichobežníkových fuzzy číslach z tabuľky č. 12 a rovnoramenných lichobežníkových fuzzy číslach z tabuľky č. 14. Každé z týchto fuzzy čísel defuzzifikujeme na príslušné deterministické hodnoty a riešime rozhodovací problém. Je dôležité poznamenať, že pri určovaní miery preferencie medzi každou dvojicou dôsledkov variantov, je zachovaná rovnaká preferencia ako v prípade fuzzy prístupu. Potom poradie variantov rozhodovacej situácie využívajúcej štyri rozdielne fuzzy čísla je nasledovné.

Tabuľka 46: Výsledky klasickej AHP metódy

	Rôznos. TFČ	Poradie I	Rovnor. TFČ	Poradie II	Rôznos. LFČ	Poradie III	Rovnor. LFČ	Poradie IV
X ₁	0,4102	1	0,3602	1	0,3985	1	0,3602	1
X ₂	0,1887	3	0,1943	4	0,1777	4	0,1943	4
X ₃	0,2276	2	0,2332	2	0,2247	2	0,2332	2
X ₄	0,1735	4	0,2123	3	0,1991	3	0,2123	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pre lepší prehľad uvádzame tabuľku č. 47, v ktorej sú zhrnuté výsledky metódy FAHP, keď porovnanie fuzzy hodnotenia každého variantu bolo realizované pomocou Yagerovho indexu.

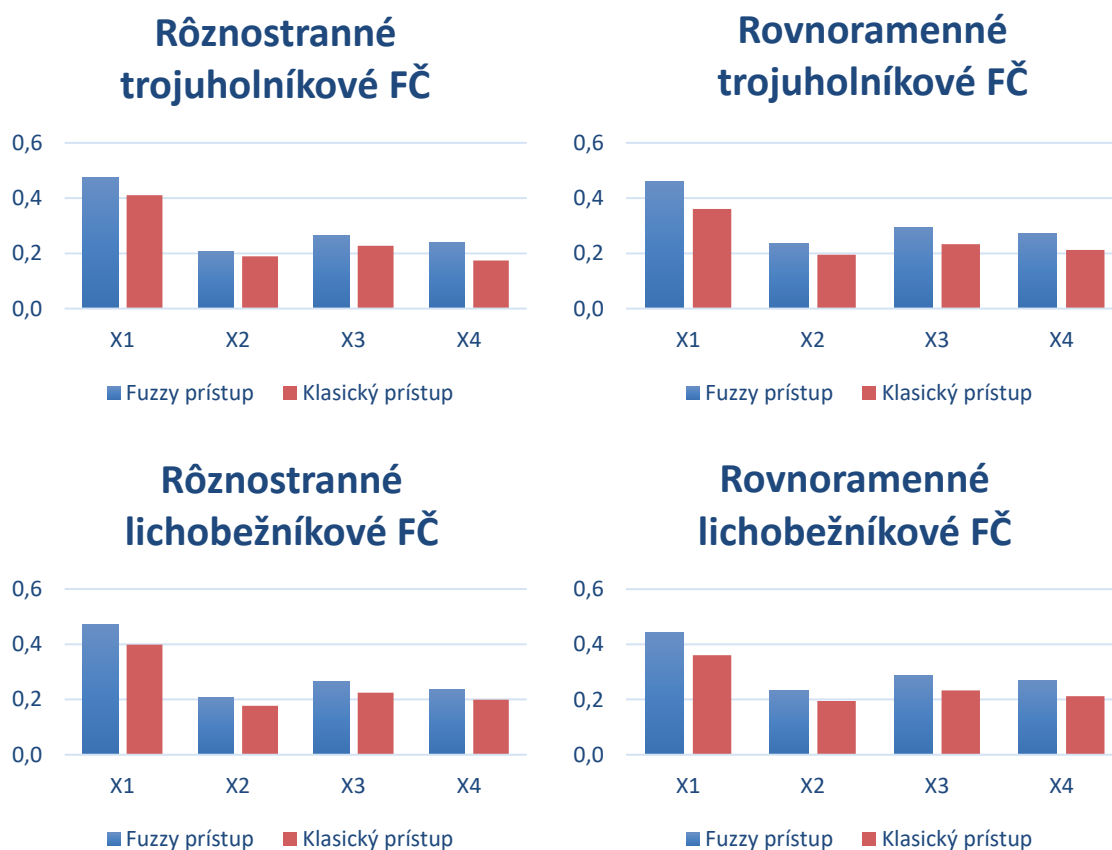
Tabuľka 47: Výsledky metódy FAHP

	Rôznos. TFČ	Poradie I	Rovnor. TFČ	Poradie II	Rôznos. LFČ	Poradie III	Rovnor. LFČ.	Poradie IV
X_1	0,4739	1	0,4603	1	0,4721	1	0,4413	1
X_2	0,2074	4	0,2370	4	0,2072	4	0,2318	4
X_3	0,2646	2	0,2941	2	0,2653	2	0,2885	2
X_4	0,2381	3	0,2733	3	0,2355	3	0,2681	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Pri porovnaní oboch tabuliek môžeme pozorovať, že rozdiely v bodovom ohodnotení sú väčšie pri fuzzy prístupe. Dôležitým poznatkom je, že poradie variantov je odlišné len v prípade rôznostranných trojuholníkových fuzzy číslach, keď si variant x_2 vymenil pozíciu s variantom x_4 na treťom a štvrtom mieste. Zmenu v poradí týchto variantov však považujeme za zanedbateľnú, pretože bodový rozdiel variantov pri klasickom AHP činí jednu stotinu a pri FAHP tri stotiny.

