Úvod do teórie riadenia a možnosti jeho využitia v analýze monetárneho hospodárstva.

Karol Szomolányi, 2002.

Obsah:

Úvod do teórie riadenia a možnosti jeho využitia v analýze monetárneho hospodárstva.

V tejto práci sa budeme zaoberať problematikou teórie optimálneho riadenia a Pontrjaginovho princípu maxima a ukážkou aplikácie teórie v podmienkach monetárneho hospodárstva. V prvej časti bude naformulovaný problém optimálneho riadenia, v ďalšej sa budeme zaoberať podmienkami existencie optima v probléme. Princípu Pontrjaginovho maxima sa budeme venovať v nasledujúcej časti a na záver si ukážeme aplikáciu teórie optimálneho riadenia na probléme v monetárnom hospodárstve.

Vzhľadom na to, že teória optimálneho riadenia je dosť rozsiahla, zameriame sa hlavne na detaily, ktoré sú vhodné pre našu aplikáciu.

Formulácia úlohy optimálneho riadenia[1].

Problém optimálneho riadenia sa zaoberá vývojom systému a jeho reguláciou v čase. V tejto časti budú uvedené základné vzťahy a matematická formulácia najčastejšie sa vyskytujúceho základného problému optimálneho riadenia.

Majme systém, ktorého stav v čase t je opísaný vektorom:

$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}{}_t = (x^1{}_t \ldots x^n{}_t)\ \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$,

[1] Pojem optimálne riadenie je prebraný z [3]

Vektor **x** je vektor z n -rozmerného euklidovského priestoru. Prvky vektoru **x** sú v probléme optimálneho riadenia nazývané ako stavové premenné. Množinu definovanú na E^{n+1} premennou t a vektorom **x** budeme označovať symbolom $\Re$.

V čase $t = t_0$ je stav systém $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(t_0) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}{}_0 = (x^1{}_0 \ldots x^n{}_0)$. Je to začiatočný, alebo iniciálny stav systému, ktorý v probléme optimálneho riadenia patrí do vopred zadanej množiny iniciálnych stavov $(t_0,\mathbf{x}_0) \in \tau_0$. Predpokladáme, že je vopred zadaná aj množina koncových stavov, do ktorej patria želané stavy systému v čase $t = t_1$; $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(t_1) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}{}_1 = (x^1{}_1 \ldots x^n{}_1)$, $(t_1,\mathbf{x}_1) \in \tau_1$ s n+1 prvkami. $\tau_0 \cup \tau_1 = \beta$ na E^{2n+2}. V probléme optimálneho riadenia teda existujú koncové podmienky vo forme

$$(t_0,\mathbf{x}_0,t_1,\mathbf{x}_1) \in \beta \,. \quad (1)$$

I -ta charakteristika stavu systému **x**, x^i, je určená funkciou času $\phi^i(t)$:

$$x^i = \phi^i(t); x^i{}_0 \in \tau_0; x^i{}_1 \in \tau_1; \ \forall i \in \{1 \ldots n\}.$$

Funkcie $\phi^i(t)$ sú $\forall i \in \{1 \ldots n\}$ spojité a definované na (t_0,t_1). Vektorová funkcia $\phi^T(t) = (\phi^1(t),\ldots,\phi^n(t))$, vyjadruje trajektóriu systému. Stav systému je popísaný vektorom $\mathbf{x}_t$:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}{}_t = \phi^T(t) = (\phi^1(t),\ldots,\phi^n(t)) \forall t \in (t_0,t_1).$$

Stav systému je možné v čase t regulovať pomocou vektora $\mathbf{z}_t$,

$$\mathbf{z}^{\mathbf{T}}{}_t = (z^1{}_t \ldots z^n{}_t) \ \forall t \in \langle t_0,t_1 \rangle,$$

z m -rozmerného euklidovského priestoru. Prvky vektoru **z** sú v probléme optimálneho riadenia nazývané ako regulačné premenné. Množinu definovanú vektorom **z** z E^m budeme označovať symbolom ω. Karteziánskym súčinom množín $\Re$ a ω dostávame množinu, ktorú budeme označovať ξ.

I -ta charakteristika vektoru **z**, z^i, je určená funkciou času $u^i(t)$:

$u^i(t) = z^i$, $\forall i \in \{1 \ldots m\}$

O funkciách u^i $\forall i \in \{1 \ldots m\}$ sa predpokladá, že sú po častiach spojité. Vektorová funkcia $\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t))$, vyjadruje reguláciu systému. Potom regulácia **z**:

$$\mathbf{z}_t = u^{\mathbf{T}}(t) = (u^1(t), \ldots, u^m(t)), \forall t \in (t_0, t_1).$$

Vzťah medzi stavom systému a jeho reguláciou je popísaný systémom diferenciálnych rovníc:

$$\frac{d\phi^i}{dt} = f^i(t, \phi(t), u(t)); \quad \phi^i(t_0) = x^i{}_0; \ \phi^i(t_1) = x^i{}_1; \ \forall i = 1 \ldots n, \ (2)$$

f^i je reálna spojitá funkcia premenných t, **x**, **z**. Zadefinujme vektorovú funkciu **f**(t,**x**,**z**): **f** (t,**x**,**z**) = (f^i(t,**x**,**z**)) $\forall i = 1 \ldots n$ .Rovnice (2) sa nazývajú stavové rovnice. Ku každej regulácii je priradená príslušná trajektória taká, že platia diferenciálne rovnice (2).

Pre ďalší výklad je potrebné objasniť pojem funkcionály.

Definícia 1 [4]

Nech M je množina, ktorej prvkami sú funkcie. Ak ku každej funkcii y∈M priradíme jediné reálne číslo I(y), hovoríme, že na množine M je definovaná funkcionála I. Číslo I(y) nazývame hodnotou funkcionály I na funkcii y a množinu M množinou prípustných funkcií.

Nech v probléme optimálneho riadenia existuje funkcionála:

$$J(\phi, u) = g_0(t_0, \phi(t_0)) + g_1(t_1, \phi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(s, \phi(s), u(s))ds, \ (3)$$

kde f^0 je spojitá funkcia premenných t, **x**, **z,** g_0 funkcia definovaná v τ_0 a g_1 funkcia definovaná v τ_1. Problém optimálneho riadenia spočíva v hľadaní extrému funkcionály (3), pri dodržaní istých podmienok.

Okrem koncových podmienok (1), extremalizácie (3), spočíva problém optimálneho riadenia z ohraničení regulácii **u** a k nej príslušnej trajektórie ϕ podľa (2) vo forme:

$u(t) \in \Omega(t, \phi(t))$, (4)

pričom Ω je zobrazenie [1], ktoré každému bodu (t,**x**) z $\Re$ pridelí bod z ω.

Po úvodných definíciách vzťahov problému, môžeme v ďalšom texte prejsť k matematickej formulácii problému optimálneho riadenia.

