

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/D/2020/36100138882012676

Kooperatívne hry v okružných úlohách

Dizertačná práca

2020

Ing. Dana Figurová

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Kooperatívne hry v okružných úlohách

Dizertačná práca

Študijný program: Ekonometria a operačný výskum

Študijný odbor: 3.3.25 Ekonometria a operačný výskum

Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Školiteľ: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Bratislava 2020

Ing. Dana Figurová



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ing. Dana Figurová
Študijný program: ekonometria a operačný výskum (Jednoodborové štúdium, doktorandské III. st., denná forma)
Študijný odbor: ekonómia a manažment
Typ záverečnej práce: Dizertačná záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Kooperatívne hry v okružných úlohách

Literatúra: 1. AXELROD, R. 1990. The Evolution of Co-operation, New York, Penguin Books.
2. CHOBOT M., TURNOVEC, F. ULAŠÍN, V., 1991. Teória hier a rozhodovania. Alfa, Bratislava.
3. SCHELLING, T. 1960. The Strategy of Conflict, Harvard University Press, Cambridge.
4. AXELROD, R. 2006. The Complexity of Cooperation, New Delhi, New Age International Limited Publishers.
5. GIBBONS, R. 1992. Game Theory for Applied Economist. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Cieľ: Cieľom dizertačnej práce je analýza riešenia kooperatívnych aj nekooperatívnych viackriteriálnych hier.

Anotácia: Viackriteriálne hry sú typy hier, kde sa aspoň jeden z hráčov rozhoduje na základe viacerých kritérií. Do teórie hier sa tak aplikuje viackriteriálna optimalizácia. Dizertačná práca bude zameraná na kooperatívne aj nekooperatívne riešenie týchto hier. Okrem teoretického rámca bude výsledkom analýza a prezentovanie vybranej ekonomickej aplikácie.

Školiteľ: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.
Katedra: KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci katedry: prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Dátum zadania: 16.03.2017
Dátum schválenia: 20.03.2017

Dr.h.c.prof. Ing. Michal Fendek, PhD.
predseda odborovej komisie

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracovala samostatne a že som uviedla všetku použitú literatúru.

Dátum:

.....

(podpis študenta)

POĎAKOVANIE

Moje srdečné poďakovanie patrí predovšetkým kolegom z Katedry operačného výskumu a ekonometrie za ich niekoľkoročnú podporu, trpezlivosť a odbornú pomoc. Veľká vďaka patrí aj mojej vedúcej práce doc. Ing. Zuzane Čičkovej, PhD., za jej odborné vedenie a cenné rady počas celého môjho štúdia a písania záverečnej práce.

Dana Figurová

ABSTRAKT

FIGUROVÁ, Dana: *Kooperatívne hry v okružných úlohách*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.– Bratislava: FHI EU, 2020, 109 s.

Predložená práca je zameraná na okružné úlohy a ich kooperatívne rozšírenie z pohľadu teórie hier. Cieľom záverečnej práce je navrhnúť nové modely kooperatívneho rozvozu, ktoré vychádzajú zo známych okružných úloh. Formulácia daných problémov formou matematických modelov umožňuje použitie exaktných optimalizačných techník. Navrhované modely možno aplikačne využiť v oblasti logistiky, v prípade kooperácie logistických spoločností. Výhody spolupráce sú vo forme usparených prepravných nákladov, pričom tieto benefity treba následne rozdeliť medzi hráčov. Práca je rozdelená do 5 kapitol, obsahuje 63 tabuliek a 4 obrázky. V prvej kapitole sú prezentované základné myšlienky a súčasný stav danej problematiky. Druhá kapitola je venovaná vymedzeniu cieľov záverečnej práce. Spôsoby alokácie úspor (výhier) na základe teórie vyjednávania uvádzame v kapitole metodika a metodológia práce. V záverečnej časti sú prezentované riešenia rôznych kooperatívnych úloh rozvozu. Úlohy sú zamerané na zostavovanie optimálnych trás vozidiel a následnú redistribúciu ušetrených nákladov medzi hráčov (resp. majiteľov skladov) s využitím adekvátneho softvéru (GAMS).

Kľúčové slová:

kooperatívna úloha rozvozu, teória hier, alokácia úspor, GAMS

ABSTRACT

FIGUROVÁ, Dana: Cooperative games in vehicle routing problems. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Business Informatics; Department of Operations research and Econometrics. – Thesis Supervisor: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2020, 109 s.

The presented thesis is focused on vehicle routing problems and their cooperative extension from the point of view of game theory. The aim of the final thesis is to propose the new models of the cooperative vehicle routing problem which is one of the extensions of the well known vehicle routing problem. The formulation of given problems in the form of mathematical models allows to use the exact optimization techniques. The proposed models can be applied in the field of logistics, in case of cooperation of logistics companies. The advantage of such cooperation is in the form of cost savings and these benefits must then be distributed among the players. The final thesis is divided into 5 chapters. It contains 63 tables and 4 pictures. The first chapter presents the basic ideas and the current state of the issue. The second chapter defines the objectives of the final work. Methods of allocation of the cost savings based on negotiation theory are presented in the chapter methodology and methodology of work. The final part presents the results of various mathematical models of cooperative vehicle routing problem. Problems are focused on creating the optimal routes of vehicles in coalitions with using the adequate software (GAMS). The benefits as a result from cooperation are redistributed among players (owners of production centers).

Key words:

cooperative game theory, game theory, cost savings allocation, GAMS

Obsah

Úvod	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma aj v zahraničí	12
1.1 Okružný problém rozvozu	12
1.2 Okružná úloha s viacerými strediskami	16
1.3 Teória hier ako nástroj riešenia kooperatívnych dopravných úloh ..	19
2 Cieľ práce	23
3 Metodika práce a metódy skúmania	25
3.1 Teória kooperatívnych hier	27
3.2 Kooperatívna úloha rozvozu	30
3.2.1 Matematická formulácia úlohy rozvozu s viacerými strediskami	34
3.3 Redistribúcia výhier v kooperatívnej hre	38
3.3.1 Alokácia výhier kooperatívnej hry na základe teórie vyjednávania	39
3.3.2 Utilitárne riešenie prerozdelenia výhry	40
3.3.3 Rovnostárske riešenie redistribúcie výhry	41
3.3.4 Nashovo riešenie redistribúcie výhry	42
3.4 Softvérové zabezpečenia riešenia úloh pomocou GAMS.....	43
4 Výsledky práce	46
4.1 Kooperatívna okružná úloha a jej modifikácie	46
4.1.1 Vstupné údaje.....	46
4.1.2 Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom	47
4.1.3 Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom	68
4.2 Aplikácia modelu kooperatívnej úlohy rozvozu na firmu Karlovarské minerální vody, a. s.	79
4.2.1 Predstavenie spoločnosti Karlovarské minerální vody, a. s.	79
4.2.2 Aplikácia modelu kooperatívnej úlohy rozvozu s homogénnym dopravným parkom	80
5 Diskusia.....	90
5.1 Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov	90
5.2 Prínosy pre teóriu a prax.....	93
Záver	96
Zoznam použitej literatúry	- 99 -
Zoznam príloh	- 109 -

Úvod

Riešením okružných úloh sa v súčasnosti zaoberajú tisíce spoločností a organizácií, ktoré sa špecializujú na dodávku alebo zber tovarov, prípadne ľudí. Asi najznámejším okružným problémom je problém obchodného cestujúceho, ktorý možno slovne charakterizovať takto: je daná množina miest a sú známe vzdialenosti medzi každou dvojicou miest. Cieľom je nájsť najkratšiu okružnú trasu, ktorá prechádza každým mestom práve raz. Do tohto základného problému sa často pridávajú rôzne nové ohraničenia a podmienky, s cieľom čo najviac sa prispôbiť praktickým aplikáciám a reálnemu životu. Napriek svojej pomerne jednoduchej slovnej formulácii ide o jeden z najslávnejších problémov diskkrétnej matematiky. Je fascinujúci tým, že napriek mnohoročnej snahe odborníkov z oblasti matematiky, operačného výskumu či umelej inteligencie, čas najlepších známych algoritmov na riešenie zodpovedajúcich úloh rastie exponenciálne s ich veľkosťou, čo znamená, že zvyčajne nemožno dosiahnuť optimálne riešenie napr. pre tisícky miest ani za miliardu rokov ani použitím masívnych počítačových sietí. Aj keď v súčasnej dobe ešte nie je známy algoritmus, ktorý by umožnil riešenie ľubovoľne veľkej okružnej úlohy v reálnom čase, neznamená to však, že sa ojedinele úloha väčších rozmerov vyriešiť nedá. Uvedené tvrdenie je podporené množstvom vyvíjaných algoritmov, vytvorených počítačových programov a vedeckých článkov publikovaných na danú tému. A ak už nie je možné nájsť optimálne riešenie konkrétnej úlohy, stále sa možno uspokojiť s technikami, ktoré poskytnú dobré riešenie „takmer vždy“ a použiť niektorý z výkonných heuristických algoritmov, a tak uprednostniť „prijateľné“ a rýchle heuristické riešenie pred pomalým algoritmom zaručujúcim dosiahnutie optimálneho riešenia.

Záujem o okružné problémy vyplýva nielen z teoretického hľadiska, ale aj z množstva ich praktických aplikácií, na základe ktorých možno modelovať aj zdanlivo nesúvisiace problémy z mnohých oblastí (kryštalografia, automatizácia, informatika atď.). Najfrekvencovanejšie sú však samozrejme priame logistické aplikácie. Okružný problém možno totiž rozšíriť množstvom dodatočných podmienok, a tak modelovať rôzne problémy reálneho sveta. Cieľom dizertačnej práce je rozšírenie základnej úlohy rozvozu s viacerými strediskami o kooperatívne správanie sa hráčov (logistických spoločností) na základe teórie hier. V terminológii teórie hier je koalícia skupina hráčov, ktorí spolupracujú pri voľbe stratégií (pri obsluhovaní zákazníkov) na základe vopred

uzatvorenej záväznej dohody, čím dokážu ušetriť značné množstvo prepravných nákladov. Jedným z cieľov tejto záverečnej práce je následná redistribúcia ušetrených prepravných nákladov medzi vlastníkov logistických centier na základe teórie vyjednávania. Budeme prezentovať viacero spôsobov prerozdelenia výhry vo forme usparených nákladov.

Hlavným cieľom dizertačnej práce je prezentácia originálnych modelov na riešenie úloh kooperatívneho rozvozu. Jedným z čiastkových cieľov práce je formulovanie týchto matematických modelov v jazyku systému GAMS. GAMS je považovaný za jedno z najvýkonnejších softvérových prostredí umožňujúcich zápis a riešenie úloh matematického programovania.

V prvej kapitole záverečnej práce poskytneme základný prehľad publikovaných poznatkov o riešenej problematike s dôrazom na okružný problém a jeho rozšírenie o viaceré strediská (sklady). V tejto kapitole tiež uvedieme niektoré poznatky z oblasti teórie hier, ktoré sú potrebné k riešeniu kooperatívnych okružných úloh. V ďalšej kapitole vymedzujeme hlavný cieľ záverečnej práce. Cieľom predloženej dizertačnej práce je prezentácia a následná implementácia nových matematických modelov na riešenie úloh kooperatívneho rozvozu. Tretia kapitola obsahuje metodické podklady používané v štvrtej kapitole práce. Metodika práce sa týka predovšetkým vymedzenia matematických modelov typických pre úlohy kooperatívneho rozvozu. Ďalej obsahuje formulácie úloh matematického programovania, ktoré umožňujú riešiť redistribúciu usparených nákladov, ktoré vzniknú hráčom po vzájomnej spolupráci.

Podstatnou kapitolou je štvrtá kapitola tejto práce. Je členená na dve základné časti. Keďže predpokladom úspešného exaktného riešenia okružných úloh je ich jednoznačná matematická formulácia, v prvej časti uvedieme formuláciu modelov rôznych problémov kooperatívneho rozvozu spolu s ich zápisom v jazyku systému GAMS (problém kooperatívneho rozvozu s homogénnym dopravným parkom s predpokladom znovunaplnenia v inom ako východiskovom stredisku, problém kooperatívneho rozvozu s homogénnym dopravným parkom a návratom do svojho východiskového strediska, problém kooperatívneho rozvozu s heterogénnym dopravným parkom s predpokladom znovunaplnenia v inom ako východiskovom stredisku a problém kooperatívneho rozvozu s heterogénnym dopravným parkom s návratom do svojho východiskového strediska). Predstavené modely budeme aplikovať najskôr na úlohu

menšieho rozmeru, kde verifikujeme fungovanie kooperatívneho správania hráčov, z ktorého im následne vyplývajú určité výhody vo forme uspokojených prepravných nákladov. Druhá časť štvrtej kapitoly je venovaná prípadu z reálneho života, a to konkrétne na údajoch, ktoré poskytla firma Karlovarské minerální vody, a. s., ktorá je najväčším výrobcom a distribútorom nealkoholických nápojov v strednej Európe. Hlavnou úlohou je porovnanie situácie, keď hráči (výrobné strediská tejto spoločnosti) navzájom kooperujú a obsluhujú tak zákazníkov aj iného hráča v koalícii, a tak dochádza k značnej úspore prepravných nákladov oproti situácii, keď rozvoz uskutočňujú samostatne (nekooperatívne správanie).

Poslednou kapitolou predloženej práce je piata kapitola. V tejto časti analyzujeme doteraz publikované výsledky a tiež prezentujeme vlastné názory na skúmanú problematiku. Cieľom je podriaadiť prezentované výsledky a názory konštruktívnej kritike, kde sa snažíme navrhnúť smery ďalšieho možného vylepšenia prezentovaných postupov. Aj keď viaceré otázky ostávajú otvorené, snád' aj poznatky uvedené v tejto práci budú prínosom v oblasti formulácie a riešenia okružných úloh.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma aj v zahraničí

Predložená dizertačná práca sa zaoberá kooperatívnym správaním sa subjektov v prípade riešenia okružných úloh. Navrhované modely vychádzajú z modelu problému rozvozu s viacerými strediskami s prepojením na teóriu hier.

1.1 Okružný problém rozvozu

Pod názvom *okružný problém*¹ (ďalej len VRP²) sa najčastejšie stretávame s rôznymi zovšeobecneniami úlohy obchodného cestujúceho (ďalej len TSP³). TSP spolu s jeho modifikáciami slúži ako základný model pre odvodenie všetkých ostatných úloh zaoberajúcich sa optimalizovaním okružných dopravných ciest (Gutin a Punnen, 2007). Pravdepodobne prvá publikácia, v ktorej sa názov TSP objavil, bola v roku 1949 prezentovaná v článku autorky J. B. Robinson „*On the Hamiltonian game: A Traveling Salesman Problem*“. Systematické skúmanie TSP ako kombinatorického optimalizačného problému však odštartovala až práca matematikov Danzinga, Fulkersona a Johnsona z roku 1954. Pojem „*okružné problémy*“ je tak často spájaný s tzv. „prejazdom“ cez dané miesta, resp. s jeho „návštevou“ rôznych úsekov. Okružné problémy zaradujeme medzi známe úlohy operačného výskumu, pričom ich podstatou je nájsť optimálnu, to znamená najkratšiu, najrýchlejšiu alebo v inom zmysle najmenej nákladnú okružnú cestu, ktorá spočíva v prepojení určitého počtu miest. Dantzig a Ramser (1959) ako prví predstavili „*okružný problém rozvozu*“, pričom ich hlavným cieľom bolo optimalizovanie počtu vozidiel v prípade dodávky benzínu do čerpacích staníc s minimálnymi prepravnými nákladmi. Clarke a Wright (1964) zovšeobecnil formuláciu úlohy ako úlohy celočíselného lineárneho programovania a aplikovali ju v oblasti logistiky, to znamená, uspokojenie požiadaviek zákazníkov, ktorí sú geograficky rozmiestení okolo centrálneho skladu, pričom vozidlá logistických spoločností majú obmedzenú kapacitu. S týmto problémom sa denne stretáva tisíce spoločností, ktoré sa zaoberajú dodávkou a zberom tovaru, prípadne osôb (Crevier a kol., 2007). Najčastejšie uvažujeme o odberateľoch tak, že začiatkové aj konečné miesto, resp. sídlo dodávateľa, je totožné a každé miesto spotreby je v okružnej ceste zahrnuté práve

¹ Pod pojmom *problém* budeme rozumieť všeobecnú formuláciu obsahujúcu parametre, pričom ak máme konkrétne zadanie parametrov problému, budeme používať pojem *úloha*.

² *Vehicle Routing Problem*

³ *Travelling Salesman Problem*

raz. Okružné problémy teda možno rôzne kategorizovať v závislosti od cieľov a obmedzení, ktoré sa vyskytujú v mnohých logistických a distribučných systémoch. Existuje teda mnoho kritérií, ktoré vymedzujú konečnú podobu konkrétnej okružnej úlohy ako napr. (Čičková, 2008):

- ❖ čas uspokojenia zákazníkov (buď nie je určený, alebo je daný časovými oknami, alebo je pevne určený),
- ❖ počet skladov (jedno alebo viacej),
- ❖ typ dopravného parku (homogénny alebo heterogénny),
- ❖ povaha požiadaviek (stochastické alebo deterministické), prípadne
- ❖ typ uskutočnenej operácie u zákazníka (náklad, výklad tovaru alebo oboje).

Formuláciou najjednoduchší okružný problém je problém obchodného cestujúceho (TSP). Hlavným cieľom je nájsť najkratšiu cestu, tzv. najkratší *Hamiltonov cyklus*, v ktorom sú všetky miesta navštívené práve raz a celková prejdená vzdialenosť je minimálna. Ide teda o hľadanie optimálnej trasy vozidla, ktoré musí z východiskového bodu navštíviť danú množinu miest a vrátiť sa naspäť s tým, aby celkové náklady na cestu boli minimálne. Vo všeobecnosti sú základnými prvkami okružných úloh dopravné siete, odberatelia, resp. zákazníci, sklady a vozidlá, pričom najčastejšie uvažujeme o zákazníkoch tak, že začiatkové aj konečné sídlo dodávateľa je totožné a každé miesto obsluhy je zahrnuté práve raz. Predpokladá sa, že kapacita vozidla je dostatočne veľká na to, aby boli splnené požiadavky zákazníkov. Vo všeobecnosti však existuje vyšší počet vozidiel, pričom v prípade objemnejších komodít je nevyhnutné brať ohľad na kapacity vozidiel vzhľadom na požiadavky zákazníkov. Obsluha zákazníkov pritom nemusí byť realizovaná nielen z jedného, ale aj z viacerých centier. Okružné problémy tak vo všeobecnosti ponúkajú možnosť zohľadnenia viacerých obmedzení, pričom každé z obmedzení zvyčajne komplikuje možnosti riešenia zodpovedajúcej úlohy, ale súčasne približuje uvažované matematické modely požiadavkám praxe, a tým zvyšuje ich využiteľnosť. Jednou z najvýznamnejších publikácií, ktoré obsahujú prehľad základných variantov rozvozočných úloh vrátane metód ich riešenia, je zborník Totha a Viga (2002).

V oblasti logistiky bolo skúmaných mnoho modifikácií okružných dopravných úloh (od najjednoduchšej verzie obchodného cestujúceho až po komplexné dynamické úlohy), pričom základné z nich spomenieme. Laporte (2009), Marinakis a Migdales (2007), Potvin (2009) publikovali viaceré výskumy ohľadom rozšírení klasického VRP,

napr. kapacitná okružná úloha (Kir, Yazgan, Tuncel 2017), úloha kuriéra (Čičková, a kol., 2013; Battarra a kol. (2014), okružná úloha s časovými oknami (Braysy a Gendreau, 2005), prípadne okružná úloha s viacerými strediskami (Crevier a kol., 2007). Tavakkoli-Moghaddan a kol. (2006) predstavili okružnú úlohu ako úlohu lineárneho programovania a jej riešenie v prípade nájdenia optimálnej trasy vozidla s kapacitným ohraňčením s cieľom minimalizácie prepravných nákladov. Spomínaní autori predstavili aj viackriteriálne rozšírenie okružnej úlohy s časovými oknami (Ghanndpour a kol. 2014). Napríklad okružná úloha s rozdelenou dodávkou (SDVRP⁴) je modifikáciou dopravného problému, v ktorom je rovnaký zákazník obsluhovaný rôznymi vozidlami v tom prípade, ak to vedie k znižovaniu celkových nákladov. Takáto úloha vedie k úspore celkovej prejdenej vzdialenosti, ako aj počet požadovaných vozidiel tým, že umožňuje rozdelenie dodávok (Jin a kol., 2008). Hasani-Goodarzi a Tavakkoli-Moghaddam (2012) skúmali SDVRP s kapacitným ohraňčením v prípade viackriteriálneho rozhodovania s cieľom určenia optimálnej trasy a počtu vozidiel. V reálnych aplikáciách teda uvažujeme skôr s viacerými typmi optimalizačných kritérií, ako napr. maximalizácia zisku, minimalizácia nákladov, minimalizácia počtu vozidiel, maximalizácia uspokojenia požiadaviek zákazníkov a pod (Labadie a Prodhon, 2014).

Bolo dokázané, že okružný problém je kategorizovaný ako NP-ťažký problém (Bodin a Golden, 1981), čo znamená, že výpočtová zložitost' rastie s veľkosťou vstupov. Pojmy ako výpočtová zložitost' vysvetľuje *teória výpočtovej zložitosti*, ktorá je v súčasnosti pomerne rozvinutou vednou disciplínou. Kým vlastnosti niektorých typov úloh umožňujú ich optimálne riešenie aj pre veľké rozmery (príkladom sú úlohy lineárneho programovania so spojitými premennými), riešenie niektorých úloh (napr. väčšina kombinatorických úloh) je už jednoznačne oveľa zložitejšie a identifikácia optimálneho riešenia pre úlohy veľkých rozmerov nie je možná ani využitím súčasnej najvýkonnejšej výpočtovej techniky. Keďže z podstaty týchto problémov vyplýva nemožnosť ich vyriešenia exaktnými metódami pre úlohy veľkých rozmerov, je zvyčajne potrebné na ich výpočet použiť heuristické metódy, pomocou ktorých je nájdené nejaké prijateľné, t. j. suboptimálne riešenie. Z predchádzajúceho textu vyplýva, že riešenie takýchto typov úloh je v súčasnosti možné predovšetkým využívaním rozsiahlych počítačových sietí. Mnoho odborníkov, najmä z oblasti operačného výskumu,

⁴ Split Delivery Vehicle Routing Problem

matematiky, prípadne umeleckej inteligencie, venujú svoju pozornosť práve nájdeniu riešenia okružných úloh a ich modifikácií. Existuje mnoho publikácií, ktoré využívajú tieto poznatky pri aplikovaní a testovaní rôznych algoritmov na riešenie rôznorodých typov VRP (Yousefikhoshbakht a kol., 2013).

Ako už bolo uvedené, existuje trieda problémov, kde na riešenie zodpovedajúcich úloh nie je známy algoritmus pracujúci v polynomiálnom čase, avšak existuje nedeterministický algoritmus, ktorý pri správnom výbere umožní ich riešenie v tomto čase (nedeterministický algoritmus sa líši od deterministického tým, že v niektorých krokoch výpočtu sa možno ľubovoľne rozhodnúť pre niektorý z niekoľkých postupov). Triedu úloh, ktoré možno riešiť nedeterministickým polynomiálnym algoritmom, označujeme ako triedu NP^5 . Rôzne optimalizačné úlohy, či už z triedy P, alebo NP boli dlho riešené pomocou dnes už „klasického“ matematického aparátu, ktorý je založený na matematickej analýze alebo na rôznych numerických metódach. Metódy na riešenie okružných úloh možno členiť podľa toho, či metóda poskytuje optimálne, alebo suboptimálne riešenie danej úlohy na tri základné skupiny (Janáček, 2003; Unčovský, 1991):

1. *exaktné, resp. kombinatorické* – výsledkom je optimálne riešenie, z dôvodu výpočtovej zložitosti okružných úloh sú však zvyčajne použiteľné len pre niektoré jednoduchšie modifikácie. Ako príklad tohto druhu metód možno uviesť *úplnú enumeráciu, neúplnú enumeráciu* (Ruiz a kol. 2004), *metódu vetiev a hraníc* (Valle a kol., 2011), *metódu vetiev a rezov* (Mitchell, 2011) či *dynamické programovanie*,
2. *heuristické* – nezaručujú získanie optimálneho (niekedy ani prípustného riešenia), ale poskytujú často dobré riešenie v prípadoch, keď výpočet exaktného riešenia nie je možný. Môžu byť tiež využívané na nájdenie východiskového riešenia, na ktoré potom aplikujeme exaktné algoritmy s cieľom nájsť optimálne riešenie.
3. *kombinované* – pôvodná úloha je zvyčajne dekomponovaná na rôzne podúlohy, z ktorých niektoré sú riešené exaktnými metódami a niektoré použitím heuristík. Veľmi často nachádzajú kvalitné riešenia takých úloh, kde klasické metódy zlyhávajú. Pomerne silnú podmnožinu týchto algoritmov tvoria tzv. *evolučné algoritmy*.

⁵ Nondeterministic Polynomial

S posledne uvedenými metódami možno uviesť ďalšiu klasifikáciu metód riešenia optimalizačných úloh, a to: *klasické heuristiky* a *moderné heuristiky*, resp. *metaheuristiky*. *Metaheuristiky* sa objavujú len v posledných desaťročiach. Začali sa vyvíjať na poli umelej inteligencie. Dôvodom, prečo venujeme popri existujúcich analytických prístupoch a numerických metódach pozornosť aj metódam umelej inteligencie, je to, že ich možno použiť aj na riešenie takých úloh, keď klasické optimalizačné techniky zlyhávajú alebo nie sú známe a existujúce algoritmy nemajú dobré matematické vlastnosti (sú nestabilné numericky alebo vzhľadom na vstupné údaje). Ukázalo sa, že v mnohých prípadoch sú riešenia prostredníctvom metaheuristík lepšie v porovnaní s heuristikami, pričom časová náročnosť výpočtu je zvyčajne akceptovateľná. Metódy použitia metaheuristík týkajúcich sa dopravných úloh prehľadne sumarizuje napr. (Sze a Tiong, 2007). Zvyšujúci sa záujem o metaheuristiky dokumentuje množstvo svetových publikácií, napr. sweep algoritmus prezentovaný v (Wang a Lu, 2009), mravčí algoritmus aplikovaný v (Russell a Urban, 2008; Brezina a Čičková, 2011), samoorganizujúci sa migračný algoritmus (Čičková a kol. 2013), prípadne hybridný mravčí algoritmus v (Zhang a Tang, 2008).

