

Hľadanie najkratšej cesty medzi všetkými uzlami v sieti

Ivan Brezina

- Hľadanie najkratšej cesty medzi všetkými uzlami v sieti (all-pairs shortest – path problem)
- Floydov algoritmus
- Operácia minimálneho sčítania matíc

Mestá SR



Floydov algoritmus

1. $k = 0$, zápis $\mathbf{D}^k = \{d_{ij}^k\}$ do tabuľky
2. $k = k + 1$, výpočet hodnôt d_{ij}^k

$$d_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ll} \text{ak } i = j & 0 \\ \text{ak } d_{ij}^k = M \text{ a } a_j d_{ik}^k + d_{kj}^k = M \text{ pre } i, j \neq k & M \\ \text{ináč} & \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}) \text{ a označíme } * \end{array} \right\}$$

3. Opakujeme krok 2, pokiaľ $k \neq n$.

4. Matica $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$:

$$\text{ak } d_{ij}^n = d_{ij}^0 \quad k_{ij} = 0$$

$$\text{ak } i = j \quad k_{ij} = -$$

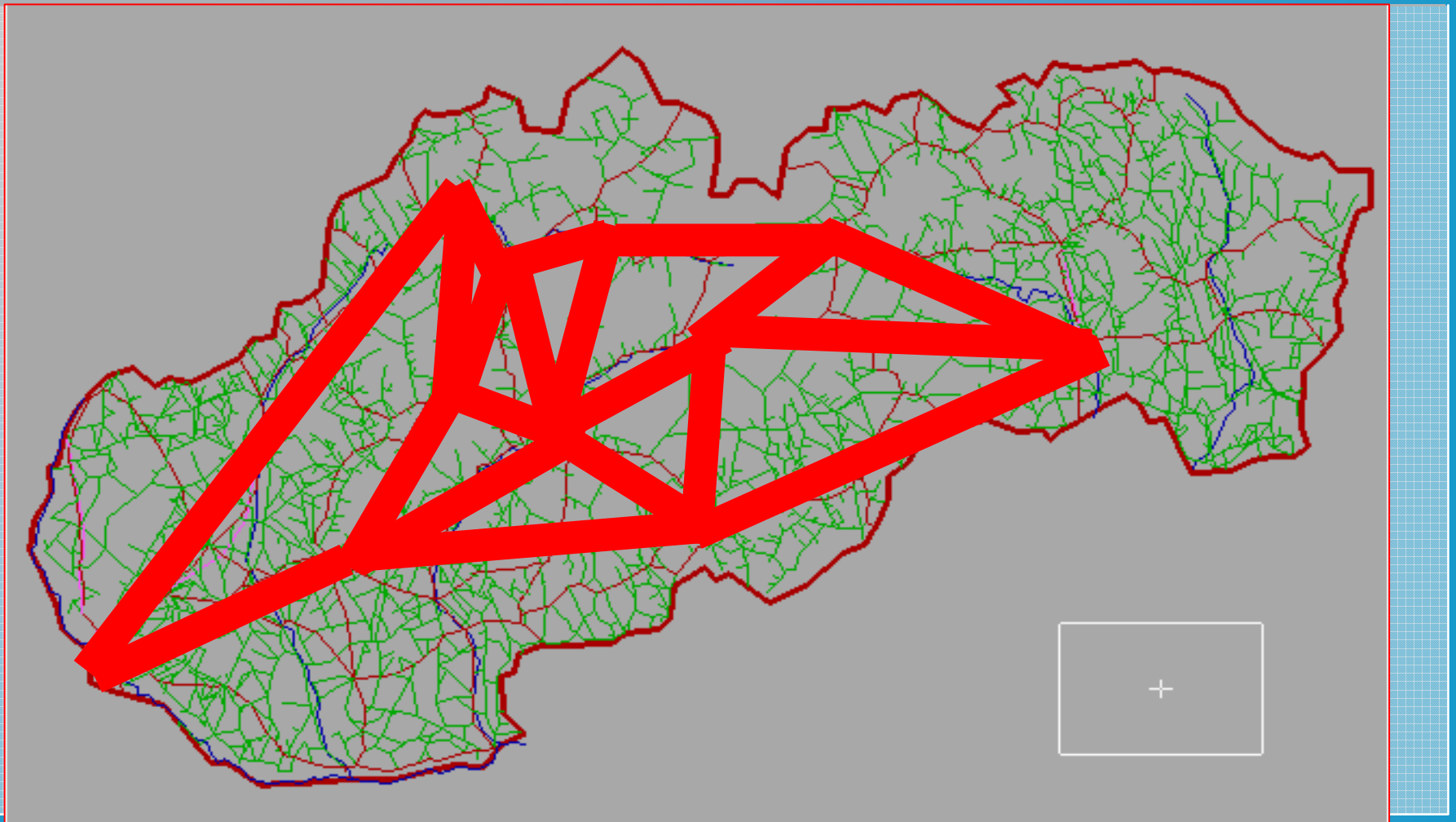
ináč – najvyššia iterácia k , pri ktorej je v príslušnom poli *
označujúca zmenu hodnoty d_{ij}^k