Problém 1

Problém optimálneho riadenia spočíva v hľadaní minima funkcionály (3)[2] pri ohraničení regulácie (4) a príslušnej trajektórie podľa (2), pri dodržaní koncových podmienok (1).

Inými slovami ide o to nájsť reguláciu **u**, pomocou ktorej transformujeme stav systému $\mathbf{x}_0$ na začiatku sledovaného obdobia t_0 definovanú množinou τ_0 do želaného stavu $\mathbf{x}_1$ na konci sledovaného obdobia t_1 definovanú množinou τ_1 tak, aby sa minimalizovala funkcionála v tvare (3) (napr. minimalizácia všetkých výdavkov v časovom intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$) pri ohraničeniach regulácie a príslušnej trajektórie (4) (napr. $u(t) \geq 0$).

Definícia 2 [1]

Regulácia **u** sa nazýva prípustnou, ak k nej existuje príslušná trajektória podľa (2) taká, že:

1. $t \to f^0(t, \phi(t), \mathbf{u}(t))$ je z intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$,
2. $u(t) \in \Omega(t, \phi(t))$ na intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$,
3. $(t_0, \mathbf{x}_0, t_1, \mathbf{x}_1) \in \beta$.

Príslušná trajektória k prípustnej regulácii podľa vzťahu (2) (ďalej len jej príslušná trajektória) sa nazýva prípustnou. Pár (ϕ,**u**), taký že **u** je prípustná regulácia a ϕ je jej príslušná prípustná trajektória sa nazýva prípustným. Množinu všetkých prípustných párov budeme označovať **A**.

---

[2] Špeciálnymi prípadmi horeuvedeného problému optimálneho riadenia sú keď vo funkcionále (3) sú funkcie $g_0 = g_1 = 0$, ide o Lagrangeov problém, alebo $f^0 = 0$, ide o Mayerov problém [1].

Pár (ϕ^*,$\mathbf{u}^*$), ktorý rieši horeuvedený problém optimálneho riadenia sa nazýva optimálnym. Trajektória ϕ^* sa nazýva optimálnou trajektóriou a regulácia $\mathbf{u}^*$ sa nazýva optimálnou reguláciou.

Existencia optimálneho páru v probléme optimálneho riadenia za predpokladov konvexnosti a kompaktnosti.

V tejto časti budú uvedené podmienky existencie optimálneho páru v probléme optimálneho riadenia. Vzhľadom na to, že overovanie podmienok existencie optimálneho páru sa v praxi málokedy aplikuje, zameriame sa hlavne na identifikáciu týchto podmienok iba pre triedy problémov optimálneho riadenia podobné problému uvedenému v aplikačnej časti práce.

Logickou podmienkou existencie optimálneho páru je, že množina všetkých prípustných párov **A** je neprázdna. Dole uvedené príklady [1, kapitola 3] nám pomôžu špecifikovať podmienku existencie optimálneho páru vzhľadom na zobrazenie $\Omega(t,x)$, určujúce ohraničujúce podmienky pre reguláciu.

Príklad 1

Nech **x** je jednodimenziálne. Stavová rovnica je: dx/dt = u(t). Nech množina β pozostáva z bodu (t_0, x_0, t_1, x_1) = (0,1,1,0) a nech $\Omega(t,x) = E^1$. Nech

$$J(\phi,u) = \int_0^1 t^2 u^2(t)dt .$$

Ku každej regulácii je príslušná jediná trajektória ϕ taká, že $\phi(0) = 1$. Pre $0 < \varepsilon < 1$ majme reguláciu u_ε:

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & ; \varepsilon \le t \le 1 \\ -\varepsilon^{-1}; & 0 \le t \le \varepsilon \end{cases}$$

Nech ϕ_ε je jediná trajektória príslušná k u_ε, pričom platí $\phi_\varepsilon(0) = 1$. Keďže platí $\phi_\varepsilon(1) = 0$, ($\phi_\varepsilon, u_\varepsilon$) je prípustný pár a teda množina **A** je neprázdna. Navyše

$$J(\phi,u)=\int_0^{\varepsilon} t^2\varepsilon^{-2}dt=\frac{\varepsilon}{3}$$

Keďže $J\left(\phi\ ,\ u\ \right)\geq\ 0$ pre všetky prípustné páry (ϕ ,**u**), je zrejmé, že

$$0=\inf\{J(\phi,u):(\phi,u)\varepsilon A\},$$

čo je vtedy a len vtedy ak u* = 0, čo nie je prípustné, pretože ak ϕ^* je príslušná trajektória k u* a platí ϕ^* (0) = 1, potom ϕ^* (1) = 1. V hore zadanom probléme teda neexistuje optimálny pár.

Príklad 1a)

Nech je zadanie totožné so zadaním v príklade 1, akurát ohraničenia regulácie:

$$\Omega(t,x)=\{z:|z|\leq 1/t\}\quad \text{ak } 0<t\leq 1,$$
$$\Omega(0,x)=E^1.$$

Problémy z príkladu 1 a 1a) rovnako nemajú optimálny pár.

Príklad 1b)

Nech je zadanie totožné so zadaním v príklade 1, akurát ohraničenia regulácie:

$$\Omega(t,x)=\{z:|z|\leq 1/t\}\quad \text{ak } 0\leq t\leq 1,$$
$$\Omega(0,x)=0.$$

Ak teraz definujeme

$$u_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & ;\varepsilon\leq t\leq 1\\ -\varepsilon^{-1}; & 0\leq t\leq\varepsilon\\ 0 & ;\quad t=0\end{cases}$$

a pokračujeme ako v príklade 1, znova zistíme, že optimálny pár neexistuje.

Definujme pojem zhora polospojité zobrazenia [1, kapitola 3]:

Definícia 3

Nech L je zobrazenie, ktoré priradí podmnožiny L(t,**x**) k bodom (t,**x**)$\in \Re$, (t_0,$\mathbf{x}_0$) bod z $\Re$ a nech $\delta > 0$. Nech $N_\delta(t_0, x_0)$ je δ-okolie. Potom pod $L(N_\delta(t_0, x_0))$ sa rozumie:

$$L(N_\delta(t_0, x_0)) = \cup[L(t,x) : (t,x) \in N_\delta(t_0, x_0)].$$

Zobrazenie L je zhora polospojité v bode (t_0,$\mathbf{x}_0$) z $\Re$, ak

$$\bigcap_{\delta>0} clL(N_\delta(t_0, x_0)) \subseteq L(t_0, x_0),$$

kde pod cl sa rozumie uzáver množiny. Zobrazenie L je zhora polospojité, ak je zhora polospojité v každom bode $\Re$.

Preskúmajme zobrazenie $\Omega(t,x)$. Berkovitz v [1, kapitola 3] uvádza príklad, že zobrazenie $\Omega(t,x)$ je zhora polospojité, keď $\Omega(t,x)$ = U, kde U je stála uzavretá množina.