Za skupinu evolučných techník spomenieme napr. genetické algoritmy na riešenie problému rozvozu, ktoré boli diskutované v Choi a Tcha, 2007; Baker a Ayechev, 2003, tabu search algoritmy (Leung a kol., 2011), využitie neurónovej siete prezentujú napr. (Zhang a Tang, 2007) a pod. Evolučné algoritmy svojím princípom patria medzi algoritmy prehľadávacie, t. j. pracujú na princípe postupného prehľadávania množiny prípustných riešení s cieľom identifikovať extrém optimalizovanej funkcie, pričom používajú deterministické aj stochastické princípy. Okrem deterministického princípu, ktorý zvyčajne vychádza zo zachovania kvalitnej časti riešenia, využívajú aj zložku stochastickú, čo sa zvyčajne prejaví náhodnou modifikáciou určitej časti riešenia.

1.2 Okružná úloha s viacerými strediskami

Okružné úlohy možno využiť v rôznych aplikačných oblastiach. Prirodzenou modifikáciou úlohy rozvozu (Fábry, 2006) je prijatie predpokladu o existencii viacerých stredísk v dopravnom systéme, čo reprezentuje *úloha rozvozu s viacerými strediskami* (ďalej len MDVRP⁶), v rámci ktorej je zákazník obsluhovaný vozidlami z rôznych

⁶ Multi-Depot Vehicle Routing Problem

stredísk (vrcholov) dopravnej siete (Irnich, 2000). Okružnú úlohu s viacerými strediskami chápeme tak, že každé vozidlo vychádza z množiny viacerých stredísk, pričom jeho trasa musí končiť v tom istom stredisku (Chavez a kol., 2016). Požiadavka každého zo zákazníkov môže byť pritom uspokojená viac ako jedným dopravným prostriedkom, pričom častý je aj prípad, keď požiadavka zákazníka presahuje kapacitu vozidla (hromadné prepravy). Inou modifikáciou je prípad, keď je výhodnejšie (lacnejšie) navštíviť jedného zákazníka viac ako raz. V teórii sa často predpokladá homogenita dopravného parku (okružné úlohy s homogénnym dopravným parkom), v praxi je však bežný skôr prípad odlišných vozidiel s rôznou kapacitou, iným vekom a ďalšími inými ohraničeniami (*okružné úlohy s heterogénnym dopravným parkom*), kde účelom nie je len minimalizácia celkovej prejdenej vzdialenosti, ale aj minimalizácia celkových prepravných nákladov vozidiel (Burchett a Champion, 2002). Každý sklad má pridelený určitý počet vozidiel, pričom cieľom je obslúžiť množinu zákazníkov s minimálnymi nákladmi tak, aby sa každé vozidlo po obsluhu vrátilo späť do svojho východiskového skladu. Riešenie úlohy s viacerými strediskami je využiteľné napríklad v rôznych systémoch distribúcie tovaru, v ktorých si zákazník priamo vytvorí objednávku a tá mu je zaslaná z niektorého z distribučných skladov, ktorý disponuje požadovaným množstvom tovarom. Existujú aj rôzne modifikácie tohto problému, ako napr. okružná úloha s viacnásobným využitím vozidiel (MVRP⁷), kde je možné priradiť jednému vozidlu viacero trás obsluhy. Ak po skončení obsluhy zákazníkov nie je požadovaný návrat vozidla do východiskového skladu, ide o otvorenú úlohu rozvozu, ktorej pozornosť venovali Wang a kol. (2006) a vo svojej publikácii prezentovali rôzne heuristické metódy jej riešenia.

MDVRP bol prvýkrát diskutovaný v (Tillman, 1969), pričom možnosti jeho riešenia sú prezentované v (Wahyungsih a kol., 2015). Laporte (1988) skúmal asymetrickú verziu MDVRP v prípade obmedzení v podobe kapacitného ohraničenia a maximálnej hranice dosiahnutých nákladov. Taktiež Crevier a kol. (2007) predstavili rozšírenie MDVRP aj s nájdením jeho optimálneho riešenia, v rámci ktorého sa vozidlá môžu znovunapájať v tzv. „medziskladoch“ pozdĺž ich trasy a ušetriť tak prepravné náklady. Matematickým modelom MDVRP sa ďalej venovalo viacero výskumníkov, napr. Tavakkoli-Moghaddan a kol. (2010) navrhli nový integrovaný matematický model

⁷ Multiple Vehicle Routing Problem

viackriteriálnej úlohy MDVRP, Adelzadeh a kol. (2014) prezentoval heuristickú metódu riešenia takejto úlohy s heterogénnym parkom a Guezouli a Abdelhamid (2017) uvažovali kapacitné a časové ohraňenie úlohy pričom zvažili existenciu rôznych typov vozidiel (s odlišnou kapacitou a nákladmi) a viacerých skladov. MDVRP s časovými oknami bol študovaný Li a kol. (2016), pričom analýzu rôznych algoritmov riešenia takýchto typov úloh prezentovali vo svojom príspevku Giosa a kol. (2002). Liu a kol. (2010) navrhli model matematického programovania kapacitnej MDVRP, v ktorom sa zamerali na minimalizáciu pohybu prázdnych vozidiel na trase. Shankar a kol. (2014) uvažovali s viacerými parametrami a ohraňeniami úlohy MDVRP, ako sú napr. požiadavky zákazníkov, prípadne čas obsluhy, čas čakania, kapacita vozidla, typ vozidla, existencia viacerých stredísk, obedné prestávky vodičov, dopravné obmedzenia na cestách a pod. Chavez a kol. (2016) diskutovali a analyzovali úlohu MDVRP s rozvozom a zvozom, pričom do tejto kategórie zaraďujeme množstvo problémov, ktoré spája skutočnosť, že zadané požiadavky sú definované miestom vyzdvihnutia (pickup) a miestom doručenia zásielky (delivery), prípadne miestom vyloženia osôb (Battara a kol., 2014). Periodický MDPVR s termínom dodania a časovými oknami a jej uplatnenie v distribučnej spoločnosti ako úlohu zmiešaného celočíselného programovania uviedli vo svojej publikácii Cantu-Funes a kol. (2018). Aras a kol. (2011) navrhli matematické formulácie selektívneho MDVRP, pričom Karakatič a Podgorelec (2014) hľadali najmenej nákladnú trasu v rozšírenej úlohe rozvozu pridaním ďalších externých skladov pozdĺž trasy.

Z dôvodu výpočtovej zložitosti nájdenia optimálneho riešenia aj v tomto prípade mnoho autorov uprednostňuje heuristické a metaheuristické metódy pred tými exaktnými, ktoré sa využívajú skôr na riešenie úloh malých rozmerov (napr. v Contardo a Martinelli, 2014; Baldacci a Mingozzi, 2009).

Viackriteriálnu úlohu MDVRP formulovali aj Lahyani a kol. (2018), kde na jednej strane optimalizovali fixné náklady vozidla a na druhej strane variabilné náklady trasy, pričom na riešenie úloh menších rozmerov uviedli algoritmus metódy vetiev a rezov. Napr. Prescott-Gagnon a kol. (2014) vyvinuli rôzne heuristiky pre MDVRP v ropnom priemysle. Mirabi a kol. (2010) a Ho a kol. (2008) prezentovali hybridnú heuristiku na vyriešenie MDVRP s cieľom minimalizovať celkový čas obsluhy vozidla. Carlsson a kol. (2009) predstavili heuristické metódy riešenia min-max MDVRP. Dondo a Cerdá (2007) sa venovali optimalizácií MDVRP s časovými oknami a heterogénnym

parkom na základe analýzy zhlukovania, čím prepojili heuristický algoritmus s optimalizáciou. Jeden z metaheuristických algoritmov je tabu-search algoritmus diskutovaný v Cordeau a Laporte (2001). Počiatočné riešenie sa získava priradením zákazníka k najbližšiemu skladu, pričom optimálne riešenie je generované pre každý jeden sklad na základe zametacieho algoritmu. Tento algoritmus ďalej použili Alonso a kol. (2008) na riešenie periodickej úlohy rozvozu s viacnásobným trasovaním vozidiel. Nagalakshmi a Gangadharan (2017) navrhli optimalizáciu cieľa minimalizovania nákladov dynamického MDVRP na základe mravčieho algoritmu. Algoritmus rojenia častíc bol v prípade MDVRP prezentovaný v (Ezugwu a kol., 2018). Kombinácií náhodných procesov a metaheuristík sa venovali Juan a kol. (2012). Montoya a kol. (2015) predstavil úplný prehľad vedeckej literatúry týkajúcej sa MDVRP, kde komplexne analyzovali jednokriteriálnu a viackriteriálnu MDVRP a algoritmy ich riešenia.

1.3 Teória hier ako nástroj riešenia kooperatívnych dopravných úloh

Predložená záverečná práca je zameraná na alokáciu usporených nákladov, ktoré vznikli zo vzájomnej spolupráce medzi logistickými spoločnosťami. Jednou z možností riešenia takejto úlohy je prepojenie dopravných úloh s teóriou hier (Vidovič a kol. 2011). Teória hier je vedný odbor, ktorý sa zaoberá riešením prevažne konfliktných rozhodovacích situácií zahŕňajúcich viac než jeden subjekt (jednotlivci, firmy, štáty, politické strany a pod.), pričom predpoklady a pravidlá konfliktu (hry) sú presne definované. Myerson (1991) definoval podstatu teórie hier ako štúdium konfliktov a vzájomnej spolupráce v podobe matematických modelov medzi inteligentnými racionálnymi rozhodujúcimi sa subjektmi. Jednotlivé subjekty nazývame tiež hráčmi. Konfliktná situácia (konflikt) je taká rozhodovacia situácia, ktorá vyhovuje týmto podmienkam (Peško, 2004):

- počet účastníkov konfliktu je konečný,
- každý účastník konfliktu pozná množinu všetkých svojich rozhodnutí (stratégií) a množiny rozhodnutí svojich súperov a
- každý účastník konfliktu vie oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Teória hier poskytuje všeobecné matematické metódy na analýzu situácií, v ktorých dvaja alebo viacerí jednotlivci robia rozhodnutia, ktorými sa vzájomne ovplyvňujú (Myerson, 1991). Rozoznávame tieto druhy konfliktných situácií (Peško, 2004):

- *Antagonistický konflikt.* Ak sa konfliktu zúčastňujú 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, pričom výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka (spoločenské hry, vojenský konflikt).
- *Neantagonistický konflikt.* Konfliktu sa zúčastňujú najmenej 2 účastníci, pričom ich záujmy nie sú v priamom protiklade. Výhra jedného účastníka nie je prehrou iného účastníka hry. Ak účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o kooperatívnej teórii. Ak dochádza aj k prerozdeleniu výhier účastníkov hovoríme o *kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou*. Ak však výhry nie je možné znovu prerozdeliť, hovoríme o *kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou*.

Historicky prvý pokus o odvodenie správania sa hráčov v strategickej situácii pravdepodobne uviedol francúzsky filozof, ekonóm a matematik A. Cournot (1838). Vo svojom diele „*Výskumy o matematických princípoch teórie bohatstva*“ sa zaoberá podrobnou analýzou monopolu, skúma vplyv rôznych foriem daní a poplatkov na príjem výrobcov a zákazníkov. Cournot zostavil prvý matematický model oligopolu, ktorý z pohľadu teórie hier predstavuje nekooperatívnu hru s nekonečným počtom stratégií. To znamená, že niektoré základné myšlienky teórie hier sa aplikovali už od 18. storočia, avšak teórii hier ako samostatnej vednej oblasti sa začala venovať pozornosť až od prvej polovice 20. storočia a to na základe rozvoja matematickej teórie a ekonómie (Borel 1921; Dimand, M. a Dimand R., 1996). Za jedného z významných zakladateľov teórie hier možno považovať Johna von Neumanna, ktorý počas svojho pôsobenia publikoval mnoho prác v súvislosti s teóriou hier a ekonomickým správaním. Von Neumann a Morgenster (1944) položili axiomatické základy teórie hier v prípade kooperatívneho správania sa subjektov. V tejto práci tiež sumarizujú a dopĺňajú doposiaľ získané poznatky a upozorňujú na príbuznosť analýz strategických hier s analýzami konfliktných situácií v ekonómii. Po vydaní tejto knihy sa matematická teória hier po prvýkrát začína chápať ako samostatná disciplína aplikovanej matematiky a začína sa rýchlo rozvíjať. Výskumníci sa už niekoľko rokov snažia prostredníctvom štúdia kvantitatívnych modelov pochopiť konfliktnú situáciu a spoluprácu medzi jednotlivými hráčmi, čo dokazuje množstvo publikovaných prác z tejto oblasti. V päťdesiatich rokoch 20. storočia

sa teoretické modely teórie hier začali používať v ekonomickej teórii a politológii. V oblasti psychológie sa metódy teórie hier používali vo výskume ľudského správania v experimentálnych hrách. V roku 1970 sa teória hier využívala ako nástroj v evolučnej biológii. Nasledujúce roky ovládli teoretické modely hier mikroekonomickú teóriu, pričom sa využívajú aj v mnohých iných oblastiach ekonomiky a iných spoločenských vedách. Cenu Švédskej ríšskej banky za ekonomické a právne vedy na pamiatku Alfreda Nobela za ekonómiu v oblasti teórie hier získali John C. Harsanyi, John F. Nash, Reinhard Selten (1994). Nash dokázal, že môžu existovať aj také výsledky, z ktorých budú profitovať všetci účastníci konfliktu. Harsanyi rozpracoval Nashovo chápanie ekvilibria s úplnými informáciami na prípady s asymetrickými informáciami. Selten spresnil, ktoré možné stratégie majú účastníci sporu zohľadniť a ktoré nie. Toto posunulo modely teórie hier smerom k praktickému využitiu. Selten je tiež spoluzakladateľom experimentálnej ekonómie. To, že teória hier je stále v centre vedeckého záujmu potvrdzujú aj ďalší laureáti, ktorí získali cenu švédskej banky z oblasti teórie hier, a to Mirrless a Vickrey (1996) za základné príspevky k ekonomickej teórii pri rôznych stupňoch informovanosti účastníkov trhu, Schelling a Aumann (2005) za zvýšené porozumenie konfliktom a spolupráce a Shapley a Roth (2012) za teóriu stabilných trhových alokácií a praktický návrh trhov. V roku 2017 dostal spomínanú cenu aj Richard Thaler za svoj príspevok k behaviorálnej ekonómii.

Modely konfliktných rozhodovacích situácií, v ktorých nie je prípustný vznik koalície, nazývame *nekooperatívnymi hrami*. V opačnom prípade hovoríme o *kooperatívnych* alebo *koaličných hrách*. Hra je *kooperatívna*, ak hráči majú možnosť vytvoriť medzi sebou určité zväzky, tzv. koalície. V takomto druhu hier sa od hráčov vyžaduje dodržanie týchto ich záväzkov. V *nekooperatívnych hrách* sa takéto záväzky nedodržiavajú. Dôležitým faktorom podmieňujúcim kooperatívne správanie je to, že jeho realizovaním účastníci zvyšujú dosahované zisky alebo aspoň pravdepodobnosť ich dosiahnutia voči nekooperatívnym stratégiám. Pozitívne účinky vytvorenia koalície založenej na záväzných dohodách skúma *teória kooperatívnych hier*. Teóriu kooperatívnych hier možno v rámci teórie hier definovať ako „*teóriu, ktorá sa zaoberá predovšetkým koalíciou hráčov, ktorý skoordínujú svoje činnosti nato, aby dosiahli ďalšie výhody*“ (Branzei a kol. 2008). John Nash považoval kooperatívnu a nekooperatívnu teóriu hier za komplementárnu cestu riešenia rovnakého problému. O ďalší významný pokrok v oblasti teórie hier sa zaslúžil práve John Nash, ktorý našiel návod na to, ako

riešiť zložitejšie hry. V týchto rokoch Nash definoval tzv. „*Nashovu rovnováhu*“, ktorú považujeme za významný míľnik v dejinách teórie hier. Nash stanovil ďalšie metodologické postupy, pričom analyzoval možnosti kooperatívnych a nekooperatívnych hier. Jednou zo základných vlastností Nashovej rovnováhy je skutočnosť, že v jednej hre môže existovať viac rovnovážnych stavov, ktoré môžu nastať s rovnakou pravdepodobnosťou. Toto kritérium je dostatočne univerzálne a umožňuje analýzu kooperatívnych aj nekooperatívnych hier. V roku 1953 publikoval L.S. Shapley svoju štúdiu, v ktorej prezentoval ďalšie výsledky k teórii hier, ako napr. analýzy modelov volieb, stochastických hier a pod. V prípade viackriteriálneho rozšírenia teórie hier bol po prvýkrát predstavený koncept D. Blackwella (1956). Rozdiel medzi viackriteriálnou a klasickou hrou v normálnom tvare je, že v klasickej hre má každý hráč iba jedno kritérium (jednu funkciu platieb) k ohodnoteniu zisku z hry, zatiaľ čo vo viackriteriálnej hre môže mať hráč ľubovoľný počet kritérií (funkcií platieb), ktoré sú navzájom neporovnateľné. V roku 1972 bol založený časopis s názvom „*Žurnál teórie hier*“ a postupom času sa začala teória hier uplatňovať aj v iných oblastiach ako napr. politika, informatika, doprava a pod.

V posledných 50 rokoch sa teda záujem o implementáciu teórie hier do rôznych oblastí stále zvyšuje. V ekonómii sa používa ako napríklad nástroj na analýzu a predikciu správania sa firiem na trhu, prípade sa používa ako nástroj na pochopenie správania sa zamestnancov (prípadne riaditeľov) vo firmách. Baniak a Dubina (2012) analyzuje hru medzi manažérom (riaditeľom) a zamestnancom, pričom cieľom je definovanie plánu, v ktorom sa hľadá rovnováha medzi požiadavkami jednotlivých hráčov. Wang a Wu (2008) navrhli vnútroorganizačný model založený na zdieľaní vedomostí v rámci organizácie.

2 Cieľ práce

Dizertačná práca je zameraná na prezentáciu nových matematických modelov na riešenie úloh kooperatívneho rozvozu. Vychádzame zo známeho problému okružnej úlohy s viacerými strediskami, ktorý je objektom záujmu rôznych výskumníkov predovšetkým z oblasti operačného výskumu a umelej inteligencie. Rastúci záujem o túto problematiku dokumentujú aj mnohé vedecké práce, z ktorých niekoľko sme uviedli v prvej kapitole tejto práce.

Okružné problémy možno vo všeobecnosti formulovať ako úlohy bivalentného programovania. Hlavným motívom záujmu o túto oblasť je nesporne praktická aj teoretická príťažlivosť danej problematiky. Teoretický význam je daný predovšetkým výpočtovou zložitou uvedených problémov (trieda NP-ťažkých úloh), praktický význam vychádza najmä z ekonomickej motivácie znižovania nákladov (či už prepravných, časových alebo inak definovaných).

V prvej kapitole sme sa zamerali na stručnú charakteristiku okružných úloh a na históriu vývoja rôznych metód na riešenie ich jednotlivých typov. V oblasti logistiky a plánovania trás získavajú veľký význam práve rôzne modifikácie úloh rozvozu, kde sa berú do úvahy rôzne dodatočné obmedzenia ako napr. existencia viacerých stredísk, homogénny alebo heterogénny dopravný park, ohraničenie kapacity vozidiel, príp. časové okná a podobne. Fundamentom optimalizačných techník sú nesporne matematické modely.

Hlavným cieľom práce je prezentácia nových modelov kooperatívnej úlohy rozvozu a ich implementácia v jazyku systému GAMS. Budeme sa zaoberať prípadmi homogénneho a heterogénneho dopravného parku. Základnou snahou je využitie teórie kooperatívnych hier v oblasti okružných úloh. Vzájomnou spolupracou môžu hráči (logistické spoločnosti) získavať určité výhody (ušetrené prepravné náklady), ktoré si potom medzi sebou potrebujú rozdeliť. Čiastkovým cieľom je preto prezentácia a následná implementácia rôznych metód redistribúcie kooperáciou získaných benefitov.

Aj keď prezentované nové modely kooperatívneho okružného problému spadajú pod oblasť bivalentného programovania, v navrhovaných modeloch si vystačíme s lineárnym typom obmedzení, čo čiastočne zreálnuje možnosti exaktného riešenia príslušných úloh. Potom možno použiť algoritmy na riešenie úloh celočíselného

lineárneho programovania (MIP⁸), ktoré sú súčasťou viacerých softvérových nástrojov. Teda aj napriek výpočtovej zložitosti prezentovaných úloh sa pokúsime (s pomocou vhodného softvérového a hardvérového zabezpečenia umožňujúcom paralelizáciu výpočtov) prezentovať optimálne riešenia zodpovedajúcich úloh. Softvérovým nástrojom bude profesionálny systém GAMS⁹.

Dosiahnutie základného cieľa je podmienené splnením čiastkových cieľov. Uvedieme ich takým spôsobom, aby bolo následne možné objektívne zhodnotiť splnenie prvotného cieľa. Čiastkové, resp. druhotné ciele sú:

- ⇒ v dizertačnej práci poskytujeme teoretický základ pre pochopenie problematiky kooperatívneho rozvozu, pričom sa zameriame na matematické modely a ich kooperatívne rozšírenie na základe teórie hier,
- ⇒ implementácia prezentovaných modelov kooperatívneho rozvozu na úlohe menších rozmerov,
- ⇒ optimálne riešenie úloh kooperatívneho rozvozu založenej na reálnom podklade, to znamená na skutočných údajoch získaných z logistickej spoločnosti Karlovarské minerální vody, a.s.
- ⇒ porovnanie jednotlivých výsledkov riešených úloh po zavedení rôznych predpokladov,
- ⇒ prezentácia a následná implementácia rôznych metód redistribúcie usporených nákladov, ktoré hráčom vyplývajú zo vzájomnej kooperácie.

Z uvedeného by mala byť zrejmá možná praktická využiteľnosť modelov kooperatívneho rozvozu v oblasti rozvozných služieb v logistických spoločnostiach. Použité modely formulované v jazyku systému GAMS sa vyznačujú univerzálnosťou, čím poskytujú základ pre ich využívanie v praxi.

⁸ *Mixed Integer Programming*

⁹ *General Algebraic Modeling System*

3 Metodika práce a metody skúmania

Na dosiahnutie uvedených cieľov práce je nevyhnutné použiť určité metodologické postupy týkajúce sa riešenia úloh bivalentného programovania a kooperáciu podporiť metódami teórie hier. V našej dizertačnej práci sme zvolili riešenie úloh optimalizačnou metódou použitím softvéru na optimalizačné výpočty. Keďže úlohu rozvozu zaradíme medzi NP-tiažké úlohy, je náročné dosiahnuť optimálne riešenie v reálnom čase, a preto sa v niektorých rozmernejších úlohách upúšťa od požiadavky optimálnosti. Pretože gro tejto práce sú matematické modely, ďalej uvedieme používanú terminológiu.

Pod problémom budeme chápať všeobecnú formuláciu, ktorá obsahuje určité parametre. Konkrétne zadanie týchto parametrov, t. j. zadanie vstupných dát, budeme nazývať úlohou. Pod modelom rozumieme matematický zápis opisujúci vybraný problém. Cieľom je nájsť riešenie konkrétnej úlohy. Úspešnosť riešenia závisí od presnosti prenesenia podstatných skutočností do vytvoreného modelu, určenie parametrov úlohy a tiež od stanovenia vhodného spôsobu (algoritmu) riešenia. Kým vlastnosti niektorých typov úloh umožňujú ich optimálne riešenie aj pre veľké rozmery (príkladom sú úlohy lineárneho programovania so spojitými premennými), riešenie niektorých úloh (napr. väčšina kombinatorických úloh) je už jednoznačne oveľa zložitejšie a identifikácia optimálneho riešenia pre úlohy veľkých rozmerov nie je zvyčajne možná ani využitím súčasnej najvýkonnejšej výpočtovej techniky.

V záverečnej práci ponúkame exaktné riešenie nových úloh kooperatívneho rozvozu. Riešenie optimalizačnej úlohy možno vo všeobecnosti rozdeliť na takéto etapy (Čičková, 2013):

1. Identifikácia problému a jeho vlastností, definovanie cieľa, výber faktorov a obmedzujúcich podmienok.
2. Tvorba modelu, vytvorenie funkčného modelu (analýza požiadaviek, analýza informácií, stanovenie kritéria, stanovenie variantov) a dátového modelu (získovanie údajov).
3. Konštrukcia súvisiacich úloh.
4. Hľadanie metód a výber metódy na riešenie súvisiacich úloh.
5. Nájdenie, resp. tvorba zodpovedajúceho algoritmu na riešenie súvisiacich úloh.

6. Výber programu na riešenie súvisiacich úloh a ich riešenie.
7. Verifikácia samotného modelu.
8. Simulácie realizované na úlohe (simulácie predovšetkým extrémnych prípadov).
9. Interpretácia získaných výsledkov a prijatie rozhodnutia.
10. Realizácia prijatého rozhodnutia.

Nevyhnutným predpokladom úspešného riešenia konkrétnej úlohy je jej jasná a jednoznačná formulácia a tiež ujasnenie cieľa, ktorý sledujeme jej riešením. Potom nasleduje fáza formalizácie zvyčajne za použitia matematických prostriedkov (matematickým modelom). Formalizovanie konkrétnej úlohy spravidla vyžaduje nielen adaptáciu štandardných postupov, ale aj individuálny prístup, kde treba identifikovať zodpovedajúci, resp. vytvoriť nový typ modelu. Následne analyzujeme rôzne možnosti riešenia danej úlohy z pohľadu jej výpočtovej zložitosti. Od zvoleného algoritmu závisí kvalita získaného riešenia, pričom treba zohľadniť existujúce výpočtové možnosti (softvérové, hardvérové a časové).

V štvrtej kapitole tejto záverečnej práce predstavujeme optimalizačné modely pre kooperatívnu úlohu rozvozu s homogénnym a heterogénnym parkom, pričom prezentované modely kooperatívnej úlohy rozvozu sú navrhnuté tak, aby čo najviac zobrazovali praktickú aplikáciu v reálnom živote. Prezentované matematické modely vychádzajú zo známej úlohy rozvozu z dostupnej literatúry, alebo boli prezentované v publikácii autorov Pekár, Brezina, Čičková a Reiff a v príspevkoch Čičkovej a Figurovej (Figurová a Čičková, 2017, 2018a, 2018b, 2019). V nasledujúcom texte predstavíme matematický model úloh rozvozu s viacerými strediskami, ktorý je východiskom pri vytváraní nových modelov kooperatívneho rozvozu. Kooperatívnu situáciu modelujeme na základe teórie hier.

