

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/B/2014/3711839995

POUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU
V EKONOMICKEJ ANALÝZE

Bakalárska práca

2014

Peter Hecht

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

POUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU
V EKONOMICKEJ ANALÝZE

Bakalárska práca

Študijný program: 6258 Manažérske rozhodovanie a informačné technológie
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva
Školiteľ: Ondrejková – Krčová Ingrid, Mgr.Ing.PhD

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Čestne vyhlasujem, že záverečnú bakalársku prácu “Použitie diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze“, som vypracoval samostatne vrátane všetkých príkladov a grafov a že som uviedol všetku použitú literatúru.

V Bratislave 30.4.2014

.....

Peter Hecht

POĎAKOVANIE

Chcel by som sa veľmi poďakovať mojej vedúcej bakalárskej práce pani Ing. Mgr. Ingrid Ondrejkovej – Krčovej, PhD. za ochotný prístup, odbornú pomoc, a konzultácie, usmernenie a množstvo cenných rád, ktoré mi pomohli pri vypracovaní bakalárskej práce.

ABSTRAKT

HECHT Peter : Použitie diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze. [Bakalárska práca] – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva FHI – Ing. Mgr. Ingrid Ondrejková – Krčová, PhD.– Bratislava FHI EU, 2013, počet strán 56.

Cieľom bakalárskej práce je ukázať použitie diferenciálneho počtu pre funkcie ekonomickej analýzy. Vhodne aplikovať teóriu diferenciálneho počtu na konkrétnych príkladoch. Práca je rozdelená do piatich kapitol. Obsahuje 26 grafov a 27 príkladov. Kapitoly boli zostavené tak, aby na prvé dve – ekonomickú časť vysvetľujúcu niektoré ekonomické pojmy (dopyt, ponuka, náklady, príjmy, zisk) a matematickú časť vysvetľujúcu pojmy diferenciálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej naväzovala tretia kapitola, ktorá ukazuje na konkrétnych príkladoch využitie diferenciálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej v ekonomickej analýze. Štvrtá kapitola je zameraná na vysvetlenie matematických pojmov diferenciálneho počtu funkcie dvoch reálnych premenných. V piatej časti je ukázané využitie diferenciálneho počtu funkcie dvoch reálnych premenných na príkladoch ekonomickej analýzy, ktoré sú funkciami dvoch reálnych premenných.

Kľúčové slová:

Dopyt, ponuka, náklady, príjmy, zisk, diferenciacia, diferenciál, derivácia, marginálna funkcia

ABSTRACT

HECHT Peter : The use of differential calculus in economic analysis. [Bachelor thesis] – Economic University in Bratislava, Faculty of informatics; Department of Mathematics – Head of thesis: Ing. Mgr. Ingrid Ondrejková Krčová PhD.- Bratislava FHI EU, 2014, Number of pages 56

The aim of bachelor thesis is to demonstrate the use of differential calculus for functions of economic analysis. Appropriately apply the theory of differential calculus on concrete examples. The work is divided into five chapters. Includes 26 graphs and 27 examples. Chapters have been written so that the first two – the economic part explaining some of the economic concepts (demand, supply, costs, revenue, profit) and a mathematical part explaining the concepts of differential calculus one real variable functions continued the third chapter, which shows the specific examples of the use differential calculus of one real variable functions in economic analysis. The fourth chapter is oriented to an explanation of the mathematical concepts of differential calculus function of two real variables. In the fifth part is shown usage of differential calculus function of two real variables in the examples of economic analysis, which are functions of two real variables.

Key words:

demand, supply, costs, revenues , profit , difference , differential, derivation, marginal function

OBSAH

Úvod.....	str.9
Cieľ práce	str.10
1. VYSVETLENIE NIEKTORÝCH EKONOMICKÝCH POJMOV	
1.1. Dopyt a krivka dopytu.....	str.11
1.2. Ponuka a krivka ponuky.....	str.12
1.3. Náklady a ich grafické znázornenie.....	str.14
1.4. Príjmy a ich grafické znázornenie.....	str.15
1.5. Zisk.....	str.15
2. VYSVETLENIE MATEMATICKÝCH POJMOV DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ	
2.1. Derivácia funkcie.....	str.16
2.2. Geometrický význam derivácie	str.17
2.3. Pojem diferenciála a diferenciál funkcie	str.18
2.4. Derivácie vyšších rádov.....	str.20
3. VYUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ V EKONOMICKEJ ANALÝZE	
3.1. Marginálne veličiny (marginálne náklady, marginálne príjmy, marginálny zisk).....	str.22
3.2. Marginálny dopyt	str.27
3.3. Relatívna zmena funkcie	str.29
3.4. Elasticita funkcie	str.29
3.5. Elasticita dopytu	str.32
3.6. Cenová elasticita dopytu	str.33
3.7. Dôchodková elasticita dopytu	str.34
3.8. Elasticita ponuky.....	str.35
3.9. Využitie vyšších derivácií v ekonomickej analýze.....	str.35
4. VYSVETLENIE MATEMATICKÝCH POJMOV DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH	
4.1. Dvojrozmerný euklidovský priestor	str.37
4.2. Parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných.....	str.38
4.3. Parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných vyššieho rádu.....	str.39
4.4. Parciálne derivácie zloženej funkcie	str.40

4.5. Geometrický význam parciálnych derivácií.....	str.41
4.6. Úplný diferenciál funkcie dvoch reálnych premenných	str.41
4.7. Lokálne extrémny funkcie dvoch premenných	str.42
4.8. Viazané extrémny funkcie dvoch premenných.....	str.43
5. VYUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH V EKONOMICKEJ ANALÝZE	
5.1. Zmena funkčných hodnôt v závislosti od parciálnej derivácie funkcie dvoch reálnych premenných.....	str.45
5.2. Rýchlosť zmeny funkčných hodnôt	str.46
5.3. Marginálny produkt (marginálne náklady, marginálny zisk).....	str.47
5.4. Parciálna elasticita	str.51
5.5. Využitie vyšších derivácií funkcií dvoch premenných v ekonomickej analýze.....	str.52
Záver.....	str.54
Použitá literatúra.....	str.56

ÚVOD

Anglický matematik a fyzik I. Newton (1642-1727) a nemecký filozof a matematik G.W.Leibniz (1646-1716) pri riešení úloh techniky, fyziky a geometrie objavili diferenciálny a integrálny počet, ktorý dodnes tvorí základ matematickej analýzy. Pod matematickou analýzou rozumieme tú časť matematiky, v ktorej základnými pojmami sú pojem limity, pojem funkcie, pojem derivácie a pojem integrálu. V tejto práci sa obmedzíme na diferenciálny počet, ktorý využíva deriváciu funkcie. Diferenciálny počet definuje okamžitý pomer zmeny funkčnej hodnoty vzhľadom na zmeny jej premennej.

Diferenciálny počet bol už aplikovaný v mnohých vedných odboroch a jedným z nich je aj oblasť ekonomickej analýzy. V ekonómii sa často stretávame s úlohami, v ktorých je potrebné napr. minimalizovať náklady, alebo maximalizovať príjmy, prípadne zisk.

Rovnako môže firma stáť pred rozhodnutím, či je ešte pre firmu rentabilné zvyšovať produkciu, ktorého výsledkom by malo byť lepšie ekonomické postavenie firmy v porovnaní s jej predchádzajúcim stavom. Pri rozhodovaní jej pomáhajú marginálne veličiny. Vo všetkých spomenutých prípadoch ekonomickej analýzy sa využíva diferenciálny počet. V tejto práci si ukážeme použitie diferenciálneho počtu jednej a dvoch premenných na konkrétnych prípadoch ekonomickej analýzy podniku.

CIEĽ PRÁCE

Cieľom bakalárskej práce je ukázať, ako využiť diferenciálny počet v ekonomickej analýze. Budú objasnené pojmy ako sú diferenciacia funkcie, diferenciál funkcie, derivácia funkcie a jej geometrický význam a aplikácia geometrického významu derivácie funkcie jednej reálnej premennej v ekonomickej analýze. Budú vysvetlené pojmy marginálne veličiny a elasticita funkcie a ich využitie v konkrétnych príkladoch výpočtu marginálnych nákladov, príjmov a zisku výrobného podniku. Bude na konkrétnych príkladoch poukázaná výhodnosť a nevýhodnosť využitia diferenciálneho počtu na určenie marginálnych veličín v ekonomickej analýze. V úvode tejto práce budú vysvetlené aj ekonomické pojmy, ako sú náklady, príjmy, zisk, dopyt, ponuka. V druhej časti budú vysvetlené niektoré pojmy diferenciálneho počtu funkcie dvoch reálnych premenných, ako sú dvojrozmerný euklidovský priestor, parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných, parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných vyššieho rádu, parciálne derivácie zloženej funkcie, geometrický význam parciálnych derivácií, úplného diferenciálu funkcie dvoch reálnych premenných, zisťovanie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných a viazaných extrémov funkcie dvoch premenných.

V závere práce ukážeme na príkladoch využitie diferenciálneho počtu dvoch premenných v marginálnych nákladoch a v marginálnom zisku, parciálnej elasticite a využitie vyšších derivácií funkcií dvoch premenných napr. v hľadaní maximálneho zisku.

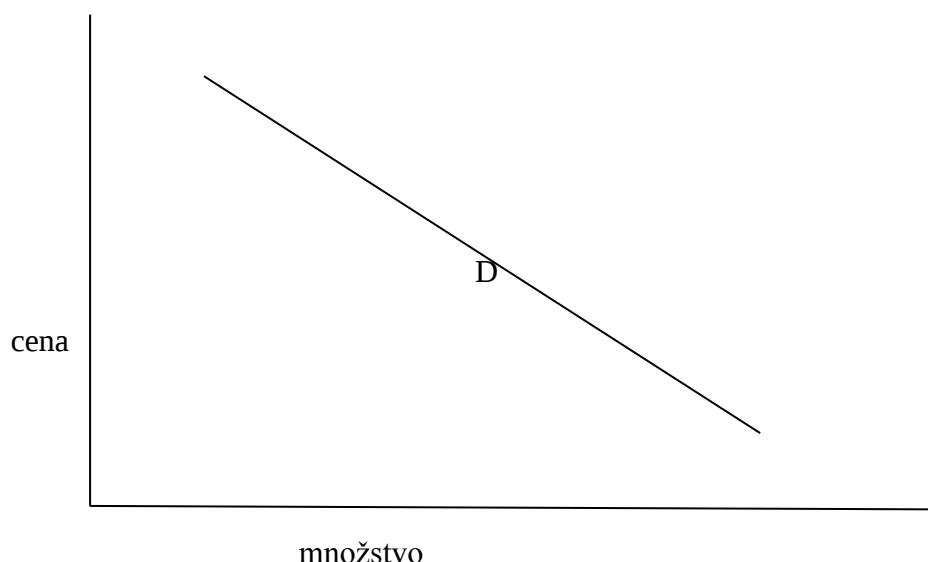
U čitateľa tejto práce sa predpokladajú vedomosti v rozsahu učiva matematiky bakalárskeho štúdia ekonomickej univerzity.

VYSVETLENIE NIEKTORÝCH EKONOMICKÝCH POJMOV

1.1. Dopyt a krivka dopytu

Dopyt predstavuje množstvo jedného konkrétneho statku, ktoré je jeden kupujúci (individuálny dopyt q) alebo skupina kupujúcich, spravidla na celom trhu (trhový dopyt) ochotný a schopný ex-ante kúpiť za danú cenu (p) tohto statku za dané časové obdobie. Vyjadruje komplexný pohľad na množstvo statku, ktoré by kupujúci kúpil/-li za určitú cenu. Túto mikroekonomickú definíciu treba spresniť. Pojem „schopný“ (tzv. kúpyschopný efektívny dopyt) sme použili preto, lebo dopyt nie je len funkciou ceny samotného statku, ale aj cien všetkých ostatných statkov na trhu ($p_2, p_3, \dots$) a hlavne disponibilného príjmu kupujúceho /kupujúcich. Slovo „ochotný“ sme zas použili preto, lebo kupujúci pri kúpe zohľadňuje aj skutočnosť, akú úžitkovú funkciu má pre neho/nich kupovaný tovar (čiže aký má tovar pre nich úžitok). Ex-ante znamená vopred, čiže ide o úmysel kúpiť a nesmie sa zamieňať s tým, čo už bolo kúpené (ex post). **Funkcia dopytu** je jednorozmerný graf a volá sa **krivka dopytu**. Ide o grafické znázornenie závislosti medzi dopytom q (Q) a cenou p (P). Funkcia je spravidla klesajúca (pokles dopytu po tovare s rastúcou cenou statku) - tzv. **zákon klesajúceho dopytu**. Funkcia teda vyjadruje vzťah medzi cenou statku a požadovaným množstvom tohto statku.

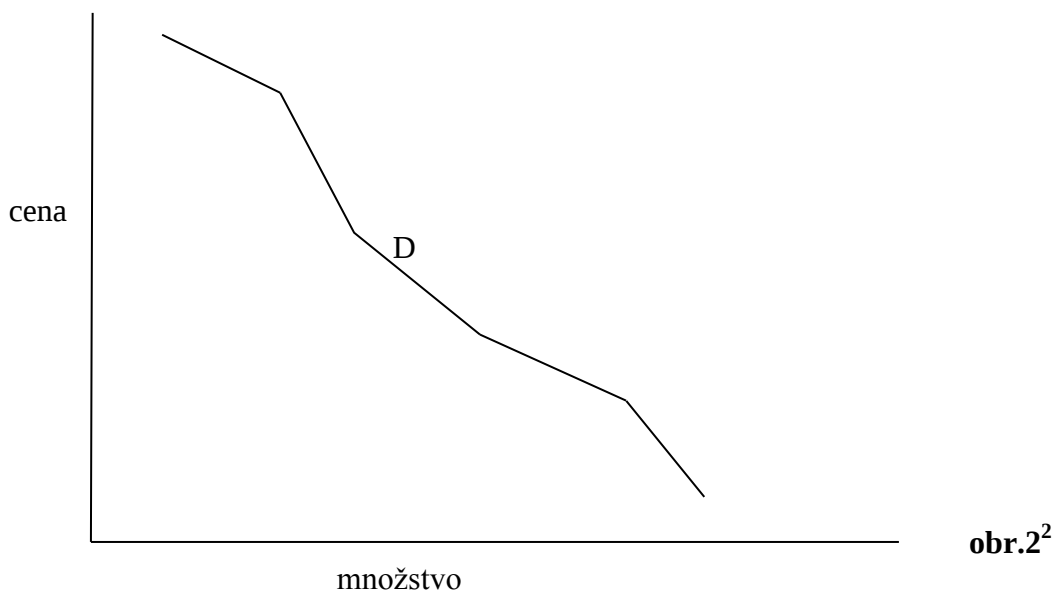
Grafické znázornenie funkcie dopytu (Obr.1)



Obr.1¹

¹ Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonomia v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str. 91

Krivka dopytu je na grafe znázornená ako priamka a takto je krivka dopytu prezentovaná aj v odborných literatúrach. Je to preto, že vyjadruje zmenu dopytu pri jednej zmene ceny tovaru, teda pri jednom zdražení. Pri opakovaných pohyboch ceny nahor individuálny dopyt (dopyt jediného spotrebiteľa) a aj trhový dopyt (súčet všetkých individuálnych dopytov) má graf znázornený na obr.2. Sporadicky môže mať trhový dopyt lineárny priebeh, ako je znázornený na obr.1



Vyššie uvedené grafy dopytu znázorňujú priebeh dopytu pri konkrétnom uvádzaní dopytu spotrebiteľa/spotrebiteľov po tovare, čiže koľko tovaru nakupuje/nakupujú pri rôznych cenách.

Pokiaľ je dopyt vyjadrený funkciou, pre grafické znázornenie dopytu platia tie isté pravidlá, ako pri grafickom znázornení priebehu funkcie. Priebehom funkcie sa nebudeme zaoberať. Bola predmetom učiva matematiky v 1. ročníku fakúlt VŠE. Avšak ako si neskôr ukážeme, práve pri dopyte vyjadrenom funkciou sa dá efektívne využiť diferenciálny počet.