Otázne je, aké je zobrazenie z príkladu 1a). Je zrejmé, že pre t > 0 je zobrazenie $\Omega(t,x)$ zhora polospojité. V bode (0,**x**) je $\Omega(0,x) = E^1$ a $\lim_{t\to 0} \Omega(t,x) \le \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \le \infty = E^1$. Zobrazenie je teda zhora polospojité pre všetky t$\in \langle 0,1 \rangle$, je zhora polospojité.

Rovnako v príklade 1b) je zobrazenie $\Omega(t,x)$ zhora polospojité pre t > 0. Avšak $\Omega(0,x) = 0$ a $\lim_{t\to 0} \Omega(t,x) \le \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \le \infty = E^1$. Zobrazenie nie je zhora polospojité.

Definujme pojem zhora polospojité zobrazenie vzhľadom na svoju implikáciu – u.s.c.i [1, kapitola 3].

Definícia 4

Nech U je množina v E^m a nech $\varepsilon > 0$. Označme $[U]_\varepsilon$ uzavreté ε-okolie množiny U. Zobrazenie L je zhora polospojité vzhľadom na svoju implikáciu, alebo u.s.c.i. (upper semi-continous with respect to inclusion) v bode (t_0,$\mathbf{x}_0$) v $\Re$, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že

$$L(t,x) \subseteq [L(t_0,x_0)]_\varepsilon, \quad \forall (t,x) \in N_\delta(t_0,x_0).$$

Zobrazenie L je u.s.c.i. na $\Re$ ak je zhora u.s.c.i. v každom bode $\Re$.

Ak zobrazenie $\Omega(t,x) = U$, U je stála množina, pre všetky (t,**x**) v $\Re$, potom zobrazenie je u.s.c.i. v $\Re$.

Ak L je u.s.c.i. v (t_0,$\mathbf{x}_0$) a L(t_0,$\mathbf{x}_0$) je uzavretá, potom L je zhora polospojitá v (t_0,$\mathbf{x}_0$). Naopak to ale nemusí platiť, teda ak L je v (t_0,$\mathbf{x}_0$) zhora polospojitá, nemusí znamenať, že L je u.s.c.i. v (t_0,$\mathbf{x}_0$). Dôkaz tohto tvrdenia je jednoduchý a uvedený v [1, kapitola 3].

Príklad 2:

Berkovitz [1, kapitola 3] uvádza príklad zobrazenia, ktoré je zhora polospijité, avšak nie je u.s.c.i. Nech zobrazenie

$$L(t,x) = \{z \in E^1 : 0 \le z \le 1\} \cup z = 1/t \qquad t \ne 0$$
$$L(0,x) = \{z \in E^1 : 0 \le z \le 1\},$$

pre všetky body, pre ktoré platí $t \ne 0$ je zobrazenie v týchto bodoch aj zhora polospojité aj u.s.c.i. Keďže platí:

$$\bigcap_{\delta > 0} clL\left(N_\delta(0,x)\right) = \{z \in E^1 : 0 \le z \le 1\} = L(t,x),$$

pre všetky body, pre ktoré platí t = 0 je zobrazenie v týchto bodoch zhora polospojité. Zobrazenie L(t,**x**) je teda zhora polospojité.

$$[L(0,x)]_\varepsilon = [\{z \in E^1 : 0 \le z \le 1\}]_\varepsilon \quad \forall x,$$

Majme bod $(t_\delta, x_\delta) : (t_\delta, x_\delta) \in N_\delta(0,x) \ \ \forall x$, potom:

$$L(t_\delta, x_\delta) = \{\{z \in E^1 : 0 \le z \le 1\} \cup \infty\} \not\subset [L(0,x)]_\varepsilon \quad \forall x,$$

teda zobrazenie nie je u.s.c.i. Zobrazenia $\Omega(t,x)$ v príkladoch 1 a 1.1a) sú u.s.c.i., v príklade 1.1b) zobrazenie $\Omega(t,x)$ nie je u.s.c.i. v bodoch (0,**x**).

V ďalšom uvedieme podmienky konvexnosti pre existenciu optimálneho páru.

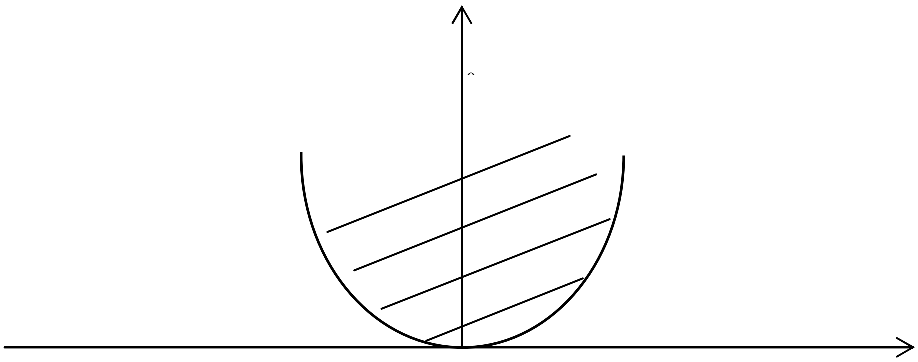
Majme problém optimálneho riadenia (problém 1). Pomocou funkcií **f** (t,**x**,**z**), **f**$^{\mathbf{0}}$(t,**x**,**z**) definujme množiny [1, kapitola 3]:

$$D(t,x) = \{\hat{y} = (y^0, y)\ y^0 = f^0(t,x,z), y = f(t,x,z), z \in \Omega(t,x)\} \text{ a}$$
$$D^+(t,x) = \{\hat{y} = (y^0, y)\ y^0 \geq f^0(t,x,z), y = f(t,x,z), z \in \Omega(t,x)\}$$

V príklade 1:

$$D(t,x) = \{(y^0, y)\ y^0 = t^2 z^2, y = z, z \in E^1\}$$
$$D^+(t,x) = \{(y^0, y)\ y^0 \geq t^2 z^2, y = z, z \in E^1\}$$

Pre fixné (t,**x**) je D(t,**x**) parabola a D$^+$(t,**x**) je parabola plus vyznačený priestor. D(t,**x**) konvexná množina nie je D$^+$(t,**x**) však už je konvexná.



Obrázok 1.

Berkovitz [1, kapitola 3] str. 49 uvádza aj príklad problému optimálneho riadenia, v ktorom nie je množina D$^+$(t,**x**) konvexná.

Veta 1 [1, kapitola 3] (Veta existencie optima s predpokladmi konvexity a kompaktnosti)[3]

Nech množina prípustných párov **A** je neprázdna množina a nech sú splnené nasledovné predpoklady:

1. Existuje kompaktná množina $\Re_0 \subset \Re$ taká, že pre všetky prípustné trajektórie ϕ máme $(t, \phi(t)) \in \Re_0, \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$.