V okružnej úlohe kooperatívneho rozvozu predpokladáme existenciu viacerých skladov, ktorých vlastníkov považujeme za hráčov. Títo hráči potom na základe záväzných dohôd navzájom spolupracujú, čo môže viesť k úspore prepravných nákladov. K spolupráci dochádza po vytvorení koalícií, či už pri vzájomnom využívaní vozidiel alebo skladov pri obsluhu zákazníkov. V tomto prípade plynú zo spolupráce určité benefity vo forme usparených prepravných nákladov (čo v našom prípade považujeme za „výhru“), ktoré chceme následne prerozdeliť medzi jednotlivých hráčov.

Jedným z cieľov tejto záverečnej práce je redistribúcia ušetrených prepravných nákladov medzi jednotlivých hráčov (vlastníkov logistických centier) na základe teórie vyjednávania. Preto v tejto kapitole prezentujeme spôsoby prerozdelenia výhry, ktoré budeme následne modifikovať a aplikovať na výsledky v empirickej časti tejto záverečnej práce.

3.1 Teória kooperatívnych hier

Pri kooperatívnych konfliktoch predpokladáme, že hráči majú možnosť uzavrieť záväznú dohodu a môžu vzájomne spolupracovať. To urobia vtedy, keď je pre nich spolupráca výhodná, teda pokiaľ majú všetci účastníci konfliktu väčšiu výhru, ako keby nespôľupracovali. Potreba kooperovať na trhu môže byť odlišná pre rôzne subjekty, avšak hlavnými cieľmi je zvyčajne rozširovanie trhov, získanie konkurenčnej výhody alebo poznatkov v podobe know-how. Teóriu kooperatívnych hier možno v rámci teórie hier definovať ako *„teóriu, ktorá sa zaoberá predovšetkým koalíciou hráčov, ktorí skoordínujú svoje činnosti tak, aby dosiahli ďalšie výhody“* (Branzei a kol., 2008). V terminológii teórie hier je koalíciou skupina hráčov, ktorí spolupracujú pri voľbe stratégií na základe vopred uzatvorenej záväznej dohody. Z formálnych dôvodov však možno pripustiť „prázdnu koalíciu“, t. j. koalíciu, ktorej členom nie je ani jeden hráč, ako aj jednočlenné koalície. Pri analýze kooperatívnych hier je vhodné prejsť od vymedzenia hry pomocou množín stratégií hráčov, funkcií platieb a množiny prípustných koalíčných štruktúr k tzv. hre v tvare charakteristickej funkcie. Ďalej sa budeme venovať tzv. charakteristickej funkcii hry.

Nech $P = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina hráčov. Charakteristickou funkciou hry $v(S)$ s množinou hráčov P nazveme funkciu v definovanú pre všetky podmnožiny $S \subseteq P$, ktorá má tieto vlastnosti:

$$v(\emptyset) = 0 \quad (3.1)$$

$$v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2) \quad (3.2)$$

pre všetky disjunktné dvojice S_1 a S_2 ($S_1, S_2 \subset P$). Dvojica (P, v) charakterizuje kooperatívnu hru n hráčov v tvare *charakteristickej funkcie*.

Charakteristická funkcia priradzuje každej koalícii $S \subseteq P$ číslo $v(S)$, ktoré vyjadruje „silu“ koalície S . Toto číslo nazývame aj hodnota koalície S . Podmienka (3.1) vyjadruje, že hráči sa nikdy nezriekajú časti svojich platieb. Z podmienky (3.2) vyplýva,

že hodnota koalície, ktorá vznikne zjednotením dvoch disjunktných koalícií, nemôže byť menšia ako súčet hodnôt týchto dvoch koalícií, operujúcich samostatne (t. j. „sila“ celku nie je menšia ako „sila“ jeho časti) (Chobot a kol., 1991).

Kooperatívne hry n hráčov sa podľa prípustných koaličných štruktúr členia na tri skupiny (Goga, 2017):

1. Prvú skupinu tvoria hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry s podmienkou, že ani jeden hráč nesmie byť súčasne v dvoch alebo viacerých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou*.
2. V druhej skupine sú hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry, aj také, v ktorých jeden hráč môže byť súčasne v niekoľkých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou nedisjunktnou koaličnou štruktúrou*.
3. Ak sa množina prípustných koaličných štruktúr skladá z jediného prvku (hráča), ide o hru s *fixovanou koaličnou štruktúrou*. Takéto hry analyzuje *nekooperatívna teória hier*, pričom jediná prípustná koaličná štruktúra má tvar $(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$. Ak hráči môžu tvoriť väčší počet koaličných štruktúr, ide o hru s *premenlivou koaličnou štruktúrou*.

Z uvedených skupín je v kooperatívnej teórii hier najlepšie teoreticky rozpracovaná skupina hier s voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou a s prenosnými platbami (Aumann, 1964). Priebeh takýchto hier spočíva v tom, že hráči vytvoria nejakú koaličnú štruktúru, členovia každej koalície sa dohodnú na voľbe spoločnej stratégie, ktorá im zabezpečí čo možno najvyššiu úhrnnú platbu koalície, a získanú platbu si po skončení hry medzi sebou rozdelia podľa vopred uzatvorenej záväznej dohody.

Hru (P, v) nazývame nepodstatnou, ak pre ľubovoľnú dvojicu disjunktných koalícií $S_1, S_2 \subset P$ platí: $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2)$. V opačnom prípade hovoríme o *podstatnej hre*. Možno dokázať (Chobot, 1991), že hra (P, v) je podstatná práve vtedy, ak

$$v(P) > \sum_{p \in P} v(\{p\}),$$

kde $v(P)$ je hodnota „veľkej koalície“ všetkých hráčov a

$v(\{p\})$ je hodnota „jednočlennej“ koalície, ktorá sa skladá z jediného p -teho hráča.

Z hľadiska kooperatívnej teórie sú študované predovšetkým podstatné hry. V nepodstatnej hre stráca vznik koalícií zmysel, t. z. koalíčnou spoluprácou nemôže totiž ani jeden hráč nič získať.

Hru $\{P, v\}$ nazývame hrou s konštantným súčtom, ak pre každé $S \subset P$ platí

$$v(S) + v(P - S) = v(P).$$

Teraz uvedieme jednu z možných interpretácií pojmu hodnota, resp. „sila“ koalície. Predpokladajme, že sa utvorí nejaká neprázdna koalícia $S \subseteq P$. Otázkou je, akú úhrnnú platbu si môžu členovia tejto koalície zabezpečiť bez ohľadu na to, ako konajú ostatní hráči. Najmenej priaznivá situácia pre koalíciu S nastane vtedy, keď ostatní účastníci utvoria jedinu protikoalíciu $P - S$ s cieľom minimalizovať úhrnnú platbu koalície S . Koalícia S môže potom voliť stratégie tak, aby si zabezpečila maximálnu úhrnnú platbu proti pre ňu najhoršej stratégii koalície $P - S$. Hodnota každej koalície teda predstavuje jej garantovanú úhrnnú platbu, t. j. platbu, ktorú môže vhodnou voľbou stratégií zabezpečiť hráč za najmenej priaznivých okolností.

Analýza kooperatívnych hier umožňuje identifikovať najpriaznivejšie stratégie koalície S , ak sa všetci účastníci správajú racionálne a ponúka tak návod na konanie hráčov. Charakteristická funkcia hry teda implicitne poskytuje informáciu o stratégiách, ktoré sú pre každú koalíciu a hodnotách (zaručených úhrnných platbách) jednotlivých koalícií. V súvislosti s analýzou kooperatívnej hry najčastejšie skúmame tieto otázky:

- a) Kedy má zmysel uzatvárať dohodu?
- b) Ako si hráči rozdelia spoločne získanú výhru?

Množinu prijateľných rozdelení nazývame jadrom kooperatívnej hry, pričom každé rozdelenie má tieto vlastnosti (Chobot a kol., 1991):

- Hráči si rozdelia celú spoločnú výhru.
- Každý z hráčov požaduje aspoň toľko, koľko by si zabezpečil samostatným postupom bez spolupráce s druhým hráčom.

Modelovaním konfliktnej situácie pomocou kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie je výsledok určený dvoma podmienkami, a to vytvorením koalíčnej štruktúry rozdelením hráčov do jednotlivých koalícií a rozdelením platieb hráčov vo vnútri každej koalície. V tejto súvislosti vzniká otázka: aké vlastnosti majú spĺňať koalíčné štruktúry a im zodpovedajúce rozdelenia platieb, ktoré sa dajú v určitom

zmysle považovať za „prijateľné“ riešenia kooperatívnej hry? Dve základné požiadavky sú tieto (Goga, 2017):

- „Prijateľné“ riešenia (výsledky) by mali vyhovovať určitým zdôvodniteľným axiómam racionality.
- Každé z „prijateľných“ riešení (výsledkov) by malo byť stabilné z hľadiska toho, že neexistujú dostatočné motívy na jeho zmenu.

Koaličné správanie sa hráčov teda musí súčasne podliehať dohodám o prerozdelení výhier. Je zrejmé, že takéto dohody musia rešpektovať aspoň tzv. axiómy racionality. Axiómy racionality majú niekoľko foriem. Za základné možno považovať axiómy von Neumanna – Morgensterna. Základné uvedieme (Figurová a Čičková, 2017):

- axióma individuálnej racionality, t. j. hráč musí v koalícii získať aspoň toľko, koľko by si zabezpečil individuálnym postupom,
- axióma kolektívnej racionality (paretovskej optimality), t. j. hráči si medzi sebou rozdelia maximálnu výhru, ktorú možno v kooperatívnej hre získať,
- axióma koaličnej racionality (paretovskej optimality), t. j. žiadna subkoalícia koalície S nemôže zabezpečiť jej členom vyššiu platbu ako členstvo v koalícii S .

3.2 Kooperatívna úloha rozvozu

Prepojeniu teórie hier s dopravnými úlohami v prípade kooperatívneho a nekooperatívneho správania sa hráčov sa venovalo viacero autorov. Napr. cieľom Takama a Preston (2008) je hľadanie optimálnej mýtnej politiky, pomocou ktorej sa následne zvyšuje efektívnosť cestnej premávky. Bell (2004) využíva modely teórie hier na analýzu okružných úloh a spoľahlivosti dopravnej siete, na čo následne Thomas a White (2007) predstavili Markovov rozhodovací proces v nadväznosti na dynamickú úlohu najkratšej cesty. Hollander a Prashker (2006) sa sústreďovali na nájdenie optimálnej politiky v prípade parkovania na základe Stackelbergovej hry. Vo všeobecnosti predstavujú prepravné náklady veľkú časť prevádzkových nákladov spoločnosti a práve jedným z riešení na zníženie takýchto nákladov je spolupráca medzi jednotlivými logistickými spoločnosťami. Napr. Sterzik a kol. (2015) tvrdia, že ak námorné spoločnosti integrujú svoje zdroje a činnosti, zlepšia tým svoju situáciu. Jedným zo spôsobov spolupráce je napr. vzájomné využívanie vozidiel (plavidiel) tých spoločností, ktoré sa nachádzajú v tom istom prístave, prípadne spoločností

lokalizovaných v rôznych prístavoch, ktoré môžu v koalícií navzájom využívať svoje plavidlá a tak neprekročiť kapacitu. Preto využili úlohu rozvozu s viacerými strediskami preformulovanú na kooperatívnu úlohu rozvozu, ktorá týmto spoločnostiam umožňuje znížiť svoje náklady.

V roku 1984 publikoval Robert Axelrod knihu s názvom „*Evolúcia kooperácie*“ v ktorej dokázal, že spolupráca založená na reciprocite (obojstranná vzájomná spolupráca) sa môže rozvíjať a udržiavať za predpokladu existencie dlhodobej interakcie. Jeho výskum je založený na počítačových turnajoch stratégií v tzv. *opakovanej hre*. Niekoľko výskumníkov prijalo *teóriu kooperatívnych hier* (ďalej CGT¹⁰) ako model spolupráce logistických firiem, napr. Economides a Silvester (1990) formulovali a vyriešili okružnú úlohu, v ktorej spoločnosti medzi sebou spolupracujú s cieľom minimalizovať celkové oneskorenie obsluhy zákazníkov, pričom publikovali základné prístupy teórie hier k riešeniu kooperatívnych, ako aj nekooperatívnych dopravných úloh. Lozano (2013) a Zibaei a kol. (2016) uviedli vo svojich publikáciách matematický model na vyčíslenie benefitov vyplývajúcich zo zlúčenia transportných požiadaviek rozličných firiem. Dokázali, že dochádza k zníženiu spoločných prepravných nákladov práve z dôvodu použitia väčších alebo viacerých vozidiel a zvýšeného počtu pripojených ciest. Viacerí autori dokázali, že spolupráca medzi nezávislými vlastními logistickej siete môže udržiavať spoľahlivý maximálny prietok. Napr. McCain (2008) sa zamerail na analyzovanie kooperatívnych hier medzi organizáciami s cieľom zvýšiť svoj zisk. Autori sa zhodujú v tom, že práve kooperácia medzi spoločnosťami vedie k znižovaniu nákladov na prepravu, a teda celkovo môže viesť k zvýšeniu výkonu spoločností a ich konečného zisku (Crujssen a kol., 2007).

V úlohe rozvozu s viacerými skladmi sa teda domnievame, že majitelia jednotlivých skladov sú zároveň aj hráčmi, ktorí chcú spolupracovať s ostatnými vlastními logistických skladov s cieľom ďalšej minimalizácie svojich prepravných nákladov. Minimálne prepravné náklady získame vyriešením úloh matematického programovania z pohľadu jednotlivých koalícií, ktorých nové matematické modely prezentujeme v štvrtej kapitole tejto záverečnej práce. Uvažujme, že každý z hráčov vlastní iba jeden sklad a má svojich vlastných zákazníkov (je mu pridelená vlastná

¹⁰ *Cooperative Game Theory*

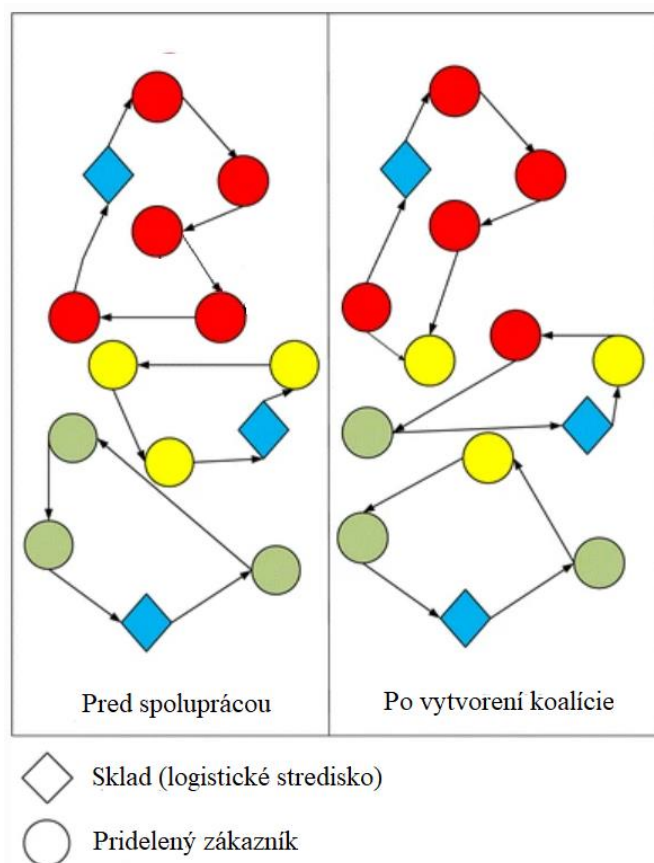
množina zákazníkov, ktorých má obslúžiť), pričom však vozidlá hráča možno využiť aj na obsluhu iného hráča v prípadnej koalícii. Počet možných koalícií je určený vzťahom:

$$2^k - 1,$$

kde k je počet hráčov v kooperatívnej úlohe.

Na obrázku č. 1 možno vidieť, že v prípade nekooperatívnej situácie medzi hráčmi, môže vozidlo príslušného skladu obslúžiť iba jemu pridelených zákazníkov. Naopak, v prípade kooperácie medzi jednotlivými skladmi môžu byť zákazníci obslúžení nie len vozidlom svojho východiskového skladu, ale aj vozidlom iného hráča v danej koalícii. Takto možno skrátiť dĺžku trasy vozidiel, a tým aj celkové prepravné náklady.

Obrázok č. 1: Porovnanie nekooperatívneho a kooperatívneho správania v okružnej úlohe



Zdroj: Vlastné spracovanie

Kooperatívna úloha rozvozu je teda rozšírením úlohy rozvozu s viacerými strediskami pričom matematické formulácie tohto problému boli prezentované a skúmané viacerými výskumníkmi. Crevier a kol. (2007) predstavil rozšírenie MDVRP tak, že vozidlá môžu v rámci trasy využívať sklady iných logistických spoločností tak, aby naplnili svoju kapacitu pozdĺž trasy. Ray a kol. (2014) predstavili novú úlohu matematického programovania s názvom úloha rozvozu s viacerými strediskami

a delenou dodávkou (MDSDVRP¹¹) ako úlohu celočíselného lineárneho programovania. Autori navrhli možné riešenia takejto úlohy v prípade zdieľania transportných požiadaviek jednotlivých stredísk. Kooperatívnej úlohe MDVRP a jej riešeniu prostredníctvom evolučného algoritmu sa venuje práca (Bernardes de Oliveira a kol., 2016). Polacek a kol. (2008) predstavili kooperatívnu schému na vytvorenie nových paralelných variantov algoritmov riešenia MDVRP s časovými oknami.

Z uvedeného vyplýva, že logistické spoločnosti získavajú vzájomnou spolupracou obojstranné výhody (benefity), pričom základnou dilemou kooperatívnej hry je pre každého hráča voľba vhodnej spolupráce. V koalíciách môžu hráči získať väčšie výhody, než by získali samostatným postupom, pričom by si ich mali potom hráči medzi sebou spravodlivo rozdeliť. V okružnej úlohe s viacerými skladmi sa teda domnievame, že majitelia jednotlivých skladov sú zároveň aj hráčmi, ktorí chcú spolupracovať s ostatnými hráčmi s cieľom minimalizovať svoje celkové prepravné náklady. CGT vytvára matematický rámec pre spravodlivé rozdelenie výhier (tieto výhry môžu byť aj vo forme usparených nákladov), ktoré plynú hráčovi zo vzájomnej spolupráce. Ďalšie aplikácie CGT sa týkajú oblastí plánovania, prípadne teórie vyjednávania (Barron, 2013). Hafezalkotob (2019) kvantifikuje úsporu nákladov a synergiu rôznych koalícií v prípade vzájomnej spolupráce, pričom predstavuje nový kooperatívny model agregovaného problému plánovania. Metódu environmentálneho zdieľania nákladov v reverznej logistike vyradených spotrebičov založených na Shapleyho hodnote predstavili Lu a kol. (2011). Guajardo a Rönnqvist a kol. (2015) diskutovali o modeloch koalíčnej štruktúry v logistike, pričom Hafezalkotob a Makui (2015) navrhli metódy riešenia kooperatívnych hier v logistických sieťach s neurčitou, v ktorých hráči medzi sebou spolupracujú, čo následne môže viesť k spoľahlivému maximálnemu toku. Dulai a Werner-Stark (2010) analyzujú tzv. pokročilú spoluprácu medzi vozidlami jednotlivých skladov v MDVRP. V ich publikácii prijímajú závery, že prípadná kooperácia ponúka lepšiu pripravenosť vozidiel na problémy, ktoré vznikajú počas vykonávania trás (napr. v prípade poruchy vozidla, alebo uzavretia cesty), alebo môže viesť k efektívnejšiemu trasovaniu vozidla (napr. prípad vzájomného využívania vozidiel s rôznou kapacitou). Z uvedeného vyplýva, že metódy CGT môžu byť použité na alokáciu usparených nákladov medzi

¹¹ *Multi-Depot Split Delivery Vehicle Routing Problem*

jednotlivých hráčov v koalícii (napr. Zibaei a kol., 2016; Lozano a kol., 2013; Audy a kol., 2011).

3.2.1 Matematická formulácia úlohy rozvozu s viacerými strediskami

Táto časť je venovaná modifikovanej úlohe rozvozu, ktorá predpokladá existenciu viacerých stredísk, pričom za východiskový model považujeme matematickú formuláciu modelu uvedenom v (Pekár a kol., 2012) a model uvedený v (Zibaei a kol., 2016). Keďže ide o modely uvedené v príslušnej literatúre, v oboch ponechávame pôvodné značenie. Príslušné modely sú aplikovateľné v prípade, že firma disponuje viacerými centrálnymi skladmi. Pekár a kol. (2012) v modeli prijímajú predpoklady existencie $k+1$ stredísk, z ktorých môže vyjsť jedno vozidlo (alebo vozidlo ostane nevyužitú, t. j. nemusí vyjsť zo strediska). Z týchto východiskových stredísk sa potom očakáva obsluha m zákazníkov. Matematický model je formulovaný v tzv. *úplnom*, resp. *kompletnom hranovo ohodnotenom grafe* $\bar{G} = (V, \bar{H})$. V nasledujúcom texte zhrnieme množiny a parametre tohto problému rozvozu s viacerými strediskami.

Množiny a parametre:

$W = \{0, 1, \dots, k\}$ množina stredísk (skladov);

$C = \{k + 1, k + 2, \dots, m\}$ množina zákazníkov (obsluhovaných uzlov);

$V = W \cup C$ množina všetkých vrcholov grafu (zákazníci a sklady);

$d_{ij}, i, j \in V, i \neq j$ najkratšia vzdialenosť medzi uzlami i a j ;

$q_j, j \in C$ požiadavka i -tého zákazníka;

$g_h, h \in W$ kapacita vozidla h -tého skladu.

Premenné:

- v modeli sa používajú binárne premenné $x_{ij} (i, j \in V, i \neq j)$ s týmto významom:
 - $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak hrana medzi vrcholmi } i \text{ a } j \text{ je súčasťou okružnej trasy} \\ 0, & \text{v opačnom prípade} \end{cases}$
- a nezáporné premenné $u_i, i \in C$ reprezentujúce kumulatívny náklad vozidla po daný uzol, pričom implicitne zahrňame do modelu predpoklad o nulovom náklade vozidla vo východiskovom stredisku.:
 - $u_i = 0, i \in W$

Nech $\bar{H} \subset V \times V$ predstavuje množinu hrán $h_{ij}, i, j \in V$ medzi všetkými vrcholmi i a j , pričom každej hrane h_{ij} je priradené reálne číslo d_{ij} nazývané ako ohodnotenie alebo tiež cena hrany h_{ij} . Nech toto hodnotenie reprezentuje najkratšiu vzdialenosť medzi uzlami i a j . Každý zo zákazníkov so sídlom vo vrchole $i, i \in C$ požaduje dovoz určitého množstva tovaru. Vo všeobecnosti označme toto množstvo ako $q_j, j \in C$. Obsluha je uskutočnená pomocou vozidiel s rovnakou alebo rôznou kapacitou $g_h, h \in W$ (predpoklad homogénneho aj heterogénneho dopravného parku). Cieľom je určiť optimálne trasy vozidiel, pri ktorých budú uspokojené požiadavky všetkých zákazníkov (požiadavky zákazníkov budú pritom realizované len v celku, t. j. ak vozidlo obsluži zákazníka, bude realizovaná jeho celá požiadavka na rozvoz), pričom v žiadnej jazde nebude prekročená kapacita vozidla a celkové prepravné náklady budú minimalizované.

Teraz prezentujeme matematický model problému rozvozu s viacerými strediskami (Pekár a kol., 2012):

$$t^W = \min f(X, u) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad j \in C, i \neq j \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad i \in C, i \neq j \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in C} x_{ij} \leq 1, \quad i \in W \quad (3.6)$$

$$u_i + q_j - g(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i \in V, j \in C, i \neq j \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = \sum_{j \in V} x_{ji}, \quad i \in V \quad (3.8)$$

$$q_i \leq u_i \leq g, \quad i \in C \quad (3.9)$$

Podmienka (3.4) zabezpečuje, že ku každému zo zákazníkov príde vozidlo práve raz a podmienka (3.5) zabezpečuje, že od každého zákazníka vozidlo odíde práve raz. Podmienky (3.6) určujú, že z každého východiskového vrcholu vyjde maximálne jedno vozidlo. Vytvoreniu parciálnych podcyklov (okrem takých podcyklov, ktoré obsahujú jedno zo stredísk) zabraňuje podmienka (3.7) a spolu s podmienkami (3.9) zabezpečujú

aj podmienku neprekročenia kapacity vozidiel a bilanciu nákladu vozidla. Obmedzenia (3.8) zabezpečujú súvislosť jednotlivých trás.

Teraz predstavíme model, ktorý bol riešený autormi Zibaei a kol. (2016), pretože prezentované myšlienky budú ďalej rozvíjané v kapitole 4 tejto práce. Predpokladajme viacerých hráčov (logistické spoločnosti), ktorí vlastnia viacero skladov, navzájom spolupracujú a vytvárajú koalície S . V porovnaní s predchádzajúcim sa v tomto modeli využívajú v niektorých prípadoch iné označenia množín, parametrov a premenných, ktoré je nutné ozrejmiť.

Množiny a parametre

- $I_{[S]}$ množina všetkých skladov koalície S ;
- $J_{[S]}$ množina všetkých zákazníkov koalície S ;
- $K_{[S]}$ množina všetkých vozidiel koalície S ;
- P množina všetkých hráčov;
- $N_{[S]}$ parameter, ktorý reprezentuje počet zákazníkov v koalícii S ;
- $C_{ij[S]}$ predstavuje prepravné náklady medzi i a j v rámci koalície S v situácii $i, j \in I \cup J$;
- V_i označuje maximálnu priepustnosť skladu i ;
- d_j reprezentuje požiadavky zákazníka j ;
- $Q_{k[S]}$ kapacita vozidla k .