$$5. \theta_{iK} + \theta_{Kj} \leq d_{iK} + d_{Kj}$$

Floydov algoritmus

$\mathbf{D}^k = \{d_{ij}^k\}$	u_1	u_2	...	u_n
u_1				
u_2				
...				
u_n				

Príklad



Príklad

	BA	BR	KE	LC	MT	NR	PD	PP	RK	ZA	ZV
BA						85				202	
BR			164	77				78			66
KE		164		159				120			
LC		77	159			156					55
MT							54		39	25	86
NR	85			156			80				103
PD					54	80				79	62
PP		78	120						79		
RK					39			79			73
ZA	202				25		79				
ZV		66		55	86	103	62		73		

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁰	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	M
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	M	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	M	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	M	M	M	M	0	79	M	M
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	M	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	M	55	86	103	62	M	73	M	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ¹	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	M	M							
KE 3	M										
NR 6	85					0					
PD 7	M										
PP 8	M										
RK 9	M										
ZA10	202										
ZV11	M										

$$M+M = M$$

$$202+85 = 287$$

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ¹	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	M
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	M	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	287*	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	M	M	M	M	0	79	M	M
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	287*	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	M	55	86	103	62	M	73	M	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ²	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	230*
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	155*	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	287	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	155*	M	M	M	0	79	M	144*
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	287	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	230*	55	86	103	62	144*	73	M	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ³	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	230
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	155	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	287	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	155	M	M	M	0	79	M	144
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	287	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	230	55	86	103	62	144	73	M	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁴	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	233*	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	315*	M	120	M	M	214*
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	155	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	233*	315*	156	M	0	80	311*	M	287	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	155	M	311*	M	0	79	M	144
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	287	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	214*	55	86	103	62	144	73	M	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁵	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	233	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	315	M	120	M	M	214
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	155	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	M	0	80	311	M	287	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	93*	79	62
PP 8	M	78	120	155	M	311	M	0	79	M	144
RK 9	M	M	M	M	39	M	93*	79	0	64*	73
ZA10	202	M	M	M	25	287	79	M	64*	0	111*
ZV11	M	66	214	55	86	103	62	144	73	111*	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁶	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	318*	400*	241*	M	85	165*	396*	M	202	188*
BR 2	318*	0	164	77	M	233	313*	78	M	520*	66
KE 3	400*	164	0	159	M	315	395*	120	M	602*	214
LC 4	241*	77	159	0	M	156	236*	155	M	443*	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	M	0	80	311	M	287	103
PD 7	165*	313*	395*	236*	54	80	0	391*	93	79	62
PP 8	396*	78	120	155	M	311	391*	0	79	598*	144
RK 9	M	M	M	M	39	M	93	79	0	64	73
ZA10	202	520*	602*	443*	25	287	79	598*	64	0	111
ZV11	188*	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁷	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	318	400	241	219*	85	165	396	258*	202	188
BR 2	318	0	164	77	367*	233	313	78	406*	392*	66
KE 3	400	164	0	159	449*	315	395	120	488*	474*	214
LC 4	241	77	159	0	290*	156	236	155	329*	315*	55
MT 5	219*	367*	449*	290*	0	134*	54	445*	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	134*	0	80	311	173*	159*	103
PD 7	165	313	395	236	54	80	0	391	93	79	62
PP 8	396	78	120	155	445*	311	391	0	79	470*	144
RK 9	258*	406*	488*	329*	39	173*	93	79	0	64	73
ZA10	202	392*	474*	315*	25	159*	79	470*	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁸	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	318	400	241	219	85	165	396	258	202	188
BR 2	318	0	164	77	367	233	313	78	157*	392	66
KE 3	400	164	0	159	449	315	395	120	199*	474	214
LC 4	241	77	159	0	290	156	236	155	234*	315	55
MT 5	219	367	449	290	0	134	54	445	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	134	0	80	311	173	159	103
PD 7	165	313	395	236	54	80	0	391	93	79	62
PP 8	396	78	120	155	445	311	391	0	79	470	144
RK 9	258	157*	199*	234*	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	392	474	315	25	159	79	470	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ⁹	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	318	400	241	219	85	165	337*	258	202	188
BR 2	318	0	164	77	196*	233	250*	78	157	221*	66
KE 3	400	164	0	159	238*	315	292*	120	199	263*	214
LC 4	241	77	159	0	273*	156	236	155	234	298*	55
MT 5	219	196*	238*	273*	0	134	54	118*	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	134	0	80	252*	173	159	103
PD 7	165	250*	292*	236	54	80	0	172*	93	79	62
PP 8	337*	78	120	155	118*	252*	172*	0	79	143*	144
RK 9	258	157	199	234	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	221*	263*	298*	25	159	79	143*	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ¹⁰	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	318	400	241	219	85	165	337	258	202	188
BR 2	318	0	164	77	196	233	250	78	157	221	66
KE 3	400	164	0	159	238	315	292	120	199	263	214
LC 4	241	77	159	0	273	156	236	155	234	298	55
MT 5	219	196	238	273	0	134	54	118	39	25	86
NR 6	85	233	315	156	134	0	80	252	173	159	103
PD 7	165	250	292	236	54	80	0	172	93	79	62
PP 8	337	78	120	155	118	252	172	0	79	143	144
RK 9	258	157	199	234	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	221	263	298	25	159	79	143	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

