Optimalizácia prepravovaných množstiev

(Dopravné úlohy)

Ivan Brezina

- Podstata dopravných úloh
- Formulácia dopravnej úlohy
- Riešenie dopravnej úlohy
- Degenerácia – metóda bázickej nuly
- Doprava s obmedzenou kapacitou komunikácií
- Dvojstupňové dopravné úlohy
- Viacstupňové dopravné úlohy

Dopravné úlohy

- rozvoz homogénneho tovaru od *m* dodávateľov k *n* odberateľom
- cieľ – minimalizácia prepravných nákladov
- úplná realizácia ponuky dodávateľov
- úplné uspokojenie dopytu odberateľov
- musí platiť $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Formulácia dopravnej úlohy

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, \dots, m, \; j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \; i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \; j = 1, 2, \dots, n$$

Duálna úloha

$$\max q(u,v) = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n$$

Riešenie dopravnej úlohy - *metóda potenciálov*

1. nájdenie východiskového prípustného bázického riešenia (*metóda severo-západného rohu*, *metóda maticového minima*, *Vogelova aproximačná metóda* a pod.),
2. test optimálnosti na základe hodnôt duálnych premenných, ak je riešenie optimálne, výpočet sa končí,
3. v opačnom prípade výpočet nového bázického riešenia s lepšou hodnotou účelovej funkcie *metódou potenciálov*.

Riešenie dopravnej úlohy – *problém degenerácie*

- počet obsadených polí v tabuľke je menší ako $m + n - 1$
- odstránenie: *ε-metóda*, *metóda bázickej nuly*
- doplniť príslušný počet obsadených polí bázickými nulami na hodnotu m + n – 1, nesmú s ostatnými už obsadenými poľami vytvárať uzavretý okruh
- bázické nuly dosadzujeme podľa možnosti do polí s najmenšou hodnotou c_{ij}

Doprava s obmedzenou kapacitou komunikácií

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = 1, 2, ..., m, \; j = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} \leq h_{ij}, \quad x_{ij} \in D$$

D - množina doplnkových obmedzení premenných,
h_{ij} - kapacitné obmedzenie komunikácie z *i* do *j*

Doprava s obmedzenou kapacitou komunikácií – algoritmus

1. Nájdenie akéhokoľvek východiskového bázického riešenia. Ak neplatí $x_{ij} \leq h_{ij}$, riešenie pomocnej úlohy, jej ÚF minimalizujúcu súčet premenných s hodnotou vyššou, ako je h_{ij} (z''). V tejto úlohe sú jednotkové prepravné náklady v poliach, kde je prekročená prepravná kapacita a nulové náklady sú vo všetkých ostatných poliach.
2. Obsadenie voľného nulového poľa, pokiaľ je príslušný prepravný náklad menší ako hodnota ekvivalentnej kombinácie prepravných nákladov, alebo zníženie hodnoty v poli, ktoré je už obsadené na hornú hranicu, ak je príslušný prepravný náklad vyšší ako hodnota ekvivalentnej kombinácie.
3. Kritériá optimálnosti (vyplývajú z vety o komplementárnosti):

$u_i + v_j \leq c_{ij}$ pre všetky $h_{ij} = +\infty$

$u_i + v_j \geq c_{ij}$ pre všetky $x_{ij} = h_{ij}$

$u_i + v_j \leq c_{ij}$ pre všetky $x_{ij} = \underline{0}$ a $h_{ij} \neq +\infty$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- dodávateľské sklady - medzisklady - odberateľské sklady
- označenie:
  - m - počet dodávateľov (D_1, D_2, ... , D_m)
  - K - počet medziskladov (M_1, M_2, ... , M_K)
  - n - počet odberateľov (O_1, O_2, ... , O_n)
  - a_i - kapacita i-teho dodávateľa
  - c_k - kapacita k-teho medziskladu
  - b_j - požiadavky j-teho odberateľa

Dvojstupňové dopravné úlohy

- označenie:

c^1_{ik} - prepravné náklady v 1. stupni od *i*-tého dodávateľa do *k*-teho medziskladu,

c^2_{kj} - prepravné náklady v 2. stupni z *k*-teho medziskladu k *j*-temu odberateľovi,

x^1_{ik} - množstvo prepravované v 1. stupni od *i*-tého dodávateľa do *k*-teho medziskladu,

x^2_{kj} - množstvo prepravované v 2. stupni z *k*-teho medziskladu k *j*-temu odberateľovi.