Premenné

- v modeli sa využívajú binárne premenné $x_{ijk[S]} \in \{0,1\}, \forall i \in I_{[S]}, j \in J_{[S]}, k \in K_{[S]}$:
 - $x_{ijk[S]} = \begin{cases} 1, & \text{ak hrana medzi vrcholmi } i \text{ a } j \text{ je súčasťou okružnej trasy v koalícii } S \\ 0, & \text{v opačnom prípade} \end{cases}$
- premenné $z_{ij[S]} \in \{0,1\}, \forall i \in I_{[S]}, j \in J_{[S]}$:
 - $z_{ij[S]} = \begin{cases} 1, & \text{ak zákazník } j \text{ je obslužený skladom } i \text{ v koalícii } S \\ 0, & \text{v opačnom prípade,} \end{cases}$
- premenná $U_{lk[S]}$ je pomocná premenná slúžiaca na elimináciu sub-tour podmienok na trase vozidla k koalície $S, l \in J_{[S]}$, pričom táto premenná je nezáporná:

$$\circ U_{j',k[S]} \geq 0, \quad \forall j' \in J_{[S]}, k \in K_{[S]}$$

Predpokladáme, že máme viacnásobný počet hráčov P , ktorí predstavujú jednotlivých vlastníkov skladov. Hráči kooperujú medzi sebou (vytvárajú koalície $S \subseteq P$) využívaním vozidiel ostatných s cieľom minimalizovať svoje cestovné náklady. Matematický model kooperatívneho rozvozu je takýto (Zibaei a kol., 2016):

$$\min TC(S) = \sum_{i \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} \sum_{j \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} \sum_{k \in K_{[S]}} C_{ijk[S]} x_{ijk[S]} \quad (3.10)$$

$$\sum_{k \in K_{[S]}} \sum_{i \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in J_{[S]} \quad (3.11)$$

$$\sum_{j \in J_{[S]}} d_j \sum_{i \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} x_{ijk[S]} \leq Q_{k[S]}, \quad \forall k \in K_{[S]} \quad (3.12)$$

$$U_{lk[S]} - U_{jk[S]} + N_{[S]} x_{ijk[S]} \leq N - 1, \quad \forall l, j \in J_{[S]}, k \in K_{[S]} \quad (3.13)$$

$$\sum_{i \in I_{[S]}} \sum_{j \in J_{[S]}} x_{ijk[S]} \leq 1, \quad \forall k \in K_{[S]}, \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in J_{[S]}} \sum_{j \in J_{[S]}} x_{ijk[S]} - \sum_{i \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} x_{jik[S]} = 0, \quad \forall k \in K_{[S]}, i \in I_{[S]} \cup J_{[S]} \quad (3.15)$$

$$\sum_{j \in J_{[S]}} d_i z_{ij[S]} \leq V_i, \quad \forall i \in I_{[S]} \quad (3.16)$$

$$-z_{ij[S]} + \sum_{u \in I_{[S]} \cup J_{[S]}} x_{iuk[S]} + x_{ujk[S]} \leq 1, \quad \forall i \in I_{[S]}, j \in J_{[S]}, k \in K_{[S]} \quad (3.17)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I \cup J} x_{ijk[S]} = 1, \quad \forall i \in I \quad (3.18)$$

$$x_{ijk[S]} + x_{j'ik'[S]} \leq 1 \quad \forall i \in I_{[S]}, i' \neq i, j \in J_{[S]}, k \in K_{[S]} \quad (3.19)$$

Účelová funkcia (3.10) slúži na minimalizáciu celkových nákladov danej koalície S . Ohraničenie (3.11) garantuje, že v každej z možných koalícií bude zákazník obslužený daným vozidlom práve raz. Ohraničenie (3.12) určuje kapacitu pre vozidlá koalície S . Ohraničenie (3.13) slúži na elimináciu parciálnych podcyklov a spolu s (3.15) zabezpečujú súvislosť jednotlivých trás. Ohraničenie (3.14) znamená, že každá cesta môže byť využitá vozidlom koalície iba raz. Ohraničenie (3.16) určuje kapacitu skladov danej koalície. Podmienka (3.17) špecifikuje, že zákazník môže byť priradený k skladom

koalície len a len v tom prípade, ak existuje cesta vozidla cez tohto zákazníka. Ohraničenie (3.18) priradzuje zákazníka práve k jednému vozidlu, pričom (3.19) zakazuje smer cesty vozidla do iného skladu ako východiskového.

Cieľom predchádzajúcich modelov je minimalizácia prepravných nákladov v prípade vzájomnej spolupráce medzi logistickými spoločnosťami. Z kooperatívneho správania sa hráčov vyplývajú „výhry“ vo forme usparených nákladov, ktoré je následne potrebné medzi hráčov prerozdeliť. Preto v nasledujúcom texte predstavujeme rôzne spôsoby alokácie úspor v kooperatívnej hre rozvozu z hľadiska teórie hier.

3.3 Redistribúcia výhier v kooperatívnej hre

Vo všeobecnosti existuje viacero spôsobov redistribúcie výhry medzi jednotlivých hráčov. Ako prvý sa redistribúcii venoval Tullock (1997) ktorý napísal monografiu venovanú otázkam sociálnej redistribúcie. V jeho práci však neuvažuje nad súvislosťou medzi mierou redistribúcie oproti výkonu jednotlivých hráčov v rámci určitej koalície, taktiež neuvažuje s vplyvom koalícií na konečnú redistribúciu. Redistribučný systém je systém, v ktorom existuje určitý druh prerozdeľovania výhier (napríklad miezd) v porovnaní s výsledkami (výkonmi) jednotlivých účastníkov (hráčov) v systéme. Výkon sa chápe ako vplyv hráča v hre na dosiahnutý výsledok, t. j. na výšku celkovej odmeny, ktorú môžu jednotliví účastníci rozdeliť medzi sebou. Typickou príčinou redistribúcie v systémoch je to, že koalícia si vynucuje svoj dominantný vplyv na rozdeľovanie výhry (benefitov, ktoré plynú zo spolupráce). Podrobnejšie sa prepojeniu teórie vyjednávania a redistribúcie venoval Osborne (2003). Prehľad literatúry o otázke vzťahu medzi rozdelením výhier (výplat) podľa výkonu hráča a výkonu systému možno nájsť v (Štedron, 2007; Eucken, 2004). Z pohľadu teórie vyjednávania bol diskutovaný systém redistribúcie medzi vládou a záujmovými skupinami, pričom autori zadefinovali rôzne ohraničenia používania účinných politík čo zvyhodňuje, resp. znevýhodňuje vyjednávacie sily jednotlivých účastníkov hry (Drazen a Limão, 2008).

Z hľadiska rozdelenia výhier možno rozlišovať medzi zaručenými a spoločnými výhrami (Demúth, 2013). Zaručené výhry sú také, ku ktorým hráč dospel na základe vlastného rozhodnutia bez ohľadu na správanie druhého hráča, pričom spoločné výhry vznikajú v dôsledku vzájomnej spolupráce medzi hráčmi. Teória kooperatívnych hier sa teda zaoberá predovšetkým koalíciami (skupinami hráčov), ktoré skoordínujú svoje činnosti a združujú svoje výhry, pričom jedna z dôležitých otázok sa týka rozdelenia

takýchto extra výhier (pričom výhry môžu byť aj vo forme uspokojených nákladov ako napr. v prípade dopravných úloh) medzi jednotlivých členov vytvorenej koalície. Teória odporúča napr. princíp výberu spravodlivého rozdelenia, v ktorom si každý z hráčov ponechá toľko, koľko by získal samostatným postupom, a o zvyšok sa hráči rozdelia rovnakým dielom. Ďalším spôsobom rozdelenia platieb je Shapleyho hodnota, ktorá vychádza z apriórneho ocenenia pozície a sily každého hráča z hľadiska možnosti koalíciej spolupráce (Chobot a kol., 1991). V nasledujúcom texte predstavíme spomenuté spôsoby alokácie výhier (benefitov zo spolupráce), pričom vychádzame z teórie vyjednávania.

3.3.1 Alokácia výhier kooperatívnej hry na základe teórie vyjednávania

Koncepciu, ktorá upúšťa od predpokladu kolektívnej racionality a vychádza z principiálne odlišnej logiky vytvorili R. J. Aumann a M. B. Maschler v roku 1964. Túto koncepciu nazvali *vyjednávacia množina*. Ako sme už uviedli, koalícia racionalita predstavuje určitý typ vnútornej stability koalície, pri ktorej neexistujú dôvody na rozpad koalícií na menšie zoskupenia. Môžu však vznikať iné procesy súvisiace s úvahami hráčov alebo skupín hráčov v koalícii o možnosti vystúpiť z koalície alebo pripojiť sa k inej koalícii. Teória vyjednávania vo všeobecnosti rozlišuje rôzne spôsoby rozdelenia výhry. V záverečnej práci predstavíme nasledovné: rovnostárske riešenie, utilitárne riešenie, Nashovo riešenie a Shapleyho hodnota.

Vo všeobecnosti, teória vyjednávania je založená na teórii užitočnosti. Spôsoby alokácie výhier prezentujeme na kooperatívnej hre dvoch hráčov $P = \{1, 2\}$. Predpokladajme, že každý z i -tých hráčov má zaručený úžitok $u_i^* = u_i(\{i\})$, $i \in P$, t. j. úžitok v prípade, že sa nachádza v jednočlennej koalícii. V niektorých prípadoch na tomto zaručenom úžitku nezáleží (utilitárne a Nashovo riešenie), ale v prípade rovnostárskeho sa vyskytuje v účelovej funkcii, takže ovplyvňuje výsledné riešenie.

Jednotlivé spôsoby alokácie výhier sú prezentované na kooperatívnej hre dvoch hráčov $P = \{1, 2\}$ s charakteristickou funkciou platieb:

$$v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{1, 2\}).$$

Z daných hodnôt možno určiť zaručený úžitok hráčov, t. j. ich úžitok v prípade, že sa nachádzajú v jednočlennej koalícii.

$$u_1(\{1\}) = v(\{1\})$$

$$u_2(\{2\}) = v(\{2\}).$$

Najprv je potrebné rozdeliť výhru koalície medzi hráčov tak, aby rozdelenie nákladov bolo nezáporné, aby bolo rozdelené v plnej čiastke a aby si oba hráči polepšili oproti jednočlennej koalícii. Koalícia je teda pre hráča výhodná a vznikne vtedy, keď existuje riešenie spĺňajúce podmienky (Tichá, 2016).

- nezáporné rozdelenie koalície $S(\{1,2\})$,

$$x_1 \geq 0 \quad (3.20)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (3.21)$$

- výhra koalície je rozdelená

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) \quad (3.22)$$

- hráč 1, resp. 2 má z koalície si polepšil o hodnotu ε (konštantu) oproti jednočlennej koalícii

$$u_1(\{1,2\}) \geq u_1(\{1\}) + \varepsilon \quad (3.23)$$

$$u_2(\{1,2\}) \geq u_2(\{2\}) + \varepsilon. \quad (3.24)$$

Účelová funkcia bude mať potom tvar

$$f(u(S) - u^*) \quad (3.25)$$

Kde $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)^T$ je vektor zaručených úžitkov (získaný kooperáciou), ktorý maximalizujeme. V nasledujúcom texte matematicky formulujeme spôsoby prerozdelenia výhry zo spolupráce v prípade dvoch hráčov (úlohy je možné aplikovať aj na viacerých hráčov).

3.3.2 Utilitárne riešenie prerozdelenia výhry

Pokiaľ uvažujeme utilitárne riešenie prijímame predpoklad o rozdelení koalície výhry $v(S)$ medzi jednotlivých hráčov koalície S : hráči si výhru rozdelia tak, že budú maximalizovať celkový úžitok koalície (súčet úžitkov jednotlivých hráčov). Budú teda maximalizovať všeobecný blahobyť bez ohľadu na jednotlivých členov koalície. Pritom prijímame predpoklad, že si každý z hráčov musí polepšiť aspoň o nejakú hodnotu ε (malé kladné číslo) oproti menším koalíciám. To znamená, že podmienkou je, že si hráči

nezhoršia svoju situáciu v hre vstupom do koalície. V prípade utilitárneho riešenia prerozdelenia ušetrených nákladov možno úlohu matematického programovania na základe (3.20)-(3.25) formulovať:

$$\max_{x_1, x_2} (u_1(\{1,2\}) - u_1(\{1\})) + (u_2(\{1,2\}) - u_2(\{2\})) \quad (3.26)$$

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) \quad (3.27)$$

$$u_1(\{1,2\}) \geq u_1(\{1\}) + \varepsilon \quad (3.28)$$

$$u_2(\{1,2\}) \geq u_2(\{2\}) + \varepsilon \quad (3.29)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3.30)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (3.31)$$

3.3.3 Rovnostárske riešenie redistribúcie výhry

Predpokladajme, že hráči si rozdelia úspory $v(S)$ tak, že si každý z hráčov koalície polepší o rovnakú hodnotu úžitku oproti tomu prípadu, v ktorom by z koalície vystúpil a bol sám. Rovnostárske riešenie maximalizuje Rawlsovu funkciu blahobytu – minimum z úžitkov jednotlivých hráčov znížený o ich zaručený úžitok (Kalai, 1977). Účelová funkcia je potom v tvare:

$$\max_{x_1, x_2} \min(u_1(\{1,2\}) - u_1(\{1\}); (u_2(\{1,2\}) - u_2(\{2\})))$$

Táto úloha však nie je úlohou matematického programovania a preto do modelu zavádzame novú premennú D ktorá reprezentuje minimálnu hodnotu maximalizovanej funkcie. Ostatné predpoklady ostávajú nezmenené. Úloha je formulovaná potom takto:

$$\max_{x_1, x_2, D} D \quad (3.32)$$

$$u_1(\{1,2\}) - u_1(\{1\}) \geq D \quad (3.33)$$

$$u_2(\{1,2\}) - u_2(\{2\}) \geq D \quad (3.34)$$

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) \quad (3.35)$$

$$u_1(\{1,2\}) \geq u_1(\{1\}) + \varepsilon \quad (3.36)$$

$$u_2(\{1,2\}) \geq u_2(\{2\}) + \varepsilon \quad (3.37)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3.38)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (3.39)$$

3.3.4 Nashovo riešenie redistribúcie výhry

V prípade Nashovho riešenia rozdelíme výhru $v(S)$ tak, že maximalizujeme súčin úžitkov hráčov. Ide o riešenie, ktorá sa nachádza medzi krajnými riešeniami, ktorými sú utilitárne a rovnostárske riešenie. Hráči si v tomto prípade rozdelia výhru tak, že maximalizujú súčin úžitkov:

$$\max_{x_1, x_2} (u_1(\{1,2\}) + u_1(\{1\}))(u_2(\{1,2\}) + u_2(\{2\})) \quad (3.40)$$

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) \quad (3.41)$$

$$u_1(\{1,2\}) \geq u_1(\{1\}) + \varepsilon \quad (3.42)$$

$$u_2(\{1,2\}) \geq u_2(\{2\}) + \varepsilon \quad (3.43)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (3.44)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (3.45)$$

Na odlišných princípoch, ako sme uviedli v predchádzajúcich koncepciách, navrhol *L. S. Shapley* (1953) koncepciu riešenia kooperatívnej hry (P, v) , (ktorú sme prezentovali v podkapitole 3.2), ktorej základom je tzv. *Shapleyho hodnota*. Táto koncepcia vychádza z apriórneho ocenenia pozície a „sily“ každého hráča z hľadiska možností koalíciej spolupráce. *L. S. Shapley* navrhol charakterizovať očakávanú výhru každého z hráčov kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie so strednou hodnotou jeho prínosu do všetkých koalícií, ktorých môže byť členom. Každému hráčovi priradil v kooperatívnej hre (P, v) nejaké číslo $p_i(v)$, ktoré nazval *hodnotou i-tého hráča* v tejto hre. Vektor hodnôt jednotlivých hráčov $\mathbf{p}(v) = (p_1(v), p_2(v), \dots, p_n(v))$ odvodil na základe týchto *predpokladov* (Chobot, 1991):

- Hodnota hráča závisí iba od charakteristickej funkcie, nie od označenia hráča. Ak majú dvaja hráči i a j v hre (P, v) také postavenie, že hodnota charakteristickej funkcie ľubovoľnej koalície sa nezmení, ak sa v tejto koalícii zamení hráč i za hráča j , potom je hodnota hry pre oboch hráčov rovnaká.
- Vektor hodnôt jednotlivých hráčov $\mathbf{p}(v)$ v kooperatívnej hre (P, v) je imputáciou.
- Súčet dvoch charakteristických funkcií u a v kooperatívnych hier (P, u) a (P, v) je opäť charakteristickou funkciou $w = u + v$ nejakej novej kooperatívnej

hry (P, w) . Súčet vektorov hodnôt jednotlivých hráčov v hrách (P, u) a (P, v) sa potom rovná vektoru hodnôt v hre (P, w) , teda $p(w) = p(u) + p(v)$.

L. S. Shapley dokázal, že týmto trom predpokladom vyhovuje jediný vektor $p(v)$ taký, že:

$$p_i(v) = \sum_{\substack{S \in P \\ i \in S}} P(S)[v(S) - v(S - \{i\})] \quad (3.46)$$

pričom $P(S) = \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$, kde $|S|$ je počet prvkov množiny S . Suma v uvedenom vzťahu sa uvažuje podľa všetkých koalícií, ktorých členom môže byť i -ty hráč. Veličina $v(S) - v(S - \{i\})$ vyjadruje prínos i -tého hráča koalícii S a veličina $P(S)$ vyjadruje pravdepodobnosti príslušných spôsobov vytvárania veľkej koalície všetkých hráčov.

Vektor $p(v) = (p_1(v), p_2(v), \dots, p_n(v))$ sa nazýva *Shapleyho vektor* alebo *Shapleyho hodnota* kooperatívnej hry (P, v) .

Shapleyho hodnota i -tého hráča predstavuje strednú hodnotu prínosu tohto hráča koalícii všetkých hráčov pri všetkých možných spôsoboch vytvárania veľkej koalície. Charakterizuje v určitom zmysle jeho „silu“ z hľadiska možností spolupracovať s ostatnými hráčmi.

3.4 Softvérové zabezpečenia riešenia úloh pomocou GAMS.

Jedným z hlavných cieľov práce je uvedenie nových matematických problémov rozvozu v prípade kooperácie hráčov. Tieto problémy opíšeme matematickými modelmi. Riešenie úloh priradených k modelom je nevyhnutné softvérovo zabezpečiť. Jedným z najvýkonnejších softvérových prostredí v súčasnosti je General Algebraic Modelling System (GAMS). Z analýzy výpočtovej zložitosti okružných problémov je zrejmé ich začlenenie do skupiny NP-úplných problémov. Riešenie rôznych typov okružných úloh a ich praktická aplikácia je teda nevyhnutne spojená s využitím adekvátnych softvérových prostriedkov na optimalizačné výpočty.

GAMS je všeobecný algebrický systém, ktorý sa využíva predovšetkým v oblasti optimalizácie, pretože dáva možnosť zapisovania optimalizačných úloh pomocou ich matematických formulácií v kompaktnom tvare (v ich matematickom zápise). Pomocou

zapisovania modelu v algebrickej forme sa zabezpečuje prehľadnosť modelu, pričom súčasne možno vykonávať jednoduchú modifikáciu údajovej základne (napr. aktualizácia dát, zmena rozmeru úlohy, pridávanie nových ohraničení a pod). Toto prostredie spája poznatky z oblasti matematického programovania a relačných databáz, čo automatizuje využitie zdrojov počítača (nie je nutné explicitne definovať rozmery polí a pod.). GAMS pomáha užívateľovi koncentrovať sa na modelovanie tak, že sa systémovo postará o regulárne programovacie jazyky, ktoré sú náročné na čas a môžu viesť k chybám. Užívateľ potom môže venovať svoju pozornosť rýchlym zmenám matematických formulácií modelu, prípadne môže vymieňať solvery medzi sebou bez vykonávania náročných operácií a dosahovať tak iné výsledky.

GAMS obsahuje celkom 59 dostupných programových riešiteľov (solverov), ktorí dokážu vyriešiť optimalizačné úlohy, a teda aj väčšinu známych algoritmov. Medzi známe solvery možno zaradiť napr. CPLEX, BARON, GUROBI, CONOPT, LINDO, MOSEK a mnoho ďalších ktoré sú dostupné v demo alebo plnej verzii. GAMS tak slúži ako rozhranie medzi užívateľom a solvermi a umožní zameranie sa len na správnu matematickú formuláciu bez zaťažujúcich technických znalostí, ktoré by inak boli potrebné pre použitie príslušného solvera.

GAMS sa skladá z kompilátora a integrovaných solverov a umožňuje zadávanie modelu v algebrickej forme, čo zachováva prehľadnosť modelu súčasne s možnosťou jednoduchšej modifikácie údajovej základne (pretože formuláciu modelu možno zapísať nezávisle od samotných vstupných dát modelu). Model a dáta sú tak fyzicky separované, čo umožňuje aktualizáciu dát (aj zmenu rozmeru) bez akejkoľvek potreby korekcie zadaného modelu, čím je vylúčené jeho prípadné narušenie. Tento systém obsahuje aj rôzne preddefinované knižnice týkajúce sa riešení rôznych dopravných úloh, ako napr. úloha obchodného cestujúceho a jej riešenie pomocou exaktnej metódy vetvenia a rezania, jej riešenie na základe metódy explicitnej enumerácie a rôzne iné rozšírenia, úloha rozvozu a jej rôzne modifikácie, ako aj mnoho ďalších oblastí týkajúcich sa ekonometrie, finančnej matematiky, štatistiky, makroekonómie a mikroekonómie.

Úlohu kooperatívneho rozvozu budeme formulovať v systéme GAMS ako úlohu celočíselného zmiešaného programovania (MIP). MIP je špeciálny prípad optimalizačného problému, v ktorom niektoré z premenných sú celočíselné a niektoré nie. Podmienka celočíselnosti, typická pre úlohu MIP, je to, čo mení konvexný problém na problém nekonvexný, a teda po formálnej stránke na úlohu NP-ťažkú. Toto je dôvod,

prečo neexistuje polynomiálny algoritmus na riešenie úloh MIP, a preto museli byť vytvorené špeciálne algoritmy. Vo všeobecnosti možno príslušné úlohy riešiť exaktnými metódami (metóda vetiev a hraníc, metóda rezných nadrovín atď.), ktoré možno s úspechom použiť na riešenie úloh menšieho rozmeru (v prípade väčšieho rozmeru úlohy je nutné použiť heuristiky a metaheuristiky). Univerzálnou metódou na riešenie úloh zmiešaného celočíselného programovania, ktorú využíva solver CPLEX systému GAMS je metóda vetvenia a rezov. *Metóda vetiev a rezov* je spojením metódy vetiev a hraníc a metódy rezných nadrovín, pričom spája prednosti oboch metód. Prvý prístup spočíva v tom, že sa úloha rieši metódou vetiev a hraníc, ale pri každom skúmanom riešení (uzol rozhodovacieho stromu) sa zavádza do riešenia rezná nadrovina, ktorá zabezpečí splnenie určitej ohraničujúcej podmienky. Druhý prístup je založený na tom, že po nájdení východiskového riešenia relaxovanej úlohy sa zavádza podmienka rezu a až potom sa uskutočňuje vetvenie.

Výhodou GAMSu pre užívateľa je jeho podobnosť s bežne používanými programovacími jazykmi, pretože obsahuje stručné a presné špecifikácie objektov a vzťahov. Ďalšou výhodou je jeho prenosnosť vytvorených modelov medzi jednotlivými platformami (to znamená, z jedného počítača do druhého). Matematické modely je možno formulovať súčasne aj s dokumentáciou, pretože je možné zahrnúť do nich aj vysvetľujúci text.

V nasledujúcej kapitole predstavíme nové matematické modely problémov rozvozu a ich kooperatívneho rozšírenia. Základom je problém rozvozu s viacerými strediskami a jeho riešenie prostredníctvom systému GAMS.

4 Výsledky práce

Dizertačná práca je fundamentálne sústredená na prezentovanie a riešenie nových úloh kooperatívneho rozvozu, pričom vychádzame z teórie hier a logistiky. V tejto časti dizertačnej práce budeme prezentovať originálne matematické modely, pomocou ktorých možno riešiť rôzne úlohy kooperatívneho rozvozu. Tieto nové, originálne modely týkajúce sa prezentovanej problematiky overíme na ilustratívnych príkladoch a potom ich použijeme na riešenie príkladu z praxe. Na základe výpočtovej zložitosti úloh rozvozu je však jasné, že úspešnosť nájdenia riešenia závisí od jej rozmeru. Menej rozmernejšie úlohy možno vyriešiť klasicky pomocou optimalizačných techník spolu s využitím adekvátneho softvéru. Základom takéhoto riešenia je zostavenie vhodného matematického modelu príslušného problému. Na modeloch formulované úlohy budeme riešiť pomocou systému GAMS, pričom v prílohách záverečnej práce sú uvedené aj príslušné zdrojové kódy k úlohám.

4.1 Kooperatívna okružná úloha a jej modifikácie

4.1.1 Vstupné údaje

Funkcionalitu navrhovaných modelov overíme na týchto vstupných údajoch: uvažujeme kooperatívnu úlohu rozvozu, pričom máme k dispozícii troch dodávateľov, ktorí majú za úlohu obslúžiť určitú množinu zákazníkov. Dodávateľov, resp. majiteľov jednotlivých skladov budeme považovať za hráčov s označením $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Každý z hráčov vlastní jeden sklad spolu s jedným vozidlom, alebo uvažujeme existenciu viacerých vozidiel (resp. môže vozidlo uskutočniť viacero okružných jázd). Uvažujeme, že kapacita skladov jednotlivých hráčov je neobmedzená. Kooperatívnu úlohu rozvozu formulujeme ako úlohu binárneho programovania s predpokladom homogénneho a heterogénneho dopravného parku, pričom sa uvažujú dve situácie rozvozu: v prvom prípade sa vozidlo po obsluhu svojich zákazníkov vráti do svojho východiskového (začiatočného) skladu, pričom v druhom prípade môže byť vozidlo po obsluhu znovu naložené, resp. vyložené aj v inom ako východiskovom stredisku a opätovne môže potom uskutočniť žiadaný rozvoz. Ukážeme, že rôzne formy kooperácie môžu viesť k značnej úspore prepravných nákladov.

Uvažujme existenciu 15 zákazníkov $C = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_{15}^{(3)}\}$, ktorí sú striktné pridelení k jednotlivým sklodom (hráčom), pridelenie zákazníkov reprezentujú množiny:

$$C^{(1)} = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}\} \text{ pre hráča } w_1,$$

$$C^{(2)} = \{c_6^{(2)}, c_7^{(2)}, c_8^{(2)}, c_9^{(2)}, c_{10}^{(2)}\} \text{ pre hráča } w_2 \text{ a}$$

$$C^{(3)} = \{c_{11}^{(3)}, c_{12}^{(3)}, c_{13}^{(3)}, c_{14}^{(3)}, c_{15}^{(3)}\} \text{ pre hráča } w_3.$$

K dispozícii je matica najkratších vzdialeností $D = \{d_{ij}\}$, ktorá zobrazuje najkratšie vzdialenosti $d_{ij}, i, j \in W_S$ medzi jednotlivými hráčmi (majiteľmi skladov a ich zákazníkmi, pričom dáta sú uvedené v prílohe č. 1). Počet koalícií, ktoré môžu vzniknúť je presne 7 a to koalície $S: \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}$ a grand koalícia $\{w_1, w_2, w_3\}$. V tabuľke č. 4.1 možno vidieť požiadavky jednotlivých zákazníkov, ktorých majú hráči obslúžiť a dodať im požadovaný tovar v požadovanom množstve.