[3] Dôkaz je v [1, kapitola 3].

2. Množina β je uzavretá.
3. Zobrazenie $\Omega(t,x)$ je u.s.c.i. na $\Re_0$.
4. Pre všetky (t,**x**) z $\Re_0$ je množina $\Omega(t,x)$ kompaktná.
5. Pre všetky (t,**x**) z $\Re_0$ je množina D^+(t,**x**) konvexná.
6. Funkcia f^0 je zdola polospojitá a **f** je spojitá na ξ.

Nech funkcie g_0 a g_1 sú zdola polopspojité na množine β. Potom existuje (ϕ^*,u^*) z **A**, také, že platí $J(\phi^*,u^*) \leq J(\phi,u) \forall (\phi,u) \in A$.

Z príkladu 1 a 1a) je vidno, že pri porušení podmienky 4 vety 1 o kompaktnosti množiny $\Omega(t,x)$ v probléme optimálneho riadenia neexistuje optimálny pár. Rovnako trajektórie **x** neležia v kompaktnej množine $\Re_0$. V príklade 1b) navyše zobrazenie $\Omega(t,x)$ nie je u.s.c.i.

Dôsledok vety 1 [1]

Nech sú splnené všetky predpoklady vety 1 okrem predpokladov 5 a 6. Nech pre všetky (t,**x**) z $\Re_0$ je množina $\Omega(t,x)$ konvexná v E^m. Nech **h** je n -rozmerná spojitá vektorová funkcia, definovaná na $\Re_0$, B je matica o rozmeru n x m, ktorej stĺpce sú n –rozmerné, zdola polospojité vektorové funkcie, definované na $\Re$. Nech funkcia z problému optimálneho riadenia f^0 je konvexná, zdola polospojitá funkcia, definovaná na ξ. Nech systémové rovnice sú v tvare:

$$\frac{dx}{dt} = h(t,x) + B(t,x)u(t).$$

Potom pre každé (t,x) z $\Re_0$ je množina D^+(t,**x**) konvexná a funkcionála J dosahuje minimum v **A**.

K dôkazu dôsledku stačí ukázať, že pre všetky (t,**x**) z $\Re_0$ je množina D^+(t,**x**) konvexná [1, kapitola 3].

Vetu 1 a jej dôsledok je možné aplikovať na niektoré špeciálne triedy problému optimálneho riadenia [1]. Ide o triedu problémov, v ktorých sú funkcie f^0 ... f^n, g_0 a g_1 lineárne v **x** a **z**[4] a o triedu, v ktorej sú lineárne stavové rovnice a funkcie f^0, g_0 a g_1 sú konvexné[5].

Veta 1 predpokladá, že množina $D^+(t,\mathbf{x})$ je konvexná a množina $\Omega(t,x)$ je kompaktná. Berkovitz [1] uvádza aj vety existencie optima pre problémy, v ktorých sú tieto dva predpoklady porušené.

Pontrjaginov princíp maxima.

V tejto časti bude odvodený Pontrjaginov princíp maxima, tak ako to uvádza Berkowitz v [1, 5. kapitola]. Je treba poznamenať, že pri odvádzaní princípu je nutné prijať niekoľko predpokladov. Od týchto predpokladov sa v [1] postupne upúšťa. Preto neuvedieme všetky predpoklady uvedené v [1, kapitola 5].

Majme problém optimálneho riadenia (problém 1) s rozdielom, že na miesto funkcionály (3) máme minimalizovať funkcionálu:

$$J(\phi,u)=g(t_1,\phi(t_1))+\int_{t_0}^{t_1} f^0(s,\phi(s),u(s))ds \quad (5)$$

Nech (T,**X**) je nejaký iniciálny stav systému, (T,**X**) = (t_0,$\mathbf{x}_0$). Predpokladáme, že pre všetky (T,**X**) z $\Re$ má problém jednoznačné riešenie, ktoré je dané optimálnou reguláciou označovanou **u**(.,T,**X**) a príslušnou trajektóriou označovanou $\phi(.,T,X)$. Predpokladáme, že funkcia **u**(.,T,**X**) je po častiach spojitá a v bode, v ktorom nie je spojitá t_d, je jej limita sprava taká, že $\mathbf{u}(t_d,T,\mathbf{X}) = \mathbf{u}(t_d+0,T,\mathbf{X})$. Body (t,**x**) vyhovujú: $\mathbf{x} = \phi(t,T,X)$.

Nech pre všetky (T,**X**), funkcia W(T,**X**) je hodnota funkcionály (5), daná optimálnym párom. Potom, ak **A**(T,**X**) označuje množinu prípustných párov pre problém s iniciálnym bodom (T,**X**):

$$W(T,X)=\min\{J(\phi,u):(\phi,u)\in A(T,X)\} \text{ (6).}$$

[4] Do tejto triedy patrí aj napr. problém minimalizácie času transformácie systému zo stavu $\mathbf{x}_0$ do stavu $\mathbf{x}_1$ pri lineárnych stavových rovniciach.

[5] Do tejto triedy patrí aj napríklad problém s lineárnymi stavovými funkciami a kvadratickými funkciami f^0 a g_0, g_1 a rovnako aj problém uvedený v aplikačnej časti tejto práce.

Takto definovaná funkcia W sa nazýva hodnotová funkcia problému. Nech W je dvakrát diferecovateľná funkcia na $\Re$.

Nech T_1 > T a nech (T_1,$\mathbf{X_1}$) je bod optimálnej trajektórie $\phi(.,T,X)$. Potom $\mathbf{X_1}$ = $\phi(T_1,T,X)$a

$$W(T,X)=\int_{T}^{T_1} f^{0*}(t,T,X)dt+\int_{T_1}^{t_1} f^{0*}(t,T,X)dt+g(t_1,\phi(t_1)), \text{ kde } (7)$$

$$f^{0*}(t,T,X)=f^{0}(t,\phi(t,T,X),u(t,T,X)).$$

Z hore uvedeného je zrejmé, že optimálny pár problému s iniciálnym stavom (T_1,$\mathbf{X_1}$) je daný funkciami $\phi(.,T,X)$a **u**(.,T,**X**). Teda pre všetky t$\geq$$T_1$:

$$\phi(t,T,X)=\phi(t,T_1,X_1)$$

u(t,T,**X**) = **u**(t,T_1,$\mathbf{X_1}$).

Ak by to neplatilo potom podľa (6) s (T_1,$\mathbf{X_1}$) namiesto (T,**X**) a nášho predpokladu existencie jediného optimálneho páru, by sme mali, že W(T_1,$\mathbf{X_1}$) je striktne menšie ako súčet posledných dvoch výrazov na pravej strane vzťahu (7). Teda pre reguláciu **u** definovanú vzťahom **u**(t) = **u**(t,T,**X**) pre T$\leq$t < T_1 a **u**(t) = **u**(t,T_1,$\mathbf{X_1}$) pre $T_1$$\leq$t$\leq$$t_1$ by príslušná regulácia ϕ bola taká, že $J(\phi,u)<W(T,X)$, čo odporuje (6).