Dvojstupňové dopravné úlohy

- riešenie dvoch jednoduchých dopravných úloh, ak platia vzťahy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_k \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_k \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- ak sú najmenšie požiadavky odberateľov

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} c_{ik}^{1} x_{ik}^{1} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{2} x_{kj}^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ik}^{1} \le a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{1} \le c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{2} \le c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{kj}^{2} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{1} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$x_{ik}^{1}, x_{kj}^{2} \ge 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, K, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- k nej duálna úloha

$$\max q = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{k=1}^{K} c_k (v_k + v'_k) + \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$$

$$u_i + v_k \le c^1_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ \ k = 1, 2, \ldots, K$$

$$u_i \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$v_k + v'_k \le 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$v'_k + w_j \le c^2_{kj}, \quad k = 1, 2, \ldots, K, \ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- ak sú najmenšie požiadavky dodávateľov

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} c_{ik}^{1} x_{ik}^{1} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{2} x_{kj}^{2}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ik}^{1} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{1} \le c_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{2} \le c_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{kj}^{2} \le b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{1} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{2}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$x_{ik}^{1}, x_{kj}^{2} \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- k nej duálna úloha

$$\max q=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{k=1}^{K} c_k (v_k + v'_k) + \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$$

$$u_i + v_k \le c_{ik}^1, \qquad i = 1, 2, ..., m, \quad k = 1, 2, ..., K$$

$$v_k + v'_k \le 0, \qquad k = 1, 2, ..., K$$

$$v'_k + w_j \le c_{kj}^2, \qquad k = 1, 2, ..., K, \quad j = 1, 2, ..., n$$

$$w_j \quad \le 0, \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Dvojstupňové dopravné úlohy

- tabuľka riešenia

	v_k	v_1	v_2	…	v_K		
u_i		M_1	M_2	…	M_K	M_{fikt}	a_i
u_1	D_1						a_1
u_2	D_2						a_2
…	…			x_{ik}^1			…
u_m	D_m						a_m
w_j	D_{fikt}/O_{fikt}						b_j
w_1	O_1						b_1
w_2	O_2						b_2
…	…			x_{kj}^2			…
w_n	O_n						b_a
	c_k	c_1	c_2	…	c_K		
	v'_k	v'_1	v'_2	…	v'_K		

Dvojstupňové dopravné úlohy – algoritmus

A) Ak platí, že dvojstupňová dopravná úloha je vybilancovaná, t. j.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

túto úlohu možno riešiť metódou potenciálov ako dve samostatné dopravné úlohy.

B) Ak platí, že dvojstupňová dopravná úloha je nevybilancovaná, pričom minimálny súčet predstavujú kapacity medziskladov, opäť možno úlohu riešiť ako dve samostatné dopravné úlohy metódou potenciálov.

C) V ostatných prípadoch možno dvojstupňové dopravné úlohy riešiť nasledujúcim postupom:

Dvojstupňové dopravné úlohy – algoritmus

1. Ak sú požiadavky odberateľov nižšie ako možnosti dodávateľov, nájdeme východiskové bázické riešenie pre tovarové toky medzi medziskladmi a odberateľmi (nevybilancovaná dopravná úloha – zavedenie fiktívneho odberateľa – O_{fikt}). Na základe vypočítanej potreby kapacít medziskladov vzhľadom na požiadavky odberateľov nájdeme východiskové bázické riešenie pre tovarové toky medzi dodávateľmi a medziskladmi (zavedenie fiktívneho medziskladu – M_{fikt}).

   Ak sú možnosti dodávateľov menšie ako požiadavky odberateľov, nájdeme najskôr východiskové bázické riešenie pre tovarové toky medzi dodávateľmi a medziskladmi (zavedenie fiktívneho dodávateľa –- D_{fikt}) a na základe vypočítanej potreby kapacít medziskladov východiskové bázické riešenie pre tovarové toky medzi medziskladmi a odberateľmi (zavedenie fiktívneho medziskladu – M_{fikt}).