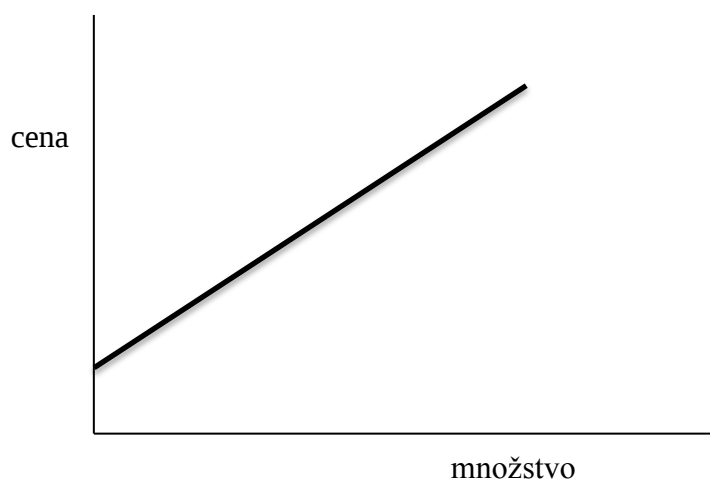
1.2. Ponuka a krivka ponuky

Ponuka vyjadruje množstvo jedného konkrétneho statku, ktoré je jeden predávajúci (individuálna ponuka), alebo skupina predávajúcich, spravidla na celom trhu (trhová ponuka) ochotný/ochotná a schopný/schopná predat' ex-ante za danú cenu (p) tohto tovaru

² Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonomia v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str. 92

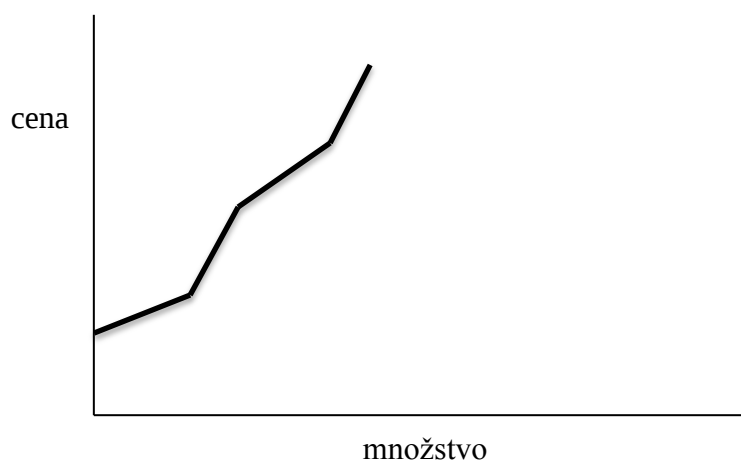
za dané časové obdobie. Trhová ponuka je súčtom individuálnych ponúk. Ex-ante znamená vopred, čiže ide o úmysel predat' a nesmie sa zamieňať s tým, čo už bolo predané (ex post). **Funkcia ponuky** je jednorozmerný graf a nazýva sa krivka ponuky. Ide o grafické znázornenie závislosti medzi cenou a ponúkaným množstvom, ktoré sú výrobcovia daného tovaru ochotní vyrobiť a predat'. Funkcia je spravidla rastúca. Platí **zákon rastúcej ponuky** – s rastom ceny ponúkané množstvo tovaru stúpa a naopak pokles ceny vyvolá pokles ponuky.

Graf ponuky pri jednom pohybe ceny:



obr.3³

Graf ponuky pri opakovanom zvyšovaní ceny:



obr.4⁴

Agregátna ponuka predstavuje súhrn všetkého tovaru, ktorí sú všetci výrobcovia ochotní vyrábať a ponúkať pri rôznej úrovni cien.

³ Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonomía v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str. 95

⁴ Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonomía v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str. 96

1.3. Náklady a ich grafické znázornenie

Celkové náklady TC (Total Cost) predstavujú celkové výdavky potrebné k vyrobeniu každej úrovne výstupu q , alebo uskutočnenia služby. Celkové náklady s rastom q rastú.

Je to preto, lebo na výrobu väčšieho množstva výrobkov q , potrebujeme viac práce a iných vstupov. Dodatočné množstvo výrobných faktorov znamená vyššie náklady. Celkové náklady obsahujú dve zložky. Sú to celkové fixné náklady TFC a celkové variabilné náklady TVC.

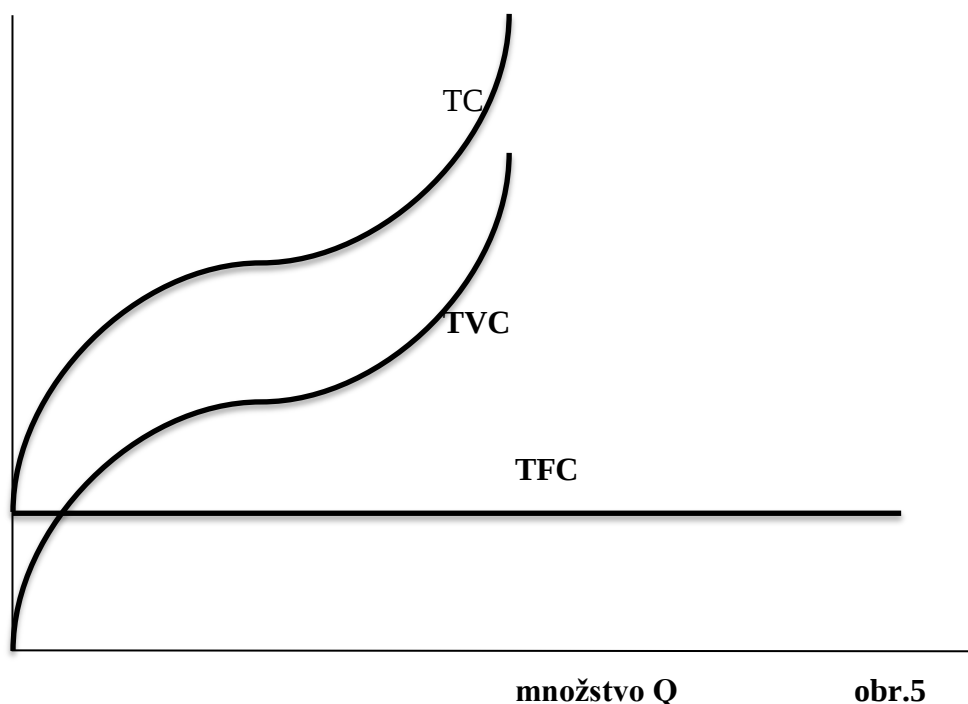
Celkové Fixné náklady TFC (Total Fixed Cost), ktorým niekedy hovoríme aj réžijné náklady sa skladajú z položiek ako sú platby za prenájom výrobných a administratívnych priestorov, zmluvné platby za zariadenie, úrokové platby z pôžičiek, atď. Fixné náklady predstavujú celkové výdavky, ktoré zaplatíme aj keď sa nevyrobí žiadny výstup, zmeny množstva výstupu nemajú na fixné náklady vplyv.

Variabilné náklady VC (Total Variable Cost) sú napr. materiály potrebné na výrobu výstupu, zamestnanci na obsluhu montážnych liniek, elektrina a plyn potrebné na prevádzku tovární a pod. Variabilné náklady VC predstavujú výdavky, ktoré sa menia s úrovňou výstupu – napr. výdavky na suroviny, mzdu a energie a zahrňujú všetky náklady, ktoré nie sú fixné.

Podľa definície vždy platí :

$$TC = TFC + TVC$$

náklady C



obr.5

Ako si neskôr ukážeme, pri nákladoch vyjadrených funkciou sa dá efektívne využiť diferenciálny počet.

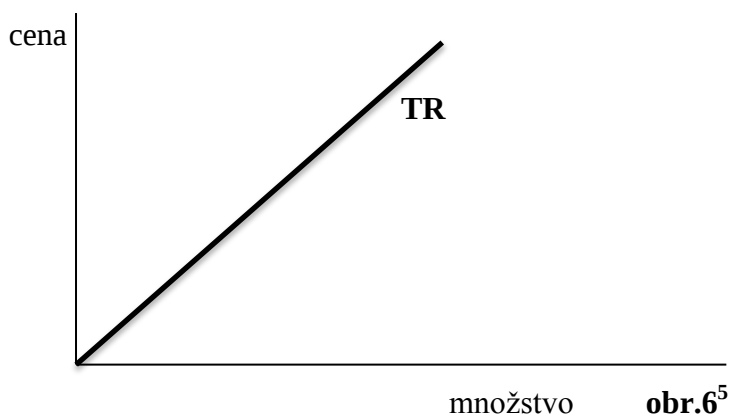
1.4. Príjmy a ich grafické znázornenie

Príjmom firmy sú peňažné prostriedky, ktoré firma získa realizáciou svojej produkcie. Za predpokladu, že hlavným cieľom firmy je maximalizácia zisku, tento cieľ môže firma dosiahnuť minimalizáciou svojich nákladov a maximalizáciou svojich príjmov.

Celkový príjem (Total Revenue TR) definujeme ako peňažnú sumu, ktorú firma získa realizáciou celkového objemu svojej produkcie. Celkový príjem firmy vypočítame ako súčin ceny za jednotku produkcie a objemu realizovanej produkcie :

$$TR = P \cdot Q$$

V podmienkach dokonalej konkurencie, kde firma nemá možnosť výšku ceny ovplyvniť, je krivka celkového príjmu TR funkciou iba predaného množstva, teda lineárnou funkciou.



V podmienkach nedokonalej konkurencie, keď sa cena s objemom realizovanej produkcie mení, bude priebeh funkcie celkového príjmu závisieť od elasticity dopytu po jej produkcii a tá môže byť v rôznych častiach dopytu rozdielna.

Pojem elasticity bude vysvetlený na str. 23 .

Aj v prípade príjmov vyjadrených funkciou sa dá vo výpočtoch využiť diferenciálny počet, ako si neskôr ukážeme.

1.5. Zisk

V mikroekonómii rozlišujeme podnikateľský (účtovný) zisk a ekonomický zisk.

Podnikateľský zisk je daný rozdielom výnosov a nákladov. resp. príjmov a výdavkov..

Teda ak od celkových príjmov odpočítame všetky výdavky ako sú mzdy, náklady na materiál, odpisy, úroky z úverov, spotrebné dane a pod.

a tá môže byť v rôznych častiach dopytu rozdielna.

⁵ Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonómia v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str. 177

$$TP = TR - TC$$

Ekonomický zisk je znížený o implicitné výnosy. Pri vyčísľovaní ekonomického zisku sa okrem výdavkov odpočítajú z príjmov aj : vlastná práca podnikateľa (t.j. koľko by podnikateľ zarobil, keby sa zamestnal), ak podniká vo vlastnej budove , tak nájom, ktorý by dostal v prípade, že by budovu prenajal atď.

Ako si neskôr ukážeme, v prípade zisku vyjadreného funkciou sa dá efektívne využiť diferenciálny počet.

Doteraz sme sa venovali základným ekonomickým pojmom, o ktorých sme podali základné informácie. Tieto nemali nahrádzať učebnicu ekonómie. Zvolili sme si ich preto, lebo chceme na nich ukázať využitie diferenciálneho počtu.

2. VYSVETLENIE MATEMATICKÝCH POJMOV DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENEJ

2.1. Derivácia funkcie

Nech funkcia f je definovaná na množine M a nech číslo $x_0 \in M$. Deriváciou $f'(x_0)$ funkcie f v čísle x_0 nazývame číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Deriváciu možno definovať aj ako :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \quad (2)$$

$$\text{kde } h = x - x_0$$

Deriváciu $f'(x_0)$ označujeme aj $[f'(x)]_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$

Vlastnosti:

Veta 1: Derivácia funkcie f v čísle x_0 existuje vtedy a len vtedy, keď existuje derivácia v bode sprava $f'_+(x_0)$ a derivácia zľava $f'_-(x_0)$ a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Veta 2: Ak funkcia f má v čísle x_0 deriváciu (deriváciu sprava , deriváciu zľava) je v čísle x_0 spojitá (spojitá sprava , spojitá zľava).

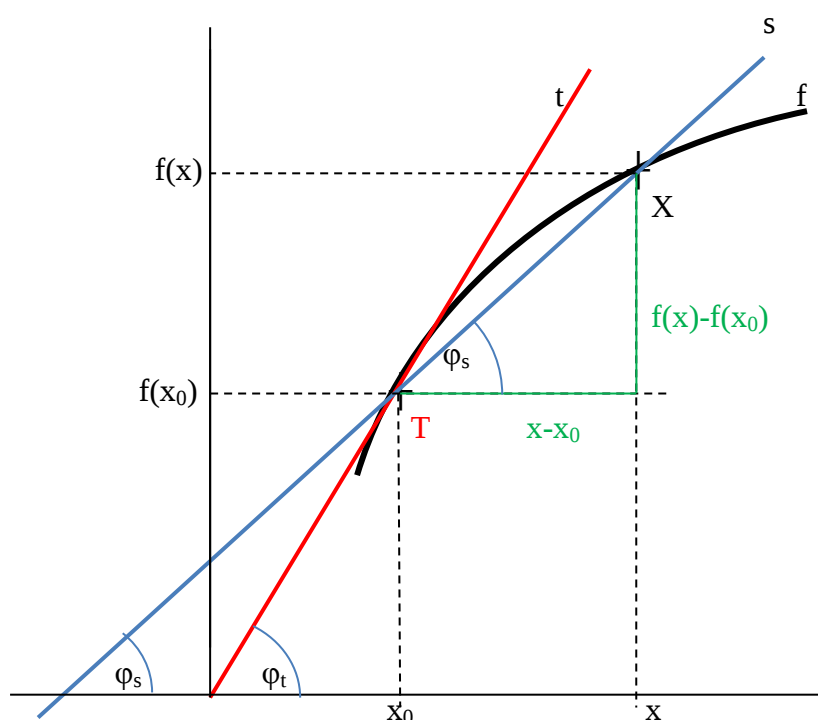
2.2. Geometrický význam derivácie

Derivácia sa využíva v rôznych vedách, veľmi často v matematike, geometrii, fyzike a v rôznych technických aplikáciách.

V ekonomickej analýze vychádza využitie derivácie z jej matematického významu a vzhľadom na grafické znázorňovanie výsledkov ekonomickej analýzy aj z jej geometrického významu.

Z matematického hľadiska derivácia funkcie v bode x_0 nám vyjadruje veľkosť prírastku funkcie f v bode x_0 .

Jej geometrický význam vychádza priamo z jej matematického vyjadrenia a ukážeme si ho na nasledovnom grafe:



obr.7

Na grafe je znázornený priebeh funkcie $f(x)$ – čiernou farbou. Bodmi $T(x_0, f(x_0))$, $X(x, f(x))$ sme viedli sečnicu s (modrou farbou). Bodom $T(x_0, f(x_0))$ sme viedli dotyčnicu t (červenou farbou) ku grafu funkcie $f(x)$. Smernica sečnice s je $k = \text{tg } \varphi$

$$k_s = \text{tg } \varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

Ak bude x konvergovať k x_0 , potom bude aj hodnota funkcie $f(x)$ konvergovať k hodnote funkcie $f(x_0)$. Bod X sa bude približovať na funkcii f k bodu T . Uhol medzi sečnicou s a dotyčnicou t sa bude zmenšovať. Keď hodnota x dosiahne hodnotu x_0 , potom $f(x)$ dosiahne hodnotu $f(x_0)$ a sečnica sa stotožní s dotyčnicou. Rovnako sa stotožní smernica

sečnice so smernicou dotyčnice a uhol φ_s s uhlom φ_t . Z uvedeného vyplýva, že smernica dotyčnice k_t je limita smernice sečnice pre x konvergujúce k x_0 .

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{a to je definícia derivácie v bode } x_0.$$

$$k_t = f'(x_0) \quad (4)$$

Geometrický význam derivácie :

Derivácia v danom bode funkcie je smernicou dotyčnice funkcie v danom bode .

2.3. Pojem diferenciálu a diferenciál funkcie .

Nech čísla x_0 , x_1 sú z oboru definície funkcie f . Rozdiel $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ nazývame diferenciou funkcie f patriacou k číslam x_0 a x_1 , alebo prírastkom funkcie f pre prírastok $h = x_1 - x_0$ v číisle x_0 . Platí :

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (5)$$

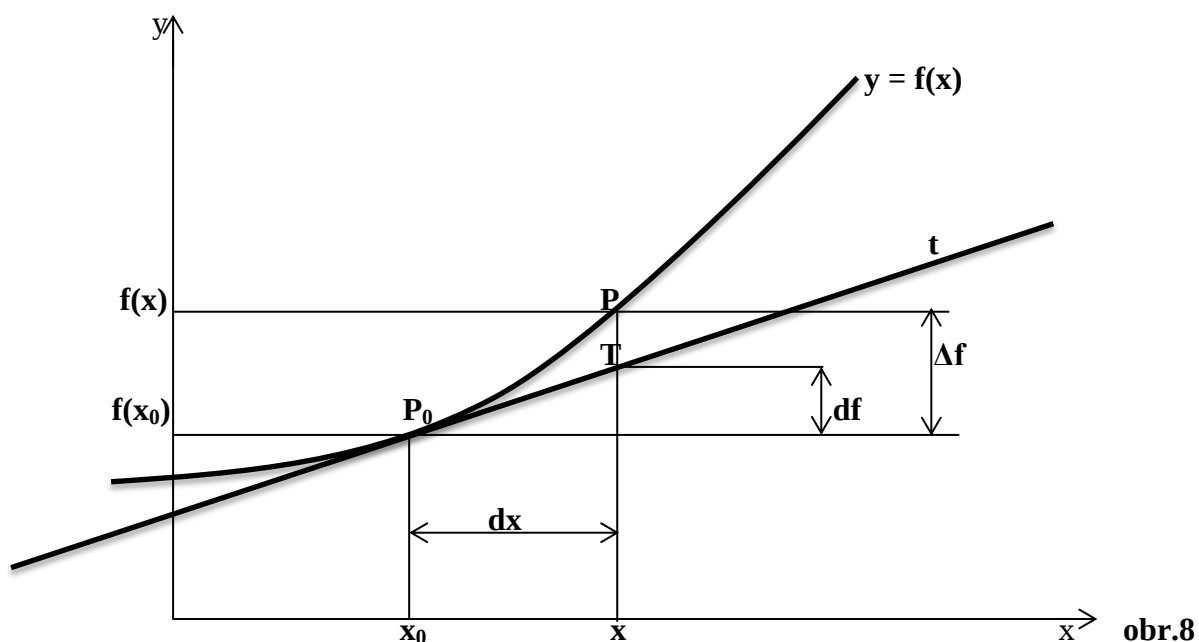
Nech funkcia f má v číisle x_0 deriváciu . Diferenciálom funkcie f v číisle x_0 pre prírastok $x - x_0$ je výraz $f'(x_0)(x - x_0)$ a označujeme ho $df(x_0, x)$, alebo $df(x_0)$, niekedy len df .