D ¹¹	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	254*	400	241	219	85	165	332*	258	202	188
BR 2	254*	0	164	77	152*	169*	128*	78	139*	177*	66
KE 3	400	164	0	159	238	315	276	120	199	263	214
LC 4	241	77	159	0	273	156	236	155	234	166*	55
MT 5	219	152*	238	273	0	134	54	118	39	25	86
NR 6	85	169*	315	156	134	0	80	247*	173	159	103
PD 7	165	128*	292	236	54	80	0	172	93	79	62
PP 8	332*	78	120	155	118	247*	172	0	79	143	144
RK 9	258	139*	199	234	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	177*	263	166*	25	159	79	143	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

K	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	-	11	6	6	7	0	6	11	7	0	6
BR 2	11	-	0	0	11	11	11	0	11	11	0
KE 3	6	0	-	0	9	4	11	0	8	9	4
LC 4	6	0	0	-	11	0	11	2	11	11	0
MT 5	7	11	9	11	-	7	0	9	0	0	0
NR 6	0	11	4	0	7	-	0	11	7	7	0
PD 7	6	11	11	11	0	0	-	9	5	0	0
PP 8	11	0	0	2	9	11	9	-	0	9	2
RK 9	7	11	8	11	0	7	5	0	-	5	0
ZA10	0	11	9	11	0	7	0	9	5	-	5
ZV11	6	0	4	0	0	0	0	2	0	5	-

Príklad - mestá SR

Floydov algoritmus

K	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	-	11	6	6	7	0	6	11	7	0	6
BR 2	11	-	0	0	11	11	11	0	11	11	0
KE 3	6	0	-	0	9	4	11	0	8	9	4
LC 4	6	0	0	-	11	0	11	2	11	11	0
MT 5	7	11	9	11	-	7	0	9	0	0	0
NR 6	0	11	4	0	7	-	0	11	7	7	0
PD 7	6	11	11	11	0	0	-	9	5	0	0
PP 8	11	0	0	2	9	11	9	-	0	9	2
RK 9	7	11	8	11	0	7	5	0	-	5	0
ZA10	0	11	9	11	0	7	0	9	5	-	5
ZV11	6	0	4	0	0	0	0	2	0	5	-

Najkratšia cesta BA – KE: 400 km $1-3 = 1-6-3 = 1-6-4-3 = \text{BA} - \text{NR} - \text{LC} - \text{KE}$

Najkratšia cesta LC – PP: 155 km $4-8 = 4-2-8 = \text{LC} - \text{BR} - \text{PP}$