Inými slovami, optimálna trajektória má takú vlastnosť, že je optimálnou pre problém s ľubovoľným iniciálnym stavom, ktorý leží na tejto trajektórii.

Predpokladajme ďalej, že funkcia W je definovaná na $\Re$. Majme interval $\langle T,T+\Delta t\rangle$, pričom $\Delta t>0$. Nech **v** je spojitá regulácia definovaná na $\langle T,T+\Delta t\rangle$ spĺňajúca podmienku (4) $v(t)\in\Omega(t)$. Predpokladáme, že Δt je tak malé, že výsledkom stavových rovníc (2) s **v**(t) na miesto **u**(t) je $\psi:\psi(T)=X$. Nech $\Delta x=\psi(T+\Delta t)-\psi(T)$. Teda, regulácia **v** transformuje systém zo stavu **X** do stavu **X** $+\Delta x$ v časovom intervale $\langle T,T+\Delta t\rangle$.Nech pre $t\geq T+\Delta t$ sa využíva optimálne regulácia problému s iniciálnym stavom $(T+\Delta t,X+\Delta x)$. Označme $\tilde{u}$ reguláciu získanú použitím **v** na $\langle T,T+\Delta t\rangle$ a potom $u(.,T+\Delta t,X+\Delta x)$. Označme $\tilde{\phi}$ príslušnú trajektóriu. Potom $(\tilde{\phi},\tilde{u})\in A(T,X)$a

$$W(T,X) \leq J(\widetilde{\phi},\widetilde{u}) = \int_{T}^{T+\Delta t} f^{0}(s,\psi(s),v(s))ds + \int_{T+\Delta t}^{t_1} f^{0*}(s,T+\Delta t,X+\Delta x)ds + g(t_1,\phi(t_1,T+\Delta t,X+\Delta x))$$

Suma posledných dvoch výrazov je rovná $W(T+\Delta t,X+\Delta x)$, teda:

$W(T+\Delta t,X+\Delta x) - W(T,X) \geq -\int_{T}^{T+\Delta t} f^{0}(s,\psi(s),v(s))ds$. Na základe taylorovej vety:

$$W_T(T,X)\Delta T + W_X(T,X)^T \Delta X + \tfrac{1}{2}(\Delta T,\Delta X)^T H(T,X)((T,X)+\theta(\Delta T,\Delta X))(\Delta T,\Delta X) \geq -\int_{T}^{T+\Delta t} f^{0}(s,\psi(s),v(s))ds \qquad (8)$$

kde $W_T(T,X)$ je parciálna derivácia W podľa T, $W_X(T,X)$ vektor parciálnych derivácií W podľa **X**, $H(T,X)$ je hessova matica druhých parciálnych derivácií funkcie W(T,**X**) a $\theta \in (0,1)$. Keďže $(\Delta T,\Delta X) \to 0$, posledný výraz vzťahu (8) je zanedbateľne malé číslo. Zo stavových rovníc $\Delta x / \Delta t = 1/\Delta t \int_{T}^{T+\Delta t} f(s,\psi(s),v(s))ds$ a zo spojitosti **f**, ψ a **v** vyplýva:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f(T,\psi(T),v(T)) = f(T,X,v(T)).$$

Z hore uvedeného vyplýva, že ak výraz (8) podelíme Δt a necháme $\Delta t \to 0$, dostávame

$$W_T(T,X) + W_X(T,X)^T f(T,X,v(T)) \geq -f^{0}(T,X,v(T)). \quad (9)$$

Ak **v**(t) je optimálna regulácia, **v**(T) = **u**(T,T,**X**), z nerovnosti (9) dostávame rovnosť:

$$W_T(T,X) = -f^{0}(T,X,u(T,T,X)) - W_X(T,X)^T f(T,X,u(T,T,X)). \quad (10)$$

Po prijatí istých predpokladov [1, 5. kapitola], z (10):

$$W_T(T,X) = \max_{z\in\Omega(T)} \left\{- f^{0}(T,X,z) - W_X(T,X)^T f(T,X,z)\right\}, \quad (11)$$

s maximom dosiahnutym v $\mathbf{z} = \mathbf{u}(t,T,\mathbf{X})$. Rovnica (11) sa niekedy nazýva aj Bellmanova rovnica, rovnica (10) Hamilton-Jacobianska.

Uvažujme s rovnicou (11), kde namiesto iniciálneho bodu (T,**X**) je nejaký všeobecný bod (t,**x**), potom:

$$W_t(t,x) = \max_{z\in\Omega(T)} H(t,x,z,-1,-W_x(t,x)) \quad (12)$$

Definujme funkciu H na $E^1 \times E^n \times E^m \times E^1 \times E^n$

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{z},-1,\mathbf{p}) = -f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathbf{p}^T\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{z}). \quad (13)$$

Takto (13) máme zadefinovanú prvú nutnú podmienku, potrebnú pre nájdenie optimálneho páru.

Majme funkciu F definovanú na $\Re$:

$$F(\mathbf{x}) = W_t(T,\mathbf{x}) + f^0(T,\mathbf{x},\mathbf{u}(T,T,\mathbf{X}) + \mathbf{W_x}(T,\mathbf{x})^T\mathbf{f}(T,\mathbf{x},\mathbf{u}(T,T,\mathbf{x}), \quad (14)$$

Kde W_t je parciálna derivácia W podľa t a $\mathbf{W_x}$ je vektor parciálnych derivácií W podľa **x**. Z (10) je zrejmé: F(**x**) = 0 a z (11) s (T,**x**) namiesto (T,**X**):

$$W_t(T,x) \geq -f^0(T,x,u(T,T,X)) - W_X(T,x)^T f(T,X,u(T,T,X)),$$

teda $F(\mathbf{x}) \geq 0$. Funkcia F má teda minimum v bode **x** = **X**. Keďže W je dvakrát diferencovateľná, f^0 je diferencovateľná, F je diferencovateľná, teda platí $F_{\mathbf{x}} = 0$. Ak derivujeme (14) a položíme rovné nule:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x^i} + \frac{\partial f^0}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^j} f^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n \ \ (15),$$

Definícia 5

Ak **h**: $(t,\mathbf{x},\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{h}(t,\mathbf{x},\mathbf{z})$ je k -rozmerná, $k \geq 1$ vektorová funkcia definovaná na ξ, potom pod pojmom funkcia vypočítaná pozdĺž trajektórie $\phi(.,T,X)$ rozumieme zloženú funkciu

$t \to h(t, \phi(., T, X), u(., T, X))$. Analogicky ak W je funkcia definovaná na $\Re$, pod pojmom funkcia W vypočítaná pozdĺž trajektórie $\phi(., T, X)$ rozumieme zloženú funkciu $t \to W(t, \phi(., T, X))$.