Platí :

$$df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (6)$$

alebo $df(x_0, x) = f'(x_0) dx$

Geometrický význam diferenciácie a diferenciálu si ukážeme na obr. 8



Diferencia funkcie f v číse x_0 pre prírastok $x - x_0$ je rozdiel **y-ových** súradníc bodov $P = (x, f(x))$ a $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Zostrojme dotyčnicu ku grafu funkcie f v bode P_0 . Diferenciál $df(x_0, x)$ je rozdiel y-ovej súradnice bodu $T = (x, y)$ na dotyčnici a y-ovej súradnice bodu $P_0 = (x_0, f(x_0))$ na grafe funkcie.

Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu potom platí

$$\Delta f_0 = df(x_0) + \rho(x)(x - x_0) \quad (9)$$

pričom
$$\rho = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad (10)$$

$$\rho(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0$$

Platí
$$\Delta f_0 \doteq df(x)$$

čiže
$$f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0) \quad (11)$$

s absolútnou chybou
$$\delta = |f(x) - f(x_0) - df(x_0)| = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| \quad (12)$$

a relatívnou chybou
$$\varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0)|} \quad (13)$$

ktorá sa najčastejšie vyjadruje v percentách

Príklad 1: Vypočítajme diferenciu a diferenciál a absolútnu a relatívnu chybu pre funkciu $f(x) = x^2 - 3$ v číse $x_0 = 4$ pre prírastok $x - x_0 = 0,01$

Riešenie : Vypočítajme najskôr diferenciu $x = x_0 + 0,01 = 4,01$. Použijeme vzťah (5)

$$\Delta f = f(4,01) - f(4) = (4,01^2 - 3) - (4^2 - 3) = 13,0801 - 13 = 0,0801$$

Výpočet diferenciálu - použijeme vzťah (6)

$$df(4;0,01) = f'(4) \cdot 0,01$$

$$f'(4) = (2x)_{x=4} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$df(4;0,01) = 8 \cdot 0,01 = 0,08$$

absolútnu chybu vypočítame podľa vzorca (12)

$$\delta = |f(x) - f(x_0) - df(x_0)| = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |0,0801 - 0,08| = 0,0001$$

relatívnu chybu vypočítame podľa vzťahu (13)

$$\varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0)|} = \frac{0,0001}{13} = 0,000007692$$

Z príkladu vyplýva , že rozdiel medzi diferenciou a diferenciálom v blízkom okolí bodu x_0 je veľmi malý. Preto sa často pri veľmi malej zmene argumentu x počíta zmena funkcie pomocou diferenciálu funkcie v bode x_0 , čím sa funkcia v blízkom okolí x_0 nahrádza jej dotyčnicou v bode x_0 .Je veľmi dôležité správne posúdiť, pri akej zmene argumentu x v závislosti od priebehu funkcie možno ešte nahradiť diferenciu na výpočet zmeny funkcie

diferenciálom a kedy je pre nás vzniknutá odchýlka pri použití diferenciálu namiesto diferencie, ktorá by nám zaručila presný výpočet, ešte prijateľná. Citlivo treba pristupovať k náhrade diferencie za diferenciál pri výpočte zmeny hodnoty funkcie, v ktorej dochádza aj pri malej zmene argumentu x k veľkej zmene funkcie $f(x)$.

2.4. Derivácie vyšších rádov

Nech funkcia $(f')'$ je definovaná na množine D . Deriváciou druhého rádu, alebo druhou deriváciou funkcie $y = f(x)$ nazývame funkciu $(f')'$, t.j. deriváciu prvej derivácie funkcie

$y = f(x)$. Označujeme ju f'' , alebo y'' , alebo $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Deriváciou n -tého rádu, alebo n -tou deriváciou (pre $n = 2, 3, 4, \dots$) funkcie $y = f(x)$ nazývame deriváciu $(n - 1)$ -ej derivácie funkcie $y = f(x)$, ak tieto existujú. Derivácie vyšších rádov označujeme $f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}$, alebo $y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$, alebo $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$.

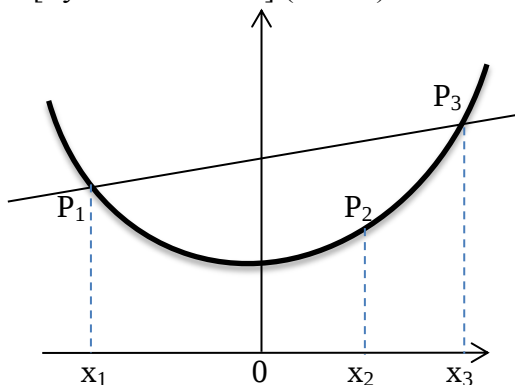
Vlastnosťami derivácií a spôsobmi derivovania jednotlivých primitívnych funkcií sa nebudeme zaoberať, boli predmetom učiva matematiky stredných škôl.

Prvé a druhé derivácie funkcie sa v matematike využívajú na určenie priebehu funkcie.

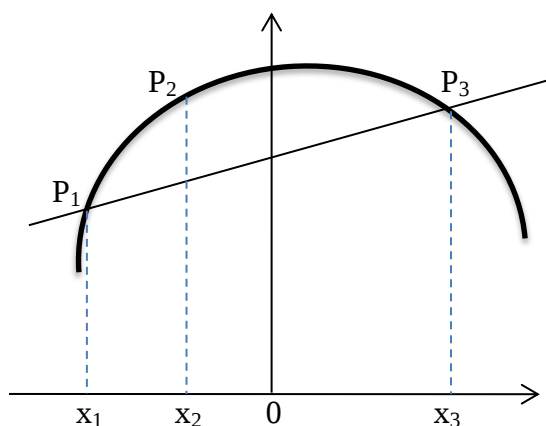
- 1.) Na určenie stacionárnych bodov funkcie. Sú to body, v ktorých $f'(x) = 0$, alebo $f'(x)$ neexistuje.
- 2.) Na určenie monotónnosti, alebo rýdzo monotónnosti funkcie. Ak pre každé x z intervalu J , ktorý vymedzili stacionárne body je $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$, $f'(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$], potom je funkcia $f(x)$ na intervale J rastúca [klesajúca, neklesajúca, nerastúca].
- 3.) Na určenie lokálnych extrémov. Pri hľadaní lokálnych extrémov sa postupuje nasledovne. Nájdú sa hodnoty x_0 , v ktorých je $f'(x_0) = 0$, alebo $f'(x_0)$ neexistuje. Tieto sa dosadia do druhej derivácie funkcie $f(x)$ a ak je $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$] funkcia má v bode x_0 lokálne minimum [maximum]. Môže nastať prípad, že funkcia $f(x)$ má v bode x_0 prvých n derivácií rovnajúce sa nule pre $n \geq 2$. Nech $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak je číslo n nepárne funkcia $f(x)$ má v čísle x_0 lokálny extrém. Ak je číslo n párne, funkcia má v bode x_0 ostrý lokálny extrém - ostré lokálne maximum pre $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokálne minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$.

4.) Na určenie konkávnosti a konvexnosti funkcie.

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale J . Ak pre každé tri čísla x_1, x_2, x_3 z intervalu J , pričom $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2(x_2; f(x_2))$ pod [nad] spojnicou bodov $P_1(x_1; f(x_1))$, $P_3(x_3; f(x_3))$, alebo leží na tejto priamke, hovoríme, že funkcia $f(x)$ je konvexná [konkávna] na intervale J . Ak bod P_2 leží vždy pod [nad] priamkou určenou bodmi P_1, P_3 , tak funkcia $f(x)$ je na intervale J rýdzo konvexná (obr.9) [rýdzo konkávna] (obr.10).



obr.9



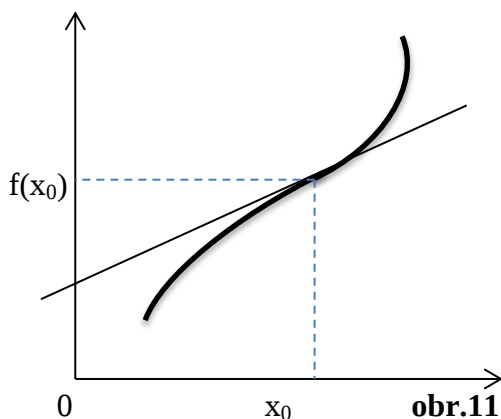
obr.10

5.) Na určenie inflexných bodov funkcie .

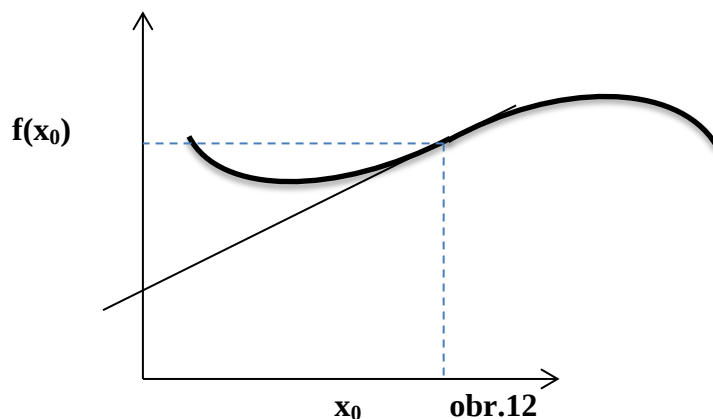
Inflexný bod je bod, v ktorom sa mení funkcia z konkávnej na konvexnú (obr.11), alebo naopak (obr.12). Existenciu inflexného bodu vyjadríme jeho postačujúcou podmienkou.

Nech $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$, potom bod x_0 je inflexný bod funkcie f . Ak $f''(x_0) > 0$ [$f''(x_0) < 0$], prechádza v bode $[x_0, f(x_0)]$ graf funkcie z konkávnosti do konvexnosti [z konvexnosti do konkávnosti].

Nech funkcia f má v čísle x_0 derivácie až do n -tého rádu vrátane, $n > 2$ a platí $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak n je nepárne číslo, potom funkcia f má v čísle x_0 inflexný bod. Ak n je párne číslo, funkcia je v určitom okolí čísla x_0 rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(x_0) > 0$ a rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.



obr.11



obr.12

3. VYUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ V EKONOMICKEJ ANALÝZE

3.1. Marginálne veličiny

Marginálna veličina MV (Marginal value) je prírastok funkcie $f(x)$ pripadajúci na jednotkový prírastok argumentu x . T.j. $x - x_0 = 1$

$$MV(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (14)$$

Ak funkcia $f(x)$ nie je daná predpisom, ale jej priebeh je daný diskretnými bodmi (t.j. nadobúda spočítateľný počet hodnôt) tak vzťah (14) sa v ekonomickej analýze interpretuje iba pre $x > x_0$, kde x_0, x sú dve za sebou idúce diskkrétne hodnoty, v ktorých je funkcia f definovaná. Napríklad môžu to byť dve za sebou idúce hodnoty v tabuľke.

Ak je funkcia $f(x)$ daná predpisom a je diferencovateľná t.j. v bode x_0 spojitá, marginálnu veličinu MV definujeme pomocou derivácie :

$$MV(x) = f'(x) \quad (15)$$

Ide vlastne o diferenciál $df(x_0)$ – vzťah (6) pre $x - x_0 = 1$

Funkciu vyjadrujúcu závislosť marginálnej veličiny od inej veličiny nazývame marginálnou funkciou.

Napríklad ak celková veličina TV predstavuje celkové náklady TC, alebo celkové príjmy TR, tak odpovedajúce marginálne veličiny MV budú marginálne náklady, alebo marginálne príjmy a marginálne funkcie budú funkcia marginálnych nákladov MC, alebo funkcia marginálnych príjmov MR.

V ekonomickej analýze sa často používa namiesto termínu „marginálny“, termín „hraničný“. Napr. hraničné náklady, hraničné príjmy ..atd’.

Najprv si ukážme výpočet marginálnej veličiny na funkcii danej diskretnými hodnotami.

Príklad 2: V tabuľke sú uvedené celkové príjmy TR organizácie v závislosti od počtu predaných výrobkov x . Vypočítajme marginálne príjmy ak sa predá 1,2,...,5 výrobkov.

x	1	2	3	4	5
TR	10 000	19 800	29 400	38 700	47 500

Riešenie:

$$MR(1) = \frac{TR(1) - TR(0)}{1 - 0} = \frac{10\,000 - 0}{1 - 0} = 10\,000$$

$$MR(2) = \frac{TR(2) - TR(1)}{2 - 1} = \frac{19\,800 - 10\,000}{2 - 1} = 9\,800$$

$$MR(3) = \frac{TR(3) - TR(2)}{3 - 2} = \frac{29\,400 - 19\,800}{3 - 2} = 9\,600$$

$$MR(4) = \frac{TR(4) - TR(3)}{4 - 3} = \frac{38\,700 - 29\,400}{4 - 3} = 9\,300$$

$$MR(5) = \frac{TR(5) - TR(4)}{5 - 4} = \frac{47\,500 - 38\,700}{5 - 4} = 8\,800$$

Doplnená tabuľka bude vyzerat' nasledovne :

x	1	2	3	4	5
TR	10 000	19 800	29 400	38 700	47 500
MR	10 000	9 800	9 600	9 300	8 800

Záver: Pri zvýšení predaja z troch na štyri výrobky sa celkové príjmy pripadajúce na predaj ďalšieho výrobku zvýšia o 9 300 p.j. Pre hodnotu celkových príjmov $TR(x)$ platí :

$$TR(x) = \sum_{i \leq x} MR(i)$$

Príklad 3:

Celkové náklady a príjmy spoločnosti vyrábajúcej výrobok na trh sú dané funkciami

$$C(x) = 250 + 5x - 0,005x^2 \quad \text{pre } x \leq 200$$

$$R(x) = 7x - 0,001x^2 \quad \text{pre } x \leq 200$$

Určme funkcie marginálnych nákladov, príjmov a zisku a znázorníme ich graficky.

Vypočítajme hodnoty týchto funkcií pre úroveň produkcie $x_0 = 100$ a výsledky ekonomicky interpretujme.

Riešenie:

Funkcia celkového zisku je

$$P(x) = R(x) - C(x) = 0,004x^2 + 2x - 250 \quad \text{pre } x \leq 200$$

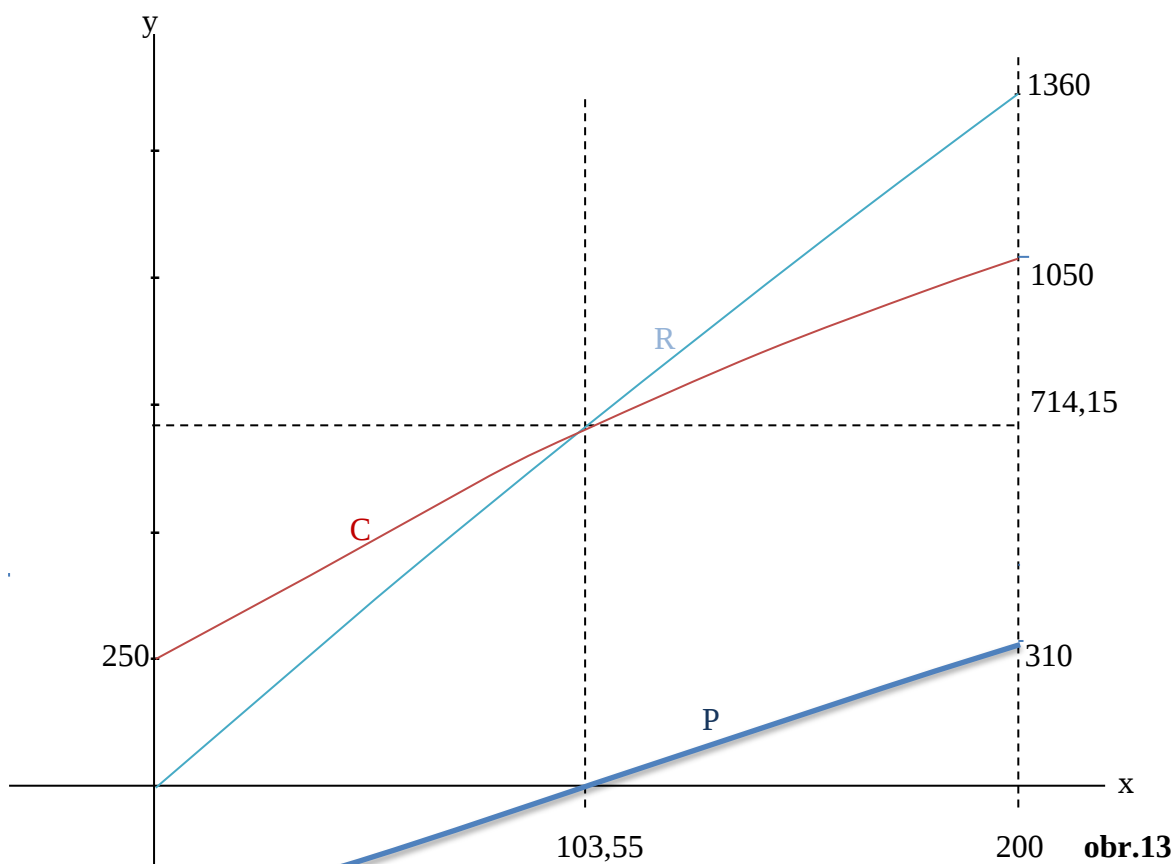
Vypočítajme si príslušné marginálne funkcie