Graf 22: Komparácia výsledkov metódy AHP



[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Je zaujímavé pozorovať bodové ohodnotenia pri oboch typoch rovnoramenných fuzzy číslach, keď sme mali podozrenie, že ich hodnoty budú totožné. Ako je z tabuliek zrejmé, náš predpoklad potvrdený nie je.

Je možné konštatovať, že metódu FAHP považujeme za vhodný aparát pri riešení úloh viackriteriálnej analýzy v podmienkach neurčitosti, pretože poskytuje spoľahlivý algoritmus, ktorý dokáže pracovať s fuzzy číslami. Experimentálnym skúmaním sme zistili, že pri riešení rozhodovacieho problému, výsledné poradie pri aplikovaní metódy využívajúcej fuzzy prístup je totožné s klasickým prístupom. Otázne je, či toto tvrdenie je platné pre každý rozhodovací problém, a či je možné vytvoriť takú rozhodovaciu situáciu, keď vlastnosti fuzzy čísel ovplyvnia proces rozhodovania v takej miere, keď rovnosť oboch prístupov platiť nebude. V literatúre (21) sa jej autor nezaobrá porovnaním metódy FAHP s klasickou metódou, preto na zodpovedanie položenej otázky je potrebná hlbšia analýza, na ktorú v rámci tejto diplomovej práce priestor už nie je. Využitie fuzzy prístupu pri metóde AHP na náš rozhodovací problém sa javí ako neefektívne, keďže je zrejmé, že výpočtová náročnosť s fuzzy číslami je vyššia. Možným riešením je návrh softvéru, ktorý by dokázal zautomatizovať proces riešenia úloh viackriteriálnej analýzy v podmienkach neurčitosti.

5.2 Komparácia výsledkov - metóda PROMETHEE

Rovnako ako pri AHP, aj pri metóde PROMETHEE určíme poradie variantov a ich bodové ohodnotenie ako pri fuzzy prístupe, tak aj pri rozhodovaní za istoty. Potom výsledne poradie variantov a ich bodové ohodnotenie klasickou metódou je uvedené v tabuľke nižšie.

Tabuľka 48: Výsledky klasickej metódy PROMETHEE

	Rôznos. TFČ	Poradie I	Rovnor. TFČ	Poradie II	Rôznos. LFČ	Poradie III	Rovnor. LFČ	Poradie IV
X ₁	0,5088	1	0,5540	1	0,5128	1	0,5540	1
X ₂	-0,2688	4	-0,0488	2	-0,2440	4	-0,0488	2
X ₃	-0,2331	3	-0,2940	4	-0,2371	3	-0,2940	4
X ₄	-0,0069	2	-0,2112	3	-0,0317	2	-0,2112	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

V nasledujúcich tabuľkách sú zhrnuté výsledky metódy PROMETHEE využívajúcej fuzzy prístup. Prvá tabuľka obsahuje bodové ohodnotenia určené pomocou Yagerovho indexu, kým druhá tabuľka je podľa mediánu. Zobrazenie oboch tabuliek je podmienené rozdielnym poradím pri oboch spôsoboch porovnania fuzzy čísel.

Tabuľka 49: Výsledky fuzzy metódy PROMETHEE – Yagerov index

	Rôznos. TFČ	Poradie I	Rovnor. TFČ	Poradie II	Rôznos. LFČ	Poradie III	Rovnor. LFČ	Poradie IV
X ₁	0,1795	1	0,1636	1	0,1481	1	0,0695	1
X ₂	-0,0416	2	0,0018	2	-0,1189	4	-0,0545	4
X ₃	-0,0530	3	-0,0292	4	-0,0609	3	0,0023	2
X ₄	-0,0853	4	-0,0044	3	-0,0432	2	-0,0242	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