Nech (T,**X**) je pevný bod z $\Re$. Definujme n -rozmernú vektorovú funkciu $\lambda(t, T, X)$: t$\to$ $\lambda(t, T, X)$ pre $t \in \langle T, t_1 \rangle$:

$$\lambda(t, T, X) = -W_x^T(t, \phi(t, T, X)). \quad (16)$$

W je dvakrát diferencovateľná, λ je diferencovateľná podľa t. Zderivujme (16) podľa t. S využitím stavových rovníc dostávame:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} = -\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x^i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^j} f^j \qquad \forall i = 1, ..., n, \quad (17)$$

kde parciálne derivácie W a komponentov **f** sú vypočítané pozdĺž trajektórie $\phi(., T, X)$. Ak dosadíme (17) do (15) s použitím (16) dostávame:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} = -\left\{-\frac{\partial f^0}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} p^j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right\} \qquad \forall i = 1, ..., n. \quad (17a)$$

Ukázali sme, že s optimálnou trajektóriou je spojená taká funkcia $\lambda(t, T, X)$, že (17a) platí. Keďže parciálne derivácie funkcií f^0, f^j pre všetky j podľa x^i pre všetky i sú vypočítané pozdĺž trajektórie $\phi(., T, X)$, sú to funkcie času t na intervale $\langle T, t_1 \rangle$. Po úprave (17a) použitím funkcie H a z (12) dostávame systém ďalších nutných podmienok:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -H_x(t, x, u(t, T, X), -1, p) \\ \frac{dx}{dt} &= H_p(t, x, u(t, T, X), -1, p) \end{aligned} \qquad (18) \quad ,$$

kde $\mathbf{H_x}$ $\mathbf{H_p}$ sú vektory derivácií H podľa **x** a podľa **p**. K podmienkam (13) a (18) je potrebné ešte pridať hraničné (boundary, resp. transversality conditions [1]) podmienky.

Nech (T_1,$\mathbf{X_1}$) je koncový bod optimálnej trajektórie pre problém s iniciálnym bodom (T,**X**). Potom existuje bod $\mathbf{o_1} = (o_1^1, \ldots, o_1^q)$, $0 \leq q \leq n$, taký že $T_1 = T(\mathbf{o_1})$ $\mathbf{X}_1 = X(\mathbf{o_1})$. Nech G^i je krivka definovaná na τ prechádzajúca bodom (T_1,$\mathbf{X_1}$) a definovaná parametricky rovnicami:

$$T_1 = T(o_1^1, \ldots, o^i, o_1^{i+1}, \ldots, o_1^q),$$
$$\mathbf{X}_1 = X(o_1^1, \ldots, o^i, o_1^{i+1}, \ldots, o_1^q),$$

o^i sa pohybuje v otvorenom intervale (a^i, b^i). Krivku G^i získame tak, že všetky komponenty vektora **o** sú nemenné okrem komponentu o^i, ktorý sa pohybuje v intervale (a^i, b^i). Predpokladajme, že každý bod z τ je koncovým pre jednu trajektóriu. Z (5):

$W(t_1,x_1) = g(t_1,x_1)$, derivujme tento výraz podľa o_1:

$$\left(W_t - g_t, W_x - g_x\right)^T \left(\frac{\partial T}{\partial o^i}, \frac{\partial X}{\partial o^i}\right) = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n, \ (19)$$

kde (W_t - g_t, $\mathbf{W_x} - \mathbf{g_x}$) je n+1 rozmerný vektor. Výraz (19) s využitím H a λ je:

$$\left(H - g_t, -\lambda - g_x\right)^T \left(\frac{\partial T}{\partial o^i}, \frac{\partial X}{\partial o^i}\right) = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n \quad (20).$$

(20) je systém hraničných podmienok vyjadrených analyticky. Grafické vyjadrenie systému hraničných podmienok je, že vektor (W_t - g_t, $\mathbf{W_x} - \mathbf{g_x}$), resp. $\left(H - g_t, -\lambda - g_x\right)$ je buď nulový, alebo ortogonálny k G^i.

Ďalej môžeme prejsť k formulácii Pontrjaginovho princípu maxima. Pred tým je ešte nutné prijať niekoľko predpokladov, ktoré sú uvedené v [1, 5. kapitola].

Veta 2 (Princíp maxima)[6]

Nech g = 0. Nech (ϕ,**u**) je optimálny pár definovaný na intervale $\langle t_0, t_1 \rangle$. Potom existuje spojitá vektorová n -rozmerná funkcia λ definovaná na $\langle t_0, t_1 \rangle$, taká, že:

1. Pre ľubovoľné t z $\langle t_0, t_1 \rangle$:

$$\lambda'(t) = -H_x(t, \phi(t), u(t), -1, \lambda(t))$$
$$\phi'(t) = H_p(t, \phi(t), u(t), -1, \lambda(t))$$

2. Pre ľubovoľnú prípustnú kontrolu v(t) definovanú na $\langle t_0, t_1 \rangle$:

$$\int_{t_0}^{t_1} H(t, \phi(t), u(t), -1, \lambda(t))dt \geq \int_{t_0}^{t_1} H(t, \phi(t), v(t), -1, \lambda(t))dt .$$

3. Ak zobrazenie $t \to (f^0(t, \phi(t)u(t)), f(t, \phi(t)u(t)))$ je spojité v t = t_i, i = 0,1, potom 2n+2-rozmerný vektor:

$$(H(P(t_0)), -\lambda(t_0), -H(P(t_1)), \lambda(t_1))$$

je ortogonálny k β v bode $(t_0, \phi(t_0), t_1, \phi(t_1))$, kde $P(t_i) = (t_i, \phi(t_i), u(t_i), -1, \lambda(t_i)), i = 0,1$.

Definícia 6

Prípustný pár (ϕ,**u**), pre ktorý sú splnené podmienky z vety 2 sa nazýva extrémny pár. Funkcia ϕ sa nazýva extrémna trajektória a regulácia **u** sa nazýva extrémnou. Ak (ϕ,**u**) je extrémny pár, vektor $(t, \phi(t), u(t), -1, \lambda(t))$ sa nazýva extrémny element a budeme ho označovať **P**(t).

Princíp maxima je nutná podmienka optimality, nie však postačujúca.

---

[6] Dôkaz je možné nájsť v [1, kapitola 6].

Berkowitz [1, 5. kapitola] uvádza aj ďalšie vety princípu maxima, v ktorých sa postupne upúšťa od niektorých predpokladov. Z hľadiska aplikácie princípu maxima na konci práce nám postačuje veta 2.

Aplikácia princípu maxima v analýze monetárnej politiky.

V tejto časti práce uvedieme možnosť využitia teórie optimálneho riadenia v analýzach monetárnej politiky, tak ako to ukázal Calvo vo svojej práci [2].