$$MC(x) = C'(x) = 5 - 0,01x$$

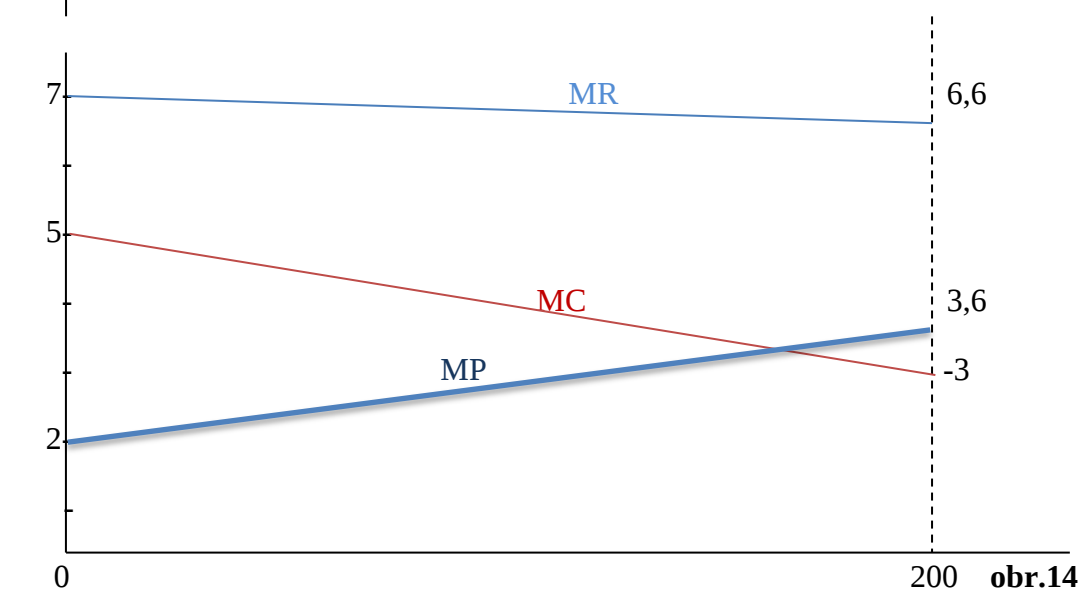
$$MR(x) = R'(x) = 7 - 0,002x$$

$$MP(x) = P'(x) = 0,008x + 2$$

Nakreslíme grafy funkcí celkových nákladov , příjmov a zisku a k nim prislúchajúce grafy funkcí marginálnych nákladov, marginálnych príjmov a marginálneho zisku



obr.13



obr.14

$$MC(100) = 4,$$

$$MR(100) = 6,8,$$

$$MP(100) = 2,8$$

Ekonomická interpretácia : Pri zvýšení (znížení) produkcie z úrovne 100 o jednotku produkcie sa zvýšia (znížia) náklady približne o 4 p.j. , sa zvýšia (znížia) príjmy približne o 6,8 p.j. a sa zvýši (zníži) zisk približne o 2,8 p.j.

Z obr.9 vidieť , že všetky tri funkcie C,R,P sú rastúce. Vyplýva to z toho, že všetky grafy ich marginálnych funkcií na intervale $\langle 0,200 \rangle$ ležia nad x-ovou osou, teda hodnoty ich marginálnych funkcií sú v danom intervale $\langle 0,200 \rangle$ kladné. Z matematiky vieme , že funkcia je na danom intervale rastúca (klesajúca) ak jej prvá derivácia na danom intervale nadobúda kladné (záporné) hodnoty a marginálne funkcie MC, MR, MP sú prvými deriváciami funkcií M, R, C.

Tak ako sme vedeli určiť monotónnosť funkcií C, R, P pomocou ich prvých derivácií MC, MR, MP , tak vieme určiť monotónnosť funkcií MC, MR, MP pomocou ich prvých derivácií MC' , MR' , MP' .

$$MC'(x) = -0,01, \quad MR'(x) = -0,002 \quad MP'(x) = +0,008$$

Z výsledkov vyplýva, že funkcie marginálnych nákladov MC a marginálnych príjmov MR sú klesajúce, ale funkcia marginálneho zisku je rastúca (obr.10).

Ekonomická interpretácia : Funkcia celkových nákladov je na intervale $\langle 0,200 \rangle$ rastúca, ale funkcia marginálnych nákladov je na intervale $\langle 0,200 \rangle$ klesajúca , čo znamená, že zvýšenie produkcie z x_1 na $x_1 + 1$ si vyžiada vyššie náklady ako zvýšenie produkcie z x_2 na $x_2 + 1$, ak $x_2 > x_1$. Z uvedeného vyplýva, že aj keď celkové náklady so zvyšovaním rastú , tak ich rast sa so zvyšovaním produkcie zmierňuje. Podobne by sme vysvetlili monotónnosť marginálnych príjmov a marginálneho zisku.

Vypočítajme hodnotu marginálnych veličín pre úroveň produkcie $x = 100$ pomocou diferencie a zistíme absolútne chyby, ktoré vznikli výpočtom marginálnych veličín použitím výpočtu diferenciálu marginálnych funkcií:

$$MC(100) = TC(101) - TC(100) = 703,995 - 700 = 3,995$$

$$\text{Absolútna chyba : } \delta_{MC} = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |3,995 - 4| = |-0,005| = 0,005$$

$$MR(100) = TR(101) - TR(100) = 696,799 - 690 = 6,799$$

$$\text{Absolútna chyba : } \delta_{MR} = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |6,799 - 6,8| = |-0,001| = 0,001$$

$$MP(100) = TP(101) - TP(100) = -7,196 - (-10) = 2,804$$

$$\text{Absolútna chyba : } \delta_{MP} = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |2,804 - 2,8| = 0,004$$

Je takmer nepredstaviteľné zostrojiť graf $MP(x)$ marginálnej funkcie získanej z TP (total value) vyjadrenej funkčným predpisom pomocou výpočtu diskretných bodov metódou využitia výpočtu diferencie $\Delta f(x)$ v každom bode x_0 , na ktorom je $TP = f(x)$ definovaná, ktoré by vyjadrovali nárasty funkcie $TP = f(x)$ v závislosti na jednotkovom náraste argumentu x . V tomto prípade (zostrojenie grafu marginálnej funkcie $MP(x)$) je využitie diferenciálneho počtu (výpočet diferenciálu pre $\Delta x = 1$) nevyhnutnosťou.

Iná situácia nastáva v prípade výpočtu nárastu TP danej funkčným predpisom v konkrétnom bode x_0 t.j. pre konkrétnu úroveň produkcie x_0 . V takom prípade treba citlivo posúdiť, či marginálnu veličinu vypočítame pomocou diferenciálu $TP = f(x)$ v bode x_0 , alebo pre výpočet marginálnej veličiny využijeme diferenciu funkcie $TP = f(x)$ pre $\Delta x = 1$ podľa vzťahu (5) aj keď je $TP = f(x)$ daná funkčným predpisom a nie pomocou diskretných bodov. Na rozhodnutie, akú metódu použiť vplýva funkčný predpis $TP = f(x)$. Ak sú pri malých zmenách argumentu x veľké zmeny hodnoty funkcie $f(x)$ (napr. v exponenciálnych funkciách $f(x) = a^x$, kde exponenciálny základ $a > 1$, alebo pri funkciách typu $f(x) = x^a$, kde $a > 1$, a.i.) a zisťovanie zmeny funkcie sa robí pre veľmi malé x_0 , potom treba posúdiť, ktorú z uvedených metód použiť pri výpočte marginálnej veličiny. Nevýhodnosť použitia diferenciálu si ukážeme na spomínaných dvoch prípadoch.

Príklad 4:

Funkcia celkových týždenných nákladov (v miliónoch eur) v podniku vyrábajúceho železničné vozne má tvar: $C(x) = 2^x$. Vypočítajme ako by sa zmenili náklady podniku, ak by svoju týždennú produkciu zvýšil z dvoch na tri vagóny.

1. riešenie: Vypočítajme príklad presne pomocou diferencie funkcie patriacou k číslam $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ podľa vzťahu (5).

$$\Delta C = C(x_1) - C(x_0) = 2^3 - 2^2 = 4$$

So zvýšením produkcie z 2 na 3 vozne za týždeň, by sa náklady zvýšili o 4 000 000 eur.

2. riešenie: Vypočítame príklad pomocou diferenciálu v bode $x_0 = 2$ pre zmenu $\Delta x = 1$.

$$C'(x_0) = [2^x \cdot \ln 2]_{x_0=2} = 2^2 \cdot \ln 2 = 2,772588$$

So zvýšením produkcie z 2 na 3 vozne za týždeň, by sa náklady zvýšili o 2 772 588 eur.

Použitím diferenciálu pre výpočet marginálnych nákladov $MC(2)$ sme sa dopustili absolútnej chyby: $\delta = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |4 - 2,772588| = 1,227412$

$$\text{a relatívnej chyby v \% : } \varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0)|} \cdot 100\% = \frac{1,227412}{|4|} \cdot 100\% = 30,68\%$$

Táto chyba je v ekonomickej analýze neprijateľná.

Príklad 5 :

Funkcia celkových denných nákladov (v tisícoch eur) v dielni vyrábajúcej vysokonapäťové transformátory má tvar : $C(x) = x^3$. Vypočítajme ako by sa zmenili náklady dielne, ak by svoju dennú produkciu zvýšila z dvoch na tri transformátory .

1.riešenie: Vypočítajme príklad presne pomocou diferencie funkcie patriacou k číslam $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ podľa vzťahu (5).

$$\Delta C = C(x_1) - C(x_0) = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$$

So zvýšením produkcie z 2 na 3 transformátory za deň, by sa denné náklady zvýšili o 19 000 eur.

2.riešenie: Vypočítame príklad pomocou diferenciálu v bode $x_0 = 2$ pre zmenu $\Delta x = 1$.

$$C'(x_0) = [3x_0^2]_{x_0=2} = 12$$

So zvýšením produkcie z 2 na 3 transformátory za deň, by sa denné náklady zvýšili o 12 000 eur.

Použitím diferenciálu pre výpočet marginálnych nákladov $MC(2)$ sme sa dopustili absolútnej chyby : $\delta = |\Delta f(x_0) - df(x_0)| = |19 - 12| = 7$

$$\text{a relatívnej chyby v \% : } \varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0)|} \cdot 100\% = \frac{7}{|8|} \cdot 100\% = 87,5\%$$

Táto chyba je v ekonomickej analýze neprijateľná.

V predchádzajúcich dvoch príkladoch sme ukázali, že výpočet marginálnej veličiny pomocou diferenciálu $df(x)$ je pre jej veľkú chybu neprijateľný a v takom prípade treba použiť pre výpočet marginálnej veličiny diferenciu funkcie $\Delta f(x)$ prislúchajúcu zmene argumentu Δx .

3.2. Marginálny dopyt

Čo je dopyt sme si vysvetlili na str.3 . Marginálny dopyt vyjadruje zmenu dopytu po konkrétnom statku pri jednotkovej zmene jeho ceny.

Príklad 6: Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom

$$q = (300 - p)^2 \quad \text{pre } p \in (0, 300)$$

Určme funkciu marginálneho dopytu , zostrojme graf funkcie dopytu a jej marginálneho dopytu. Určme úroveň dopytu pre $p_0 = 50$ a výsledky ekonomicky interpretujme.

Riešenie:

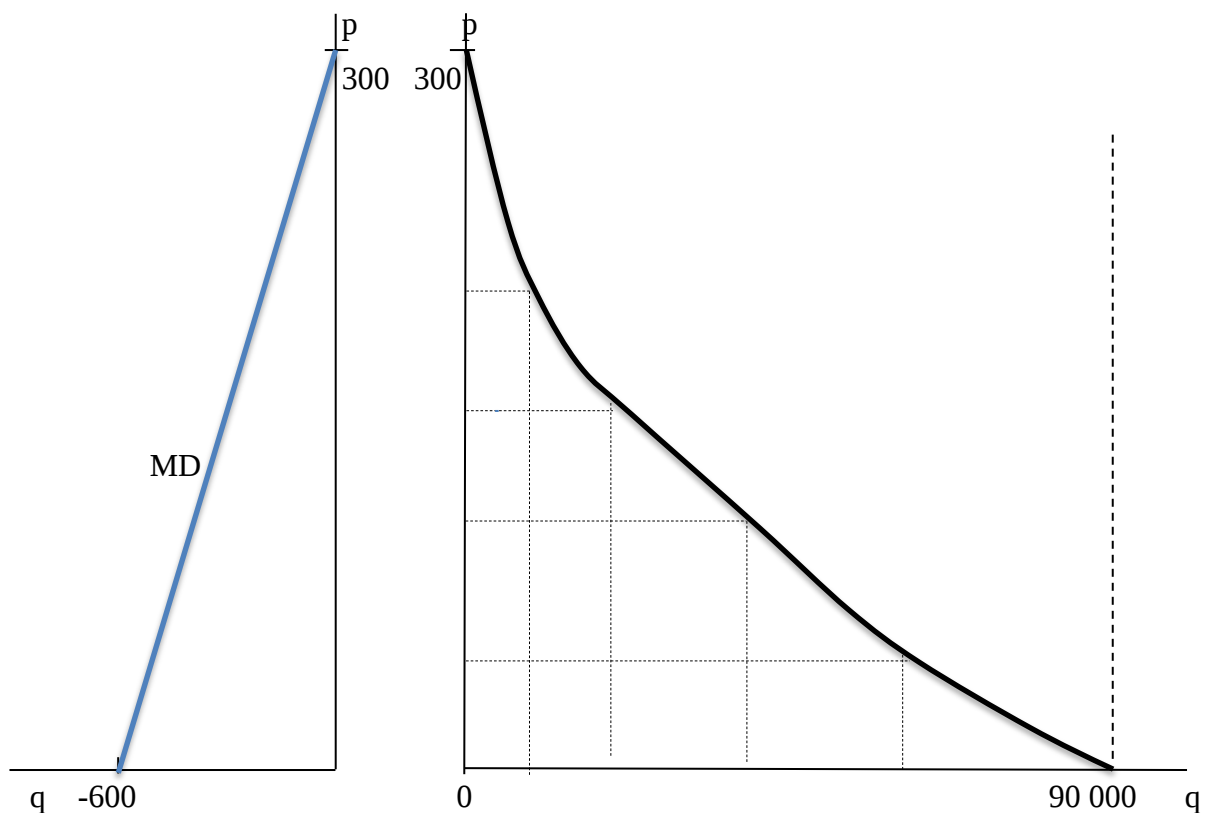
Vypočítajme marginálny dopyt $q' = 2p - 600$

Pre úroveň $p_0 = 150$ je $MD(150) = q'(150) = 2 \cdot 150 - 600 = -300$

Ekonomická interpretácia:

Marginálny dopyt znamená, že ak sa cena komodity zvýši z úrovne $p = p_0$ o 1 p.j. , tak dopyt po tovare sa zmení o $2p - 600$. Pre úroveň $p_0 = 150$ zvýšením ceny o 1 p.j. dopyt poklesne približne o 300 p.j.

Grafické znázornenie výsledkov :



obr.15

Vypočítajme ešte absolútnu chybu v bode $p_0 = 150$

$$\begin{aligned} \delta &= |q(p) - q(p_0) - dq(p_0)| = |q(151) - q(150) - dq(150)| = \\ &= |(300 - 151)^2 - (300 - 150)^2 - (-300)| = \\ &= |22\,201 - 22\,500 - (-300)| = 1 \end{aligned}$$

Vypočítajme relatívnu chybu v bode $p_0 = 150$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{|q(p_0)|} = \frac{1}{|22\,500|} = 0,00004$$

Relatívna chyba v percentách :

$$\varepsilon = 0,00004 \cdot 100\% = 0,004\%$$

3.3. Relatívna zmena funkcie

Nech funkcia f je definovaná na intervale I a nadobúda v každom jeho bode x_0 kladné hodnoty a nech existuje derivácia $f'(x_0)$. Vzťah $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}$ pre veľmi malú zmenu

h , napr. $h = 1$ má tvar $\frac{f(x_0+1)-f(x_0)}{f(x_0)}$. Pri takej malej zmene argumentu x_0 môžeme

čitateľa, v ktorom je uvedená diferencia funkcie v bodoch x_0 , $x_0 + 1$ zameniť za diferenciál $df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0)$, z ktorého nakoniec pre $x - x_0 = 1$ ostane v čitateli len derivácia funkcie $f'(x_0)$. Vzťah sa nám zmení na

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \quad (16)$$

a nazývame ho **relatívnou zmenou funkcie $f(x)$ v bode x_0** .

resp. vyjadrené v percentách : $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100\%$ (17)

a nazývame ju tiež **percentuálna zmena hodnoty funkcie**.

Relatívna zmena sa najčastejšie udáva v percentách a vyjadruje o koľko percent sa zmení funkcia $f(x)$ v bode x_0 , ak sa argument x zmení z x_0 na $x_0 + 1$.