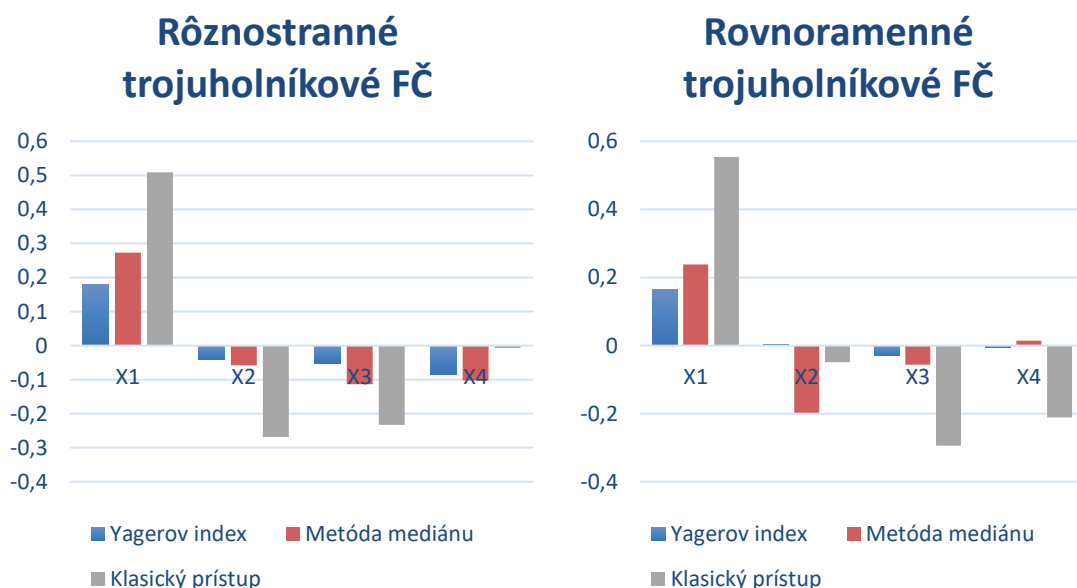
Tabuľka 50: Výsledky fuzzy metódy PROMETHEE – metóda mediánu

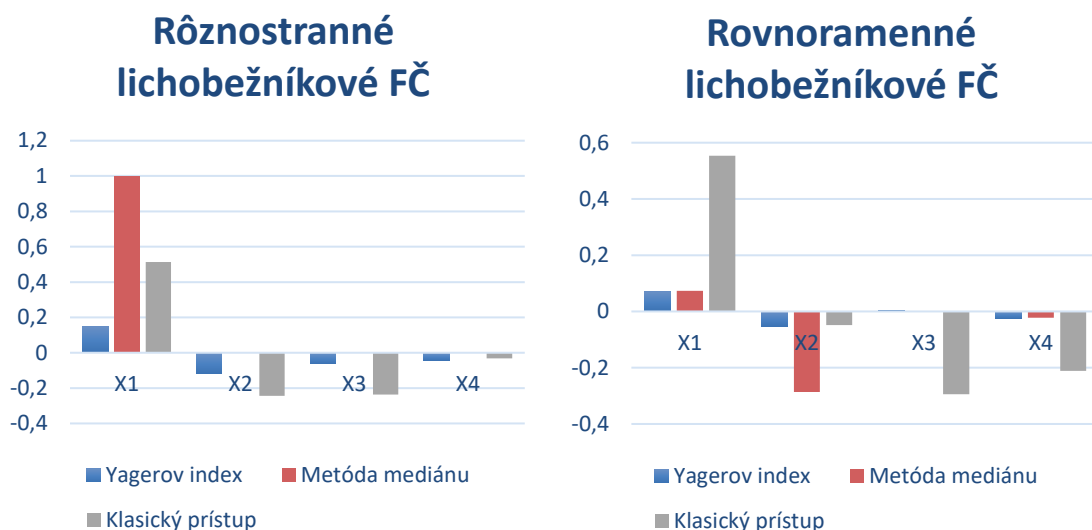
	Rôznos. TFČ	Poradie I	Rovnor. TFČ	Poradie II	Rôznos. LFČ	Poradie III	Rovnor. LFČ	Poradie IV
X ₁	0,2731	1	0,2382	1	0,1652	1	0,0735	1
X ₂	-0,0583	2	-0,1968	4	-0,1462	4	-0,2866	4
X ₃	-0,1133	4	-0,0559	3	-0,1181	3	-0,0005	2
X ₄	-0,1018	3	0,0145	2	-0,0423	2	-0,0227	3

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Výsledky metódy PROMETHEE sú odlišné v porovnaní s metódou AHP. Iba pri rôznostranných lichobežníkových fuzzy číslach môžeme pozorovať úplnú zhodu v poradí variantov. Pri ostatných rozhodovacích situáciách vidíme rozdielne poradie, s výnimkou kompromisného variantu.

Graf 23: Komparácia výsledkov metódy PROMETHEE





[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Odlišnosti v poradí dominovaných variantov medzi fuzzy prístupom a rozhodovaním za istoty podľa nášho názoru sú zapríčinené určovaním parciálnych preferencií medzi dvojicami dôsledkov variantov pri fuzzy prístupe. Tieto parciálne preferencie boli určované na základe preferenčnej funkcie Q_3 , ktorá brala do úvahy prah preferencie α . Na základe aritmetických výpočtov s fuzzy číslami, ktoré boli realizované pri určovaní rozdielov $d_h, h \in (1, 2, \dots, h)$ medzi jednotlivými dôsledkami variantov sme častokrát dosahovali hodnoty, ktorých tretie zložky trojuholníkových fuzzy čísel prevyšovali samotnú hodnotu α , čím im automaticky bola prisúdená hodnota jeden, čo predstavuje najvyššiu mieru preferencie. Naopak pri prvých zložkách fuzzy čísel, výsledkom odčítania dôsledkov variantov bola veľakrát negatívna hodnota, čo viedlo k nulovej miere preferencie. Výsledkom boli správne vypočítané preferenčné indexy, avšak kvôli spomenutým skutočnostiam nemuseli presne zodpovedať miere preferencie rozhodovateľa. Riešením by mohlo byť využitie prahu preferencie α vo forme fuzzy čísla, čím by sme zamedzili nepresným určeniam miery preferencie a aj preferenčným indexom. Či je možné za prah preferencie α použiť fuzzy číslo je mimo rozsahu skúmania tejto práce.