Tabuľka č. 4.1 : Požiadavky zákazníkov

$q_1^{(1)}$	$q_2^{(1)}$	$q_3^{(1)}$	$q_4^{(1)}$	$q_5^{(1)}$	$q_6^{(2)}$	$q_7^{(2)}$	$q_8^{(2)}$	$q_9^{(2)}$	$q_{10}^{(2)}$	$q_{11}^{(3)}$	$q_{12}^{(3)}$	$q_{13}^{(3)}$	$q_{14}^{(3)}$	$q_{15}^{(3)}$
45	35	30	50	40	35	50	30	40	45	50	40	30	35	45

Zdroj: Vlastné spracovanie

Ostatné požiadavky a parametre úlohy budú modifikované v závislosti od riešeného typu kooperatívneho rozvozu.

4.1.2 Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom

V kooperatívnej okružnej úlohe s viacerými skladmi sa predpokladá že majitelia jednotlivých skladov sú zároveň aj hráčmi, ktorí chcú spolupracovať s ostatnými hráčmi s cieľom minimalizovať svoje prepravné náklady. V tomto prípade je taktiež dôležité vyčíslenie úspor nákladov jednotlivých koalícií, ako formy „výhry“ v dôsledku vzájomnej kooperácie a jej alokácia medzi členov kooperácie s využitím teórie kooperatívnych hier.

V tejto úlohe kooperatívneho rozvozu je kapacita jednotlivých vozidiel v každom stredisku rovnaká (predpoklad homogénneho dopravného parku). Úlohou je vyčísliť minimálne prepravné náklady jednotlivých koalícií. Hráči majú možnosť navzájom kooperovať a vytvárať koalície S , a tak prípadne znižovať svoje prepravné náklady.

Uvažujme, že každý z hráčov vlastní iba jeden sklad a má svojich vlastných zákazníkov, pričom však vozidlá hráča možno využiť aj na obsluhu iného hráča v prípadnej koalícii. Matematický model je formulovaný v tzv. *úplnom*, resp. *kompletnom hranovo ohodnotenom grafe* $\bar{G} = (V, \bar{H})$. Nech $\bar{H} \subset V_S \times V_S$ predstavuje množinu hrán e_{ij} , $i, j \in V_S$ medzi všetkými vrcholmi i a j , pričom každej hrane e je priradené reálne číslo d_{ij} nazývané ohodnotenie alebo tiež cena hrany e_{ij} . Nech toto hodnotenie reprezentuje najkratšiu vzdialenosť medzi uzlami i a j . Nech $W_S, W_S \subseteq W$ reprezentuje hráčov v koalícii S (je tak podmnožinou množiny všetkých hráčov), ktorí obsluhujú zákazníkov. Rozdeľme tiež množinu zákazníkov na základe ich príslušnosti k jednotlivým hráčom, potom zákazníci koalície S budú označovaní ako C_S . Potom $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ je množina všetkých hráčov, pričom každý zo zákazníkov so sídlom vo vrchole $i, i \in C_S$ požaduje dovoz určitého množstva tovaru. Vo všeobecnosti označme toto množstvo $q_i, i \in C_S$. Množina $V_S = W_S \cup C_S$ je tak množinou reprezentujúcou strediská hráčov aj zákazníkov koalície S . V ďalšom texte zhrnieme množiny a parametre úlohy rozvozu s viacerými strediskami, ktoré slúžia ako základ pri tvorbe ďalších modelov kooperatívnej úlohy rozvozu.

Množiny a parametre

$W = \{w_1, w_2, w_3 \dots w_k\}$ podmnožina množiny všetkých hráčov (skladov) v koalícii,

$W_S \subseteq W$ množina všetkých skladov v koalícii

$C_S = \bigcup_{i \in W_S} C^{(i)}, i \in W_S$ množina zákazníkov koalície S (obsluhovaných uzlov),

$V_S = W_S \cup C_S$ množina všetkých vrcholov grafu (zákazníci a sklady),

$d_{ij}, i, j \in V_S, i \neq j$ najkratšia vzdialenosť medzi uzlami i a j ,

$q_j^{(i)}, i \in W_S, j \in C_S$ požiadavka i -tého zákazníka,

g kapacita vozidiel.

Premenné

- $x_{ij} \in \{0,1\} \ i, j \in V_S, i \neq j$ reprezentuje, či i prechádza j na trase vozidla ($x_{ij} = 1$) alebo nie ($x_{ij} = 0$).

- $u_i \geq 0, i \in V_S$ na základe formulácie Miller-Tucker-Zemlin (1960) pre úlohu obchodného cestujúceho, pričom reprezentuje veľkosť dodávky vozidla na jeho trase do i -tého uzla (vrátane), pričom predpokladáme nastavenie nulového nákladu vozidla v stredu:

$$\circ \quad u_i = 0, i \in W_S$$

V modeli sa implicitne predpokladá, že $q_i \leq g$ pre všetky $i \in C_S$, t. j. veľkosť požiadavky každého zákazníka neprekročí kapacitu vozidla, ktorá je v tomto prípade pre všetky vozidlá hráčov rovnaká, to znamená $g = 200$ jednotiek.

4.1.2.1 Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a predpokladom „znovunaplnenia“ vozidla v inom ako východiskovom stredu (model I)

Optimálne rozvozy jednotlivých koalícií možno vyčísliť použitím matematického modelu (tento typ kooperatívnej dopravnej úlohy bol teoreticky prezentovaný v (Figurová a Čičková, 2017), pričom prakticky je riešený v (Figurová a Čičková, 2018)).:

$$t_1^{(W_S)} = \min f(X, u) = \sum_{i \in V_S} \sum_{j \in V_S} d_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

$$\sum_{i \in V_S} x_{ij} = 1, j \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in V_S} x_{ij} = 1, i \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{ij} \leq 1, \quad i \in W_S \quad (4.4)$$

$$u_i + q_j - g(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i \in V_S, j \in C_S, i \neq j \quad (4.5)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{ij} = \sum_{j \in C_S} x_{ji}, \quad i \in W_S \quad (4.6)$$

$$q_i \leq u_i \leq g, \quad i \in C_S \quad (4.7)$$

Skalár $t_1^{(W_S)}$ (4.1) reprezentuje hodnotu minimálnych prepravných nákladov koalície S . Podmienka (4.2) implikuje, že ku každému zo zákazníkov príde vozidlo práve raz a (4.3) zabezpečuje, že od každého zákazníka vozidlo odíde práve raz. Ohraničenie

(4.4) určuje, že z každého východiskového vrcholu vyjde maximálne jedno vozidlo. Vytvoreniu parciálnych podcyklov (okrem takých podcyklov, ktoré obsahujú jedno zo stredísk) zabraňuje podmienka (4.5) a spolu s podmienkami (4.7) zabezpečujú aj podmienku neprekročenia kapacity vozidiel a bilanciu nákladu vozidla. Obmedzenia (4.6) zabezpečujú súvislosť jednotlivých trás. Vyčíslenie úloh prislúchajúcich k modelu zabezpečí nájdenie najlacnejšieho rozvozu koalície S .

Podmienku (4.4) možno modifikovať spôsobom,

$$\sum_{j \in C_S} x_{ij} \geq 1, \quad i \in W_S, \quad (4.8)$$

čím zmeníme predpoklad o existencii jedného vozidla v sklade. Zmenou tohto ohraničenia disponujú majitelia skladov viacerými vozidlami (možno tiež uvažovať o tom, že sa realizujú viaceré okružné jazdy z jedného skladu), ktoré môžu uskutočňovať obsluhu príslušných zákazníkov. Týmto predpokladom môže dochádzať nie len k úspore prepravných nákladov, ale taktiež môže vyriešiť problém neprípustnosti riešenia, ktorý môže nastať pri existencii jedného vozidla, ktorého kapacita by nestačila na obsluhu väčšieho počtu zákazníkov.

Predstavený model kooperatívnej úlohy rozvozu zabezpečí nájdenie najlepšej novej cesty príslušnej koalície pri minimálnych prepravných nákladoch. Najskôr riešime úlohu v prípade samostatného rozvozu (v prípade jednočlenných koalícií). Potom zohľadníme koalície dvoch hráčov a grand koalíciu všetkých troch hráčov navzájom. Vyčíslenie úloh prislúchajúcich k modelu zabezpečí nájdenie najlacnejšieho rozvozu koalície S .

Je zrejmé, že teda každý z hráčov by mohol realizovať svoj rozvoz aj individuálne (nekooperatívne správanie). Nech index $i, i \in W_S$, označuje index hráča v koalícii S . Nech množina $C^{(i)}$ je množinou zákazníkov i -tého hráča a množina $Z_i = \{i, C^{(i)}\}$ je množinou zákazníkov i -tého hráča rozšírená o jeho pozíciu (stredisko). Potom optimálny rozvoz hráča možno vyčísliť použitím tohto modelu (modelu II.).

$$t^{(\{i\})} = \min f(X, u) = \sum_{i \in Z_i} \sum_{j \in Z_i} d_{ij} x_{ij} \quad (4.9)$$

$$\sum_{i \in Z_i} x_{ij} = 1, j \in C^{(i)}, \quad i \neq j \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \in Z_i} x_{ij} = 1, i \in C^{(i)}, \quad i \neq j \quad (4.11)$$

$$u_i + q_j - g(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i \in Z_i, j \in C^{(i)}, i \neq j \quad (4.12)$$

$$q_i \leq u_i \leq g, \quad i \in C^{(i)} \quad (4.13)$$

Význam podmienok (4.10) a (4.11) je ekvivalentný významu podmienok (4.2) a (4.3). Podmienky (4.12) sú ekvivalentné podmienkam (4.5), podmienky (4.13) sú ekvivalentné podmienkam (4.7). Skalár $t^{\{\{i\}\}}$ (4.9) tak reprezentuje hodnotu celkových prepravných nákladov hráča v prípade nekooperatívneho správania.

Hodnota účelovej funkcie získaná použitím modelu I (4.1)-(4.7) pre koalíciu S sa označuje ako $t^{(W_S)}$ (minimálne prepravné náklady). Ak je hodnota účelovej funkcie danej koalície menšia ako suma, ktorú by získali individuálnym (nekooperatívnym) postupom hrania hry, hráči majú iniciatívu kooperovať s ostatnými, t. j. musí platiť:

$$t^{(W_S)} \leq \sum_{i \in W_S} t^{\{\{i\}\}} \quad (4.14)$$

Teda, ak sú prepravné náklady koalície menšie ako súčet nákladov jednotlivých hráčov, hráči majú tendenciu kooperovať. Ušetrené náklady koalície $s^{(W_S)}$ potom reprezentuje rozdiel:

$$s^{(W_S)} = \sum_{i \in W_S} t^{\{\{i\}\}} - t^{(W_S)} \quad (4.15)$$

pričom ich je potrebné následne prerozdeliť medzi jednotlivých hráčov. Jedným z cieľov tejto záverečnej práce je poukázať na možnosti redistribúcie benefitov z kooperácie medzi jednotlivých hráčov na základe teórie vyjednávania. Preto budeme tieto úspory nákladov prerozdeľovať pomocou modifikovaných spôsobov prerozdelenia výhier z podkapitoly 3.3.

Uvažujme s predpokladom vyloženia, resp. znovunaloženia vozidla po obsluhu zákazníkov v inom, ako východiskovom sklade v koalícii. Kapacita jednotlivých vozidiel je v každom stredisku rovnaká (predpoklad homogénneho dopravného parku). Úlohou je vyčíslieť minimálne prepravné náklady jednotlivých koalícií. Na základe modelu I (4.9)-(4.13) možno formulovať úlohu v jazyku GAMS (príloha č. 2) a tým vyčíslieť individuálne prepravné náklady hráčov v prípade, keby navzájom nespôlupracovali (jednočlenné koalície). Grafické znázornenie optimálnych trás v prípade

nekooperatívneho správania grand koalície môžeme vidieť v prílohe č. 3. Výsledky zdrojového kódu spolu s optimálnymi trasami každého hráča znázorňuje tabuľka č. 4.2.

Tabuľka č. 4.2 : Vyčíslenie $t^{(i)}$ nákladov (nekooperatívne správanie)-model II

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t^{(i)}$
$W_S = \{w_1\}$	$w_1 - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_4^{(1)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - w_1$			23,88
$W_S = \{w_2\}$		$w_2 - c_8^{(2)} - c_{10}^{(2)} - c_9^{(2)} - c_7^{(2)} - c_6^{(2)} - w_2$		15,32
$W_S = \{w_3\}$			$w_3 - c_{14}^{(3)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{15}^{(3)} - c_{13}^{(3)} - w_3$	20,50

Zdroj: Vlastné spracovanie

Zdrojový kód vieme následne modifikovať postupne pre jednotlivé koalície S : koalície S : $\{w_1\}$, $\{w_2\}$, $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$, $\{w_2, w_3\}$ a grand koalíciu $\{w_1, w_2, w_3\}$. Takto možno vyčísliť aj minimálne prepravné náklady $t^{(W_S)}$ v prípade kooperatívnej úlohy rozvozu (4.1)-(4.7) s homogénnym dopravným parkom, ktorej konkrétne hodnoty možno vidieť v tabuľke č. 4.3.

Tabuľka č. 4.3 : Vyčíslenie optimálnych trás modelu I (jedno vozidlo)

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_7^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$	$w_2 - c_{10}^{(2)} - c_{10}^{(1)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - c_6^{(2)} - w_2$		34,60	17,88
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{13}^{(3)} - w_3$		$w_3 - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - c_{14}^{(3)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	30,98	0,68
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$w_2 - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_9^{(2)} - w_3$	$w_3 - c_7^{(2)} - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - w_2$	28,77	1,40
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{11}^{(3)} - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - w_2$	$w_2 - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} - c_8^{(2)} - w_3$	$w_3 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_5^{(3)} - c_3^{(3)} - c_{12}^{(2)} - w_1$	40,77	913,05

Zdroj: Vlastné spracovanie

Predchádzajúca tabuľka č. 4.3 opisuje situáciu, keď každý hráč ako majiteľ skladu disponuje pri obsluhu svojich zákazníkov iba s jedným vozidlom vo svojom stredisku. Tabuľka č. 4.4 zohľadňuje predpoklad, že v každom stredisku sa nachádzajú viaceré vozidlá, ktoré uskutočňujú rozvoz, a teda prostredníctvom toho môže dochádzať k väčšej úspore nákladov (prípadne jedno vozidlo môže uskutočňovať viacero okružných jázd). Grafické znázornenie môžeme oboch situácii v prípade grand koalície môžeme vidieť v prílohe č. 3.

Tabuľka č. 4.4 : Vyčíslenie optimálnych trás modelu model I (viacero vozidiel)

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_8^{(2)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_6^{(2)} - w_2}{w_2 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{10}^{(2)} - w_2}$		33,10	0,40
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{11}^{(3)} - c_1^{(1)} - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - w_3$		$\frac{w_3 - c_{13}^{(3)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} - c_2^{(1)} - c_{12}^{(3)} - w_1}{w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - w_3}$	30,98	0,68
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$\frac{w_2 - c_{14}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{12}^{(3)} - c_6^{(2)} - w_2}{w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - w_3}$		26,78	0,19
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_7^{(2)} - w_3}{w_2 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - w_2}$	$w_3 - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - w_2$	37,37	3,25

Zdroj: Vlastné spracovanie

V tabuľke č. 4.4 sú okrem optimálnych trás vozidiel hráčov v jednotlivých koalíciách vyčíslené aj minimálne prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$. Uvoľnením predpokladu o existencii jedného vozidla vedie nielen k zmene jednotlivých trás hráčov, ale môžeme si všimnúť aj značnú úsporu prepravných nákladov. Napr. v prípade grand koalície $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ možno z tabuľky č. 4.3 a č. 4.4 konštatovať, že na základe vyššieho počtu vozidiel nachádzajúcich sa v stredu dokážu spoločne hráči ušetriť približne 3,40 jednotiek prepravných nákladov (možno tiež interpretovať tak, že vozidlo môže realizovať viacero okružných jázd).

V nasledujúcom texte sa zameriavame na alokáciu usporovaných nákladov, ktoré vzniknú zo vzájomnej spolupráce hráčov na základe modelu I (4.1)-(4.8) na základe modifikácii rôznych metód uvedených v kapitole 3. V tomto prípade plynú zo spolupráce určité benefity vo forme usporovaných prepravných nákladov (čo v našom prípade považujeme za „výhru“), ktoré chceme následne prerozdeliť medzi jednotlivých hráčov. Úsporu nákladov $s^{(W_S)}$ vypočítame na základe (4.15). Vychádzame z teórie vyjednávania, pričom využívame tieto spôsoby rozdelenia výhry – utilitárne riešenie, rovnostárske riešenie a Nashovo riešenie (aplikované v Figurová, 2018 a Figurová a Čičková, 2019). Teória vyjednávania je zvyčajne prepojená s teóriou užitočnosti. V tejto práci sú však „výhry“ prezentované vo forme nákladov $t^{(W_S)}$ a príslušných

usporených nákladov $s^{(W_S)}$ posudzované priamo. Z tohto dôvodu uvádzame termín „výhra“ v úvodzovkách.

Najprv je potrebné rozdeliť „výhru“ koalície medzi hráčov tak, aby rozdelenie „výhry“ bolo nezáporné, aby bolo rozdelené v plnej čiastke a aby si obaja hráči polepšili oproti jednočlennej koalícii. Nech $r_i, i \in W_S$ reprezentuje výplatu („výhru“) i -tého hráča v koalícii S . Koalícia je potom pre hráča výhodná a vznikne vtedy, keď existuje riešenie spĺňajúce ohraničenia takéhoto typu:

- nezáporné rozdelenie platieb koalície S

$$r_i \geq 0 \quad (4.16)$$

- „výhra“ koalície je rozdelená v plnej výške

$$\sum_{i \in W_S} r_i = t^{(W_S)} \quad (4.17)$$

- hráč si vstupom do koalície musí polepšiť o hodnotu ε (konštantu) oproti jednočlennej koalícii (v tomto prípade túto konštantu odpočítame, pretože uvažujeme o nákladoch)

$$r_i \leq t^{(\{i\})} - \varepsilon, \quad i \in W_S, \varepsilon \geq 0 \quad (4.18)$$

Účelová funkcia mení svoj tvar v závislosti od rôznych spôsobov prerozdelenia. Vo všeobecnosti, hodnotu účelovej funkcie vypočítame ako rozdiel medzi hodnotou, ktorú hráč získa v nekooperatívnom správaní (tzv. zaručený úžitok) a hodnotou, ktorú získa spoluprácou. Tento rozdiel (budeme ho označovať benefit z kooperácie) spolu s ohraničeniami (4.16)-(4.18) potom maximalizujeme v závislosti od uvažovanej metódy prerozdelenia.

V nasledujúcom texte sa zameriame na modifikáciu matematických formulácií prezentovaných spôsobov alokácie výhry, ktoré boli spomenuté v podkapitole 3.3. Prezentujeme spôsoby prerozdelenia „výhry“ vyplývajúcej z úlohy kooperatívneho rozvozu na základe teórie vyjednávania, pričom prepravné náklady a príslušné úspory reprezentujú hráčovú užitočnosť, ktorá mu plyní zo spolupráce. Najskôr vypočítame rozdelenie prepravných nákladov medzi hráčov na základe rôznych spôsobov alokácie a potom vyčíslujeme úspory, ktoré treba medzi hráčov rozdeliť. Pritom prijímame predpoklad, že si každý z hráčov musí polepšiť aspoň o nejakú hodnotu $\varepsilon = 0,1$ (malé kladné číslo) oproti jednočlenným koalíciám. To znamená, že podmienkou je, že si hráči

vstupom do koalície nezhoršia svoju situáciu v hre. Pri výpočtoch využívame tieto spôsoby rozdelenia „výhry“: utilitárne riešenie, rovnostárske riešenie, Nashovo riešenie a Shapleyho hodnotu.

V rovnostárskom riešení alokácie „výhry“ si hráči rozdelia „výhru“ maximalizovaním minima benefitov vyplývajúcich z kooperácie. Účelová funkcia je potom formulovaná takto:

$$\max f(r) = \min_{i \in W_S} (\{t^{(i)} - r_i\})$$

Táto úloha však nie je úlohou matematického programovania, a preto do modelu zavádzame novú premennú d , ktorá reprezentuje maximálnu hodnotu minimalizovanej funkcie benefitov z kooperácie. Účelová funkcia po transformácii je potom v tvare:

$$\max f(r, d) = d. \quad (4.19)$$

Hodnota benefitov z kooperácie potom musí byť väčšia alebo rovná tejto premennej d , čo zabezpečíme prijatím nového predpokladu do úlohy (v spojení s ostatnými predpokladmi (4.16)-(4.18)):

$$t^{(i)} - r_i \geq d, i \in W_S. \quad (4.20)$$

Tabuľka č. 4.5: Rovnostárske riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.20)

Koalície	Náklady ($t_1^{(W_S)}$)	$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,10	39,20	6,10	20,83	12,27	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	30,98	44,38	13,40	17,18		13,80
$W_S = \{w_2, w_3\}$	26,78	35,82	9,04		10,80	15,98
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	59,70	22,33	16,437	7,877	13,057

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.6: Rovnostárske riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.20)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	6,10	3,05	3,05	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	13,40	6,70		6,70
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,04		4,52	4,52
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	22,33	7,443	7,443	7,443

Zdroj: Vlastné spracovanie

Rovnostárske riešenie rozdelí prepravné náklady medzi hráčov tak, aby si následné úspory rozdelili rovnakým dielom. Napr. v grand koalícii $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ má hráč 1 náklady vo výške 16,437 hráč 2 vo výške 7,877 a hráč 3 vo výške 13,057 jednotiek.

Hráči si v rámci tejto koalície potom rozdeľujú 22,33 jednotiek úspor na základe rovnostárskeho rozdelenia v rovnakom pomere, to znamená, že každý získa 7,443 jednotiek.

Shapleyho hodnota hráča predstavuje strednú hodnotu prínosu tohto hráča koalícii všetkých hráčov pri všetkých možných spôsoboch vytvárania veľkej koalície. Charakterizuje v určitom zmysle jeho „silu“ z hľadiska možnosti spolupracovať s ostatnými hráčmi. Shapleyho hodnotu na výpočet rozdelenia „výhry“ z kooperatívnej hry rozvozu vypočítame na základe vzťahov:

$$h_i = \sum_{W_S \in P(W)} \frac{(|W_S| - 1)! (|W| - |W_S|)!}{|W|!} [-t^{(W_S)} + t^{(W_S - \{i\})}], i \in W_S, \quad (4.21)$$

$$h_i = \sum_{W_S \in P(W)} \frac{(|W_S| - 1)! (|W| - |W_S|)!}{|W|!} [s^{(W_S)} - s^{(W_S - \{i\})}], i \in W_S, \quad (4.22)$$

Kde $|W_S|$ reprezentuje počet členov v koalícii W_S a $|W| = k$ (počet hráčov). $P(W)$ predstavuje všetky podmnožiny množiny W . Hodnotu prepravných nákladov $t^{(W_S)}$ koalícií získame z tabuľky č. 4.4. Hodnotu úspor získame na základe (4.15), pričom predpokladáme, že $s^{(\emptyset)} = 0$. Veličina v hranatých zátvorkách označuje hodnotu, o ktorú sa zvýšia úspory nákladov $W_S - \{i\}$, keď sa i -ty hráč pripojí ku koalícii (vyjadruje prínos i -tého hráča koalícii S). Z tohto dôvodu označujeme výraz $[s^{(W_S)} - s^{(W_S - \{i\})}]$ ako hraničné úspory i -tého hráča v rámci koalície W_S , ktorej môže byť členom. Hraničné náklady i -tého hráča v rámci koalície W_S sú reprezentované výrazom $[-t^{(W_S)} + t^{(W_S - \{i\})}]$.

V tabuľke č. 4.7 vyčíslime rozdelenie nákladov a úspor na základe Shapleyho hodnoty. Výsledky prezentujeme na grand koalícii.

Tabuľka č. 4.7: *Shapleyho hodnota pri rozdelení nákladov na základe (4.21)*

Koalície	Náklady $t_1^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	59,70	22,33	16,32	9,94	11,11

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.8: Shapleyho hodnota pri alokácii úspor na základe (4.22)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	22,33	7,56	5,38	9,39

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe nej si v grand koalícii $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ hráč 1 vyslúžil výhru vo forme úspor v hodnote 7,56 jednotiek, 5,38 jednotiek získal hráč 2, pričom hráčovi 3 prislúcha na základe jeho „sily“ presne 9,39 jednotiek úspor.

Pokiaľ uvažujeme *utilitárne riešenie redistribúcie* „výhry“ prijímame predpoklad o rozdelení koalície „výhry“ medzi jednotlivých hráčov koalície S : hráči si výhru rozdelia tak, že budú maximalizovať celkový úžitok koalície (súčet úžitkov jednotlivých hráčov). V prípade utilitárneho riešenia prerozdelenia ušetrených nákladov možno účelovú funkciu formulovať ako:

$$\max f(r) = \sum_{i \in W_S} (t^{(\{i\})} - r_i) \quad (4.23)$$

a spolu s ohraničeniami (4.16)-(4.18) formulovať ako úlohu matematického programovania. V prípade existencie konvexnosti tejto funkcie môžeme získať jednoznačné riešenie. Avšak v tomto prípade je účelová funkcia (4.23) lineárna a nie striktné konvexná, a preto nie je možné získať takto jednoznačne určené riešenie. Znamená to, že optimálne riešenie tejto úlohy je vyjadrené pomocou hraničných bodov, t. z. riešenie redistribúcie „výhry“ pre jednotlivých hráčov sa nachádza v tomto intervale:

$$r_i = \left(\max \left\{ 0, t^{(W_S)} - \sum_{j \in W_S - \{i\}} (t^{(\{j\})} - \varepsilon) \right\}, t^{(\{i\})} - \varepsilon \right), \quad i \in W_S.$$

Znamená to, že redistribúcia „výhry“ je daná konvexnou lineárnou kombináciou týchto hraničných bodov.