Príklad 7:

Ročné výnosy spoločnosti boli $R(t) = t^2 + 10t + 100$ tisíc eur t rokov po jej založení na začiatku roku 2010.

Aké bolo percentuálne ročné tempo rastu ročných výnosov na začiatku roku 2014 ?

Riešenie:

Od založenia firmy 2010 do roku 2014 prešli 4 roky. Teda $t_0 = 4$

Relatívna zmena funkcie v percentách

$$r(t_0) = \frac{R'(t_0)}{R(t_0)} \cdot 100\% = \frac{2t_0+10}{t_0^2+10t_0+100} \cdot 100\% = \frac{2 \cdot 4+10}{4^2+10 \cdot 4+100} \cdot 100\% = 11,54\%$$

Percentuálne ročné tempo rastu ročných výnosov na začiatku roku 2014 bolo 11,54 %.

Ak hodnota $f(x_0)$ je podstatne väčšia ako $f'(x_0)$, tak podiel $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ je malý a zvýšenie argumentu x_0 na x_0+1 spôsobí malú relatívnu zmenu funkcie $f(x_0)$ v bode x_0 .

Ak hodnota $f(x_0)$ je rádovo rovnaká, alebo menšia ako $f'(x_0)$, tak podiel $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ bude číslo blízke jednotke, alebo väčšie ako 1 a potom zvýšenie argumentu x_0 na x_0+1 spôsobí veľkú relatívnu zmenu funkcie $f(x_0)$ v bode x_0 .

3.4. Elasticita funkcie

Pod elasticitou funkcie rozumieme percentuálnu zmenu funkcie, ktorá nastane vplyvom percentuálnej zmeny argumentu funkcie. Posudzujeme sa relatívna zmena funkcie, ku ktorej dochádza vtedy, keď sa argument funkcie zmení o 1%.

Nech $f(x) > 0$ pre $x_0 \in (0, \infty)$ a nech má v každom bode tohto intervalu deriváciu $f'(x_0)$.

Diferenciu $f(x_0 + h) - f(x_0)$ môžeme pre veľmi malé x zameniť za diferenciál $df(x_0, x)$ funkcie $f(x_0)$ v bode x_0 , $df(x_0, x) = f'(x_0) \cdot h$

Teda platí približný vzťah $f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot h$

Položme $h = \frac{x_0}{100}$, t.j. h je 1 % z x_0 .

Dostaneme vzťah $f(x_0 + \frac{x_0}{100}) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{100}$

Vynásobením tejto rovnice výrazom $\frac{100}{x_0}$ a následným delením $f(x_0)$ dostaneme :

$$\frac{f(x_0 + \frac{x_0}{100}) - f(x_0)}{f(x_0)} \cdot 100 \doteq \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \quad (18)$$

Pravú stranu vzťahu (18) interpretujeme ľavou stranou, ktorá vyjadruje o koľko percent sa približne zmení funkčná hodnota funkcie f , ak argument x vzrastie z hodnoty x_0 o 1 %.

Označme pravú stranu rovnice (18) $\eta(f(x_0))$

$$\eta(f(x_0)) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0 \quad (19)$$

Číslo $\eta(f(x_0))$ voláme **elasticitou funkcie f v bode x_0** .

Funkciu $\eta(f(x))$ voláme **elasticitou funkcie f** .

Vzhľadom na to, že definičným oborom funkcie $f(x)$ je $D: x_0 \in (0, \infty)$ a podľa predpokladu funkcia $f(x)$ nadobúda v každom bode x_0 kladné hodnoty, tak znamienko hodnoty elasticity funkcie bude závisieť výlučne od znamienka hodnoty derivácie funkcie $f'(x)$.

Z matematiky vieme, že ak prvá derivácia funkcie $f'(x)$ na danom intervale nadobúda kladné (záporné) hodnoty, tak funkcia $f(x)$ je na danom intervale rastúca (klesajúca).

Z uvedeného vyplýva, že ak $\eta(f(x)) > 0$ [$\eta(f(x)) < 0$] na intervale $(0, \infty)$, tak funkcia $f(x)$ je na tomto intervale **rastúca** [**klesajúca**].

Ak $\eta(f(x)) > 0$, tak **zvýšením** (**znížením**) argumentu x z x_0 o 1 % **vzrastie** (**klesne**) hodnota funkcie $f(x)$ približne o $\eta(f(x_0))$ % .

Ak $\eta(f(x)) < 0$, tak **zvýšením** (**znížením**) argumentu x z x_0 o 1 % **klesne** (**vzrastie**) hodnota funkcie $f(x)$ približne o $\eta(f(x_0))$ % .

Príklad 8 : Vypočítajme elasticitu celkových nákladov

$$C(x) = 250 + 5x - 0,005x^2 \quad \text{pre } x \leq 200$$

v bode $x_0 = 100$

Riešenie: Vypočítame $C'(x) = 5 - 0,01x$

$$\text{Potom } \eta(C(100)) = \frac{C'(100)}{C(100)} \cdot 100 = \frac{4}{700} \cdot 100 = 0,5714$$

Ekonomická interpretácia : Ak sa produkcia zvýši (zníži) z úrovne $x_0 = 100$ o 1 %, zvýšia (znížia) sa náklady približne o 0,57 %.

Vzťah $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \cdot x_0$ vieme napísať v podobe zloženého zlomku v tvare $\frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}}$.

Takto v čitateli dostávame marginálnu veličinu **Mf(x₀)** a v menovateli priemernú veličinu danej funkcie **Af(x₀)**.

$$\eta(f(x_0)) = \frac{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{f(x_0)}{x_0}} = \frac{Mf(x_0)}{Af(x_0)} \quad \text{kde } Af(x_0) > 0$$

Prípady, ktoré môžu nastať interpretujeme na funkcii celkových nákladov **C** :

- 1.) $\eta(f(x_0)) > 1$** , potom **Mf(x₀) > Af(x₀)** čo znamená, že pri každom náraste produkcie z úrovne x_0 na $x_0 + 1$, t.j. o jednotku produkcie, vzrastú náklady o viac, než sú priemerné náklady pre úroveň produkcie x_0 . To znamená, že v úrovni produkcie $x_0 + 1$ s hodnotou celkových nákladov $C(x_0 + 1)$ vzniká nový, vyšší priemer než v úrovni produkcie x_0 s hodnotou celkových nákladov $C(x_0)$. Túto skutočnosť vieme odvodiť aj matematicky : $Mf(x_0) > Af(x_0)$

$$C(x_0 + 1) - C(x_0) > \frac{C(x_0)}{x_0} \quad / + C(x_0)$$

$$C(x_0 + 1) > \frac{C(x_0)}{x_0} + C(x_0)$$

$$C(x_0 + 1) > C(x_0) \cdot \left(\frac{1}{x_0} + 1 \right)$$

$$C(x_0 + 1) > C(x_0) \cdot \frac{1 + x_0}{x_0} \quad /: (1 + x_0)$$

$$\frac{C(x_0 + 1)}{x_0 + 1} > \frac{C(x_0)}{x_0}$$

$$AC(x_0 + 1) > AC(x_0)$$

S rastúcou produkciou priemerné náklady rastú . Funkcii s elasticitou $\eta(f(x_0)) > 1$ hovoríme, že je **elastická**.

2.) $\eta(f(x_0)) = 1$, potom $Mf(x_0) = Af(x_0)$ čo znamená, že pri každom náraste produkcie z úrovne x_0 na $x_0 + 1$, t.j. o jednotku produkcie, vzrastú náklady o rovnakú hodnotu ako sú priemerné náklady pre úroveň produkcie x_0 . S rastúcou produkciou priemerné náklady z úrovne produkcie x_0 sa priemerné náklady nemenia. Takej funkcii hovoríme, že má **jednotkovú elasticitu**.

3.) $\eta(f(x_0)) < 1$, potom $Mf(x_0) < Af(x_0)$ čo znamená, že pri každom náraste produkcie z úrovne x_0 na $x_0 + 1$, t.j. o jednotku produkcie, vzrastú náklady o hodnotu menšiu, než sú priemerné náklady pre úroveň produkcie x_0 . S rastúcou produkciou priemerné náklady klesajú . Funkcii s elasticitou $\eta(f(x_0)) < 1$ hovoríme, že je **neelastická**.

3.5. Elasticita dopytu

Elasticita dopytu, alebo pružnosť dopytu vyjadruje o koľko sa zmení požadované množstvo tovaru v závislosti na zmene nejakého faktoru, ktorý dopyt ovplyvňuje, napr. cena tovaru (cenová elasticita dopytu - priama), cena iného tovaru (cenová elasticita dopytu – nepriama , alebo tiež krížová), príjem spotrebiteľa (dôchodková elasticita dopytu),.... atď. Pre charakter elasticity dopytu platia analogicky tie isté pravidlá, ktoré sme si ukázali pri cenovej elasticite v závislosti na produkcii v príklade 6. Teda ak

$\eta(f(x_0)) > 1$ hovoríme, že **dopyt je elastický**

$\eta(f(x_0)) = 1$ hovoríme o **jednotkovej elasticite**

$\eta(f(x_0)) < 1$ hovoríme, že **dopyt je neelastický**

V extrémnych prípadoch môže nastať aj situácia, kde nekonečne veľká zmena jednej premennej (napr. ceny), spôsobí nekonečne malú zmenu inej premennej (napr. množstva).

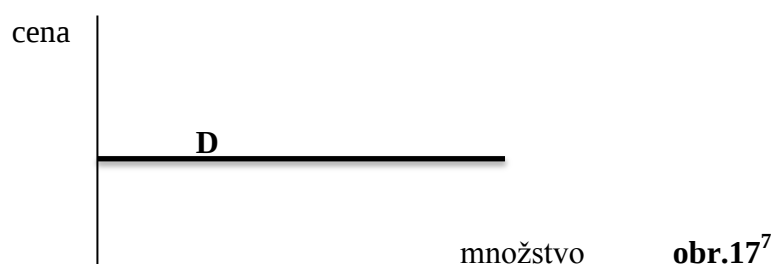
V takom prípade $\eta(f(x_0)) = 0$ hovoríme o **dokonale neelastickom dopyte** .

Grafom dokonale neelastického dopytu je vertikálna polpriamka .



Ďalším extrémnym prípadom je situácia, kedy nekonečne malá zmena jednej premennej (napr. ceny), spôsobí nekonečne veľkú zmenu inej premennej (napr. množstva). Vtedy $\eta(f(x_0)) = \infty$ hovoríme o **dokonale elastickom dopyte** .

Grafom dokonale neelastického dopytu je horizontálna polpriamka .



3.6. Cenová elasticita dopytu

Nech dopyt je daný funkciou $q = d(p)$, kde p je cena výrobku a q je dopyt po tomto výrobku za určité obdobie v určitej oblasti . Pri vysvetlení niektorých ekonomických pojmov sme si na začiatku tejto práce ukázali, že funkcia dopytu s rastúcou cenou klesá, teda funkcia dopytu je klesajúca. Za predpokladu, že existuje derivácia $d'(p_0)$ bude

$$\eta(d(p_0)) < 0$$

Elasticita sa v ekonomickej analýze vyjadruje kladnou hodnotou , preto sa na jej výpočet

používa vzťah:

$$\eta_d = - \frac{d'(p_0)}{d(p_0)} \cdot p_0 \quad (20)$$

alebo častejšie:

$$\eta_d = - \left[\frac{dq}{dp} \right]_{p=p_0} \cdot \frac{p_0}{q_0} \quad (21)$$

Príklad 9: Nech týždenná dopytová funkcia po slnečnicovom oleji v určenej oblasti je vyjadrená vzťahom $q = 4000 - 200 \cdot \sqrt{p}$ pre $p \in (0, 400)$ kde p je cena za 1liter oleja a q je množstvo požadovaného oleja na trhu v litroch. Vypočítajme elasticitu dopytu pre $p = 100$. Použijeme vzťah (21).

^{6,7} Zdroj: Lisý J. a kol.: Ekonómia v novej ekonomike (2.vydanie 2007) str.110

Riešenie:
$$q' = \frac{dq}{dp} = - \frac{100}{\sqrt{p}}$$

Elasticita dopytu :
$$\eta_d = - \left[\frac{dq}{dp} \right]_{p=p_0} \cdot \frac{p_0}{q_0} = \left(- \frac{100}{\sqrt{100}} \right) \cdot \frac{100}{4000 - 200 \cdot \sqrt{100}} = 0,5$$

Výsledok: Ak sa cena oleja zvýši (zníži) z ceny $p = 100$ o 1% tak týždenný dopyt po slnečnicovom oleji poklesne (vzrastie) približne o 0,5 % .

Presným výpočtom by sme dostali nasledovný výsledok:

$$\left| \frac{q(101) - q(100)}{q(100)} \cdot 100 \% \right| = \left| \frac{1990,024876 - 2000}{2000} \cdot 100 \% \right| = 0,4987 \%$$

Porovnaním s presným výpočtom je relatívna chyba výpočtu $\varepsilon = 0,5 - 0,4987 = 0,13\%$

3.7. Dôchodková elasticita dopytu

Dôchodková elasticita dopytu vyjadruje zmenu dopytu v závislosti na zmene dôchodku (príjmu) spotrebiteľa. Dôchodková elasticita dopytu je podiel percentuálnej zmeny dopytu po statku a percentuálnej zmeny dôchodku spotrebiteľa.

$$\eta_d = - \left[\frac{dQ}{dM} \right]_{M=M_0} \cdot \frac{M_0}{Q_0} \quad (22)$$

kde Q je množstvo predávajúceho statku a M je príjem spotrebiteľa.

Ak $\eta_d > 1$, potom s narastajúcim príjmom rastie aj dopyt po statkoch. Podiel zmien je kladný.

Ak $\eta_d < 1$, potom dopyt po tovare s narastajúcim príjmom klesá. Takému statku hovoríme inferiórny statok . Ide o menej kvalitný tovar, lebo so zvyšujúcim príjmom spotrebiteľa nakupujú kvalitnejšie výrobky.

3.8. Elasticita ponuky

Elasticita ponuky vyjadruje percentuálnu zmenu ponúkaného množstva statku v závislosti od percentuálnej zmeny jeho ceny. Inými slovami ,posudzuje sa relatívna zmena množstva ponúkaného tovaru, ku ktorej dochádza vtedy, keď sa cena tovaru zmení o 1%. Funkcia ponuky $q = s(p)$ je vo všeobecnosti rastúca preto elasticita ponuky je definovaná vzťahom

$$\eta_s = \left[\frac{dq}{dp} \right]_{p=p_0} \cdot \frac{p_0}{q_0} \quad (23)$$

Príklad 10: Nech funkcia ponuky po tovare má tvar $q = 50p^2 - 10$. Určme elasticitu ponuky pre $p_0 = 10$

Riešenie : $\left[\frac{dq}{dp} \right]_{p=p_0} = 100 \cdot p_0 = 1000$

$$\eta_s = 1000 \cdot \frac{10}{50 \cdot 100 - 10} = 2,004$$

Ak cena za jednotku tovaru na trhu vzrastie (poklesne) z úrovne $p = 10$ o 1%, tak ponuka tohto tovaru na konkurenčnom trhu sa zvýši (zníži) približne o 2,004% .

3.9. Využitie vyšších derivácií v ekonomickej analýze

Na strane 12 sme si ukázali, na čo sa dajú v matematike využiť derivácie vyšších rádov. Teraz si ukážeme ako sa dajú tieto aplikovať v ekonomickej analýze.

Príklad 11:

Určme úroveň produkcie firmy, pri ktorom firma dosiahne maximálny zisk , pri funkcii

celkových nákladov $C(x) = 0,01x^2 + 5x$ pre $x \in \langle 0,500 \rangle$

a funkcii celkových príjmov $R(x) = 8x - 0,005x^2$

Riešenie: Funkcia celkového zisku je definovaná :

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 3x - 0,015x^2$$

Nutnou podmienkou existencie extrému je, aby sa prvá derivácia funkcie rovnala nule.

$$P'(x) = 3 - 0,03x = 0$$

$$0,03x = 3$$

$$x = 100$$

V bode $x_0 = 100$ bude extrém funkcie.

$$P''(x) = [3 - 0,03x]' = -0,03 < 0$$

Z hodnoty druhej derivácie vieme konštatovať, že funkcia P je na celom intervale $\langle 0,500 \rangle$ konkávna .

V bode $P''(100) = -0,03$ je druhá derivácia záporná a preto v bode $x_0 = 100$ má funkcia maximum. Jeho hodnota je $P(100) = 3 \cdot 100 - 0,015 \cdot 100^2$

$$P(100) = 150$$

Odpoveď: Firma dosiahne maximálny zisk 150 p.j. pri úrovni $x = 100$ jednotiek produkcie.

Príklad 12 :

Nájďme inflexný bod funkcie celkových nákladov a interpretujme ho ekonomicky.

$$C(x) = x^3 - 300x^2 + 200\,000x + 1\,000\,000$$

Riešenie:

Vypočítajme derivácie $C'(x) = 3x^2 - 600x + 200\,000$

$$C''(x) = 6x - 600$$

$$C'''(x) = 6 > 0$$

Keďže postačujúcou podmienkou existencie inflexného bodu je $C''(x_0) = 0$ a $C'''(x_0) \neq 0$, vypočítame:

$$C''(x_0) = 0$$

$$6x_0 - 600 = 0$$

$$x_0 = 100$$

Podmienka $C'''(100) \neq 0$ je splnená. V bode $x_0 = 100$ je inflexný bod. Jeho y-ovú súradnicu vypočítame :

$$C(100) = 100^3 - 300 \cdot 100^2 + 200\,000 \cdot 100 + 1\,000\,000$$

$$C(100) = 19\,000\,000$$

Inflexný bod má súradnice (100 , 19 000 000).