Operácia minimálneho sčítania matic

Počet iterácií s : $n - 1 \leq 2^s$

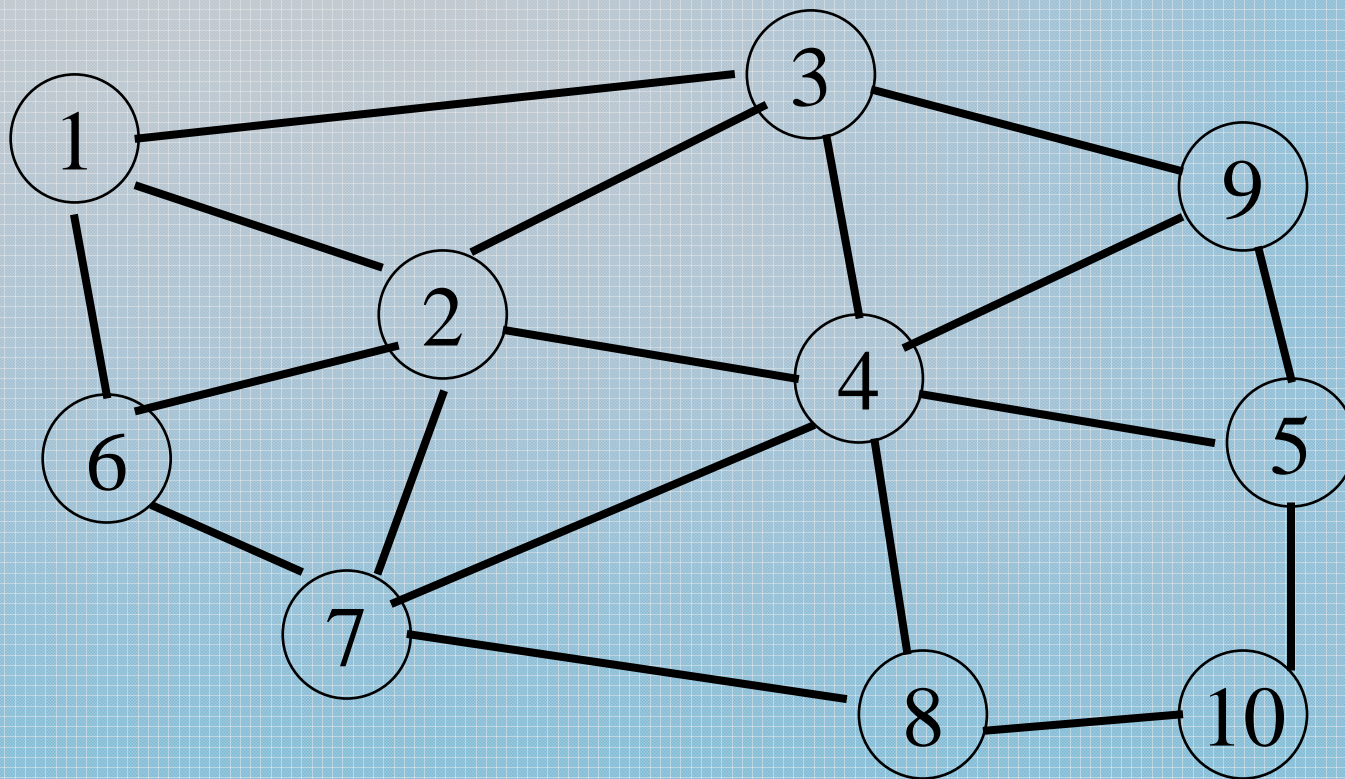
1. Matica susednosti \mathbf{D}^0 , $k = 1$.