Podobne ako pri AHP si kladieme otázku, nakoľko použitý tvar fuzzy čísel ovplyvnil výsledne poradie variantov metódy PROMETHEE. Na základe skutočností, ktoré sme uviedli môžeme konštatovať, že experimentálne použitie štyroch rozličných fuzzy čísel nepostačuje na posúdenie efektívnosti použitia fuzzy prístupu pri tejto metóde.

5.3 Komparácia výsledkov - metódy AGREPREF a ELECTRE III

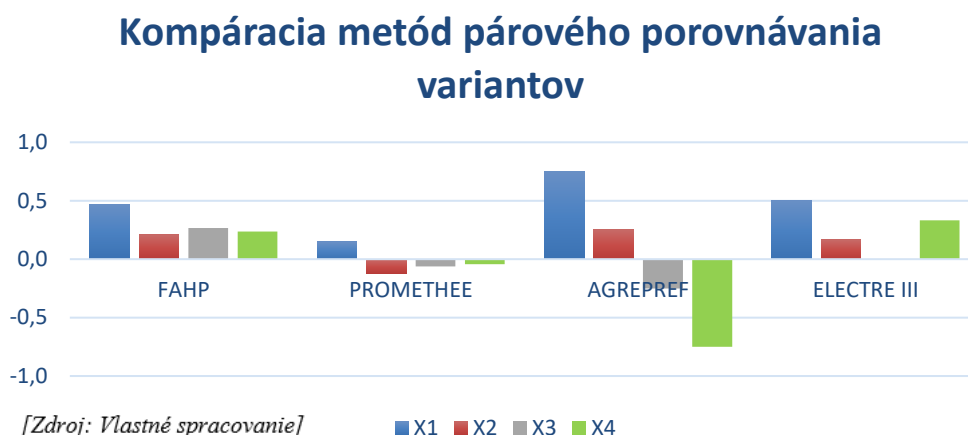
Východiskom oboch metód je matica preferencie variantov V . Skúmaním sa zistilo, že pri každom zo štyroch použitých fuzzy čísel sme využitím metód porovnávania fuzzy čísel vyjadrili rovnakú maticu V , a následne riešením rozhodovacieho problému dospeli k totožným výsledkom či už pri metóde AGREPREF alebo ELECTRE III. Ak porovnáme dosiahnuté výsledky fuzzy prístupu s rozhodovaním za istoty, je možné konštatovať, že defuzzifikovaním výplatných funkcií a následným párovým porovnaním dospejeme k rovnakej matici V ako v prípade fuzzy prístupu. Nasledujúce riešenie rozhodovacieho problému oboma metódami je totožné ako sme uviedli v časti Výsledky práce, z čoho vyplývajú aj totožné poradia variantov.

Keďže výpočtová náročnosť procesu porovnávania fuzzy čísel je porovnateľná s procesom defuzzifikácie, myslíme si, že neexistuje hranica, kedy sa rozhodnúť defuzzifikovať výplatné funkcie variantov a riešiť úlohu viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti klasickým prístupom, a kedy je lepšie využiť fuzzy prístup. Závisí to od subjektívneho rozhodnutia jednotlivca. Výhodou fuzzy prístupu je možnosť porovnávania fuzzy čísel aj inými metódami ako metódami centroidnymi. Pomocou nami uvádzanej metódy Fuzzy Max Order vieme porovnať fuzzy čísla na základe ich tvaru, čo nevedie k eliminácii neurčitosti ako v prípade číselných charakteristík. Avšak negatívnou vlastnosťou Fuzzy Max Order sú prípady, keď nie je možné porovnať dvojicu fuzzy čísel, čomu sme sa podrobnejšie venovali v predchádzajúcej kapitole. Jednou z navrhovaných metód, ktoré by dokázali porovnať fuzzy čísla na základe ich tvaru je metóda Alfa-rezov. Jej využitie je ale mimo rozsah tejto práce.

5.4 Komparácia metód párového porovnávania variantov

Vo výsledkoch práce sme aplikovali metódy párového porovnávania variantov na rozhodovací problém, v ktorom postupne výplatné funkcie variantov boli reprezentované štyrmi rozličnými fuzzy číslami. Komparáciou štyroch výsledkov jednotlivých metód sme zistili, že poradie variantov v rámci metódy sa líši jedine v prípade PROMETHEE. Pri akejkolvek inej metóde využívajúcej štyri rozličné fuzzy čísla je poradie variantov rovnaké. Nasledujúci graf poukazuje na poradie variantov rozhodovacieho problému využívajúceho rôznostranné lichobežníkové fuzzy čísla.

Graf 24: Komparácia metód párového porovnávania variantov



Okrem grafu uvádzame taktiež tabuľku s výsledkami.