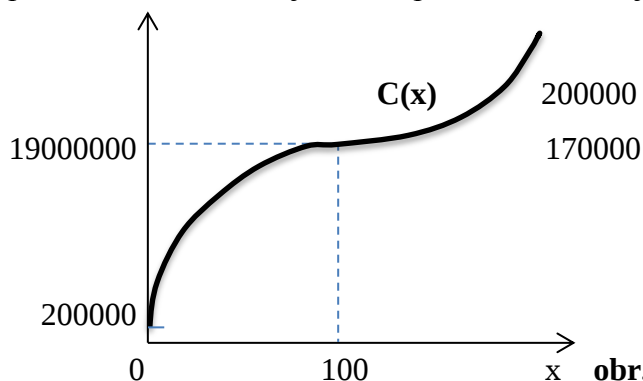
Zo znamienka tretej derivácie vyplýva (str.13 bod 5) ,že funkcia celkových nákladov prechádza v inflexnom bode z konkávnosti do konvexnosti (obr.17).

Funkcia marginálnych nákladov $MC = C'(x)$. Monotónnosť marginálnych nákladov zistíme jej prvou deriváciou $MC' = [C'(x)]' = C''(x) = 6x - 600 > 0$ pre $x > 100$

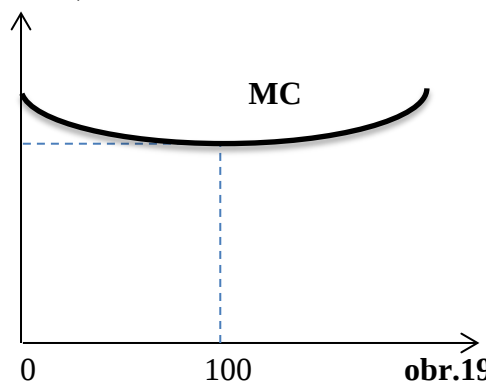
$$C''(x) = 6x - 600 < 0 \text{ pre } x < 100$$

Z uvedeného vyplýva, že funkcia marginálnych nákladov MC sa v inflexnom bode mení z funkcie klesajúcej na rastúcu.

Ekonomická interpretácia: Funkcia celkových nákladov je rastúca na celom definičnom obore. V intervale $\langle 0, 100 \rangle$ sa prírastok nákladov na jednotku produkcie postupne znižuje s rastúcim x až po úroveň produkcie $x_0 = 100$. Zvyšovaním produkcie z tejto úrovne sa prírastok nákladov na jednotku produkcie zväčšuje (obr.19).



obr.18



obr.19

4. VYSVETLENIE MATEMATICKÝCH POJMOV DIFERENCIÁLNEHO POČTU

FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH

4.1. Dvojrozmerný euklidov priestor

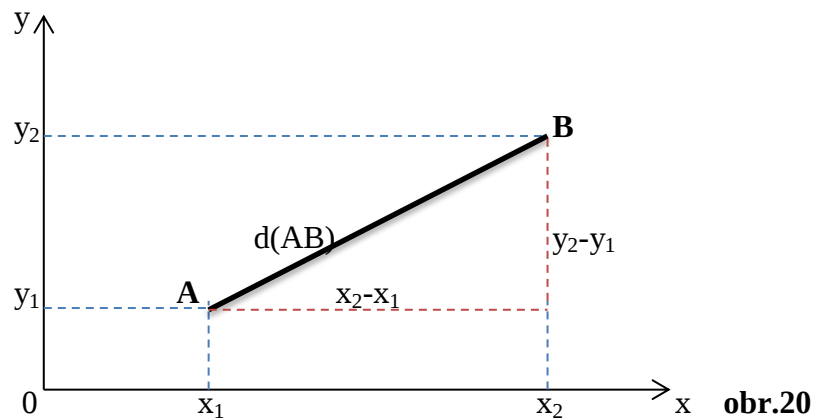
Množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[x,y]$, takých, že $x \in A$ a $y \in B$ nazývame karteziánskym súčinom množín A, B a označujeme ho $A \times B$.

Každú usporiadanú n -ticu $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, reálnych čísiel, kde $n \geq 1$ budeme nazývať bodom n -rozmerného priestoru a čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú súradnice tohto bodu.

Označme $R^2 = R \times R$. Ak v R^2 je pre každú dvojicu bodov $A=[x_1, y_1], B=[x_2, y_2]$ definovaná vzdialenosť bodov A, B vzťahom

$$d(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (24)$$

potom množinu priestoru s takto definovanou vzdialenosťou jej ľubovoľných dvoch bodov nazývame dvojrozmerný euklidov priestor E_2



Funkcia dvoch premenných je predpis f , ktorý každému bodu $X=[x,y] \in M, M \subset E_2$, priradí práve jedno $z \in R$. Píšeme $z = f(X)$, alebo $z = f(x,y)$. Množinu M nazývame definičným oborom funkcie $f(x,y)$ a označujeme ho $D(f)$. Ak definičný obor funkcie nie je zadaný, tak pod definičným oborom rozumieme najväčšiu podmnožinu R^2 , pre ktorú má daná funkcia zmysel.

Príklad 13

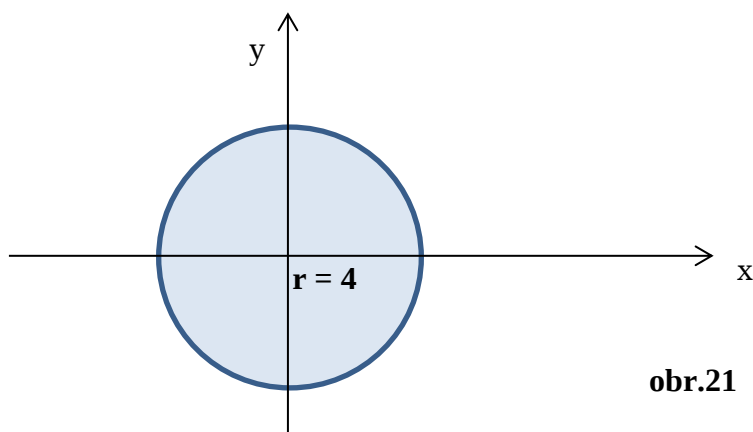
Nájďme definičný obor funkcie $y = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Riešenie :

Funkcia má zmysel, ak $16 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \leq 4^2$$

Definičný obor funkcie je kružnica + vnútro kružnice s polomerom 4 a stredom v bode $[0,0]$. obr.21.



obr.21

Oborom hodnôt funkcie $f(x,y)$ definovanej na $M \subset E_2$ sa nazýva množina

$$H(f) = \{z \in \mathbb{R}, \exists X \in M, z = f(X)\}$$

4.2. Parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných

Definícia: Nech je daná funkcia $f: z = f(x, y)$ definovaná v okolí bodu $A(a_1, a_2) \in D(f)$.

Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie $f(x,y)$ podľa premennej x v bode A nazývame

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1} \quad (25)$$

Označujeme ju tiež $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A, f'_x(A)$.

Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie $f(x,y)$ podľa premennej y v bode A nazývame

$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2} \quad (26)$$

Označujeme ju tiež $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A, f'_y(A)$.

Parciálna derivácia funkcie o dvoch premenných je jej derivácia vzhľadom na jednu z týchto premenných, pričom s druhou narábame ako s konštantou.

Príklad 14

Vypočítajme parciálne derivácie $\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}$ funkcie $f: z = x^3 \cdot y^2$ v bode $A=[2,3]$

Riešenie: $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 3x^2 y^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 108$

$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = 2x^3 y = 48$$

4.3. Parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných vyššieho rádu

Nech má funkcia $f(x,y)$ parciálne derivácie na množine $M \subseteq E^2$. Ak majú tieto funkcie dvoch premenných definované na M opäť parciálne derivácie podľa oboch premenných, nazývame ich druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ a označujeme ich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x = f''_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y)'_y = f''_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_x)'_y = f''_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_y)'_x = f''_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ďalším derivovaním druhých parciálnych derivácií by sme analogicky definovali tretie parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných. Označujeme ich :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{x^2 y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f'''_{x y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f'''_{y^3}$$

Zápis $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ znamená funkciu $f'''_{x y^2}$, ktorú dostaneme derivovaním funkcie f najskôr podľa premennej x a potom dvakrát podľa premennej y .

Analogicky môžeme definovať parciálne derivácie vyšších rádov funkcie dvoch reálnych premenných.

Príklad 15

Nájďme druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = x^4 y^3 + x^3 y^2$

$$\begin{aligned} \text{Riešenie:} \quad f'_x &= 4x^3 y^3 + 3x^2 y^2 & f'_y &= 3x^4 y^2 + 2x^3 y \\ f''_{xx} &= (f'_x)'_x = 12x^2 y^3 + 6xy^2 & f''_{yy} &= (f'_y)'_y = 6x^4 y + 2x^3 \\ f''_{xy} &= (f'_x)'_y = 12x^3 y^2 + 6x^2 y & f''_{yx} &= (f'_y)'_x = 12x^3 y^2 + 6x^2 y \end{aligned}$$

Z príkladu vieme vypožorovať jednu z vlastností parciálnych derivácií :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (28)$$

4.4. Parciálne derivácie zloženej funkcie

Typ 1)

Vypočítajme deriváciu zloženej funkcie $z = f(u,v)$, kde u, v sú definované funkciami

$u = r(x,y)$, $v = s(x,y)$. Ak majú funkcie f, r, s spojité parciálne derivácie potom aj zložená funkcia $z = f(u,v)$ má spojité parciálne derivácie :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Príklad 16:

Vypočítajme parciálne derivácie $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ak funkcie $z = u^2 + v^2$, $u = 2xy + 1$, $v = x^2y$

$$\text{Riešenie: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2u \cdot 2y + 2v \cdot 2xy = 4y(2xy + 1) + 4xy(x^2y) = 8xy^2 + 4y + 4x^3y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u \cdot 2x + 2v \cdot x^2 = 4x(2xy + 1) + 2x^2(x^2y) = 8x^2y + 4x + 2x^4y$$

Typ 2)

Vypočítajme deriváciu zloženej funkcie $z = f(x,y)$, kde x, y sú definované funkciami

$x = x(t)$, $y = y(t)$. Ak majú funkcie f, x, y spojité parciálne derivácie potom aj zložená funkcia $z = f(x,y)$ má spojitú parciálnu deriváciu

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (30)$$

Príklad 17:

Vypočítajme $\frac{\partial z}{\partial t}$ funkcie $z = xy$, pre $x = \ln t$, $y = 2t$

$$\text{Riešenie: } \frac{\partial z}{\partial t} = y \cdot \frac{1}{t} + x \cdot 2 = \frac{2t}{t} + 2\ln t = 2 + 2\ln t$$

Typ 3)

Nech funkcia $z = f(x,y)$, v ktorej $y = y(x)$, potom

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

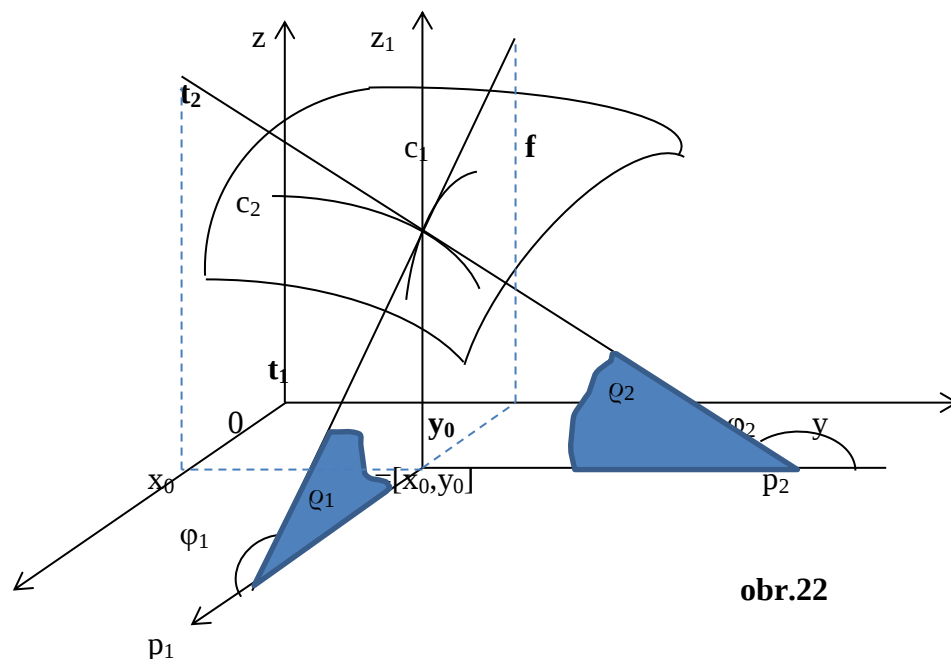
Príklad 18 :

Vypočítajme $\frac{\partial z}{\partial x}$ funkcie $z = xy$, kde y je funkcia $y = 2x^3$

$$\text{Riešenie: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = y + x \cdot 6x^2 = y + 6x^3$$

4.5. Geometrický význam parciálnych derivácií

V E_3 máme definovanú funkciu $f: z = f(x,y)$ (obr.22)



obr.22

Bodom $A=[x_0, y_0]$ vedieme roviny $\rho_1 \equiv y = y_0$, $\rho_2 \equiv x = x_0$, ktoré sú kolmé na rovinu xy . Roviny ρ_1, ρ_2 pretínajú graf funkcie f v krivkách c_1, c_2 , ktoré sú grafmi parciálnych funkcií f'_x, f'_y v rovine ρ_1, ρ_2 . Priamky p_1, p_2 sú priesečníkmi rovín ρ_1, ρ_2 s rovinou xy .

Dotyčnica t_1 v rovine ρ_1 ku krivke c_1 v bode $P = [x_0, y_0, z_0]$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, zviera s priamkou p_1 uhol φ_1 , pre ktorý platí $\text{tg } \varphi_1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$. $k_1 = \text{tg } \varphi_1$ je smernica dotyčnice funkcie f v bode $P = [x_0, y_0, z_0]$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ v rovine ρ_1 .

Dotyčnica t_2 v rovine ρ_2 ku krivke c_2 v bode $P = [x_0, y_0, z_0]$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, zviera s priamkou p_2 uhol φ_2 , pre ktorý platí $\text{tg } \varphi_2 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$. $k_2 = \text{tg } \varphi_2$ je smernica dotyčnice funkcie f v bode $P = [x_0, y_0, z_0]$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ v rovine ρ_2 .

4.6. Úplný diferenciál funkcie dvoch reálnych premenných

Nech funkcia $z = f(x,y)$ má v bode $A=[x_0, y_0]$ spojité parciálne derivácie prvého rádu.

Potom vzťah

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot \Delta y \quad (31)$$

kde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ nazývame úplným diferenciálom funkcie f v bode $A=[x_0, y_0]$.

Pokiaľ označíme $x - x_0 = dx$ a $y - y_0 = dy$ tak zápis (31) bude mať tvar :

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot dy \quad (32)$$

Príklad 16

Vypočítajme diferenciál funkcie $f: z = 3x^2y + 2xy^2$ v bode $A[2,3]$

Riešenie: V bode $X=[x,y]$ je $df(X) = (6xy + 2y^2)dx + (3x^2 + 4xy)dy$

V bode $A[2,3]$ je $df(A) = (6 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)dx + (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3) = 54dx + 36dy$

4.7. Lokálne extrémym funkcie dvoch premenných

Nutnou podmienkou existencie lokálneho extrémym funkcie $f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$

je, aby parciálne derivácie, ak existujú, v bode $A=[x_0,y_0]$ sa rovnali nule.

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

Potom bod $A=[x_0,y_0]$ nazývame **stacionárny bod**.

Postačujúcou podmienkou existencie lokálneho extrémym v stacionárnom bode $A=[x_0,y_0]$

funkcie $y = f(x,y)$ je existencia spojitých parciálnych derivácií druhého rádu v bode A

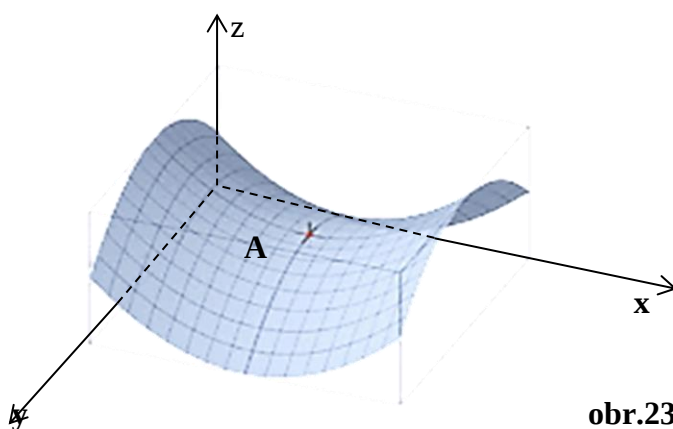
$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x}$$

Označme $D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ a $D_1(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}$ potom

1.) Ak $D_2(A) > 0 \wedge D_1 < 0$ potom má funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **lokálne maximum**.