Dvojstupňové dopravné úlohy – algoritmus

2. Na základe 1. kroku zostavíme zovšeobecnenú tabuľku jednostupňovej dopravnej úlohy.
3. Ak sa niektoré riadkové ohraničenie spĺňa ako ostrá nerovnosť, položíme príslušné $u_i = 0$, resp. $w_j = 0$.
4. Ak pre niektoré doplnkové premenné x^1_{ik}, resp. x^2_{kj} platí, že sú väčšie ako nula, položíme zodpovedajúce $u_i + v_k = c^1_{ik}$, resp. $v'_k + w_j = c^2_{kj}$.
5. Ak sa *k*-te stĺpcové ohraničenie spĺňa ako ostrá nerovnosť (t.j. ak je v niektorom stĺpci $O_{fikt} > 0$, resp. $D_{fikt} > 0$), položíme zodpovedajúce $v_k + v'_k = 0$ $(v_k = -v'_k)$.
6. Ak pre niektoré x^2_{kj}, resp. x^1_{ik} platí, že je väčšie ako nula, položíme $v'_k + w_j = c^2_{kj}$, resp. $u_i + v_k = c^1_{ik}$. V prípade, že je úloha nedegenerovaná, možno na základe toho, že počet ohraničení v pôvodnej dopravnej úlohe je $m + 2K + n$, určiť jednoznačne práve $m + 2K + n$ hodnôt .
7. Ak všetky vypočítané hodnoty spĺňajú ohraničenia príslušnej duálnej úlohy vypočítané riešenie je optimálnym riešením. Ak nie je splnená aspoň jedna z podmienok, riešenie nie je optimálne.

Dvojstupňové dopravné úlohy – algoritmus

8. V prípade, že vypočítané riešenie nie je optimálne, obsadíme pole, kde je najviac porušené kritérium optimálnosti a nájdeme uzavretý okruh zmien:

a) ak sú porušené podmienky $u_i + v_k \leq c^1_{ik}$ alebo $v'_k + w_j \leq c^2_{kj}$, obsadíme príslušné pole hornej alebo dolnej časti tabuľky,

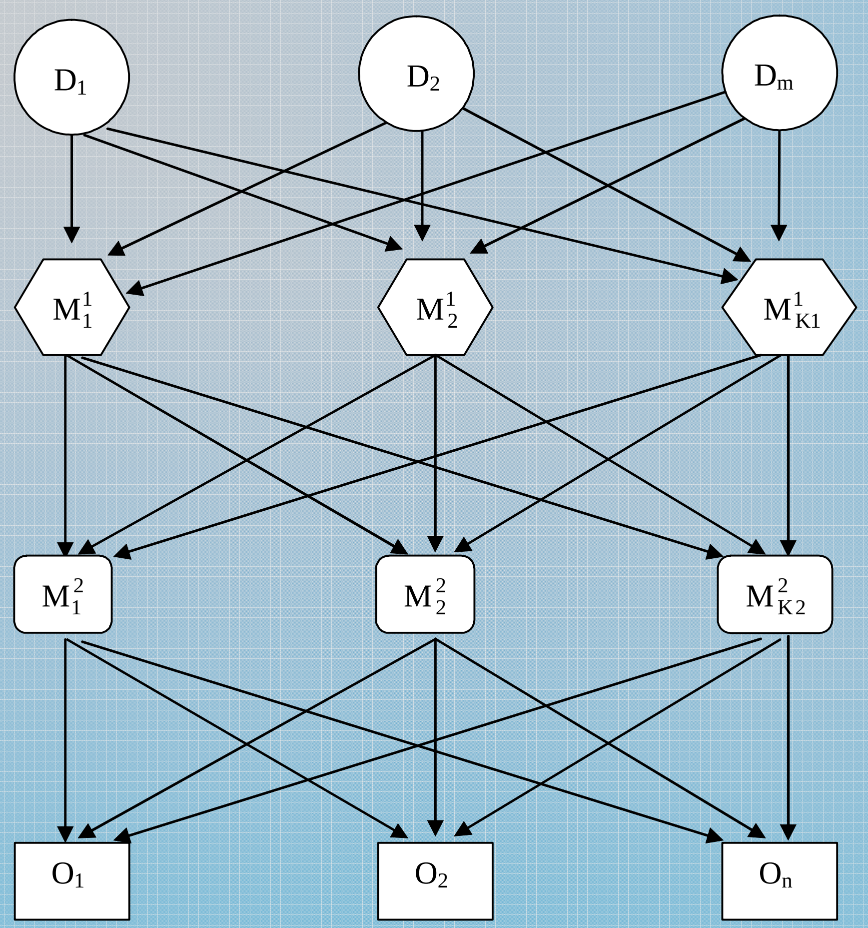
b) ak je porušená niektorá z podmienok $v_k + v'_k \leq 0$, obsadíme príslušné pole v riadku O_{fikt}, resp. D_{fikt},