2. Matica \mathbf{D}^k , prvky pre k na základe vzťahu

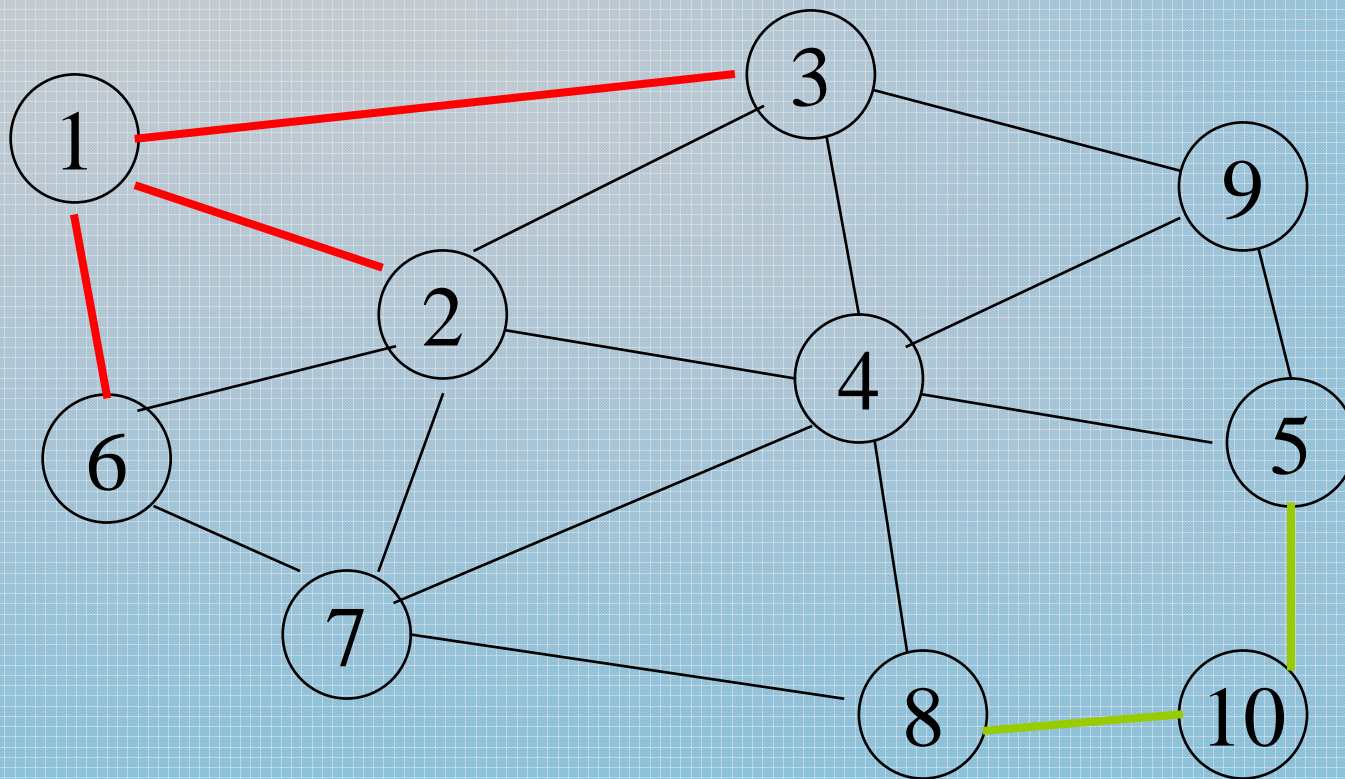
$$d_{ij}^k = \min (d_{ik} + d_{kj})$$

3. Ak platí $k < s$, $k = k + 1$ a návrat na krok 2.