2.) Ak $D_2(A) > 0 \wedge D_1 > 0$ potom má funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **lokálne minimum**.

3.) Ak $D_2(A) < 0$ potom nemá funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **lokálny extrém** a bod $A=[x_0,y_0]$ nazývame **sedlový bod**. (obr.23)⁸



obr.23⁸

⁸ http://sk.swewe.com/word_show.htm/?15630_1&Sedlov%C3%BD%7Cbod

Príklad 17:

Nájďme lokálne extrémym funkcie $F: z = 3x^2 + 2y^3 - 4xy$

Riešenie:

$$f'_x = 6x - 4y$$

$$6x - 4y = 0 \quad / \cdot 4$$

$$f'_y = 6y - 4x$$

$$-4x + 6y = 0 \quad / \cdot 6$$

$$\left. \begin{array}{r} 24x - 16y = 0 \\ -24x + 36y = 0 \end{array} \right\}$$

$$20y = 0$$

$$y = 0, \quad x = 0$$

Bod $A=[0,0]$ je stacionárnym bodom funkcie $f: z = 3x^2 + 2y^3 - 4xy$

$$f''_{xx} = 6, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yx} = -4, \quad f''_{yy} = 6$$

Vypočítame determinanty D_2, D_1 :

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 20 > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} = 6 > 0 \Rightarrow$$

v bode $A=[0,0]$ je lokálne minimum s hodnotou $f(A) = 0$

4.8. Viazané extrémym funkcie dvoch premenných

Nech je daná funkcia $z = f(x,y)$ definovaná na množine $D(f)$ a nech množinu $M \subset D(f)$ tvoria všetky body $[x,y]$, ktoré spĺňajú podmienku $g(x,y)=0$.

Lokálne extrémym funkcie f na množine M sa nazývajú viazané lokálne extrémym a rovnicu $g(x,y)=0$ nazývame väzba, alebo väzbová rovnica.

Spôsobym výpočtu viazaných lokálnych extrémym:

1.) Dosadzovacia (substitučná) metóda.

Ak sa dá vyjadriť jedna premenná pomocou druhej vo väzbovej rovnici $g(x,y) = 0$, tak túto dosadíme do funkcie $z = f(x,y)$ a dostaneme funkciu jednej reálnej premennej, v ktorej určenie lokálnych extrémym sme si vysvetlili v č.2.4.

2.) Ak sa z väzbovej rovnice $g(x,y) = 0$ nedá vyjadriť žiadna premenná, tak viazané lokálne extrémym zistíme z Lagrangeovej funkcie

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \tag{34}$$

kde λ je Lagrangeov multiplikátor. Zistené extrémym sú súčasne extrémami funkcie $z = f(x,y)$. Stacionárne body funkcie $L(x,y)$ zistíme riešením sústavy rovníc:

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$L'_\lambda = 0$$

Ďalej pokračujeme rovnako ako pri lokálnych extrémoch v čl.4.7.

Ak $D_2(A) > 0 \wedge D_1 < 0$ potom má funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **viazané lokálne maximum**.

Ak $D_2(A) > 0 \wedge D_1 > 0$ potom má funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **viazané lokálne minimum**.

Ak $D_2(A) < 0$ potom nemá funkcia $z = f(x,y)$ v bode $A=[x_0,y_0]$ **lokálny extrém** a bod $A=[x_0,y_0]$ nazývame **sedlový bod**

Príklad 18:

Nájďme viazané lokálne extrém y funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2$ pri väzbe $x - y = 0$

Riešenie:

Keďže vieme z väzbovej rovnice vyjadriť jednu neznámu pomocou druhej $x = y$ budeme hľadať viazaný lokálny extrém dosadzovacou (substitučnou) metódou.

Vyjadrenú premennú x dosadíme do $f(x,y)$: $f(x,y) = x^2 + x^2 = 2x^2$

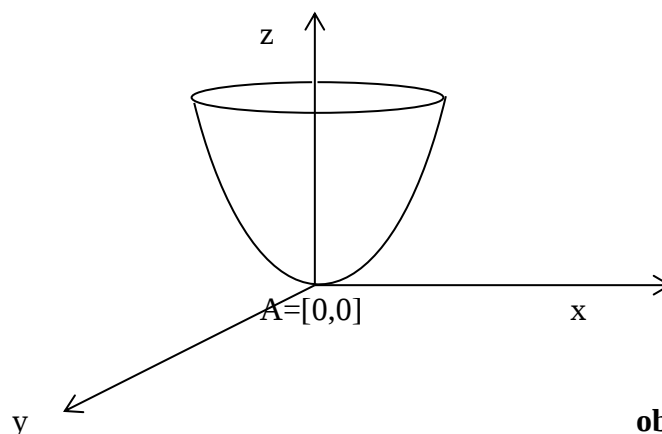
a budeme hľadať lokálne extrém y funkcie jednej premennej $f(x)$

$$f'(x) = 4x = 0 \Rightarrow x_0 = 0,$$

Z vyjadrenia x z väzbovej rovnice vyplýva, že $y_0 = x_0$, $y_0 = 0$

$$f''(x_0) = 4 > 0$$

Funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2$ má v bode $A=[0,0]$ viazané ostré lokálne minimum. (obr.24).



obr.24

Príklad 19:

Nájďme viazané lokálne extrémym funkcie $f(x,y) = 2x + y$, ak $x^2 + y^2 - 2 = 0$

Keďže nevieme jednoznačne vyjadriť z väzby žiadnu z premenných pomocou druhej premennej, vytvoríme Lagrangeovu funkciu

$$L(x,y) = 2x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 20)$$

Lokálne extrémym tejto funkcie budú lokálnymi viazanými extrémami funkcie $f(x,y)$.

$$L'_x = 2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}$$

$$L'_y = 4 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda}$$

$$L'_\lambda = x^2 + y^2 - 20 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

$\lambda_{1,2}$ dosadíme do vyjadrených x, y z prvých parciálnych derivácií L'_x, L'_y a dostaneme dva stacionárne body: $A = [-2, -4]$, $B = [2, 4]$. Vypočítame druhé parciálne derivácie a určíme ich hodnoty v bodoch A, B .

$$L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yx} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$$

Pre stacionárny bod A je $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_1 = 1 > 0 \Rightarrow$ V bode A je viazané lokálne minimum. $f(A) = -8$

Pre stacionárny bod B je $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $D_1 = -1 < 0 \Rightarrow$ V bode B je viazané lokálne maximum. $f(B) = +8$

5. VYUŽITIE DIFERENCIÁLNEHO POČTU FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH V EKONOMICKEJ ANALÝZE

5.1. Zmena funkčných hodnôt v závislosti od parciálnej derivácie funkcie dvoch reálnych premenných

Nech je daná funkcia $f: z = f(x,y)$ a bod $A = [x_0, y_0] \in D_f$. Nech $z = f(x,y)$ je v bode $A = [x_0, y_0]$ definovaná, t.j. nech existuje $z(A) = f(x_0, y_0)$.

Ak $\frac{\partial f(A)}{\partial x} > 0$ tak zvýšením (znížením) argumentu x funkcie $f(x,y)$ z hodnoty x_0 v bode $A = [x_0, y_0]$ o dostatočne malú hodnotu pri nezmenenej hodnote argumentu y_0 vzrastie (poklesne) hodnota funkcie f .

Ak $\frac{\partial f(A)}{\partial x} < 0$ tak zvýšením (znížením) argumentu x funkcie $f(x,y)$ z hodnoty x_0 v bode $A = [x_0, y_0]$ o dostatočne malú hodnotu pri nezmenenej hodnote argumentu y_0 poklesne (vzrastie) hodnota funkcie f .

Vďaka tejto vlastnosti vieme napr. rozhodnúť, či je ešte ekonomicky výhodné zvyšovať produkciu daného produktu pri nezmenenej produkcii ostatných produktov.

Príklad 20:

Funkcia celkového zisku pri produkcii x jednotiek výrobkov typu A a y jednotiek výrobkov typu B má tvar

$$P(x,y) = 30x - x^2 + 40y - y^2 - xy$$

Súčasná týždenná produkcia je $x = 6$ a $y = 8$. Rozhodnime, či je ešte ekonomicky výhodné zvyšovať produkciu výrobku B pri nezmenenej produkcii výrobkov A.

Riešenie: $\frac{\partial P}{\partial y} = 40 - 2y - x$ $\frac{\partial P(6,8)}{\partial y} = 18 > 0$

Z výsledku vyplýva, že sa oplatí o dostatočne malú hodnotu zvýšiť produkciu výrobku B pri nezmenenej produkcii A, lebo zisk sa zvýši.

5.2. Rýchlosť zmeny funkčných hodnôt

Nech je daná funkcia $f: z = f(x,y)$ a bod $A=[x_0,y_0] \in D_f$. Nech $z = f(x,y)$ je v bode

$A=[x_0,y_0]$ definovaná, t.j. nech existuje $z(A) = f(x_0,y_0)$.

Ak $0 < \frac{\partial f(A)}{\partial x} < \frac{\partial f(A)}{\partial y}$, tak so **vzrastajúcou** [**klesajúcou**] hodnotou x z bodu x_0 do bodu $x_0 + h$ a z bodu y_0 do bodu $y_0 + h$ budú pre dostatočne malé h hodnoty funkcie $f(x_0,y)$ **rásť** [**klesať**] rýchlejšie než hodnoty funkcie $f(x,y_0)$

Ak $0 > \frac{\partial f(A)}{\partial x} > \frac{\partial f(A)}{\partial y}$, tak so **vzrastajúcou** [**klesajúcou**] hodnotou x z bodu x_0 do bodu $x_0 + h$ a z bodu y_0 do bodu $y_0 + h$ budú pre dostatočne malé h hodnoty funkcie $f(x_0,y)$ **klesať** [**rásť**] rýchlejšie než hodnoty funkcie $f(x,y_0)$

Príklad 21:

Funkcia celkových nákladov pri výrobe dvoch výrobkov X,Y má tvar:

$$C(x,y) = 20x + x^2 + 30y + y^2 - xy \quad \text{kde } x,y \text{ je množstvo výrobkov.}$$

- a.) Vypočítajme, či je vzhľadom na rast nákladov výhodnejšie zvyšovať produkciu X pri zachovaní pôvodnej produkcie Y, alebo naopak výhodnejšie zvyšovať produkciu Y pri zachovaní pôvodnej produkcie X. Predpokladajme, že úroveň produkcie je $x_0 = 1500$ ks, $y_0 = 1000$ ks.
- b.) Určme, pomocou diferenciálu $dC(x_0,y_0)$ ako sa približne zmenia celkové náklady, ak produkcia výrobkov X klesne o 2ks a produkcia výrobkov Y vzrastie o 1ks.

Riešenie:

a.) Celkové náklady pri úrovni produkcie $[x_0, y_0] = [1500, 1000]$ sú

$$C(x_0, y_0) = 1\,810\,000$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 20 + 2x - y \Rightarrow \frac{\partial C(1500, 1000)}{\partial x} = 2\,020$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 30 + 2y - x \Rightarrow \frac{\partial C(1500, 1000)}{\partial y} = 530$$

Celkové náklady rastú z úrovne produkcie $[x_0, y_0] = [1500, 1000]$ rýchlosťou 2 020 p.j. na každý prírastok 1ks produkcie X pri zachovaní konštantnej produkcie výrobku Y.

Celkové náklady rastú z úrovne produkcie $[x_0, y_0] = [1500, 1000]$ rýchlosťou 530 p.j. na každý prírastok 1ks produkcie Y pri zachovaní konštantnej produkcie výrobku X.

Pri zvyšovaní produkcie X a zachovaní konštantnej produkcie Y budú náklady rásť rýchlejšie než naopak.

Výhodnejšie je zvyšovať produkciu výrobkov Y pri zachovaní pôvodnej produkcie X, lebo zvyšovanie nákladov je pomalšie.

$$b.) C(x_0-2, y_0+1) - C(x_0, y_0) = \frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (-2) + \frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot 1 = 2\,020 \cdot (-2) + 530 = -3\,510$$

Zistili sme, že ak sa produkcia výrobkov X zníži o 2ks a súčasne sa produkcia výrobkov Y zvýši o 1ks, tak celkové náklady sa znížia približne o 3 510 p.j.

Presným výpočtom dostaneme :

$$C(x_0-2, y_0+1) - C(x_0, y_0) = 1\,806\,497 - 1\,810\,000 = -3\,503 \text{ p.j.}$$

Absolútna chyba :

$$\delta = \left| [C(x_0-2, y_0+1) - C(x_0, y_0)] - \left[\frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (-2) + \frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot 1 \right] \right| = 7 \text{ p.j.}$$

$$\text{Relatívna chyba: } \varepsilon = \frac{\delta}{|C(x_0, y_0)|} = \frac{7}{|1\,810\,000|} = 0,000003867$$

$$\text{Relatívna chyba v percentách : } \varepsilon[\%] = \varepsilon \cdot 100\% = 0,000003867 \cdot 100\% = 0,0003867\%$$

5.3. Marginálny produkt

Ak v ekonomickom procese počet jednotiek výstupu závisí od premenných vstupov x_1, x_2 potom takúto funkciu nazývame produkčná funkcia $TPD = f(x_1, x_2)$, kde x_1, x_2 sú vstupy a TPD je celkový produkt.

Majme danú produkčnú funkciu $TPD = f(x_1, x_2)$. Pod marginálnym (hraničným) produktom MPD (x_1, x_2) vzhľadom na vstup x_i nazývame prírastok celkového produktu, pripadajúci na jednotkový prírastok vstupu x_i pri nezmenenej hodnote druhého vstupu.

Pri produkčnej funkcii danej diskretnými bodmi postupujeme podľa vzťahu (14), kde marginálna veličina závisela od zmeny jedného argumentu, v našom prípade od jedného vstupu, pričom druhý vstup považujeme za nemenný.

$$\left. \begin{aligned} \text{MPD}_{x_1} &= \frac{\text{TPD}(x_1+h, x_2) - \text{TPD}(x_1, x_2)}{(x_1+h) - x_1} \\ \text{MPD}_{x_2} &= \frac{\text{TPD}(x_1, x_2+h) - \text{TPD}(x_1, x_2)}{(x_2+h) - x_2} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

V prípade, že produkčná funkcia je daná funkčným predpisom $\text{TPD} = f(x_1, x_2)$, potom pre marginálny produkt platí:

$$\left. \begin{aligned} \text{MPD}_{x_1} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \text{MPD}_{x_2} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Príklad 22:

Produkčná funkcia $f = 10xy - 3x^2 - 2y^2$ vyjadruje závislosť výstupu počtu vyrobených výrobkov za týždeň od počtu ton materiálu x a počet hodín práce y na vstupe.

Vypočítajme marginálne funkcie podľa oboch premenných pri danej úrovni produkcie $[x, y] = [4, 5]$

Riešenie : $f(4, 5) = 10 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 5^2 = 102$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10y - 6x, \quad \frac{\partial f(4, 5)}{\partial x} = 26$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10x - 4y, \quad \frac{\partial f(4, 5)}{\partial y} = 20$$

Ekonomická interpretácia výsledkov:

1.) Riešením sme zistili, že ak zvýšime množstvo materiálu z úrovne $x = 4$ o jednotku materiálu t.j. zo 4 na 5 ton a množstvo práce zostane nezmenené, tak celkový produkt vzrastie približne o 26 jednotiek, t.j. o 26 kusov výrobkov na hodnotu $102 + 26 = 128$ ks výrobkov.