Tabuľka 51: Komparácia metód párového porovnávania variantov

	FAHP	PROMETHEE	AGREPREF	ELECTRE III
X ₁	0,4721	0,1481	0,75000	0,50000
X ₂	0,2072	-0,1189	0,25000	0,16667
X ₃	0,2653	-0,0609	-0,25000	0,00000
X ₄	0,2355	-0,0432	-0,75000	0,33333

[Zdroj: Vlastné spracovanie]

Zhoda v prípade kompromisného variantu nastala pri každej metóde. Zhoda v poradí ostatných posudzovaných variantov nenastala. Odlišné poradie variantov pri jednotlivých metódach sme očakávali, keďže pracujú na základe iných algoritmov.

Každá z týchto metód je závislá taktiež na samotnom rozhodovateľovi, ktorý subjektívne hodnotí preferencie medzi dôsledkami variantov, resp. určuje rôzne prahy preferencie alebo indierencie. Pri metóde AHP je na to využitá Saatyho tabuľka preferenčného hodnotenia. Vidíme, že rozdiely medzi dominovanými variantmi sú len v troch stotinách. Myslíme si, že čo i len malá zmena v preferenciách dôsledkov variantov v rámci metódy AHP môže viesť k inému preusporiadaniu alternatív od druhého miesta.

Pri metóde PROMETHEE boli takisto prahy preferencie α stanovené subjektívne rozhodovateľom. Je zreteľné, že dokonca medzi druhým a tretím najideálnejším variantom rozdiel činí ani nie dve stotiny desatinného čísla.

Rovnako ako už bolo uvedené v praktickej časti, pri metóde AGREPREF je možné voliť prah preferencie α z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Pri vyššej hodnote α sme zaznamenali iné poradie variantov ako pri jej nižšej hodnote.

Tvrdíme, že akýkoľvek rozhodovací problém pri konečnej množine uvažovaných variantov, posudzovaných podľa konečnej množiny kritérií, ktoré disponujú rozdielnymi váhami v podmienkach neurčitosti je možné riešiť akoukoľvek metódou zo skupiny metód párového porovnávania variantov. Dosiahnuté výsledky jednou metódou je vždy lepšie potvrdiť inou.

Metóda AHP využíva modifikovanú Saatyho preferenčnú tabuľku. Jej nevýhodou je výpočtová a časová náročnosť, preto pre účely aritmetických operácií s fuzzy číslami by bolo lepšie navrhnuť software, ktorý by riešenie rozhodovacích problémov v podmienkach neurčitosti zautomatizoval. Pri triviálnych rozhodovacích problémoch postačuje využiť MS Excel, ale platí, že s rozširovaním množiny variantov alebo kritérií náročnosť výpočtov narastá.

Pre metódu PROMETHEE platí to, čo sme uviedli pri porovnávaní výsledkov v podkapitole 5.2. Otázka je, či je možné nahradiť prah preferencie α fuzzy číslom, čo by možno viedlo k určeniu presnejších preferenčných indexov, a taktiež aj samotných výsledkov metódy. Ďalším riešením by mohla byť inak zvolená preferenčná funkcia, analýzou jej vhodnosti sa zaoberať nebudeme.

Metóda AGREPREF na rozdiel od metódy AHP nedisponuje s takou výpočtovou a časovou náročnosťou. Za nevýhodu metódy považujeme to, že neposkytuje bodové ohodnotenie výsledných variantov. Môže nastať situácia, keď kompromisný variant bude len o niečo lepší ako ten druhý, čo nám táto metóda neprezeradí.

Metódou ELECTRE III sme sa zaoberali v najmenšej miere. Ako už bolo niekoľkokrát spomenuté vychádza z rovnakej matice preferencie variantov V ako metóda AGREPREF, ktorú však pri riešení rozhodovacích problémov za neurčitosti považujeme za vhodnejšiu.

Záver

Táto diplomová práca bola zameraná na analýzu použitia metód párového porovnávania variantov v úlohách viackriteriálneho rozhodovania v podmienkach neurčitosti.

Pri analýze sme najskôr zostavili rozhodovaciu situáciu, ktorá využívala štyri rozličné typy fuzzy čísel. Na rozhodovací problém boli postupne aplikované metódy párového porovnávania variantov, modifikované takým spôsobom, aby dokázali pracovať s fuzzy číslami. Ani u jednej z metód párového porovnávania variantov sa nepreukázal významný rozdiel v poradí variantov, ak boli porovnávané výsledky pri použití rozhodovania za istoty a rozhodovania za neurčitosti.

Z vyššie uvedeného dôvodu vyplývajú podľa autora nasledujúce predpoklady:

- Vyjadrenie neurčitosti vo výplatných funkciách použitím fuzzy čísel v úlohách viackriteriálneho rozhodovania pri použití metód párového porovnania variantov nie je opodstatnené, nakoľko výsledky rozhodovania v podmienkach neurčitosti a istoty sú rovnaké.
- Dosiahnuté výsledky sú úzko korelované s použitým modelom rozhodovacej situácie a pri iných modeloch môžu byť výsledky iné.
- Napriek rovnakým výsledkom, v prípade použitia fuzzy prístupu porovnávanie výsledných fuzzy čísel poskytuje rozhodovateľovi väčší priestor na kvalifikované rozhodnutie.