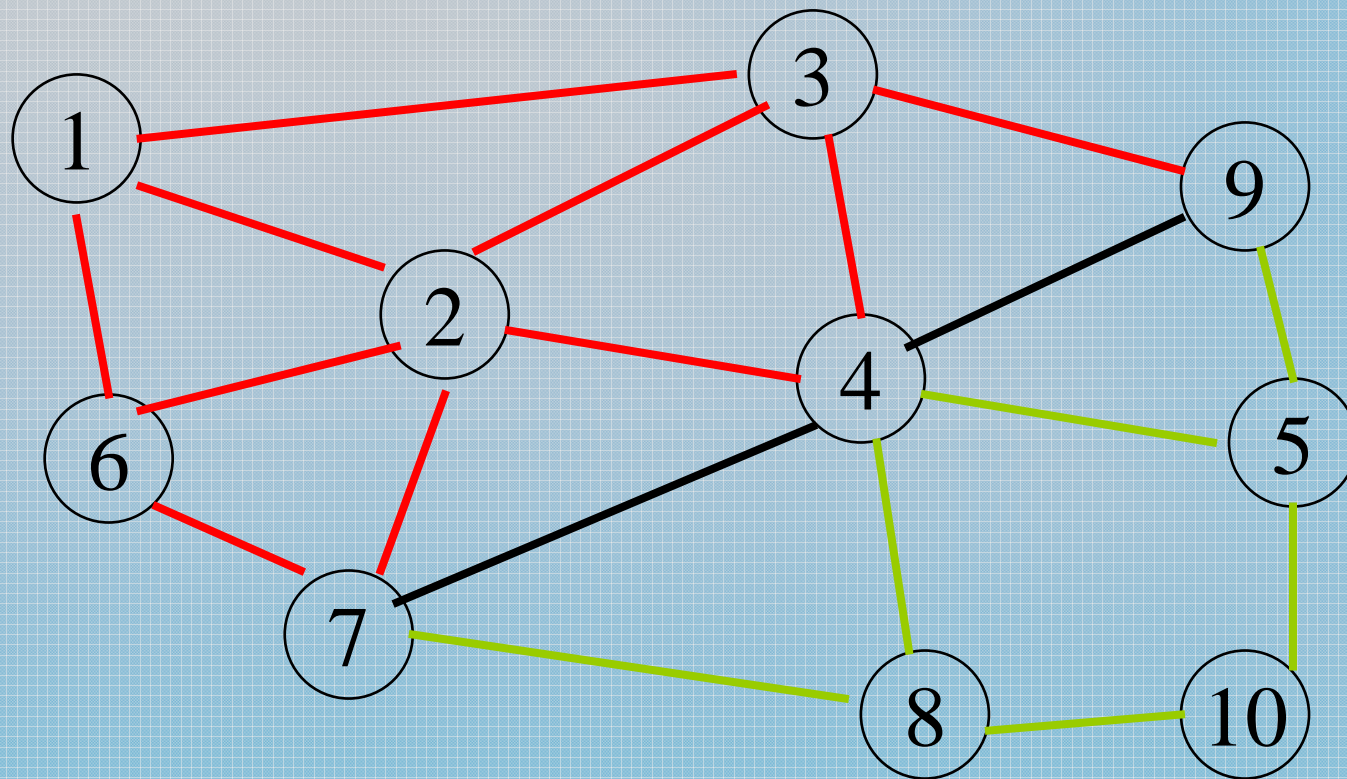
Operácia minimálneho sčítania matic



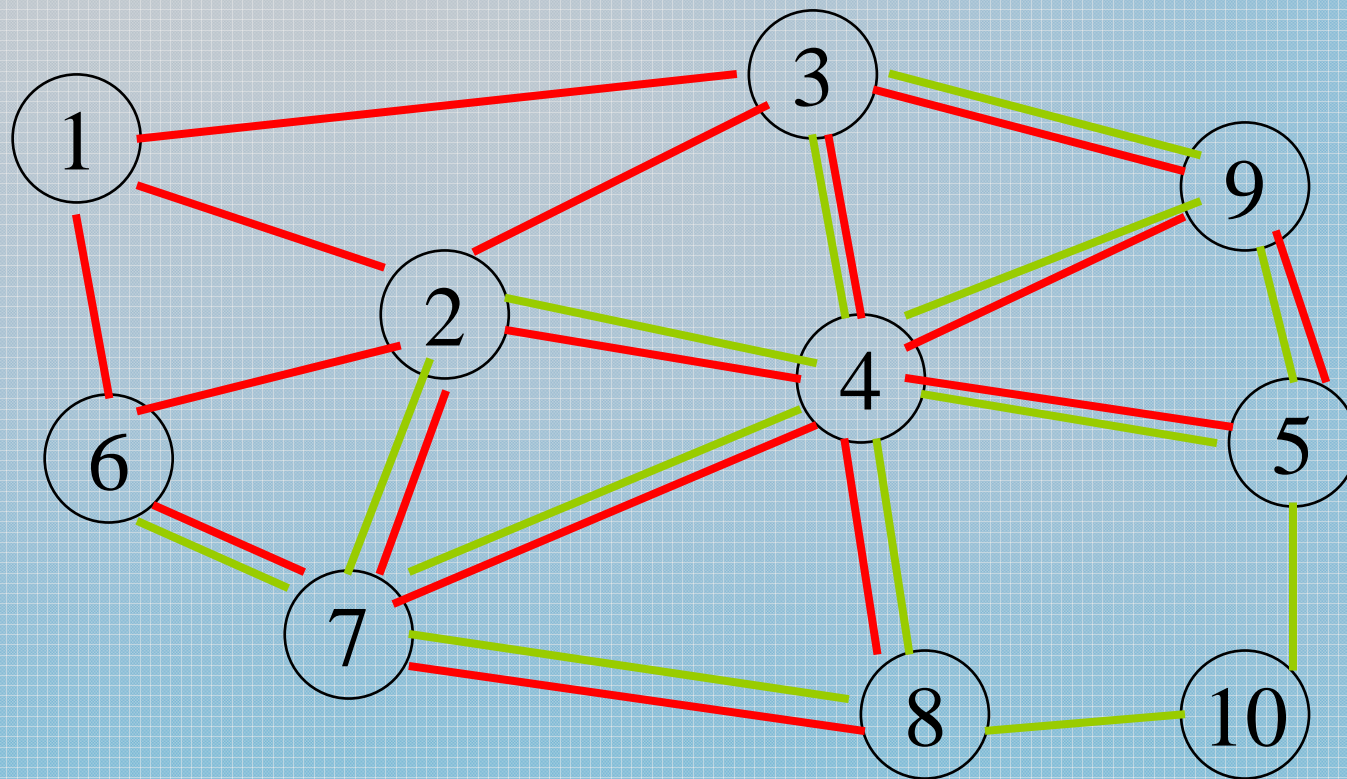
Operácia minimálneho sčítania matic – 1.iterácia