Problém 2

Označme m reálnu masu peňazí v ekonomike, d prebytok (deficit) verejných financií, c output ekonomiky a nech platí: c = f(d) kde f je spojitá, dvakrát diferencovateľná, konkávna funkcia, definovaná na (d_m, d_x). Nech $f(d_m) = f(d_x) = 0$. Nech ekonomika produkuje svoje maximum pri vyrovnanom rozpočte verejných financií, teda f'(0) = 0. Funkcia d(t) bude vyjadrovať vývoj stavu rozpočtu verejných financií v čase t. Calvo vo svojej práci [2+ odkazy] vyjadril na základe vzťahov dopytu po peniazoch inflácie a očakávanej inflácie[7] vzťah:

$$d(t) = \frac{m(t)\ln m(t)}{a} - m'(t), \quad (21)$$

kde a je parameter zo vzťahu dopytu po peniazoch, a > 0, m(t) je spojitá funkcia závislosti masy peňazí m od času t, m'(t) je derivácia m(t) podľa t, je to sprava spojitá a po častiach spojitá funkcia na intervale $\langle t_0, \infty)$ a vyjadruje zmenu masy peňazí k nejakému časovému okamžiku.

Nech štát má v každom čase t nejakú užitočnosť z outputu vyjadrenú funkciou $u(c_t)$ a z vytlačeného množstva peňazí $v(m_t)$ Nech sú to funkcie definované na $\langle t_0, \infty)$ a platí: $\lim_{c \to 0} u(c) = \lim_{m \to 0} v(m) = -\infty$. Nech u je rastúca pre všetky c > 0 a nech v dosahuje svoje maximum v bode $m = m^F$, kde m^F je optimálna masa peňazí (optimum quantity of money –

[7]Využil hlavne teóriu dokonalých očakávaní (perfect foresight theory). Viď napr. Sargent, T. J. a N. Wallace: „Stability of Models of Money and Perfect Foresight“, Econometrica, 41 (1973), str. 1043 – 1048, alebo Calvo, G. A.: „On Models of Money and Perfect Foresight“, Diskusná práca 74-7520, Columbia University, November 1975, forthcoming in International Economic Review.

OQM), podľa Friedmanovho chápania.[8] Predpokladáme, že $m^F > 1$. Funkcie v, u sú striktne konkávne.

Nech funkcia h(d) = u(f(d)). Z vyššie uvedeného je zrejmé, že h(d) je definovaná na (d_m,d_x), spojitá dvakrát diferencovateľná a konkávna, $\lim_{d\to d_m} h(d) = \lim_{d\to d_x} h(d) = -\infty$. Funkcia h(d) dosahuje svoje maximum v bode d = 0, teda pri vyrovnanom rozpočte verejných financií.

Úlohou vlády je potom:

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(h\left(\frac{m(t)\ln m(t)}{a} - m'(t)\right) + v(m'(t))\right)e^{-\delta(t-t_0)}dt \to \max \text{, resp}$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}\left(h\left(\frac{m(t)\ln m(t)}{a} - m'(t)\right) + v(m'(t))\right)e^{-\delta(t-t_0)}dt \to \min \quad (22)$$

kde $e^{-\delta(t-t_0)}$ je vyjadrením spojitého odúročiteľa pri diskontnej sadzbe δ. Ak (22) vyjadríme v bežných cenách:

$$-\int_{t_0}^{\infty}\left(h\left(\frac{m(t)\ln m(t)}{a} - m'(t)\right) + v(m'(t))\right)dt \to \min \quad (23)$$

Dostávame tak úlohu na Pontrjaginov princíp maxima. Stav systému je daný celkovou masou peňazí v čase t m(t), regulácia systému ja daná momentálnou emisiou peňazí m'(t).

Predpokladáme, že $t_0 = 0$, $m_0 > 0$ je ľubovoľné. Predpokladáme, že systém časom konverguje do bodu $\hat{m}$. Nech existuje T: m(t) $= \hat{m}\ \forall t \geq T$, potom m'(t) = 0 $\forall t \geq T$. Máme teda zadefinovanú množinu $\beta = (0, m_0, \infty, \hat{m})$.

Prejdeme k overeniam podmienok existencie optima v probléme 2. Problém má lineárnu stavovú rovnicu a konvexné f^0. Ako už bolo ukázané (kapitola 2) množina D^+ takéhoto problému je konvexná. Berkovitz [1, kapitola 3, príklad 6.3] uvádza, že pre problém s konvexnými stavovými rovnicami, ak množina $\Omega = E^m$ a množina prípustných trajektórií **A** je neprázdna, existuje prípustný pár, ktorý minimalizuje funkcionálu (3). V našom probléme je $\Omega = E^1$ a teda existuje extrémny pár. Po overení podmienok existencie extrému môžeme prejsť k riešeniu:

[8] Friedman, M.: The Optimum of Money and Other Essays. Chicago: Aldine Publishing Co., 1969

$$H = h\left(\frac{m(t)\ln m(t)}{a} - m'(t)\right) + v(m'(t)) + \lambda(t)m'(t) \qquad t \geq 0, \quad (24)$$

kde $\lambda(t)$ je funkcia podľa (16). Maximalizujeme H podľa m'(t) a s využitím dt$\rightarrow 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial m'(t)} = \frac{dt\partial H}{\partial m(t)} = \left(\frac{\partial h}{\partial m(t)}\left(\frac{\ln m(t)+1}{a} - \frac{1}{dt}\right) + \frac{\partial v(m(t))}{\partial m(t)}\right)dt + \frac{dt}{dt}\lambda(t) =$$
$$\frac{dt\partial h}{\partial m(t)}\left(\frac{\ln m(t)+1}{a}\right) - \frac{dt\partial h}{dt\partial m(t)} + \frac{dt\partial v(m(t))}{\partial m(t)} + \lambda(t) = -h'(d(t)) + \lambda(t)$$

kde h'(d) je derivácia h podľa d. Ak výraz položíme rovný nule, dostávame

$$\lambda(t) = h'(d). \qquad (25)$$

Takto máme rozpracovanú prvú nutnú podmienku (veta 2 bod 2) optima.

Prebytok (schodok) verejných financií d môžeme teda napísať ako funkciu:

$$d(t) = \tilde{d}(\lambda). \qquad (26)$$

Z vlastností funkcie h a z (25) je zrejmé, že funkcia $\tilde{d}$ je klesajúca, v bode $\lambda = 0$ je jej hodnota rovná nule. Ak dosadíme (26) do (21):

$$m'(t) = \frac{m(t)\ln m(t)}{a} - \tilde{d}(\lambda), \qquad (27)$$

čo je ďalšia podmienka optimality. Nech $\bar{H} = \max\{H : m'(t) \text{ je ľubovoľné číslo}\}$:

po dosadení (27) do (24):

$$\bar{H} = h(\tilde{d}(\lambda)) + v(m(t)) + \lambda(t)\frac{m(t)\ln m(t)}{a} - \tilde{d}(\lambda)$$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial m(t)} = \frac{\partial v(m(t))}{\partial m(t)} + \lambda(t)\frac{\ln m(t)+1}{a}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial m^2(t)} = v''m(t) + \lambda(t)\frac{1}{am(t)}$$

Druhá derivácia je záporná a teda $\overline{H}$ je konkávna, ak $\lambda(t) \le 0$, čo je postačujúca podmienka [2, príloha 1].