Jeden z parciálnych cieľov práce bol zameraný na analýzu využitia neurčitosti vo váhach kritérií. Na základe výsledkov skúmania a podľa názoru autora, neurčitosť vo váhach kritérií je možné použiť pri každej zo štyroch posudzovaných metód. Je potrebné uviesť, že výpočtová náročnosť v prípade neurčitých váh sa pri každej metóde znásobuje.

V práci je podrobne spracovaná metodika rozhodovania za neurčitosti, čo s výnimkou metódy FAHP, pokladáme za vlastný prínos práce. Aj napriek podrobnej expertíze všetkých možností, autor práce vidí priestor na rozšírenie analýzy o realizáciu komplexnejších experimentov využívajúc rôzne tvary lineárnych alebo nelineárnych fuzzy čísel, ako aj skúmanie ich vplyvu na riešenie rozhodovacieho problému.

Zoznam použitej literatúry

Knižné zdroje:

1. **BALÁŽ, V.** 2009. *Riziko a neistota - Úvod do behaviorálnej ekonómie a financií*. Bratislava : Veda, 2009. s. 451. ISBN 978-80-22410-82-3.
2. **ČERNÝ, M - GLUCKAUFOVÁ, D.** 1982. *Vícekriteriální vyhodnocování v praxi*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), 1982. s. 133.
3. **ČERNÝ, M. - GLUCKAUFOVÁ, D.** 1987. *Vícekriteriální vyhodnocování za neurčitosti*. Praha : Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1987. s. 146. ISBN 21-123-87.
4. **DUBOIS, D.** 1980. *Fuzzy sets and Systems: Theory and Applications*. New York : Academic Press, 1980. s. 393. ISBN 978-00-809-1772-6.
5. **FIALA, F - JABLONSKY, J - MAŇAS M.** 1994. *Vícekriteriální rozhodování*. 1.vyd. Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze, 1994. s. 316. ISBN 80-7079-748-7.
6. **FOTR, J. – PÍŠEK, M.** 1986. *Exaktní metody ekonomického rozhodování*. Praha : Academia, 1986. s. 168. ISBN 21-013-86.
7. **FOTR J. - ŠVECOVÁ L. A KOL.** 2010. *Manažérske rozhodování postupy, metody a nástroje*. Praha 4 : Ekopress, 2010. s. 474. ISBN 978-80-86929-59-0.
8. **HUDEČ, M.** 2015. *Fuzzy logika pre hospodársku informatiku*. 1. Bratislava : EKONÓM, 2015. s. 220. ISBN 978-80-225-4100-8.
9. **KAUFMANN, A. - GRUPTA, M.** 1991. *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. s.l. : Van Nostrand Reinhold Company, 1991. s. 384. ISBN 978-0442008994.
10. **MÍKA, T. V.** 2006. *Manažérske metódy a techniky*. Žilina : Žilinská univerzita v Žiline, 2006. s. 107. ISBN 978-80-88829-79-8.
11. **MLYNAROVIC, V.** 1998. *Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 1998. s. 233. ISBN 80-225-0985-10.
12. **OCELIKOVÁ, E.** 2001. *Viackriteriálne rozhodovanie*. Košice : Technická univerzita v Košiciach - Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2011. s. 119. ISBN 978-80-553-0653-7.

13. **RAMÍK, J. - TOŠENOVSKÝ, F.** 2013. *Rozhodovací analýza pro manažery - Moderní metody rozhodování*. Karviná : Slezská univerzita v Opavě, Obchodně podnikatelská fakulta v Karviné, 2013. s. 188. ISBN 978-80-7248-843-8.

14. **TALAŠOVÁ, J.** 2003. *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2003. s. 181. ISBN 80-244-0614-4.

15. **TEREK, M.** 2007. *Analýza rozhodovania*. Bratislava : Iura Edition, spol. s.r.o., 2007. s. 143. ISBN 978-80-8078-131-6.

16. **TZENG, H. - HUANG, J.** 2014. *Fuzzy Multiple Objective Decision Making*. CRC Press, 2014. s. 299. ISBN 978-1-4665-5462-7.

17. **ZADEH, L. A.** 1965. *"Fuzzy sets" Information and Control*. Berkeley : Department of Electrical Engineering and Electrics Research Laboratory, University of California, 1965.

Články v časopisoch:

18. **KRAMOSIL, I - MICHÁLEK, J.** 1975. *Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces*. Kybernetika. Praha : Ústav teorie informace a automatizace - ČSAV, Vol. 11, No. 5. 1975. ISSN 0023-5954

19. **RAMIK, J. - RIMANEK, J.** 1985. *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization*. Fuzzy Sets and Systems 2, s.l. 1985, Zv. 16.

20. **MOUSSEAU, V. - DIAS, L.** 2003. *Valued outranking relations ELECTRE providing manageable disaggregation procedures*. Coimbra : European Journal of Operational Research, 2003. vol. 156. issue 2. S. 467-482. 016/S0377-2217(03)00120-6.