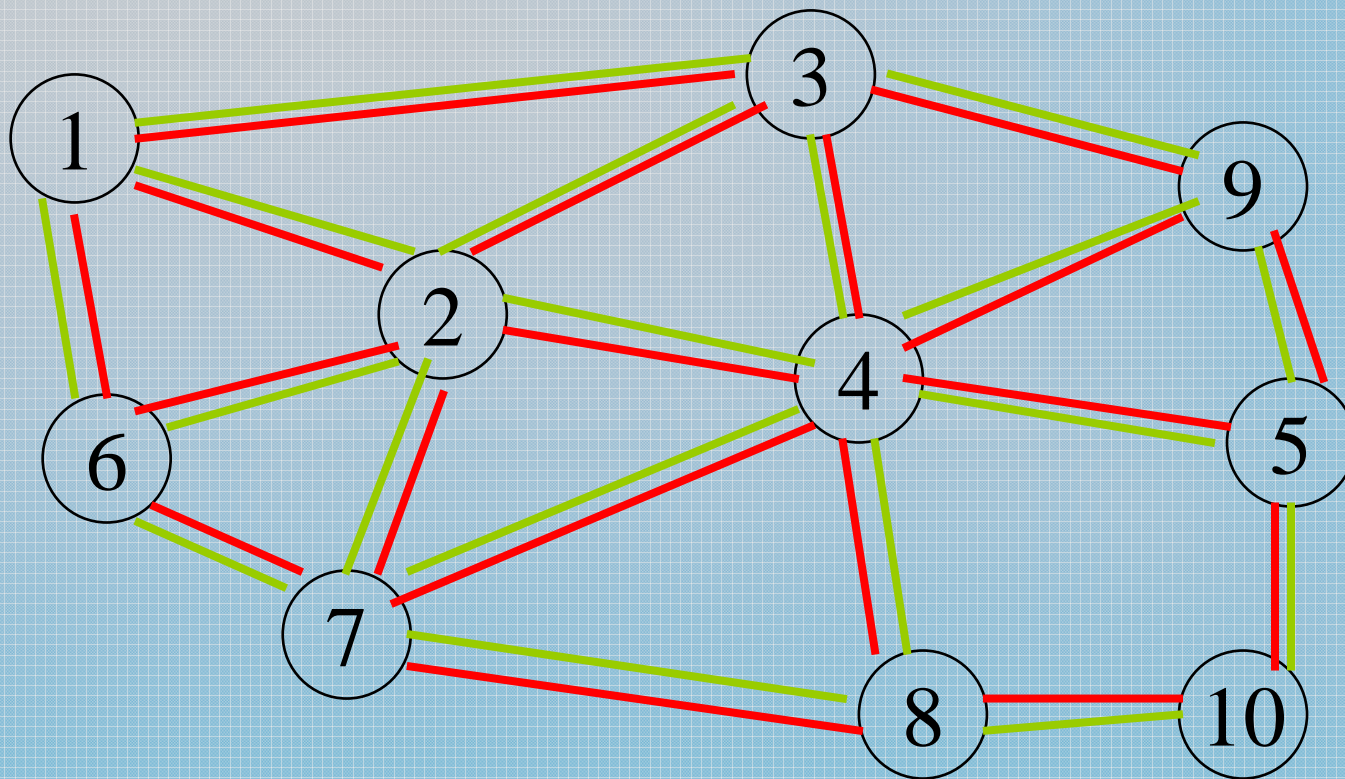
Operácia minimálneho sčítania matic – 2. iterácia



Operácia minimálneho sčítania matic – 3. iterácia



Operácia minimálneho sčítania matic – 4. iterácia



Príklad

	BA	BR	KE	LC	MT	NR	PD	PP	RK	ZA	ZV
BA						85				202	
BR			164	77				78			66
KE		164		159				120			
LC		77	159			156					55
MT							54		39	25	86
NR	85			156			80				103
PD					54	80				79	62
PP		78	120						79		
RK					39			79			73
ZA	202				25		79				
ZV		66		55	86	103	62		73		

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ⁰	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	M
LC 4	M	77	159	0	M	156	M	M	M	M	55
MT 5	M	M	M	M	0	M	54	M	39	25	86
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	M	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	M	M	M	M	0	79	M	M
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	79	0	M	73
ZA10	202	M	M	M	25	M	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	M	55	86	103	62	M	73	M	0

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ⁰	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	M	M	85	M	M	M	202	M
BR 2	M	0	164	77	M	M	M	78	M	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	M	M	120	M	M	M
LC 4	M	77	159	0	M	M	M	M	M	M	M
MT 5	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M
NR 6	85	M	M	156	M	0	80	M	M	M	103
PD 7	M	M	M	M	54	80	0	M	M	79	62
PP 8	M	78	120	M	M	M	M	0	M	M	M
RK 9	M	M	M	M	39	M	M	M	0	M	M
ZA10	202	M	M	M	25	M	79	M	M	0	M
ZV11	M	66	M	55	86	103	62	M	73	M	0