Tabuľka č. 4.9 : Utilitárne riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18) + (4.23)

Koalície	Náklady $t_1^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,10	$\langle 17,88; 23,78 \rangle$	$\langle 9,32; 15,22 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	30,98	$\langle 10,58; 23,78 \rangle$		$\langle 7,2; 20,4 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	26,78		$\langle 6,38; 15,22 \rangle$	$\langle 11,56; 20,4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	$\langle 1,75; 23,78 \rangle$	$\langle 0; 15,22 \rangle$	$\langle 0; 20,4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Výsledky získané na základe hraničných bodov sú zhrnuté v tabuľke č. 4.9. Úloha matematického programovania (4.16)-(4.18) s účelovou funkciou (4.23) utilitárneho riešenia predstavuje metódu alokácie usporovaných nákladov v prípade kooperatívneho správania.

Alokácia úspor na základe utilitárneho riešenia je prezentovaná v tabuľke č. 4.10

Tabuľka č. 4.10 : Utilitárne riešenie alokácie úspor modelu (4.16)-(4.18) + (4.23)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	6,10	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	13,40	$\langle 0.1; 13.30 \rangle$		$\langle 0.1; 13.30 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,04		$\langle 0.1; 8.94 \rangle$	$\langle 0.1; 8.94 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	22,33	$\langle 0.1; 22.03 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

V prípade Nashovho riešenia redistribúcie rozdelíme „výhru“ tak, že maximalizujeme súčin úžitkov hráčov z kooperácie. Účelová funkcia úlohy matematického programovania vyzerá takto (pri rešpektovaní podmienok (4.16)-(4.18)):

$$\max f(r) = \prod_{i \in W_S} t^{(i)} - r_i. \quad (4.24)$$

Resp. môžeme použiť na vyjadrenie účelovej funkcie aj logaritmus:

$$\max f(r) = \sum_{i \in W_S} \log(t^{(i)} - r_i).$$

Tabuľka č. 4.11 : Nashovo riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	Náklady $t^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,10	$\langle 18.60; 23.78 \rangle$	$\langle 10.04; 15.22 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	30,98	$\langle 10.58; 23.78 \rangle$		$\langle 7.2; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	26,78		$\langle 6.38; 15.22 \rangle$	$\langle 11.56; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	$\langle 1.75; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.12 : Nashovo riešenie alokácie úspor modelu (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície (S)	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	6,10	$\langle 0,1;6,00 \rangle$	$\langle 0,1;6,00 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	13,40	$\langle 0,1;13,30 \rangle$		$\langle 0,1;13,30 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,04		$\langle 0,1;8,94 \rangle$	$\langle 0,1;8,94 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	22,33	$\langle 0,1;22,03 \rangle$	$\langle 0,1;15,32 \rangle$	$\langle 0,1;20,5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

V prípade Nashovho riešenia vyšli rovnaké výsledky ako v prípade utilitárneho. V tomto prípade si hráči rozdelia „výhru“ medzi sebou tak, aby sa jej hodnota nachádzala v intervale v tabuľke č. 4.13.

4.1.2.2 Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom s predpokladom návratu vozidla do svojho východiskového strediska (model III)

Predpokladajme, že v každom stredisku sa nachádza jeden druh vozidla s rovnakou kapacitou g jednotiek. Uvažujme situáciu, v ktorej predpokladáme návrat vozidla do svojho východiskového skladu, keď sa vozidlo hráčov po obsluhu množiny zákazníkov v koalícii musí vrátiť do svojho východiskového skladu. Definované množiny a parametre úlohy v predchádzajúcej podkapitole zostávajú nezmenené, pričom uvažujeme takéto premenné:

- $x_{ij} \in \{0,1\}$ $i, j \in V_S$, $i \neq j$ s významom ako v predchádzajúcom prípade.
- $u_i \geq 0$, $i \in V_S$ s významom ako v predchádzajúcom prípade.
- $v_{ijh} \geq 0$, $i, j \in V_S$, $i \neq j$, $h \in W_S$ pozitívne premenné reprezentujú prejazd vozidla cez h -ty sklad a hranu (i, j) , ktorá nie je deklarovaná ako binárna premenná, ale nadobúda hodnotu:
 - $v_{ijh} = \begin{cases} 1, & \text{ak hrana medzi vrcholmi } i \text{ a } j \text{ je obslužená vozidlom } h\text{-tého skladu, } h \in W_S \\ 0, & \text{v opačnom prípade} \end{cases}$

Množiny a parametre sú rovnaké ako v predchádzajúcom modeli (4.1)-(4.7).

Matematická formulácia je potom takáto:

$$t_3^{(W_S)} = \min f(X, u) = \sum_{i \in V_S} \sum_{j \in V_S} \sum_{h \in W_S} d_{ij} x_{ij} \quad (4.25)$$

$$\sum_{i \in V_S} x_{ij} = 1, j \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.26)$$

$$\sum_{j \in V_S} x_{ij} = 1, i \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.27)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{ij} \leq 1, \quad i \in W_S \quad (4.28)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{ij} = \sum_{j \in C_S} x_{ji}, \quad i \in W_S \quad (4.29)$$

$$u_i + q_j - g(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i \in V_S, j \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.30)$$

$$q_i \leq u_i \leq g, \quad i \in C_S \quad (4.31)$$

$$\sum_{h \in W_S} v_{ijh} = x_{ij}, \quad i, j \in V_S, \quad i \neq j \quad (4.32)$$

$$v_{ijh} \leq 1, \quad i, j \in V_S, h \in W_S \quad (4.33)$$

$$v_{iji} \geq x_{ij}, \quad i \in W_S, \quad j \in C_S \quad (4.34)$$

$$v_{jii} \geq x_{ji}, \quad i \in W_S, \quad j \in C_S \quad (4.35)$$

$$\sum_{i \in V_S} v_{ijh} = \sum_{l \in V_S} v_{jli}, \quad j \in C_S, \quad h \in W_S, i \neq j, l \neq j \quad (4.36)$$

Skalár $t_3^{(W_S)}$ (4.25) reprezentuje minimálnu hodnotu prepravných nákladov celkovej prejdenej vzdialenosti v optimálnych trasách danej koalície. Skupina ohraničujúcich podmienok (4.26) a (4.27) zaručuje, že každého zákazníka navštívi jedno vozidlo práve jedenkrát. (4.28) vyjadruje, že z každého skladu vyjde maximálne jedno vozidlo (tento predpoklad možno modifikovať¹², čím zmeníme predpoklad o existencii len jedného vozidla, resp. jedno vozidlo môže absolvovať viacero jázd po jeho znovunaložení v príslušnom stredisku, čím môže opäť dochádzať k úspore prepravných nákladov). Ohraničenie (4.29) zabezpečuje rovnováhu využívania vozidla i -tého skladu, $i \in W_S$. Podmienky eliminácie podcyklov sú (4.30). Podmienky (4.31) zaručujú neprekročenie kapacity daného vozidla. Skupina podmienok (4.32), (4.33), (4.34) a (4.35) slúži na reprezentáciu obsluhy hrany vozidlom z i -tého skladu $i \in W_S$. Kontinuita trás vozidla i -tého skladu je modelovaná na základe ohraničení (4.36).

Modifikujme zadanie predchádzajúceho príkladu. Predpokladajme teraz prípad návratu vozidla do svojho východiskového skladu. Ostatné parametre úlohy ostávajú nezmenené. Kód v programe GAMS je na základe modelu (4.16)-(4.28) v prípade

¹² $\sum_{j \in C_S} x_{ij} \geq 1, \quad i \in W_S,$

koalície troch hráčov $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ uvedený v prílohe č. 5. Vyčíslime optimálne trasy vozidiel a súvisiace náklady pre jednotlivých hráčov pri predpoklade o návrate vozidla do východiskového skladu, pričom každý z hráčov disponuje buď jedným vozidlom, alebo viacerými vozidlami, čím dôjde k ďalšej úspore prepravných nákladov (výsledky jednočlenných koalícií ostávajú nezmenené). Výsledky sú zhrnuté v tabuľke č. 4.13 a tabuľke č. 4.14.

Tabuľka č. 4.13 : Optimálne trasy a min. prepravné náklady s jedným vozidlom

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_7^{(2)} - c_3^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$	$w_2 - c_8^{(2)} - c_{10}^{(2)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - c_6^{(2)} - w_2$		34,60	12,30
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_3^{(1)} - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$		$w_3 - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{13}^{(3)} - c_{14}^{(3)} - c_5^{(1)} - w_3$	33,00	7,50
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$w_2 - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_9^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - w_2$	$w_3 - c_{13}^{(3)} - c_7^{(2)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_8^{(2)} - w_3$	31,17	6,10
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_3^{(1)} - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$w_2 - c_8^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{13}^{(3)} - w_2$	$w_3 - c_9^{(2)} - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_5^{(1)} - c_7^{(2)} - w_3$	42,91	17606,91

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.14: Optimálne trasy a min. náklady s viacerými vozidlami

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_8^{(2)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_6^{(2)} - w_2}{w_2 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{10}^{(2)} - w_2}$		33,10	0,33
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$		$\frac{w_3 - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - c_{14}^{(3)} - w_3}{w_3 - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} - w_3}$	31,98	0,38
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$\frac{w_2 - c_{14}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{12}^{(3)} - c_6^{(2)} - w_2}{w_2 - c_8^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{13}^{(3)} - w_2}$	$\frac{w_3 - c_7^{(2)} - w_3}{w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - w_3}$	26,78	0,22
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_6^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - c_{14}^{(3)} - w_2}{w_2 - c_8^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{13}^{(3)} - w_2}$	$w_3 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - w_3$	38,55	94,47

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe tabuľky č. 4.13 a tabuľky č. 4.14 možno skonštatovať, že po zavedení predpokladu o viacnásobnom počte vozidiel v jednotlivých strediskách sa vo všetkých prípadoch znížili prepravné náklady v koalíciách, a teda výsledky s týmto predpokladom

považujeme za prijateľnejšie. Možno porovnať aj čas výpočtu programu GAMS, pričom konštatujeme, že model s uvoľneným predpokladom existencie jedného vozidla vykazuje prijateľnejšie výsledky. Grafické znázornenie oboch situácií v prípade grand koalície môžeme vidieť v prílohe č. 6.

V texte sa zameriavame na alokáciu usporovaných nákladov, ktoré vzniknú zo vzájomnej spolupráce hráčov na základe modelu (4.25)-(4.36). Úsporu nákladov vypočítame na základe výrazu (4.15). Predstavené spôsoby alokácie úspor z kooperácie uvedených v podkapitole 3.4 vypočítame na základe kódov GAMSu (príslušné kódy v programe GAMS sú uvedené v prílohe č. 4). Najskôr vypočítame rozdelenie prepravných nákladov medzi hráčov na základe rôznych spôsobov alokácie a potom vyčíslujeme aj úspory, ktoré treba medzi hráčov rozdeliť.

Tabuľka č. 4.15: Rovnostárske riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.20)

Koalície	Náklady $t_3^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,10	39,20	6,10	20,83	12,27	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	31,98	44,38	12,40	17,68		14,30
$W_S = \{w_2, w_3\}$	26,78	35,82	9,04		10,80	15,98
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	38,55	59,70	21,15	16,83	8,27	13,45

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.16: Rovnostárske riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	6,10	3,05	3,05	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	12,40	6,20		6,20
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,04		4,52	4,52
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	21,15	7,05	7,05	7,05

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.17 : Shapleyho hodnota pri rozdelení nákladov na základe (4.21)

Koalície	Náklady $t_3^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	38,55	59,70	21,15	16,760	9,880	11,910

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.18: Shapleyho hodnota pri alokácii úspor na základe (4.22)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	21,15	11,032	3,042	7,077

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.19: Utilitárne riešenie rozdelenia nákladov C

Koalície	Náklady $t_3^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S=\{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S=\{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S=\{w_1, w_2\}$	33,10	$\langle 17.88; 23.78 \rangle$	$\langle 9.32; 15.22 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	31,98	$\langle 11.58; 23.78 \rangle$		$\langle 8.2; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	26,78		$\langle 6.38; 15.22 \rangle$	$\langle 11.56; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	38,55	$\langle 2.93; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Výsledky získané na základe hraničných bodov sú zhrnuté v tabuľke č. 4.19. Úloha matematického programovania utilitárneho riešenia (4.16)-(4.18) spolu s (4.23) predstavuje prístup alokácie usporovaných nákladov v prípade kooperatívneho správania, ktorej riešením nie je len jeden bod, ale opäť interval, v ktorom sa môžu pohybovať alokácia nákladov a úspor. Alokácia úspor na základe utilitárneho riešenia je prezentovaná v tabuľke č. 4.20.

Tabuľka č. 4.20 : Utilitárne riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.18)+(4.23)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1, w_2\}$	6,10	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	12,40	$\langle 0.1; 12.30 \rangle$		$\langle 0.1; 12.30 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	9,04		$\langle 0.1; 8.94 \rangle$	$\langle 0.1; 8.94 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	21,15	$\langle 0.1; 20.95 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.21: Nashovo riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	Náklady $t_3^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S=\{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S=\{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S=\{w_1, w_2\}$	33,10	$\langle 17.88; 23.78 \rangle$	$\langle 9.32; 15.22 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	31,98	$\langle 11.58; 23.78 \rangle$		$\langle 8.2; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	26,78		$\langle 6.38; 15.22 \rangle$	$\langle 11.56; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	38,55	$\langle 2.93; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.22: Nashovo riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1, w_2\}$	6,10	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	$\langle 0.1; 6.00 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	12,40	$\langle 0.1; 12.30 \rangle$		$\langle 0.1; 12.30 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	9,04		$\langle 0.1; 8.94 \rangle$	$\langle 0.1; 8.94 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	21,15	$\langle 0.1; 20.95 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Koaličné správanie hráčov musí avšak súčasne podliehať dohodám o prerozdelení výhier. Je zrejmé, že takéto dohody musia rešpektovať tzv. axiómy racionality. Axiómy racionality majú niekoľko foriem, pričom za základné možno považovať axiómy von Neumanna – Morgensterna. V tomto prípade nás zaujíma axióma individuálnej racionality (podmienka individuálnej stability¹³), ktorá požaduje, aby hráč v koalícii získal aspoň toľko, koľko by si zabezpečil individuálnym postupom hrania hry.

Najskôr sa zameriame na rešpektovanie podmienky v modeli I (4.1) - (4.8), ktorý našiel optimálne riešenie v prípade kooperatívneho rozvozu a predpokladom znovunaloženia vozidla v inom ako východiskovom sklade. V tabuľke č. 4.23 vyčíslujeme individuálne náklady hráča, ktoré mu prislúchajú v koalícii.

Tabuľka č. 4.23: Porovnanie individuálnych nákladov hráčov modelu I

Koalícia	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$ modelu I bez IS	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$ modelu I po zavedení podmienky IS ¹⁴	Individuálne náklady na trasu hráča v koalícii S					
			Hráč 1		Hráč 2		Hráč 3	
			Bez IS	S IS	Bez IS	S IS	Bez IS	S IS
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	23,88	23,88				
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32			15,32	15,32		
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50					20,50	20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,10	33,82	12,30	19,18	20,80	14,64		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	30,98	30,98	17,20	17,20			13,78	13,78
$W_S = \{w_2, w_3\}$	26,78	26,78			12,50	12,50	14,28	14,28
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	37,37	13,80	13,80	12,09	12,09	11,48	11,48

Zdroj: Vlastné spracovanie

V tabuľke 4.23 sú vyčíslené prepravné náklady hráčov, ktoré dosiahnu spoluprácou v koalíciách na základe modelu I, pričom výsledky porovnávame so zavedeným predpokladom podmienky IS. Potvrdzujeme, že nie v každej situácii si

¹³ skr. IS

¹⁴ Toto dosiahneme uvoľnením predpokladu (4.35) v modeli III prostredníctvom GAMS programu v prílohe č. 6

vstupom do koalície hráč polepší svoju situáciu, to znamená že ich výška nákladov v koalícii je vyššia ako v prípade nekooperatívneho správania. Tento prípad vyriešime zavedením podmienky individuálnej stability do modelu I. Táto situácia nastala pri koalícii $W_S = \{w_1, w_2\}$, kde individuálne náklady na trasu (20,80 jednotiek) hráča 2 v tejto koalícii sú vyššie ako tie náklady, ktoré dosahuje nekooperatívnym správaním (15,32 jednotiek). Po zavedení predpokladu o podmienke IS sa celkové prepravné náklady koalície síce zvýšili (konkrétne o 0,72 jednotiek), avšak možno potvrdiť, že vzájomnou spoluprácou hráči dosahujú značné úspory. Potom možno z tabuľky č. 4.23 vidieť, že prepravné náklady druhého hráča v prípade nekooperatívneho správania sú vo výške 15,32 jednotiek, pričom v prípade vzájomnej spolupráce všetkých hráčov by sa jeho náklady znížili na hodnotu 12,09 jednotiek (ušetrí tak 3,23 jednotiek nákladov). V tabuľke č. 4.24 prezentujeme nové optimálne trasy v prípade koalície dvoch hráčov $W_S = \{w_1, w_2\}$ s rešpektovaním podmienky IS.

Tabuľka č. 4.24: Nové opt. trasy koalície po zavedení podmienky IS

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1 a jeho náklady	Cesta zo skladu hráča 2 a jeho náklady	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$ po zavedení IS	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	19,18 j. nákladov	14,64 j. nákladov	33,82	0,61
	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_6^{(2)} - c_5^{(2)} - c_3^{(1)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_8^{(2)} - w_2}{w_3 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{10}^{(2)} - w_2}$		

Zdroj: Vlastné spracovanie

Model III (4.25) – (4.36) našiel optimálne riešenie v prípade kooperatívneho rozvozu s návratom do východiskového skladu. V niektorých prípadoch sa však opäť potvrdilo, že môže nastať situácia, kedy podmienka individuálnej stability nie je rešpektovaná. V tomto prípade túto podmienku zakomponujeme rovno do modelu III.

Nech $f_k, k \in W_S$ reprezentuje individuálne prepravné náklady hráča. Ich výška môže byť vypočítaná prostredníctvom kapacitnej okružnej úlohy (Figurová a Čičková, 2018), prípadne modelom spomenutého vyššie, pričom uvažujeme jednu prvkovú množinu W_S . Potom možno do modelu III (4.16) – (4.28) pridať podmienku IS:

$$\sum_{i \in V_S} \sum_{j \in V_S} d_{ij} * v_{ijk} \leq f_k, k \in W_S \quad (4.37)$$

Optimálne riešenie v rámci redistribúcie usporiadaných nákladov koalícií tak možno modelovať ako hry s neprenosnými výhrami pri rešpektovaní podmienky individuálnej stability (4.37).

Na základe výsledkov v tabuľke č. 4.25 overíme, či je v prípade vyčíslenia nákladov splnená podmienka individuálnej stability. Z tohto dôvodu sme do modelu pridali podmienku (4.37), a tým zabezpečili, že hráč si vstupom do koalície polepší a ušetrí tak viac prepravných nákladov než by rozvoz absolvoval individuálne (samostatne). V tabuľke č. 4.25 zhrnieme a porovnáme výsledky pri rešpektovaní podmienky IS.

Tabuľka č. 4.25 : Porovnanie prepravných nákladov pri rešpektovaní IS

Koalícia	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$ modelu III bez IS	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$ po zavedení podmienky IS	Individuálne náklady na trasu hráča v koalícii					
			Hráč 1		Hráč 2		Hráč 3	
			Bez IS	S IS	Bez IS	S IS	Bez IS	S IS
$W_S=\{w_1\}$	23,88	23,88	23,88	23,88				
$W_S=\{w_2\}$	15,32	15,32			15,32	15,32		
$W_S=\{w_3\}$	20,50	20,50					20,50	20,50
$W_S=\{w_1, w_2\}$	33,10	33,82	12,30	19,18	20,80	14,64		
$W_S=\{w_1, w_3\}$	31,98	31,98	13,80	13,80			18,18	18,18
$W_S=\{w_2, w_3\}$	26,78	26,78			12,50	12,50	14,28	14,28
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	38,55	39,06	13,80	13,80	15,70	11,18	9,05	14,08

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z výsledkov v tabuľke č. 4.25 možno prijať niekoľko záverov. V modeli (4.16)-(4.28) prijímame predpoklad o návrate vozidla do svojho východiskového skladu. Avšak, v niektorých prípadoch nie je podmienka individuálnej stability splnená, a to konkrétne pre koalíciu $W_S = \{w_1, w_2\}$ a $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ (prepravné náklady jednotlivých hráčov v koalícii sú vyššie ako v prípade nekooperatívneho správania). Konštatujeme, že po prijatí predpokladu sa síce v niektorých prípadoch zvýšili celkové náklady prepravy, ale individuálne prepravné náklady jednotlivých hráčov v koalíciách sú nižšie ako v prípade nekooperatívneho správania. Napr. pri trojkoalícii $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ v modeli III bez rešpektovania podmienky IS vidíme, že individuálne

prepravné náklady hráča 2 sú vo výške 15,70 jednotiek, a teda sú vyššie ako v prípade nekooperatívneho správania (15,32 jednotiek). Pridaním podmienky IS (4.29) do modelu (4.16)-(4.28) sa síce zvýšia minimálne prepravné náklady z 38,55 na 39,06 jednotiek, avšak na druhej strane sa jednotlivým hráčom upraví hodnota ich individuálnych prepravných nákladov v danej koalícii tak, aby podmienka individuálnej stability bola splnená. Prepravné náklady hráča 1 sú v tomto prípade v hodnote 13,80 jednotiek, hráča 2 v hodnote 11,18 a hráča 3 v hodnote 14,08 jednotiek, čo je v súlade s podmienkou IS. V tabuľke č. 4.26 prezentujeme nové optimálne trasy v prípade koalície hráčov $W_S = \{w_1, w_2\}$ a $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ s rešpektovaním podmienky IS.

Tabuľka č. 4.26: Nové opt. trasy koalícií po zavedení podmienky IS

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1 a jeho náklady	Cesta zo skladu hráča 2 a jeho náklady	Cesta zo skladu hráča 3 a jeho náklady	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$ po zavedení IS	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	19,18 j. nákladov	14,64 j. nákladov		33,82	0,61
	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_6^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_8^{(2)} - w_2}{w_2 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{10}^{(2)} - w_2}$			
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	13,80 j. nákladov	11,18 j. nákladov	14,08 j. nákladov	39,06	150,27
	$w_1 - c_{11}^{(3)} - c_1^{(1)} - c_2^{(2)} - c_{12}^{(3)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_{13}^{(3)} - c_8^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_6^{(2)} - w_2}{w_2}$	$\frac{w_3 - c_7^{(2)} - w_3}{w_3 - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - w_3}$		

Zdroj: Vlastné spracovanie

4.1.2.3 Porovnanie výsledkov kooperatívneho a nekooperatívneho správania

V predchádzajúcom texte sme na základe výrazu (4.14) tvrdili, že ak sú prepravné náklady $t^{(W_S)}$ koalície menšie ako súčet nákladov individuálnych hráčov $t^{(\{i\})}$, hráči majú tendenciu kooperovať. Toto porovnanie v prípade kooperatívneho rozvozu s homogénnym parkom s návratom vozidla (model III) a jeho znovunaplnením (model I) možno vidieť v tabuľke č. 4.27.

Tabuľka č. 4.27: Porovnanie kooperatívneho a nekooperatívneho správania

Koalícia	Model I (4.1)-(4.8)				Model III (4.25)-(4.37)			
	Prepravné náklady $t_1^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$		$s^{(W_S)}$	Prepravné náklady $t_3^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$		$s^{(W_S)}$
$W_S=\{w_1\}$	23,88	=	23,88	0,00	23,88	=	23,88	0,00
$W_S=\{w_2\}$	15,32	=	15,32	0,00	15,32	=	15,32	0,00
$W_S=\{w_3\}$	20,50	=	20,50	0,00	20,50	=	20,50	0,00
$W_S=\{w_1, w_2\}$	33,82	$\leq$	39,20	5,38	33,82	$\leq$	39,20	5,38
$W_S=\{w_1, w_3\}$	30,98	$\leq$	44,38	13,40	31,98	$\leq$	44,38	12,40
$W_S=\{w_2, w_3\}$	26,78	$\leq$	35,82	9,04	26,78	$\leq$	35,82	9,04
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	37,37	$\leq$	59,70	22,33	39,06	$\leq$	59,70	20,64

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z porovnania výsledkov získaných použitím modelov I a III a z vyčíslenia individuálnych nákladov, t. j. nákladov, ktoré by hráči získali v prípade nekooperatívneho správania je zrejmé, že po zavedení predpokladu kooperatívneho správania sa v každej situácii (v koalícii) znížili prepravné náklady. Možno potvrdiť, že spolupráca jednotlivých hráčov je vo všetkých prípadoch výhodná, pretože dochádza k úspore prepravných nákladov, a teda platí výraz (4.14). V tabuľke č. 4.27 vyčíslujeme aj výšku „výhry“ vo forme usporovaných nákladov $s^{(W_S)}$, ktoré hráčom plynú zo vzájomnej spolupráce. Napr. v prípade grand koalície $W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$ v modeli III hráči ušetrili približne 20,64 jednotiek prepravných nákladov oproti situácii, keď sa rozvoz realizuje individuálne.

Vzájomných porovnávaním predstavených modelov I a III môžeme na základe tabuľky č. prijať záver, že zavedenie predpokladu o znovunaplnení vozidla v inom ako východiskovom sklade v koalícii spôsobil, že v mnohých prípadoch sa prepravné náklady znížili, prípadne ostali nezmenené. Napr. v prípade grand koalície $W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$ uvoľnením predpokladu o návrate vozidla do svojho východiskového skladu sa znížili ich prepravné náklady o 1,69 jednotiek.

4.1.3 Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom

V tomto type úlohy predpokladáme existenciu niekoľkých skladov, z ktorých je obsluhovaná určitá množina zákazníkov, pričom implicitne predpokladáme, že kapacita týchto skladov je neobmedzená. Matematický model je formulovaný na orientovanom, hranovo ohodnotenom grafe $\bar{G} = (V, \bar{H})$. Parametre a množiny tohto typu úlohy

kooperatívneho rozvozu ostávajú nezmenené z predchádzajúceho príkladu s tým, že rôznorodú kapacitu vozidiel i -tého skladu označujeme g_i , $i \in W$, pričom každý zo zákazníkov vo vrchole $j, j \in C^{(U)}$ požaduje dovoz určitého množstva tovaru (označovaného ako g_j , $j \in C_S$). Parametre a množiny ostávajú nezmenené z predchádzajúceho prípadu a premenné sú tieto:

Premenné

- $x_{ijh} \in \{0,1\}$ $i, j \in V_S, h \in W_S, i \neq j$ reprezentuje či uzol i prechádza cez j v optimálnej trase vozidla z h -tého skladu ($x_{ijh} = 1$) alebo nie ($x_{ijh} = 0$). Predpokladáme, že $x_{ijh} = 0, i, j, h \in W_S$.
- $u_{ih} \geq 0$ $i \in C_S, h \in W_S$ reprezentuje zaťaženie vozidla na jeho trase do i -tého uzla (vrátane). Predpokladáme, že $u_{ii} = 0, i \in W_S$, čo znamená nulový náklad vozidla na začiatku jeho trasy z východiskového skladu.