Prejdime na systém diferenciálnych rovníc (veta 2 bod 1). Už sme vyjadrili podmienku pre m'(t) (27).

$$\frac{\partial H}{\partial m(t)} = v'm(t) + \lambda(t)\left(\frac{1+\ln m(t)}{a} - \theta\right), \text{ teda:}$$

$$\lambda'(t) = -v'm(t) - \lambda(t)\left(\frac{1+\ln m(t)}{a} - \theta\right), \quad (28)$$

kde θ je číslo, pre ktoré predpokladáme $(1/a) > \theta > 0$. Systém diferenciálnych rovníc (27), (28) popisuje ďalšie nutné podmienky optima. Skúsme nájsť bod $\hat{m}$. Z horeuvedeného predpokladu je zrejmé, že stav systému bude konvergovať do bodu $\hat{m}$ (v čase t < T) a potom (t$\geq$T) sa nebude meniť a teda:

$$m'(t) = \lambda'(t) = 0 \qquad \forall t \geq T \ \ (29).$$

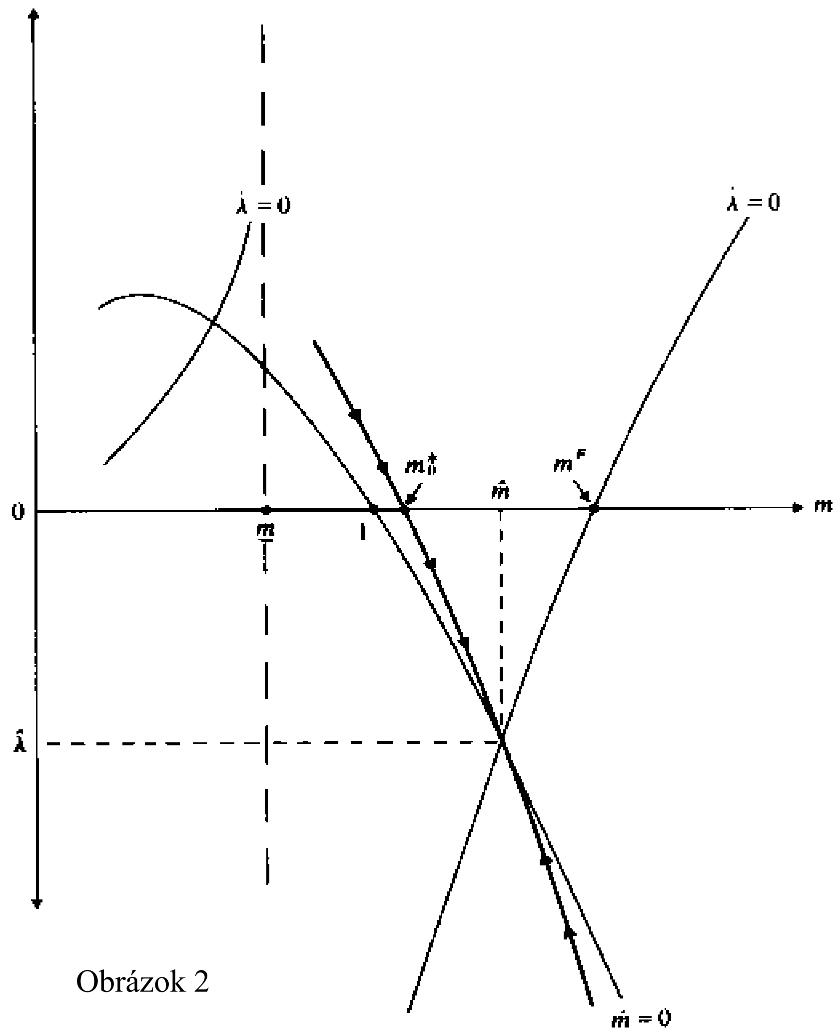
Urobme grafickú analýzu podmienky (29).

$$\text{Ak } \lambda'(t) = 0 \Rightarrow v'(m(t)) = -\lambda(t)\left(\frac{1+\ln m(t)}{a} - \theta\right). \quad (30)$$

Na základe vlastností funkcie v dokážeme podmienku (30) zakresliť do diagramu s m na x-ovej osi a s λ na y-ovej osi (obr. 2)[9].

---

[9] Pre bod $0 > \underline{m} > 1$ na obr. 2 platí $1 + \ln \underline{m} = a\theta$.



Obrázok 2

Ak $m'(t) = 0 \Rightarrow \tilde{d}(\lambda) = \frac{m(t)\ln m(t)}{a}$. (31)

Na základe vlastností funkcie $\tilde{d}$ dokážeme podmienku (31) zakresliť do diagramu s m na x-ovej osi a λ na y-ovej osi, za predpokladu, že $m^F > 1$, (obr. 2).

Z nutných podmienok chýbajú ešte hraničné. Množina $\beta = (0, m_0, \infty, \hat{m})$, m_0 je ľubovoľné kladné číslo. Z hraničných podmienok: $\lambda_0 = 0$. Keďže $\hat{m}$ je presne definované číslo podmienkou (29), $\lambda(\infty) < 0$ (podľa postačujúcej podmienky). Z (29) je zrejmé: $\lambda(\infty)$ = $\hat{\lambda}$. Ak teda iniciálny bod bude m^*_0, stav systému bude postupne konvergovať do bodu $\hat{m}$, $\hat{m} < m^F$, tak ako je to znázornené na obr. 2.

Na základe (27) je zrejmé, že nemenné ostane aj d = $\hat{d}$ a z (25) stálosť $\lambda = \hat{\lambda}$. Systém teda konverguje do bodu $(\hat{m}, \hat{\lambda})$. Z (26) $d_0 = 0$ a teda na začiatku je potrebné, aby rozpočet verejných financií bol vyrovnaný. Neskôr vzniká prebytok verejných financií, ktorý postupne narastá až kým sa neustáli na $\hat{d}$ v čase T.

Použitá literatúra

[1] Berkovitz, L. D.: "Optimal Control Theory", Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[2] Calvo, G. A.: "On the Time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economics", Econometrica, 46 (1978), 1411-1428.

[3] Laščiak, A. a kolektív: „Dynamické modely a dynamické programovanie", Edičné stredisko Vysoká škola ekonomická v Bratislave, 1976.

[4] Laščiak, A. a kolektív: „Optimálne programovanie", Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1990