Presný výpočet: $f(5, 5) - f(4, 5) = 125 - 102 = 23$

Absolútna chyba: $\delta = |f(x_0+1, y_0) - f(x_0, y_0) - df(x_0+1, y_0)| = |23 - 26| = 3$

Relatívna chyba: $\varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0, y_0)|} = \frac{3}{|102|} = 0,02941$

Relatívna chyba v % : $\varepsilon \cdot 100\% = 2,941\%$

2.) Ak zvýšime množstvo práce s danej úrovne $y = 5$ o jednotku práce t.j. o 1 hodinu na úroveň 6 pri konštantnom množstve materiálu, tak celkový produkt vzrastie približne o 20 jednotiek, t.j. o 20 ks výrobkov na hodnotu $102 + 20 = 122$ výrobkov

Presný výpočet: $f(4,6) - f(4,5) = 120 - 102 = 18$

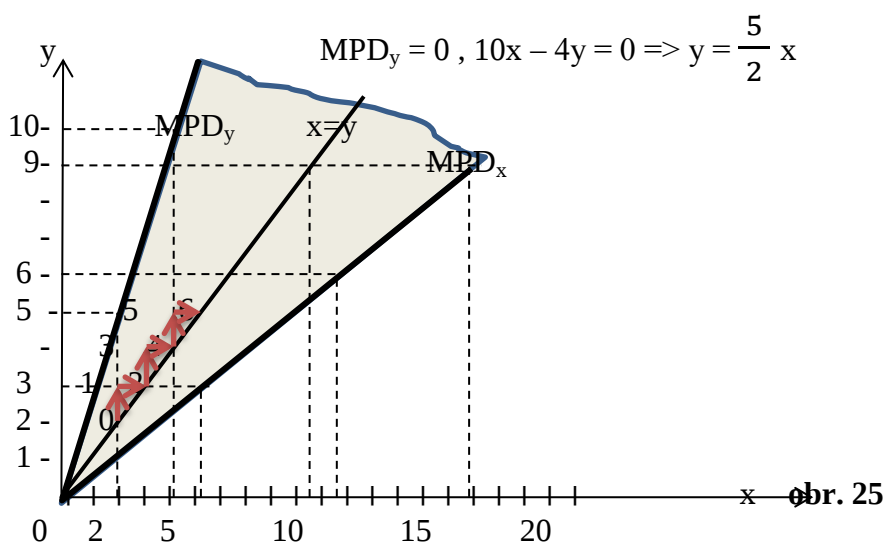
Absolútna chyba: $\delta = |f(x_0, y_0+1) - f(x_0, y_0) - df(x_0, y_0+1)| = 18 - 20 = 2$

Relatívna chyba: $\varepsilon = \frac{\delta}{|f(x_0, y_0)|} = \frac{2}{|102|} = 0,0196$

Relatívna chyba v % : $\varepsilon \cdot 100\% = 1,96\%$

Pomocou parciálnych funkcií vieme optimalizovať zvýšenie produkcie nasledovným spôsobom: Určme oblasť, kde zvyšovaním ktoréhokoľvek vstupu o dostatočne malú hodnotu, pri konštantnom inom vstupe bude celkový produkt rásť. Táto oblasť je určená nerovnicami $MPD_x > 0 \wedge MPD_y > 0$ (37)

Zostrojíme priamky, pre ktoré sa $MPD_x = 0$, $10y - 6x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x$



Body vyfarbenej časti medzi priamkami MPD_x a MPD_y (obr.25) vyhovujú nerovniciam (37). Napríklad aj celá polpriamka $y = x$ patrí do vyfarbenej časti. V takom prípade ak vstupy x_0, y_0 spĺňajú podmienku $x_0 = y_0$, tak celkový produkt môžeme neobmedzene zvyšovať napr. tak ako je to znázornené na obr. 25, pomocou lomenej čiary, kde jednotlivé krajné body úsečiek označené číslicami predstavujú úrovne vstupov. Bod nula predstavuje počiatočnú produkciu.

Marginálne náklady

Príklad 23:

Je daná funkcia celkových nákladov pri výrobe dvoch druhov vína A,B :

$$C(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - x + 2y - xy$$

kde x je množstvo vyrábaného vína A a y vyrábaného množstva vína B hl.

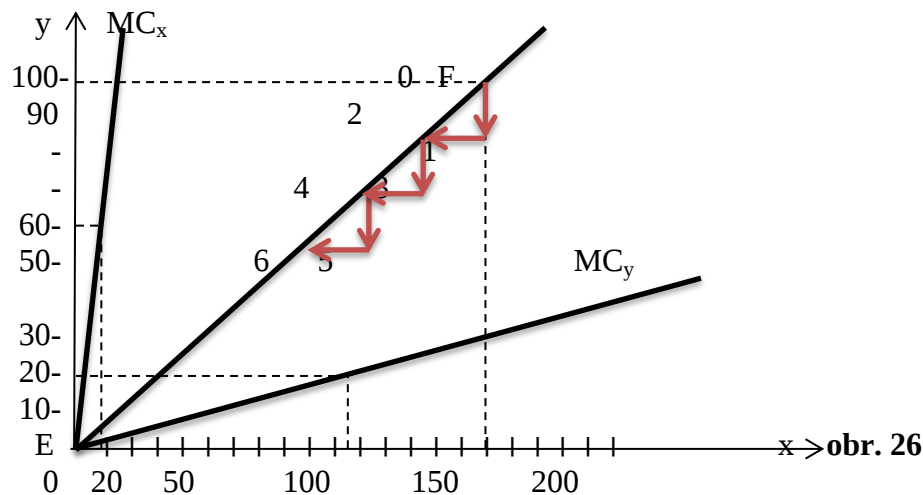
a.) Vypočítajme funkcie marginálnych nákladov $MC_x(x,y)$, $MC_y(x,y)$ a ekonomicky ich interpretujme.

b.) Vypočítajme hodnoty $MC_x(x,y)$, $MC_y(x,y)$ pre úroveň produkcie $x_0 = 150$, $y_0 = 100$.

Výsledky ekonomicky interpretujme.

Riešenie: $MC_x = \frac{\partial C}{\partial x} = 6x - 1 - y$ $MC_y = \frac{\partial C}{\partial y} = 4y + 2 - x$

Graficky znázorníme oblasť, v ktorej $MC_x > 0 \wedge MC_y > 0$



Rovnako ako v predchádzajúcom príklade aj tu pre znižovanie nákladov je najlepšie pohybovať sa v priestore E_2 vymedzenom priamkami MC_x a MC_y . Priamky sa pretínajú v bode E . Jeho súradnice sú:

$$6x - 1 - y = 0$$

$$-x + 2 + 4y = 0$$

Riešením týchto dvoch rovníc sme dostali súradnice bodu $E = \left[\frac{2}{23}, -\frac{11}{23} \right]$. Druhý bod

priamky si zvolíme z priestoru E_2 vymedzenom priamkami MC_x a MC_y . Napr bod $F = [150, 100]$. Keď preložíme týmito dvoma bodmi priamku a úroveň vstupov x_0, y_0 by boli súradnicami bodov na priamke určenej bodmi E,F, potom môžeme znižovať produkciu o dostatočne malú hodnotu jednej z vyrábaných komodít , pričom produkcia druhej by sa nemenila. Celkové náklady by sa znižovali.

$$b.) \quad MC_x(150,100) = 799$$

$$MC_y(150,100) = 252$$

Ak znížime produkciu vína A o 1hl a produkciu vína B necháme bez zmien, tak celkové náklady klesnú o 799 p.j.

Ak znížime produkciu vína B o 1hl a produkciu vína A necháme bez zmien, tak celkové náklady klesnú o 252 p.j.

Marginálny zisk

Príklad 24:

Zisk z predaja dvoch druhov žiaroviek je daný funkciou

$$P(x,y) = (20 - x)(80 - 3x + 4y), \text{ kde } x \text{ cena prvej a } y \text{ cena druhej žiarivky.}$$

Prvý druh sa predáva za 11 eur a druhý za 12 eur za kus. Použitím marginálnej analýzy odhadneme zmenu denného zisku, ak obchodník zvýši cenu druhej žiarivky o 1euro.

Riešenie:

$$MP_y = \frac{\partial P}{\partial y} = (20-x) \cdot 4, \quad \frac{\partial P(11,12)}{\partial y} = 36$$

Denný zisk sa zvýši o 36 eur.

5.4. Parciálna elasticita funkcie dvoch premenných

Parciálna elasticita funkcie dvoch premenných vyjadruje o koľko percent sa zmení funkčná hodnota funkcie f , ak sa jeden z argumentov zvýši o 1% a druhý argument zostane nezmenený

$$\eta_x[f(x,y)] = \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot \frac{x}{f(A)} \quad (38)$$

sa nazýva parciálna elasticita funkcie f v bode A vzhľadom na argument x

$$\eta_y[f(x,y)] = \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot \frac{y}{f(A)} \quad (39)$$

sa nazýva parciálna elasticita funkcie f v bode A vzhľadom na argument y

Parciálnu elasticitu funkcie si ukážeme na dopytovej funkcii:

$$\text{funkciu} \quad \eta_{p_j}(q_i) = - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{q_i} \quad (40)$$

nazývame parciálnu elasticitu dopytu q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vzhľadom na premennú p_j ($j = 2$ pre funkcie dvoch premenných). Vo vzťahu elasticity sa používa znamienko mínus s dôvodom, ktoré sme uviedli v čl. 3.4.

Príklad 25:

Máme dané dopytové funkcie vyjadrujúce dopyt po odtučnenom (q_1) a plnotučnom mlieku (q_2) :

$$q_1 = 2p_2 - p_1 + 200$$

$$q_2 = 3p_1 - 2p_2 + 100$$

kde p_1 je cena a q_1 požadované množstvo odtučneného mlieka v litroch a p_2 je cena a q_2 požadované množstvo plnotučného mlieka v hl.

Zistíme, ako sa bude percentuálne meniť dopyt po odtučnenom a plnotučnom mlieku, pri ich cenovom raste o 1%.

Riešenie: $\eta_{p_1}(q_1) = - \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1} = 1 \cdot \frac{p_1}{2p_2 - p_1 + 200}$

$$\eta_{p_2}(q_1) = - \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1} = (-2) \cdot \frac{p_2}{2p_2 - p_1 + 200}$$

$$\eta_{p_2}(q_2) = - \frac{\partial q_2}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q_2} = 2 \cdot \frac{p_2}{3p_1 - 2p_2 + 100}$$

$$\eta_{p_1}(q_2) = - \frac{\partial q_2}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} = (-3) \cdot \frac{p_1}{3p_1 - 2p_2 + 100}$$

Nech $p_1 = 1500$ l a $p_2 = 1000$ l dostaneme nasledovné hodnoty :

$$\eta_{p_1}(q_1) = 2,14 \% , \quad \eta_{p_2}(q_1) = -2,85 \% , \quad \eta_{p_2}(q_2) = 0,769 \% , \quad \eta_{p_1}(q_2) = -1,73 \%$$

Ak cena odtučneného mlieka vzrastie o 1% a cena plnotučného mlieka zostane nezmenená, dopyt po odtučnenom mlieku poklesne približne o 2,14%

Ak cena plnotučného mlieka vzrastie o 1% a cena odtučneného mlieka zostane nezmenená, dopyt po odtučnenom mlieku vzrastie približne o 2,85%

Ak cena plnotučného mlieka vzrastie o 1% a cena odtučneného mlieka zostane nezmenená, dopyt po plnotučnom mlieku poklesne približne o 0,769%

Ak cena odtučneného mlieka vzrastie o 1% a cena plnotučného mlieka zostane nezmenená, dopyt po plnotučnom mlieku vzrastie približne 1,73%

5.5. Využitie vyšších derivácií funkcií dvoch premenných v ekonomickej analýze

V kapitole 4.7. sme sa venovali ako sa využívajú parciálne derivácie vyšších rádov na zisťovanie lokálnych extrémov vo funkciách dvoch reálnych premenných. Teraz si ukážeme ich využitie v ekonomickej analýze.

Príklad 26:

Predajňa športových potrieb nakupuje dva druhy športovej obuvi A a B. Nakupuje ju po 20 dolárov za pár. Akú cenu má na obuv stanoviť, keď vie, že predaj obuvi A sa riadi funkciou $(3 - 5x + 5y)$ a predaj obuvi B sa riadi funkciou $(1 + 7x - 8y)$.Akú cenu má

predajňa stanoviť na obuv, aby dosiahla maximálny zisk ? x je cena obuvi A a y je cena obuvi B.

Riešenie:

$$\text{Funkcia príjmov : } R(x,y) = x(2 - 5x + 5y) + y(4 + 7x - 8y)$$

$$\text{Funkcia nákladov : } C(x,y) = 20(2 - 5x + 5y) + 20(4 + 7x - 8y)$$

$$\text{Funkcia zisku : } P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$

$$P(x,y) = (2 - 5x + 5y)(x - 20) + (4 + 7x - 8y)(y - 20)$$

Vypočítame parciálne derivácie prvého rádu:

$$P'_x = 12y - 10x - 38 = 0$$

$$P'_y = -16y + 12x + 64 = 0$$

Riešením sme dostali jediný stacionárny bod $[10; 11,5]$

$$P'_{xx} = -10, \quad P'_{xy} = 12, \quad P'_{yx} = 12, \quad P'_{yy} = -16$$

$$D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 12 \\ 12 & -16 \end{vmatrix} = 16 > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} = -10 < 0$$

Funkcia má podľa článku 4.7 v bode $A = [10; 11,5]$ lokálne maximum.

Maximálny zisk z predaja športovej obuvi získa predajňa ak bude predávať obuv A za 10 p.j. a obuv B za 11,5 p.j.

Príklad 27:

Developer chce investovať do dvoch stavieb a má k dispozícii 81 miliónov eur.

Do prvej stavby investuje x a do druhej y eur. Odhad príjmov z obidvoch stavieb je daný funkciou $R(x,y) = 3x(y - 9)$. Ako rozdelí developer investície, aby získal čo najväčší príjem?

Riešenie:

Hľadáme viazané lokálne maximum funkcie $R(x,y) = 3x(y-9)$, ak je daná väzba $x + y = 81$

Z väzby si vyjadríme y a dosadíme ho do funkcie $R(x,y)$

$$x + y = 81 \Rightarrow y = 81 - x \Rightarrow R(x) = 3x(81 - x - 9) = 216x - 3x^2$$

Naše hľadanie extrému sa obmedzí na funkciu o jednej premennej x .

$$R'(x) = 216 - 6x = 0 \Rightarrow x = 36$$

$$R''(x) = -6 \Rightarrow R''(36) = -6 < 0 \Rightarrow \text{v bode } x = 36 \text{ je lokálne maximum.}$$

$$y = 81 - x = 81 - 36 = 45$$

Developer dosiahne maximálny príjem, ak do prvej stavby investuje 36 miliónov eur a do druhej investuje 45 miliónov eur.

ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo podať ucelený pohľad na možnosti využitia diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze. Prvá kapitola postavila základ ekonomických pojmov (dopyt, ponuka, náklady, príjmy, zisk), na ktorých sa ukázalo využitie diferenciálneho počtu. V nasledujúcich dvoch kapitolách boli vysvetlené základy diferenciálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej a následne jeho využitie vo vybraných ekonomických funkciách z prvej kapitoly. V posledných dvoch kapitolách boli vysvetlené základy diferenciálneho počtu funkcie dvoch reálnych premenných a následne jeho využitie vo vybraných ekonomických funkciách z prvej kapitoly.

Práca ukázala, že pokiaľ sa dá nejaký ekonomický proces vyjadriť funkciou, tak naše znalosti z diferenciálneho počtu, ktoré nám umožňujú z matematického hľadiska aktívne pracovať s funkciou a dospieť ku konkrétnym výsledkom, sa dajú aplikovať na výsledky, ekonomické. Takými sú napr. výpočet diferenciálu funkcie, určenie či je funkcia rastúca, alebo klesajúca, určenie konkávnosti a konvexnosti funkcie, zistenie inflexného bodu, určenie maxima, prípadne minima funkcie, určenie marginálnej veličiny a elasticity funkcie. Všetky tieto prípady sme v tejto práci aplikovali na ekonomicky riešené situácie v konkrétnych príkladoch a v mnohých z nich sme výsledky aj graficky znázornili.

Ukázali sme však aj prípady (str. 26), kedy na výpočet marginálnej funkcie automaticky použiť diferenciál nemusí byť vždy správnym rozhodnutím. Riešenie pomocou diferenciálu síce ukáže správnu orientáciu (rastúce náklady, klesajúci zisk), ale hodnota o akú sa ekonomická funkcia zvýši (zníži) pri zvýšení argumentu x_0 , alebo zvýši (zníži) pri znížení argumentu x_0 môže byť natoľko nepresná, že môže viesť k nesprávnemu ekonomickému rozhodnutiu podniku. Napr. Podnik je ochotný ísť na prechodnú dobu do straty, aby svojimi cenami zlikvidoval konkurenciu, alebo aby si upevnil monopolné postavenie na trhu. Lahko by sa mohlo stať, že pokiaľ by svoje rozhodnutie postavil na ekonomických analýzach výpočtu marginálnych veličín pomocou diferenciálu, ukazovatele by boli natoľko nepresné, že by mohli ohroziť samotný podnik.

My sme ukázali nepresnosť využitia diferenciálneho počtu pri výpočte marginálnych nákladov na príkladoch 4,5.

Napriek tomuto ojedinelému prípadu, kedy k neprijateľnej nepresnosti marginálnej veličiny vypočítanej pomocou diferenciálu pre nárast (pokles) argumentu rovnajúcemu sa 1, pri ktorom sa musia vyskytnúť ojedinelé podmienky – veľmi malé x_0 a funkčný predpis s veľkou zmenou hodnoty funkcie pri malej zmene argumentu, má využitie diferenciálneho

počtu v ekonomickej analýze neoceniteľný význam. Význam diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze bude časom rásť nájdením nových aplikácií diferenciálneho počtu v ekonomickej analýze. Z uvedeného dôvodu by malo byť pre ekonómov zaoberajúcich sa ekonomickými analýzami samozrejmosťou ovládanie infinitezimálneho počtu, ktorého súčasťou je diferenciálny počet.

Použitá literatúra :

a) Monografické publikácie

Eliáš J. – J.Horváth J. – Kajan J. : Zbierka úloh z vyššej matematiky 2 (4.vydanie 1976)

Eliáš J. – J.Horváth J. – Kajan J. : Zbierka úloh z vyššej matematiky 3 (3.vydanie 1980)

Fecenko J. – Pinda Ľ. : Matematika 1(3.vydanie 2006)

Fecenko J. – Sakálová K. : Matematika 2 (2.vydanie 2004)

Kluvánek I. – Mišík L. – Švec M. : Matematika I (3.vydanie 1966)

Kollár M. – Kossaczka Ľ. – Ševčovič D. : Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac

premenných v príkladoch (3.vydanie 2010)

Lisý J. a kol.: Ekonómia v novej ekonomike (2.vydanie 2007)

b) Elektronické zdroje

http://sk.swewe.com/word_show.htm/?15630_1&Sedlov%C3%BD%7Cbod