Ďalej predpokladáme, že v každom sklade sa nachádza iba jeden typ vozidla. Počet vozidiel v skladoch nie je obmedzený, čo možno interpretovať spôsobom, že vozidlo dokáže absolvovať viacero trás. Najskôr predpokladáme situáciu, v ktorej sa musí vozidlo po obsluhu svojich zákazníkov vrátiť do svojho východiskového skladu. Cieľom je určiť optimálne trasy vozidiel s cieľom uspokojenia požiadaviek daných zákazníkov. Požiadavky zákazníkov sú realizované v celku, t. j. ak vozidlo obsluží zákazníka, bude realizovaná celá dodávka s ohľadom na neprekročenie kapacity vozidla. Hlavným cieľom ostáva minimalizácia celkových prepravných nákladov. V predstavenom modeli implicitne predpokladáme, že $q_j \leq g_i, i \in W, j \in C_S$, čo znamená, že veľkosť požiadavky zákazníka nepresiahne kapacitu vozidla.

4.1.3.1 Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a predpokladom návratu vozidla do svojho východiskového strediska (model IV)

Matematická formulácia modelu kooperatívnej úlohy rozvozu s heterogénnym dopravným parkom s návratom do svojho východiskového skladu môže byť na základe spomenutých predpokladov zapísaná takto:

$$t_4^{(W_S)} = \min f(X, u) = \sum_{i \in V_S} \sum_{\substack{j \in V_S \\ i \neq j}} \sum_{h \in W_S} d_{ij} x_{ijh} \quad (4.38)$$

$$\sum_{i \in V_S} \sum_{h \in W_S} x_{ijh} = 1, \quad j \in C_S, \quad i \neq j \quad (4.39)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{iji} \leq 1, \quad i \in W_S \quad (4.40)$$

$$\sum_{j \in V_S} x_{ijh} = \sum_{j \in V_S} x_{jih}, \quad i \in V_S, \quad h \in W_S \quad (4.41)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{iji} = \sum_{j \in C_S} x_{jii}, \quad i \in W_S \quad (4.42)$$

$$\sum_{j \in C_S} x_{iji} = \sum_{j \in C_S} \sum_{h \in W_S} x_{ijh}, \quad i \in W_S \quad (4.43)$$

$$u_{ih} + q_j - g_h(1 - x_{ijh}) \leq u_{jh}, \quad i \in V_S, \quad j \in C_S, \quad h \in W_S, \quad i \neq j \quad (4.44)$$

$$u_{ii} + q_j - g_i(1 - x_{iji}) \leq u_{ji}, \quad i \in W_S, \quad j \in C_S, \quad j \neq i \quad (4.45)$$

$$u_{ih} \leq g_h, \quad i \in C_S, \quad h \in W_S \quad (4.46)$$

Skalár $t_4^{(W_S)}$ (4.38) reprezentuje minimálnu hodnotu celkových prepravných trás. Ohraničenie (4.39) garantuje, že každý zákazník bude navštívený práve raz a práve jedným vozidlom (4.40)¹⁵. Podmienky (4.41) a (4.42) zabezpečujú súvislosť jednotlivých trás. Obmedzenie (4.43) umožňuje zabezpečenie rovnováhy počtu trás z jednotlivých stredísk (ak sa tento sklad využíva). Skupina ohraničení (4.44) a (4.45) slúži ako podmienka sub-tour eliminácie a spolu s podmienkou (4.46) zaručuje, že kapacita vozidla nebude prekročená.

Numerický príklad vychádza z predpokladov predchádzajúcej úlohy s tým rozdielom, že úlohou je nájsť minimálne prepravné náklady v prípade, že vozidlá sa po obsluhu zákazníkov vrátia do svojho východiskového skladu a ich kapacita je pritom rôznorodá. Uvažujeme, že každý hráč vlastní jeden sklad a obsluhuje množinu svojich zákazníkov. Traja majitelia týchto skladov (hráči) sú vyjadrení ako $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$, pričom kapacita ich vozidiel je daná ako $g = (300, 200, 250)^T$. Optimálne trasy v prípade nekooperatívneho rozvozu ostávajú nezmené. Výsledky modelu (4.38)-(4.46) s predpokladom jedného a viacerých vozidiel môžeme zhrnúť v tabuľkách 4.28 a 4.29. Napr. trojkoalíciu $W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$ možno formulovať v jazyku GAMS (príloha č. 5).

¹⁵ Túto podmienku vieme opäť modifikovať na predpoklad existencie viacerých vozidiel v skladiskách

Tabuľka č. 4.28: Vyčíslenie optimálnych trás s predpokladom jedného vozidla

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_4^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_7^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$	$w_2 - c_8^{(2)} - c_{10}^{(2)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - c_6^{(2)} - w_2$		34,60	0,43
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$		$w_3 - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - c_{14}^{(3)} - c_{13}^{(3)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} w_3$	28,28	0,87
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$w_2 - c_6^{(2)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{14}^{(3)} - w_2$	$w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - c_7^{(2)} - w_3$	25,93	0,78
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$w_2 - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_7^{(2)} - w_2$	$w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - w_3$	35,50	1689,70

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.29: Vyčíslenie optimálnych trás s predpokladom viacerých vozidiel

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_4^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_6^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$	$\frac{w_2 - c_8^{(2)} - w_2}{w_2 - c_7^{(2)} - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{10}^{(2)} - w_2}$		33,82	0,09
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$		$w_3 - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - c_{14}^{(3)} - c_{13}^{(3)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} w_3$	28,28	0,19
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$w_2 - c_6^{(2)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{14}^{(3)} - w_2$	$w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - c_7^{(2)} - w_3$	25,93	0,13
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$w_2 - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_6^{(2)} - w_2$	$\frac{w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - w_3}{w_3 - c_7^{(2)} - w_3}$	35,26	6,83

Zdroj: Vlastné spracovanie

Vidíme, že model kooperatívnej úlohy s heterogénnym parkom vedie k opätovnému zníženiu prepravných nákladov v porovnaní s výsledkami homogénneho dopravného parku, čo bolo spôsobené zavedením predpokladu o existencii rôznorodej kapacity vozidla.

V nasledujúcom texte sa zameriavame na alokáciu usporovaných nákladov, ktoré vzniknú zo vzájomnej spolupráce hráčov na základe modelu IV (4.30)-(4.38). Úsporu nákladov vypočítame na základe (4.15). Najskôr vypočítame rozdelenie prepravných nákladov medzi hráčov na základe rôznych spôsobov alokácie a potom vyčíslujeme aj úspory, ktoré treba medzi hráčov rozdeliť.

Tabuľka č. 4.30: Rovnostárske riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.20)

Koalície	Náklady $t_4^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,82	39,20	5,38	21,19	12,63	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	44,38	16,10	15,83		12,45
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93	35,82	9,89		10,375	15,555
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	59,70	24,44	15,733	7,173	12,353

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.31: Rovnostárske riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.20)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	5,38	2,69	2,69	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	16,10	8,05		8,05
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,89		4,945	4,945
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	24,44	8,147	8,147	8,147

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.32: Shapleyho hodnota pri rozdelení nákladov (4.21)

Koalície	Náklady $t_4^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	59,70	24,44	16,717	11,262	11,082

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.33: Shapleyho hodnota pri alokácii úspor (4.22)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	24,44	7,163	4,058	9,418

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.34 : Utilitárne riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18)+(4.23)

Koalície	Náklady $t_4^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,82	$\langle 18.60; 23.78 \rangle$	$\langle 10.04; 15.22 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	$\langle 7.88; 23.78 \rangle$		$\langle 4.5; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93		$\langle 5.53; 15.22 \rangle$	$\langle 10.71; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	$\langle 0; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.35: Utilitárne riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.18)+(4.23)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	5,38	$\langle 0.1; 5.28 \rangle$	$\langle 0.1; 5.28 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	16,10	$\langle 0.1; 16.0 \rangle$		$\langle 0.1; 16.0 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,89		$\langle 0.1; 9.79 \rangle$	$\langle 0.1; 9.79 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	24,44	$\langle 0.1; 23.88 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č.4.36: Nashovo riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	Náklady $t_4^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,82	$\langle 18.60; 23.78 \rangle$	$\langle 10.04; 15.22 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	$\langle 7.88; 23.78 \rangle$		$\langle 4.5; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93		$\langle 5.53; 15.22 \rangle$	$\langle 10.71; 20.4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	$\langle 0; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.37: Nashovo riešenie alokácie úspor (4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	5,38	$\langle 0.1; 5.28 \rangle$	$\langle 0.1; 5.28 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	16,10	$\langle 0.1; 16.0 \rangle$		$\langle 0.1; 16.0 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,89		$\langle 0.1; 9.79 \rangle$	$\langle 0.1; 9.79 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	24,44	$\langle 0.1; 23.88 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

4.1.3.2 Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a predpokladom „znovunaplnenia“ vozidla v inom ako východiskovom stredisku (Model V)

Základným predpokladom vyššie uvedeného modelu je návrat vozidla po obsluhu svojich zákazníkov do východiskového strediska. Je zrejmé, že uvoľnenie tohto predpokladu môže viesť k ďalším úsporám prepravných nákladov. Uvažujme teraz predpoklad, že vozidlá jednotlivých skladov môžu byť opakovane naložené, resp. vyložené v inom ako východiskovom sklade (pri dodržaní myšlienky okružných úloh). Preto je nutné zabezpečiť, aby vozidlo, ktoré je doplňované v inom sklade, pokračovalo vo svojej ceste tak, aby obslúžilo zákazníkov. Zadefinujeme teda novú premennú (ostatné predpoklady sú nezmenené):

- $z_{ijh} \geq 0$, $i, j \in V_S$, $i \neq j$, $h \in N_S^{(1)}$, ktorá reprezentuje poradie návštevy hrany (i, j) prostredníctvom h -tého vozidla.

Úlohu kooperatívneho rozvozu s heterogénnym dopravným parkom s predpokladom o znovunaložení vozidla v inom ako východiskovom sklade možno naformulovať pridaním ohraničení (4.48) a (4.49) do modelu spomenutého v predchádzajúcej kapitole, pričom účelová funkcia je v tvare:

$$t_5^{(W_S)} = \min f(X, u, z) = \sum_{i \in V_S} \sum_{\substack{j \in V_S \\ i \neq j}} \sum_{h \in W_S} d_{ij} x_{ijh} \quad (4.47)$$

$$z_{iji} = x_{iji}, \quad i \in W_S, j \in C_S \quad (4.48)$$

$$z_{ijh} + 1 \leq z_{jlh} + |V_S|(1 - x_{ijh}) + |V_S|(1 - x_{jlh}), \quad i, j, l \in V_S, i \neq j, \\ j \neq h, i \neq h, h \in W_S, \quad (4.49)$$

kde $|V_S|$ je mohutnosť (kardinalita) množiny V_S . Tento predpoklad umožňuje opätovné redukcie nákladov v kontexte kooperatívnej úlohy rozvozu.

Vychádzame z predchádzajúceho príkladu s predpokladom existencie heterogénneho dopravného parku, pričom vozidlá možno „znovunaložiť“ aj v inom ako východiskovom sklade. Tento predpoklad umožňuje dosiahnuť ďalšiu úsporu nákladov, ktorá hráčom plyní zo vzájomnej spolupráce. Výsledky získame pomocou kódu v jazyku systému GAMS, ktorý je predmetom prílohy č. 8. Práve z tohto dôvodu uvedieme výsledky a čas výpočtu s týmto predpokladom. Tabuľka č. 4.38 zobrazuje výsledky použitím modelu V (4.39)-(4.49).

Tabuľka č. 4.38: Vyčíslenie optimálnych trás a min. prepravných nákladov

Koalícia S	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Prepravné náklady $t_5^{(W_S)}$	Čas výpočtu (sc)
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$w_1 - c_1^{(1)} - c_2^{(1)} - c_6^{(1)} - w_2$	$w_2 - c_8^{(2)} - c_{10}^{(2)} - c_4^{(1)} - c_9^{(2)} - c_7^{(2)} - c_5^{(1)} - c_3^{(1)} - w_1$		32,00	0,84
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$w_1 - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_{13}^{(3)} - w_3$		$w_3 - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_{12}^{(3)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	28,28	0,66
$W_S = \{w_2, w_3\}$		$w_2 - c_6^{(2)} - c_{12}^{(3)} - c_{11}^{(3)} - c_{14}^{(3)} - w_2$	$w_3 - c_8^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{15}^{(3)} - c_9^{(2)} - c_7^{(2)} - w_3$	25,93	0,77
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	$w_1 - c_{12}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_1^{(1)} - c_{11}^{(3)} - w_1$	$w_2 - c_6^{(2)} - c_{14}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_5^{(1)} - c_7^{(2)} - w_3$	$w_3 - c_9^{(2)} - c_4^{(1)} - c_{15}^{(3)} - c_{10}^{(2)} - c_{13}^{(3)} - c_8^{(2)} - w_2$	32,97	57,69

Zdroj: Vlastné spracovanie

Pri následnej redistribúcii budeme vychádzať z výsledkov minimálnych nákladov modelu V (4.39)-(4.49). Úsporu nákladov vypočítame na základe výrazu (4.15), pričom najskôr vypočítame rozdelenie prepravných nákladov medzi hráčov na základe rôznych spôsobov alokácie a potom vyčíslujeme aj úspory, ktoré treba medzi hráčov rozdeliť.

Tabuľka č. 4.39: Rovnostárske riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.20)

Koalície	Náklady $t_5^{(W_S)}$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	32,00	39,20	7,20	20,28	11,72	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	44,38	16,10	15,83		12,45
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93	35,82	9,89		10,375	15,555
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	32,97	59,70	26,73	14,97	6,41	11,59

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.40: Rovnostárske riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	7,20	3,60	3,60	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	16,10	8,05		8,05
$W_S = \{w_2, w_3\}$	9,89		4,945	4,945
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	26,73	8,91	8,91	8,91

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.41 : Shapleyho hodnota pri rozdelení nákladov na základe (4.21)

Koalície	Náklady $(t^{(W_S)})$	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
				1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S = \{w_1\}$	23,88	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	32,97	59,70	26,73	14,687	9,232	9,052

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.42: Shapleyho hodnota pri alokácii úspor (4.22)

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$S = \{P_1, P_2, P_3\}$	26,73	9,193	6,088	11,448

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.43: Utilitárne riešenie rozdelenia nákladov (4.16)-(4.18)+(4.23)

Koalície	Náklady ($t^{(W_S)}$)	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S=\{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S=\{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S=\{w_1, w_2\}$	32,00	$\langle 14.58; 22.88 \rangle$	$\langle 6.92; 15.22 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	28,28	$\langle 7.88; 23.78 \rangle$		$\langle 4.5; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	25,93		$\langle 5.53; 15.22 \rangle$	$\langle 10.71; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	32,97	$\langle 0; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.44: Utilitárne riešenie alokácie úspor modelu

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1, w_2\}$	7,20	$\langle 0.1; 7.10 \rangle$	$\langle 0.1; 7.10 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	16,10	$\langle 0.1; 16.0 \rangle$		$\langle 0.1; 16.0 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	9,89		$\langle 0.1; 9.79 \rangle$	$\langle 0.1; 9.79 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	26,73	$\langle 0.1; 23.88 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.45: Nashovo riešenie rozdelenia nákladov modelu ((4.16)-(4.18)+(4.24)

Koalície	Náklady ($t^{(W_S)}$)	Redistribúcia nákladov medzi hráčov		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1\}$	23,88	23,88		
$W_S=\{w_2\}$	15,32		15,32	
$W_S=\{w_3\}$	20,50			20,50
$W_S=\{w_1, w_2\}$	32,00	$\langle 14.58; 22.88 \rangle$	$\langle 6.92; 15.22 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	28,28	$\langle 7.88; 23.78 \rangle$		$\langle 4.5; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	25,93		$\langle 5.53; 15.22 \rangle$	$\langle 10.71; 20.4 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	32,97	$\langle 0; 23.78 \rangle$	$\langle 0; 15.22 \rangle$	$\langle 0; 20.4 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.46: Nashovo riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$		
		1 hráč	2 hráč	3 hráč
$W_S=\{w_1, w_2\}$	7,20	$\langle 0.1; 7.10 \rangle$	$\langle 0.1; 7.10 \rangle$	
$W_S=\{w_1, w_3\}$	16,10	$\langle 0.1; 16.0 \rangle$		$\langle 0.1; 16.0 \rangle$
$W_S=\{w_2, w_3\}$	9,89		$\langle 0.1; 9.79 \rangle$	$\langle 0.1; 9.79 \rangle$
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	26,73	$\langle 0.1; 23.88 \rangle$	$\langle 0.1; 15.32 \rangle$	$\langle 0.1; 20.5 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

V predchádzajúcom texte sme na základe výrazu (4.14) tvrdili, že ak sú prepravné náklady koalície menšie ako súčet nákladov individuálnych hráčov, hráči majú tendenciu

kooperovať. Toto porovnanie v prípade kooperatívneho rozvozu s heterogénnym parkom a návratom vozidla do východiskového skladu (model IV) môžeme vidieť v tabuľke č. 4.47. V tabuľke č. 4.47 taktiež overíme, či vstupom do koalície si hráči polepšia, inými slovami, znížia svoje prepravné náklady na trasu.

Tabuľka č. 4.47 Overenie rešpektovania podmienky IS

Koalícia	Náklady $t_4^{(W_S)}$		$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Individuálne náklady na cestu hráča v koalícii		
					Hráč 1	Hráč 2	Hráč 3
$W_S = \{w_1\}$	23,88	=	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	=	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	=	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,82	≤	39,20	5,38	20,50	9,30	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	≤	44,38	16,10	13,80		14,48
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93	≤	35,82	9,89		12,50	13,43
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	≤	59,70	24,44	13,80	6,78	14,68

Zdroj: Vlastné spracovanie

Možno konštatovať, že v každej situácii je podmienka IS splnená, a teda spolupráca je v každom prípade výhodná. Napr. v prípade grand koalície si hráč 1 zníži vstupom do koalície svoje prepravné náklady o 10,08 jednotiek, hráč 2 o 8,54 jednotiek a hráč 3 o 5,82 jednotiek.

Prípad kooperatívnej úlohy rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a znovunaplnení vozidla v inom ako východiskovom sklade (model V) si vyčíslime v tabuľke č. 4.43. Overíme, či vstupom do koalície si hráči polepšia, inak povedané, znížia svoje prepravné náklady.

Tabuľka č. 4.48: Overenie rešpektovania podmienky IS

Koalícia	Prepravné náklady $t_5^{(W_S)}$		$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Individuálne náklady na cestu hráča v koalícii		
					Hráč 1	Hráč 2	Hráč 3
$W_S = \{w_1\}$	23,88	=	23,88	0,00	23,88		
$W_S = \{w_2\}$	15,32	=	15,32	0,00		15,32	
$W_S = \{w_3\}$	20,50	=	20,50	0,00			20,50
$W_S = \{w_1, w_2\}$	32,00	≤	39,20	7,20	21,20	10,80	
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	≤	44,38	16,10	13,80		14,48
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93	≤	35,82	9,89		12,50	13,43
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	32,97	≤	59,70	26,73	13,80	7,07	12,10

Zdroj: Vlastné spracovanie

Môžeme konštatovať, že v každej situácii je podmienka IS splnená, a teda spolupráca je v každom prípade výhodná a hráči si vzájomným kooperovaním znížia svoje individuálne náklady na prepravu. Konkrétne, v prípade grand koalície, v ktorej hráči spoločne ušetria spoluprácou až 59,70 jednotiek nákladov v porovnaní s nekooperatívnym správaním, si hráč 1 spoluprácou zníži svoje individuálne náklady na prepravu o 10,08 jednotiek, hráč 2 o 8,25 jednotiek a hráč 3 o 8,4 jednotiek prepravných nákladov.

Vzájomné porovnanie predstavených modelov IV a V z predchádzajúcej podkapitoly prezentujeme v tabuľke. č. 4.49.

Tabuľka č. 4.49: Porovnanie dvoch situácií v predstavených modeloch IV a V

Koalícia	Model IV	Model V
	Náklady $t_4^{(W_S)}$	Náklady $t_5^{(W_S)}$
$W_S = \{w_1, w_2\}$	33,82	32,00
$W_S = \{w_1, w_3\}$	28,28	28,28
$W_S = \{w_2, w_3\}$	25,93	25,93
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	35,26	32,97

Zdroj: Vlastné spracovanie

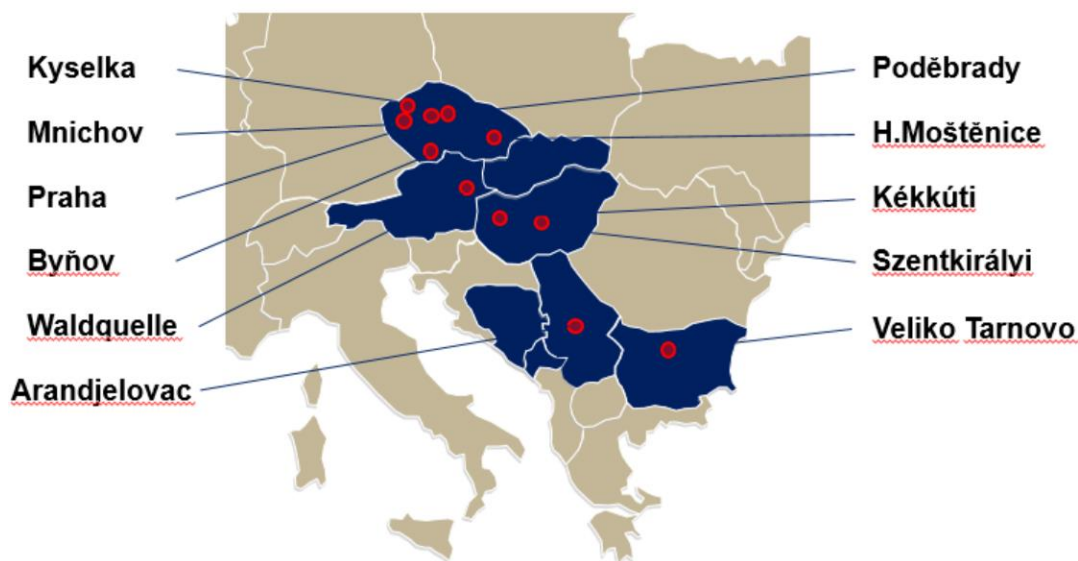
Na základe tabuľky č. 4.49 konštatujeme, že zavedenie predpokladu o znovunaložení vozidla s rôznou kapacitou v rôznych strediskách v koalícii vedie opäť k značnej úspore prepravných nákladov (napr. v prípade grand koalície o 2,29 jednotiek nákladov).

4.2 Aplikácia modelu kooperatívnej úlohy rozvozu na firmu Karlovarské minerální vody, a. s.

4.2.1 Predstavenie spoločnosti Karlovarské minerální vody, a. s.

V tejto časti kapitoly aplikujeme predstavené modely kooperatívneho rozvozu na reálnom príklade z praxe, a to konkrétne na údajoch, ktoré poskytla firma Karlovarské minerální vody, a. s., ktorá je najväčším výrobcom a distribútorom nealkoholických nápojov v strednej Európe. Celkovo táto firma disponuje dvanástimi výrobnými závodmi, a to šiestimi v Českej republike (ČR), jedným v Rakúsku (AU), dvomi v Maďarsku (HU), jedným v Srbsku a jedným v Bulharsku (obrázok č. 2). Z nich následne uskutočňuje rozvoz svojich výrobkov do rôznych oblastí celého sveta, pričom disponuje vlastnou značkou minerálnych vôd v Rakúsku (AU) a Maďarsku (HU).

Obrázok č. 2: Rozmiestnenie výrobných stredísk firmy Karlovarské minerální vody, a. s.



Zdroj: Karlovarské minerální vody, a. s.

Spoločnosť bola založená karlovarským rodákom Heinrichom Mattonim v roku 1873. V Bulharsku patrí táto firma k popredným výrobcom a exkluzívnym distribútorom nealkoholických nápojov firmy PepsiCo. Portfólio firmy tvoria predovšetkým minerálne a pramenité vody (Mattoni, Aquila, Magnesia, Poděbradka, Dobrá voda a Hanácká Kyselka) a iné nealkoholické nápoje (Granini, Schweppes a iné).

4.2.2 Aplikácia modelu kooperatívnej úlohy rozvozu s homogénnym dopravným parkom

V tejto časti poukážme na praktickú využiteľnosť predstavených modelov kooperatívneho rozvozu na reálnych dátach. Keďže ide o veľkú spoločnosť, ktorá denne uskutočňuje niekoľko rozvozov, predpoklady sme z hľadiska výpočtovej zložitosti značne zjednodušili. V kooperatívnej úlohe rozvozu budeme uvažovať so 4 výrobnými strediskami $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ tejto firmy, ktoré budú predstavovať jednotlivých hráčov. Tri strediská (w_1, w_2, w_3) majú sídlo v Českej republike (ČR), a teda ich množina zákazníkov je tvorená výhradne českými zákazníkmi. Posledným hráčom w_4 je výrobné stredisko v Rakúsku (AU), ktoré má za úlohu obslúžiť nielen rakúskych zákazníkov, ale má na starosti aj slovenský a maďarský trh. Našou úlohou je porovnanie situácie, keď hráči navzájom kooperujú a obsluhujú tak zákazníkov aj iného hráča v koalícii, a tak dochádza k značnej úspore prepravných nákladov oproti situácii, keď rozvoz uskutočňujú samostatne (nekooperatívne správanie). Na obrázku č. 3 je zobrazené rozmiestnenie výrobných stredísk na mape.