c) ak je porušená niektorá z podmienok $u_i \leq 0$, resp. $w_j \leq 0$, obsadíme príslušné pole v stĺpci M_{fikt}.

9. Pri prechode uzavretého okruhu prostredným riadkom O_{fikt}, resp. D_{fikt} patrí aj toto pole medzi vrcholy uzavretého okruhu, pričom má opačné znamienko ako vrcholy v hornej a dolnej časti tabuľky. Nájdený okruh rozdelíme na dva polkruhy a z hodnôt so záporným znamienkom vyberieme minimálnu, ktorú pripočítame ku všetkým hodnotám s kladným znamienkom a odpočítame od všetkých hodnôt so záporným znamienkom uzavretého polkruhu.

10. Vrátime sa k 3. bodu a po konečnom počte krokov dospejeme k optimálnemu riešeniu.

Viacstupňové dopravné úlohy



Viacstupňové dopravné úlohy

$$\min \; z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k1=1}^{K1} c_{ik1}^{1} x_{ik1}^{1} + \sum_{k1=1}^{K1}\sum_{k2=1}^{K2} c_{k1k2}^{2} x_{k1k2}^{2} + \sum_{k2=1}^{K2}\sum_{j=1}^{n} c_{k2j}^{3} x_{k2j}^{3}$$

$$\sum_{k1=1}^{K1} x_{ik1}^{1} + x_{i}^{1} \le a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik1}^{1} + x_{k1}^{1} \le c_{k1}^{1}, \qquad k1 = 1, 2, \ldots, K1$$

$$\sum_{k2=1}^{K2} x_{k1k2}^{2} + x_{k1}^{2} \le c_{k1}^{1}, \qquad k1 = 1, 2, \ldots, K1$$

$$\sum_{k1=1}^{K1} x_{k1k2}^{2} + x_{k2}^{2} \le c_{k2}^{2}, \qquad k2 = 1, 2, \ldots, K2$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{k2j}^{3} + x_{k2}^{3} \le c_{k2}^{2}, \qquad k2 = 1, 2, \ldots, K2$$

$$\sum_{k2=1}^{K2} x_{k2j}^{3} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ik1}^{1}, x_{k1k2}^{2}, x_{k2j}^{3}, x_{i}^{1}, x_{k1}^{1}, x_{k1}^{2}, x_{k2}^{2}, x_{k2}^{3} \ge 0$$

Viacstupňové dopravné úlohy

	v^1_k	v^1_1	…	v^1_{K1}							
u_i		M^1_1	…	M^1_{K1}	M^1_F	O_F	O_1	…	O_n	a_i	
u_1	D_1									a_1	
…	…		x^1_{ik1}							…	
u_m	D_m									a_m	
v^2_k	D_F / M^2_F									c^2_k	$v^{2'}_k$
v^2_1	M^2_1									c^2_1	$v^{2'}_1$
…	…		x^2_{k1k2}					x^3_{k2j}		…	
v^2_{K2}	M^2_{K2}									c^2_{K2}	$v^{2'}_{K2}$
	M^2_F										
	c^1_k	c^1_1	…	c^1_{K1}		b_j	b_1	…	b_n		
	$v^{1'}_k$	$v^{1'}_1$	…	$v^{1'}_{K1}$		w_j	w_1	…	w_n		