21. **ROUYENDEGH, B.D. - ERKAN T.E.** 2012. *Selection of academic staff using the fuzzy analytic hierarchy process (FAHP): A pilot study*. Ankara : Atilim University, 2012. ISSN 1330-3651.

22. **ŠIK, F.** 1985. *Užití fuzzy množín v rozhodování za neurčitosti*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Brno : Jednota českých matematiku a fyziku, 1985. Vol. 30. No. 2. S. 92-105.

23. **TALESHIAN, A. - REZVANI, S.** 2011. *Multiplication Operation on Trapezoidal Fuzzy Numbers*. Journal of Physical Sciences, 2011, Vol. 15. S. 17-26. ISSN: 0972-8791.

24. **WANG, Y. - JUNG, K. - YEO, G. - CHOU, Ch.** 2013. *Selecting a cruise port of call location using the fuzzy-AHP method: A case study in East Asia*. Tourism Management. 2013. Vol. 42. S. 262-270.

Články v elektronických časopisoch:

25. **BAĎO, R. - VRABLIC, P.** 2011. *Využitie metódy multikriteriálneho rozhodovania metódou AHP pri rozhodovaní v podnikateľskom prostredí*. Transfer inovácií. [Online] 2011. [cit. 21.01.2017] Dostupné na internete: < <https://www.sjf.tuke.sk/transferinovacii/pages/archiv/transfer/21-2011/pdf/082-085.pdf>>

26. **DE RUNZ, C. - DESJARDIN, É. - HERBIN, M. - PIANTONI, F.** 2011. *A new Method for the Comparison of two fuzzy numbers extending Fuzzy Max Order*. HAL. Paris : Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, [Online] 2016. [cit. 22.02.2017] Dostupné na internete: < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00560708/document>>

27. **DOROHONCEANU, B.** 2002. *Comparing Fuzzy Numbers*. DR. Dropp's - The world of software development. [Online] 2002. [cit. 04. 03. 2017] Dostupné na internete: <<http://www.drdobbs.com/jvm/comparing-fuzzy-numbers/184405225?pgno=1>>

28. **DRIENIKOVÁ, K. - HRDINOVÁ, G. - NAŇO, T. - SAKÁL, P.** 2010. *Aplikácia metódy AHP pri určovaní strategických cieľov záujmových skupín*. Transfer inovácií. [Online] 2010. [cit. 21.01.2017] Dostupné na internete: < <https://www.sjf.tuke.sk/transferinovacii/pages/archiv/transfer/18-2010/pdf/110-119.pdf>>

29. **HAJJARI, T.** 2015. *New centroid index for ordering fuzzy numbers*. International Scientific Journal, Journal of Mathematics, [Online] 2015. [cit. 27.02.2017] Dostupné na internete: <<http://mathematics.scientific-journal.com/articles/1/2.pdf>>

30. **HAJJARI, T.** 2012. *Ranking indices for Fuzzy Numbers*. Recurrent Neural Networks and Soft Computing. [Online] 2012. [cit. 27.02.2017] Dostupné na internete: <<http://mathematics.scientific-journal.com/articles/1/2.pdf>> ISBN 978-953-51-0409-4.>

31. **ISHIZAKA, A.** 2014. *Comparison of Fuzzy logic, AHP, FAHP and Hybrid Fuzzy AHP for new supplier selection and its performance analysis*. International Journal of Integrated Supply Management. [Online] 2014. [cit. 05.12.2016] Dostupné na internete: <<http://www.ishizaka-dev.myweb.port.ac.uk/FAHP.pdf>>

32. **JUŘICA, L. - HRADÍLEK, Z. - DVORSKÝ, J. - KREJČÍ, P.** 2015. *Application of new method of multi-criteria analysis*. Advances in Electrical and Electronic Engineering. Ostrava. [Online] 2015. [cit. 05.02.2017] Dostupné na internete: <<http://advances.utc.sk/index.php/AEEE/article/view/191/205>>
33. **MAHMOUDI, A. - SADI-NEZHAD, S. - MAKUI, A.** 2015. *An Extended Fuzzy PROMETHEE based on Fuzzy Rule based System for Supplier Selection Problem*. Indian Journal of Science and Technology. Tehran [Online] 2015. [cit. 15.03.2017] Dostupné na internete: <<http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/view/84225/65047>> ISSN 0974-6846.>
34. **MALLAK, S. F. - BEDO, D. M.** 2013. *A Fuzzy Comparison Method for Particular Fuzzy Numbers*. [Online] 2013 [cit. 20.03.2017.] Dostupné na internete: <http://jmmrc.uk.ac.ir/article_525_77f0bb8524f831376750f13b8ca1201e.pdf>
35. **NAGOOR G. A. - MOHAMED A. S. N.** 2012. *A New Operation on Triangular Fuzzy Number for Solving Linear Programing Problem*. Applied Mathematical Sciences Tamilnadu. [Online] 2012. [cit. 09.01.2017.] Dostupné na internete: <https://www.researchgate.net/publication/265583357_A_new_operation_on_triangular_fuzzy_number_for_solving_fuzzy_linear_programming_problem>
37. **PÚCHOVSKÝ, B.** 2005. *Vybrané problémy aplikácie viackriteriálneho rozhodovania v stavebníctve*. Soudní inženýrství. [Online] 2005. [cit. 29.01.2017.] Dostupné na internete: <<http://www.sinz.cz/archiv/docs/si-2005-05-261-266.pdf>>
38. **ROHÁČOVÁ, I. - MARKOVÁ, Z.** 2009. *Analýza metódy AHP a jej potenciálne využitie v logistike*. Acta Montanistica Slovaca. [Online] 2009. [cit. 17.02.2017.] Dostupné na internete: <<http://actamont.tuke.sk/pdf/2009/n1/15rohacova.pdf>>
39. **SENVAR, O. - TUZKAYA, G. - KAHRAMAN, C.** 2014. *Multi Criteria Supplier Selection Using Fuzzy PROMETHEE*. Heidelberg : Springer-Verlag [Online] 2014. [cit. 15.03.2017] Dostupné na internete: <https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-53939-8_2#page-1>
40. **VAHIDI, J. - REYVANI, S.** 2013. *Arithmetic Operations on Trapezoidal Fuzzy Numbers*. ISPACS: International Scientific Publications and Consulting Services [Online] 2013. [cit. 07.12.2016] Dostupné na internete: <<http://www.ispacs.com/journals/jnaa/2013/jnaa-00111/article.pdf>>