$241_6 = \min(0+M, M+77, M+159, M+0, M+M, 85+156, M+M, M+78, M+M, 202+M, M+55) = 241$

$M = \min(0+M, M+0, M+164, M+77, M+M, 85+M, M+M, M+78, M+M, 202+M, M+66) = M$

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ¹	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	M	M	241 ₆	227 ₁₀	85	165 ₆	M	M	202	188 ₆
BR 2	M	0	164	77	152 ₁₁	169 ₁₁	128 ₁₁	78	139 ₁₁	M	66
KE 3	M	164	0	159	M	315 ₄	M	120	199 ₈	M	214 ₈
LC 4	241 ₆	77	159	0	141 ₁₁	156	117 ₁₁	155 ₂	128 ₁₁	M	55
MT 5	227 ₁₀	152 ₁₁	M	141 ₁₁	0	134 ₇	54	118 ₉	39	25	86
NR 6	85	169 ₁₁	315 ₄	156	134 ₇	0	80	M	176 ₁₁	159 ₇	103
PD 7	165 ₆	128 ₁₁	M	117 ₁₁	54	80	0	M	93 ₅	79	62
PP 8	M	78	120	155 ₂	118 ₉	M	M	0	79	M	144 ₂
RK 9	M	139 ₁₁	199 ₈	128 ₁₁	39	176 ₁₁	93 ₅	79	0	64 ₅	73
ZA10	202	M	M	M	25	159 ₇	79	M	64 ₅	0	111 ₅
ZV11	188 ₆	66	214 ₈	55	86	103	62	144 ₂	73	111 ₅	0

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ²	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	254 ₆	400 ₄	241	219 ₇	85	165	332 ₁₁	258 ₇	202	188
BR 2	254 ₆	0	164	77	152	169	128	78	139	177 ₅	66
KE 3	400 ₄	164	0	159	238 ₈	315	276 ₄	120	199	263 ₉	214
LC 4	241	77	159	0	141	156	117	155	128	166 ₅	55
MT 5	219 ₇	152	238 ₈	141	0	134	54	118	39	25	86
NR 6	85	169	315	156	134	0	80	247 ₂	173 ₅	159	103
PD 7	165	128	276 ₄	117	54	80	0	172 ₅	93	79	62
PP 8	332 ₁₁	78	120	155	118	247 ₂	172 ₅	0	79	143 ₅	144
RK 9	258 ₇	139	199	128	39	173 ₅	93	79	0	64	73
ZA10	202	177 ₅	263 ₉	166 ₅	25	159	79	143 ₅	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ³	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	254	400	241	219	85	165	332	258	202	188
BR 2	254	0	164	77	152	169	128	78	139	177	66
KE 3	400	164	0	159	238	315	276	120	199	263	214
LC 4	241	77	159	0	141	156	117	155	128	166	55
MT 5	219	152	238	141	0	134	54	118	39	25	86
NR 6	85	169	315	156	134	0	80	247	173	159	103
PD 7	165	128	276	117	54	80	0	172	93	79	62
PP 8	332	78	120	155	118	247	172	0	79	143	144
RK 9	258	139	199	128	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	177	263	166	25	159	79	143	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matíc

D ⁴	BA 1	BR 2	KE 3	LC 4	MT 5	NR 6	PD 7	PP 8	RK 9	ZA10	ZV11
BA 1	0	254	400	241	219	85	165	332	258	202	188
BR 2	254	0	164	77	152	169	128	78	139	177	66
KE 3	400	164	0	159	238	315	276	120	199	263	214
LC 4	241	77	159	0	141	156	117	155	128	166	55
MT 5	219	152	238	141	0	134	54	118	39	25	86
NR 6	85	169	315	156	134	0	80	247	173	159	103
PD 7	165	128	276	117	54	80	0	172	93	79	62
PP 8	332	78	120	155	118	247	172	0	79	143	144
RK 9	258	139	199	128	39	173	93	79	0	64	73
ZA10	202	177	263	166	25	159	79	143	64	0	111
ZV11	188	66	214	55	86	103	62	144	73	111	0

Príklad - mestá SR

Operácia minimálneho sčítania matic

Najkratšia cesta BA – KE: 400 km $1-3 = 1 - 4 - 3 = 1 - 6 - 4 - 3 = BA - NR - LC - KE$

Najkratšia cesta LC – PP: 155 km $4-8 = 4 - 2 - 8 = LC - BR - PP$