41. **WANG, T.C. - CHEN L.Y. - CHEN Y.H.** 2008. *Applying Fuzzy PROMETHEE Method for Evaluating IS Outsourcing Suppliers*. Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Department of Information Management, I-Shou University. [Online] 2008. [cit. 26.03.2017] Dostupné na internete: <<http://www.isu.edu.tw/upload/28/3/29520/paper/9704/970401.pdf>>
42. **ZADEH, L. A.** 2013. *Real-Life Applications of Fuzzy Logic*. Hindawi. [Online] 2013. [cit. 20. 03.2017] Dostupné na internete: <<https://www.hindawi.com/journals/afs/2013/581879/>>

Elektronické odkazy:

43. **COUPLAND, S.** 2009. *Fuzzy Logic in the Real World*. SlideShare. [Online] Centre for Computational Intelligence, De Montfort University, The Gateway, Leicester, 2009. [cit. 29. 11.2016.] Dostupné na internete: <<https://www.slideshare.net/BCSLeicester/fuzzy-logic-in-the-real-world-2326817>>
44. **DOROHONCEANU, B. - MARIN, B..** 2011. A Simple Method of Comparing Fuzzy Numbers. <http://citeseerx.ist.psu.edu>. [Online] 2011 [cit. 04. 03. 2017] Dostupné na internete: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.17.9044&rep=rep1&type=pdf>>
45. **MAHER, B. S.** 2011. *Fuzzy Numbers*. site.iugaza.edu. [Online] 2011. [cit. 04.03.2017] Dostupné na internete: <<http://site.iugaza.edu.ps/mahir/files/2010/02/chap5-FuzzyNumbers.pdf>>

Vedecko-kvalifikačné práce:

46. **BACHÁR, M.** 2015. *Využitie exaktných metód v logistike - aplikácia metódy AHP*:Seminárna práca. Trnava : STUBA, 2015. s.30.
47. **GROMAN, G.** 2012. *Fuzzy logika a jej aktuálne aplikácie*: Bakalárska práca. Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2012. s. 41.
48. **CHOUTKA, M.** 2016. *Metódy viackriteriálneho rozhodovania - Trieda ELECTRE*: Bakalárska práca. Bratislava : FHI EU, 2016. s. 54. 103004/B/2016/36066205952645636.

49. **CHVOSTAL, A.** 2015. *Viackriteriálna analýza: Použitie metódy PROMETHEE pre výber telefónneho operátora*: Bakalárska práca. Bratislava : FHI EU, 2015. s. 48. 103004/B/2015/3856062797.
50. **KOUBOVÁ, K.** 2008. *Viackriteriální hodnocení variant za jistoty - metody rozhodování založené na párovém srovnávání variant*: Bakalárska práca. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2008. s. 44.
51. **KUČERÍK, P.** 2015. *Viackriteriálne rozhodovanie za neurčitosti*: Diplomová práca. Bratislava : FHI EU, 2015. s. 60. 103004/I/2015/3687338491.
52. **LAZAR, T.** 2015. *Multikriteriálna analýza - metódy stanovenia váh kritérií založené na znalostiach dôsledkov variantov*: Bakalárska práca. Bratislava : FHI EU, 2015. s. 57. 103004/B/2015/36069194047431172.>
53. **NOVOSÁDOVÁ, L.** 2012. *Metody defuzzifikace fuzzy čísel*: Diplomová práca. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. s. 60.
54. **POLÁK, M.** 2016. *Fuzzy metódy v úlohách viackriteriálneho rozhodovania*: Diplomová práca. Bratislava : FHI EU, 2016. 103004/I/2016/3062633485.
55. **SLAVÍKOVÁ, M.** 2010. *Saatyho Analytický hierarchický proces*: Bakalárska práca. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2010.
56. **TALAŠOVÁ, J.** 2003. *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení*: Seminář Centra pro ekonomii a financování. Olomouc : Palackého Univerzita v Olomouci, 2003.