Obrázok č. 3: Rozmiestnenie výrobných stredísk firmy



Zdroj: mapy.cz

Každý z hráčov má pridelenú vlastnú množinu zákazníkov C ktorú má obslúžiť svojimi vozidlami z jednotlivých výrobných stredísk. Konkrétne mestá reprezentujúce množiny zákazníkov $C = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_{40}^{(4)}\}$, ktorí požadujú dodať palety ich výrobkov

v predpísanom množstve $q_j^{(i)}$ sú uvedené v prílohe č. 9. Pridelenie zákazníkov reprezentujú množiny:

$$C^1 = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}, c_7^{(1)}, c_8^{(1)}\} \text{ hráča 1 (Byňov, CZ),}$$

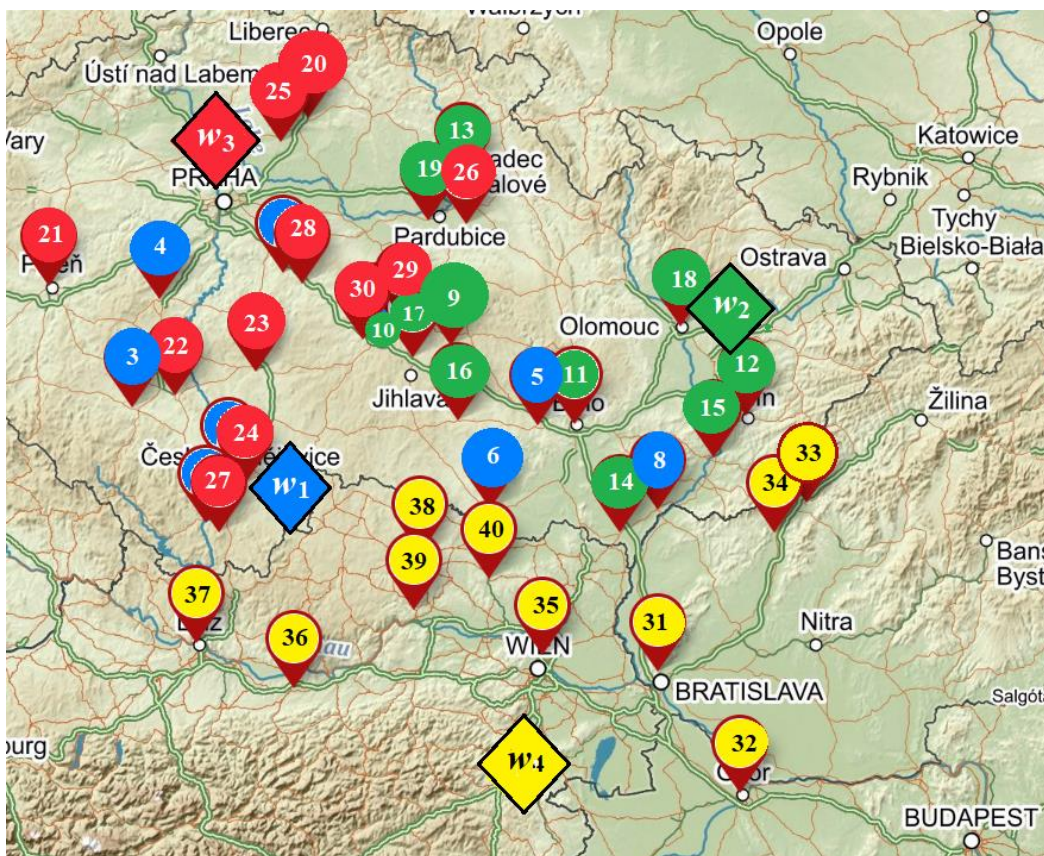
$$C^2 = \{c_9^{(2)}, c_{10}^{(2)}, c_{11}^{(2)}, c_{12}^{(2)}, c_{13}^{(2)}, c_{14}^{(2)}, c_{15}^{(2)}, c_{16}^{(2)}, c_{17}^{(2)}, c_{18}^{(2)}, c_{19}^{(2)}\} \text{ hráča 2 (Horné Moštenice, CZ),}$$

$$C^3 = \{c_{20}^{(3)}, c_{21}^{(3)}, c_{22}^{(3)}, c_{23}^{(3)}, c_{24}^{(3)}, c_{25}^{(3)}, c_{26}^{(3)}, c_{27}^{(3)}, c_{28}^{(3)}, c_{29}^{(3)}, c_{30}^{(3)}\} \text{ hráča 3 (Praha, CZ)}$$

$$\text{a } C^4 = \{c_{31}^{(4)}, c_{32}^{(4)}, c_{33}^{(4)}, c_{34}^{(4)}, c_{35}^{(4)}, c_{36}^{(4)}, c_{37}^{(4)}, c_{38}^{(4)}, c_{39}^{(4)}, c_{40}^{(4)}\} \text{ hráča 4 (Kobersdorf, AU).}$$

K dispozícii je matica najkratších vzdialeností, ktorá zobrazuje najkratšie vzdialenosti ($d_{ij}, i, j \in W_S$) medzi jednotlivými výrobnými strediskami a ich zákazníkmi (medzi uzlami i a j), dáta sú uvedené v prílohe č. 10). Na obrázku č. 4 je zobrazené rozmiestnenie zákazníkov na českom, slovenskom a maďarskom trhu, ktorí sú farebne odlíšení podľa ich prislušnosti k danému stredisku (hráčovi: w_1, w_2, w_3, w_4).

Obrázok č. 4: Rozmiestnenie a pridelenie zákazníkov k výrobným strediskám



Zdroj: Vlastné spracovanie a mapy.cz

Keďže ide o veľkú spoločnosť, ktorá denne uskutočňuje niekoľko rozvozov, predpoklady sme značne zjednodušili. Predpokladajme, že firma dováža svoj tovar do

obslužných miest pomocou vozidiel s rovnakou kapacitou (homogénny dopravný park). Z tohto dôvodu sme za východiskový model považovali *Kooperatívnu úlohu rozvozu s homogénnym dopravným parkom*. Keďže na základe testovacieho modelu z podkapitoly 4.1 vyšli lepšie výsledky, pri hľadaní riešenia sme zaviedli predpoklad o znovunaložení vozidla v inom ako východiskovom sklade. Ďalej predpokladáme homogénny dopravný park, v ktorom všetky dopravné prostriedky budú mať rovnakú kapacitu, konkrétne $g = 20$ paliet (približne 1300 kusov prepravovaného tovaru), čo predstavuje kapacitu kamiónov, ktoré uskutočňujú prepravu tovarov. Majitelia skladov disponujú vozidlami (neuvažujeme s obmedzením počtu vozidiel), ktoré uskutočňujú obsluhu príslušných zákazníkov.

Na nájdenie riešenia sme používali solver Cplex 12.8.0.0 v rámci zakúpenej licencie na používanie softvéru GAMS na počítačovom zariadení AMD RYZEN 7 1700, 8 CPU, @ 24 GB RAM. Našou úlohou je z reálnych vstupných údajov získať optimálne trasy vozidiel jednotlivých hráčov a vyčísliť ich minimálne prepravné náklady na základe príslušnej úlohy kooperatívneho rozvozu. Najskôr vyčíslíme hodnotu prepravných nákladov individuálnych hráčov v prípade, keď hráči vykonávajú rozvoz samostatne, to znamená, v prípade jednočlenných koalícií (na základe modelu II (4.9)-(4.13)).

Tabuľka č. 4.50: Vyčíslenie $t^{(ii)}$ nákladov hráčov (nekooperatívne správanie)

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Cesta zo skladu hráča 4	Prepravné náklady $t^{(ii)}$
$W_S=\{w_1\}$	$\frac{w_1-c_5^{(1)}-c_8^{(1)}-c_6^{(1)}-w_1}{w_1-c_7^{(1)}-c_1^{(1)}-c_3^{(1)}-c_4^{(1)}-c_2^{(1)}-w_1}$				763,30
$W_S=\{w_2\}$		$\frac{w_2-c_{11}^{(1)}-c_{14}^{(1)}-c_{15}^{(1)}-c_{12}^{(1)}-w_2}{w_2-c_{18}^{(1)}-c_{13}^{(1)}-c_{19}^{(1)}-c_{10}^{(1)}-c_{17}^{(1)}-c_9^{(1)}-c_{16}^{(1)}-w_2}$			726,70
$W_S=\{w_3\}$			$\frac{w_3-c_{21}^{(1)}-c_{22}^{(1)}-c_{27}^{(1)}-c_{24}^{(1)}-c_{23}^{(1)}-c_{28}^{(1)}-w_3}{w_3-c_{30}^{(1)}-c_{29}^{(1)}-c_{26}^{(1)}-c_{20}^{(1)}-c_{25}^{(1)}-w_3}$		750,60
$W_S=\{w_4\}$				$\frac{w_4-c_{31}^{(1)}-c_{34}^{(1)}-c_{33}^{(1)}-c_{32}^{(1)}-w_4}{w_4-c_{35}^{(1)}-c_{40}^{(1)}-c_{38}^{(1)}-c_{39}^{(1)}-c_{37}^{(1)}-c_{36}^{(1)}-w_4}$	1053,80

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe tabuľky č. 4.50 možno vypočítať sumu individuálnych nákladov $\sum_{i \in W_S} t^{(ii)}$, ktoré reprezentujú hodnotu prepravných nákladov hráča v koalícii.

Tabuľka č. 4.51 : Vyčíslenie $t^{\{\{i\}\}}$ nákladov hráča (nekooperatívne správanie)

Koalícia	$\sum_{i \in W_S} t^{\{\{i\}\}}$
$W_S = \{w_1\}$	763,30
$W_S = \{w_2\}$	726,70
$W_S = \{w_3\}$	750,60
$W_S = \{w_4\}$	1053,80
$W_S = \{w_1, w_2\}$	763,30
$W_S = \{w_1, w_3\}$	1513,90
$W_S = \{w_1, w_4\}$	1817,10
$W_S = \{w_2, w_3\}$	1477,30
$W_S = \{w_2, w_4\}$	1780,50
$W_S = \{w_3, w_4\}$	1804,40
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	2240,60
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	2543,80
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	2267,70
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	2531,10
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	3294,40

Zdroj: Vlastné spracovanie

Vyčíslené náklady sú dôležitým ukazovateľom pri vzájomnom porovnávaní kooperatívneho a nekooperatívneho správania hráčov, pretože určujú, či sa hráčovi oplatí spolupracovať alebo nie. Inými slovami na základe nich skúmame, či si vstupom do koalície hráč zlepši svoju situáciu. Tabuľka č. 4.52 slúži na vyčíslenie optimálnych trás hráčov po zavedení predpokladov spolupráce týkajúcej sa vzájomného využívania vozidiel hráčov v koalícii pri obsluhu zákazníkov prostredníctvom modelu (4.1)-(4.8).

Tabuľka č. 4.52: Vyčíslenie optimálnych trás a min. prepravných nákladov

Koalícia	Cesta zo skladu hráča 1	Cesta zo skladu hráča 2	Cesta zo skladu hráča 3	Cesta zo skladu hráča 4	Prepravné náklady $t^{(W_S)}$
$W_S = \{w_1, w_2\}$	$\frac{w_1 - c_7^{(1)} - c_1^{(1)} - c_3^{(1)} - c_4^{(1)} - c_2^{(1)} - w_1}{w_1 - c_6^{(1)} - c_5^{(1)} - c_{11}^{(1)} - c_{14}^{(2)} - c_8^{(1)} - w_1}$	$\frac{w_2 - c_{15}^{(2)} - c_{12}^{(2)} - w_2}{w_2 - c_{18}^{(2)} - c_{13}^{(2)} - c_{19}^{(2)} - c_{10}^{(2)} - c_{17}^{(2)} - c_9^{(2)} - c_{16}^{(2)} - w_1}$			1220,20
$W_S = \{w_1, w_3\}$	$\frac{w_1 - c_6^{(1)} - c_8^{(1)} - c_5^{(1)} - c_{29}^{(3)} - c_{30}^{(1)} - w_3}{w_1 - c_7^{(1)} - c_{27}^{(3)} - c_{24}^{(3)} - c_1^{(1)} - w_1}$		$\frac{w_3 - c_4^{(1)} - c_{21}^{(3)} - c_3^{(1)} - c_{22}^{(3)} - c_{23}^{(3)} - w_1}{w_3 - c_{20}^{(3)} - c_{25}^{(3)} - c_{26}^{(3)} - c_2^{(1)} - c_{28}^{(3)} - w_3}$		1234,80

$W_S=\{w_1, w_4\}$	$\begin{array}{r} w_1-c_7^{(1)}-c_1^{(1)}-c_3^{(1)}-\\-c_4^{(1)}-c_2^{(1)}-w_1 \end{array}$			$\begin{array}{r} w_4-c_{35}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-c_6^{(1)}-\\-c_{38}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-\\-c_{37}^{(4)}-w_4 \\\hline w_4-c_{32}^{(4)}-c_{31}^{(4)}-c_{34}^{(4)}-\\-c_{33}^{(4)}-c_8^{(1)}-c_5^{(1)}-w_1 \end{array}$	1420,90
$W_S=\{w_2, w_3\}$		$\begin{array}{r} w_2-c_{12}^{(2)}-c_{15}^{(2)}-c_{14}^{(2)}-\\-c_{11}^{(2)}-c_{18}^{(2)}-w_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_3-c_{21}^{(3)}-c_{22}^{(3)}-c_{27}^{(3)}-\\-c_{24}^{(3)}-c_{23}^{(3)}-c_{28}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_{20}^{(2)}-c_{25}^{(3)}-c_{13}^{(2)}-\\-c_{19}^{(2)}-c_{26}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_{29}^{(3)}-c_{16}^{(2)}-c_{17}^{(2)}-\\-c_{16}^{(2)}-c_{29}^{(3)}-w_3 \end{array}$	1297,60	
$W_S=\{w_2, w_4\}$		$\begin{array}{r} w_2-c_{12}^{(2)}-w_2 \\\hline w_2-c_{18}^{(2)}-c_{13}^{(2)}-c_{19}^{(2)}-\\-c_{10}^{(2)}-c_9^{(2)}-c_{17}^{(2)}-c_{16}^{(2)}-w_2 \end{array}$		$\begin{array}{r} w_4-c_{32}^{(4)}-c_{31}^{(4)}-c_{14}^{(2)}-\\-c_{34}^{(4)}-c_{33}^{(4)}-c_{15}^{(2)}-w_2 \\\hline w_4-c_{35}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-\\-c_{36}^{(4)}-c_{37}^{(4)}-c_{38}^{(4)}-\\-c_{11}^{(2)}-w_2 \end{array}$	1648,10
$W_S=\{w_3, w_4\}$			$\begin{array}{r} w_3-c_{21}^{(3)}-c_{22}^{(3)}-c_{23}^{(3)}-\\-c_{28}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_{30}^{(3)}-c_{29}^{(3)}-c_{26}^{(3)}-\\-c_{20}^{(3)}-c_{25}^{(3)}-w_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_4-c_{31}^{(4)}-c_{34}^{(4)}-c_{33}^{(4)}-\\-c_{32}^{(4)}-w_4 \\\hline w_4-c_{35}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-\\-c_{38}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-c_{37}^{(4)}-\\-c_{27}^{(3)}-c_{24}^{(3)}-w_4 \end{array}$	1766,60
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	$\begin{array}{r} w_1-c_1^{(1)}-c_{24}^{(3)}-c_{27}^{(3)}-\\-c_7^{(1)}-w_1 \\\hline w_1-c_{16}^{(2)}-c_6^{(1)}-c_{17}^{(2)}-\\-c_9^{(2)}-c_{30}^{(3)}-c_{10}^{(2)}-w_3 \\\hline w_1-c_{23}^{(3)}-c_{22}^{(3)}-c_3^{(1)}-c_{21}^{(3)}-\\-c_4^{(1)}-w_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_2-c_{15}^{(2)}-c_8^{(1)}-c_{14}^{(2)}-\\-c_5^{(1)}-c_{11}^{(2)}-c_{18}^{(2)}-w_2 \\\hline w_2-c_{12}^{(2)}-w_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_3-c_2^{(1)}-c_{28}^{(3)}-c_{29}^{(3)}-\\-c_{19}^{(2)}-c_{26}^{(3)}-c_{13}^{(2)}-\\-w_3 \\\hline w_3-c_{20}^{(3)}-c_{25}^{(3)}-w_3 \end{array}$	1562,20	
$W_S=\{w_1, w_2, w_4\}$	$\begin{array}{r} w_1-c_7^{(1)}-c_1^{(1)}-c_3^{(1)}-\\-c_4^{(1)}-c_2^{(1)}-w_1 \\\hline w_1-c_{16}^{(2)}-c_9^{(2)}-c_{17}^{(2)}-c_{10}^{(2)}-\\-c_{19}^{(2)}-c_{13}^{(2)}-c_{18}^{(2)}-w_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_2-c_{15}^{(2)}-c_8^{(1)}-c_{14}^{(2)}-\\-c_5^{(1)}-c_{11}^{(2)}-w_2 \end{array}$		$\begin{array}{r} w_4-c_{32}^{(4)}-c_{31}^{(4)}-c_{34}^{(4)}-\\-c_{33}^{(4)}-c_{12}^{(2)}-w_2 \\\hline w_4-c_{35}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-c_6^{(1)}-c_{38}^{(4)}-\\-c_{39}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-c_{37}^{(4)}-w_1 \end{array}$	1926,90
$W_S=\{w_1, w_3, w_4\}$	$\begin{array}{r} w_1-c_{24}^{(3)}-c_1^{(1)}-c_{27}^{(3)}-\\-c_7^{(1)}-w_1 \end{array}$		$\begin{array}{r} w_3-c_{21}^{(3)}-c_3^{(1)}-c_{22}^{(3)}-\\-c_4^{(1)}-w_3 \\\hline w_3-c_{25}^{(3)}-c_{20}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_{28}^{(3)}-c_2^{(1)}-c_{23}^{(3)}-\\-c_{29}^{(3)}-c_{26}^{(3)}-w_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_4-c_{32}^{(4)}-c_{31}^{(4)}-c_{34}^{(4)}-\\-c_{33}^{(4)}-c_8^{(1)}-c_5^{(1)}-w_1 \\\hline w_4-c_{37}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-\\-c_{38}^{(4)}-c_6^{(1)}-c_{40}^{(4)}-\\-c_{35}^{(4)}-w_1 \end{array}$	1917,20
$W_S=\{w_2, w_3, w_4\}$		$\begin{array}{r} w_2-c_{12}^{(2)}-w_2 \\\hline w_2-c_{15}^{(2)}-c_{33}^{(4)}-c_{34}^{(4)}-\\-c_{14}^{(2)}-c_{31}^{(4)}-c_{32}^{(4)}-w_4 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_3-c_{21}^{(3)}-c_{22}^{(3)}-c_{23}^{(3)}-\\-c_{30}^{(3)}-c_{10}^{(2)}-w_3 \\\hline w_3-c_{28}^{(3)}-c_{19}^{(2)}-c_{26}^{(3)}-\\-c_{13}^{(2)}-c_{20}^{(3)}-c_{25}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_{29}^{(3)}-c_{17}^{(2)}-c_9^{(2)}-\\-c_{16}^{(2)}-c_{11}^{(2)}-c_{18}^{(2)}-w_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_4-c_{35}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-\\-c_{38}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-c_{37}^{(4)}-\\-c_{27}^{(3)}-c_{24}^{(3)}-w_3 \end{array}$	2150,50
$W_S=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	$\begin{array}{r} w_1-c_1^{(1)}-c_{24}^{(3)}-c_{27}^{(3)}-\\-c_7^{(1)}-w_1 \\\hline w_1-c_{37}^{(4)}-c_{36}^{(4)}-c_{39}^{(4)}-c_{40}^{(4)}-\\-c_6^{(1)}-c_{38}^{(4)}-c_{18}^{(2)}-w_1 \\\hline w_1-c_{16}^{(2)}-c_9^{(2)}-c_{17}^{(2)}-\\-c_{29}^{(3)}-c_{30}^{(3)}-c_{10}^{(2)}-w_3 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_2-c_8^{(1)}-c_{14}^{(2)}-c_5^{(1)}-\\-c_{11}^{(2)}-c_8^{(1)}-w_2 \\\hline w_2-c_{15}^{(3)}-c_{34}^{(4)}-c_{33}^{(4)}-\\-c_{32}^{(4)}-c_{12}^{(2)}-w_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} w_3-c_{26}^{(3)}-c_{19}^{(2)}-c_{13}^{(2)}-\\-c_{20}^{(3)}-c_{25}^{(3)}-w_3 \\\hline w_3-c_4^{(1)}-c_{21}^{(3)}-c_3^{(1)}-\\-c_{22}^{(3)}-c_{23}^{(3)}-w_1 \\\hline w_3-c_{28}^{(3)}-c_2^{(1)}-w_3 \end{array}$	$w_4-c_{35}^{(4)}-c_{31}^{(4)}-c_{32}^{(4)}-w_4$	2376,90

Zdroj: Vlastné spracovanie

Výsledky minimálnych prepravných nákladov modelu I a ich porovnanie so sumou prepravných nákladov $t^{(i)}$ individuálneho hráča v prípade nekooperatívneho správania sa jednočlenných k tabuľke č. 4.53.

Tabuľka č. 4.53: Porovnanie kooperatívneho a nekooperatívneho správania

Koalícia	Prepravné náklady (c^S)		$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$
$W_S = \{w_1\}$	763,30	=	763,30	0,00
$W_S = \{w_2\}$	726,70	=	726,70	0,00
$W_S = \{w_3\}$	750,60	=	750,60	0,00
$W_S = \{w_4\}$	1053,80	=	1053,80	0,00
$W_S = \{w_1, w_2\}$	1220,20	$\leq$	1490,00	269,80
$W_S = \{w_1, w_3\}$	1234,80	$\leq$	1513,90	279,10
$W_S = \{w_1, w_4\}$	1420,90	$\leq$	1817,10	396,20
$W_S = \{w_2, w_3\}$	1297,60	$\leq$	1477,30	179,70
$W_S = \{w_2, w_4\}$	1648,10	$\leq$	1780,50	165,40
$W_S = \{w_3, w_4\}$	1766,60	$\leq$	1804,40	132,40
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	1569,90	$\leq$	2240,60	670,70
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	1926,90	$\leq$	2543,80	616,90
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	1917,20	$\leq$	2267,70	650,50
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	2150,50	$\leq$	2531,10	380,60
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	2376,90	$\leq$	3294,40	917,50

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe údajov z tabuľky č. 4.53 možno konštatovať, že suma individuálnych nákladov v prípade nekooperatívneho správania je vo všetkých prípadoch vyššia, nanajvýš sa rovná sume nákladov, ktorú by hráči získali spoluprácou. Potvrdzujeme, že v tomto prípade je spolupráca výhodná, pretože dochádza k značnej úspore, ktorú reprezentuje $s^{(W_S)}$ (vypočítané na základe (4.15)), ktorý reprezentuje hodnotu uspokojených nákladov v prípade vzájomnej kooperácie. Napr. v prípade grand koalície $W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ hráči vzájomným kooperovaním ušetrí približne 917,50 jednotiek nákladov (napr. vo forme ušetrenej prejdenej vzdialenosti).

Teraz sa zameriame na alokáciu uspokojených nákladov, ktoré vzniknú zo vzájomnej spolupráce hráčov. Najskôr vypočítame rozdelenie prepravných nákladov medzi hráčov na základe predstavených spôsobov alokácie, na základe čoho potom rozdeľujeme uspokojené náklady $s^{(W_S)}$. Prijímame predpoklad, že každý z hráčov si musí polepšiť aspoň o nejakú hodnotu $\varepsilon = 0,1$ (malé kladné číslo) oproti menším koalíciám (t. j. jednočlenným koalíciám). To znamená, že podmienkou je, že si hráči vstupom do koalície nezhoršia svoju situáciu (podmienka individuálnej stability je zabezpečená v každom prípade).

Tabuľka č. 4.54: Rovnostárske riešenie rozdelenia nákladov

Koalície	náklady	$\sum_{i \in W_S} t^{(i)}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov			
				1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1\}$	763,30	763,30	0,00	763,30			
$W_S = \{w_2\}$	726,70	726,70	0,00		726,70		
$W_S = \{w_3\}$	750,60	750,60	0,00			750,60	
$W_S = \{w_4\}$	1053,80	1053,80	0,00				1053,80
$W_S = \{w_1, w_2\}$	1220,20	1490,00	269,80	628,40	591,80		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	1234,80	1513,90	279,10	623,75		611,05	
$W_S = \{w_1, w_4\}$	1420,90	1817,10	396,20	565,20			855,70
$W_S = \{w_2, w_3\}$	1297,60	1477,30	179,70		636,85	660,75	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	1648,10	1780,50	165,40		660,50		987,60
$W_S = \{w_3, w_4\}$	1766,60	1804,40	132,40			731,70	1034,90
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	1569,90	2240,60	670,70	539,733	503,133	527,033	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	1926,90	2543,80	616,90	557,667	521,067		848,167
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	1917,20	2567,70	650,50	546,467		533,767	836,967
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	2150,50	2531,10	380,60		599,833	623,733	926,933
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	2376,90	3294,40	917,50	533,925	497,325	521,225	824,425

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.55: Rovnostárske riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	269,80	134,90	134,90		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	279,10	139,55		139,55	
$W_S = \{w_1, w_4\}$	396,20	198,10			198,10
$W_S = \{w_2, w_3\}$	179,70		89,85	89,85	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	165,40		82,70		82,70
$W_S = \{w_3, w_4\}$	132,40			66,20	66,20
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	670,70	223,570	223,570	223,570	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	616,90	205,633	205,633		205,633
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	350,50	216,833		216,833	216,833
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	380,60		126,867	126,867	126,867
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	917,50	229,375	229,375	229,375	229,375

Zdroj: Vlastné spracovanie

Rovnostárske riešenie alokácie úspor poskytuje rozdelenie usparených prepravných nákladov $s^{(W_S)}$ v rovnakom pomere. To znamená, že napr. v prípade koalície všetkých štyroch hráčov dochádza k úspore 917,50 jednotiek nákladov, ktoré si medzi sebou rozdelia v rovnakej hodnote 229,375 jednotiek.

Shapleyho hodnota i -tého hráča predstavuje strednú hodnotu prínosu tohto hráča koalícii všetkých hráčov pri všetkých možných spôsoboch vytvárania veľkej koalície (z tohto dôvodu vyčíslujeme výsledky len pre grand koalíciu). Tento spôsob alokácie považujeme za spravodlivý prístup a jeho výsledky získané cez prostredie MS Excel sú vyčíslené v tabuľkách č. 4.56 s 4.57.

Tabuľka č. 4.56 : Shapleyho hodnota pri rozdelení nákladov

Koalície	náklady	$\sum_{i \in W_S} t^{(\{i\})}$	$s^{(W_S)}$	Redistribúcia nákladov medzi hráčov			
				1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1\}$	763,30	763,30	0,00	763,30			
$W_S = \{w_2\}$	726,70	726,70	0,00		726,70		
$W_S = \{w_3\}$	750,60	750,60	0,00			750,60	
$W_S = \{w_4\}$	1053,80	1053,80	0,00				1053,80
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	2376,90	3294,40	917,50	417,967	531,867	558,783	868,283

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.57 : Shapleyho hodnota pri alokácii úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	917,50	345,333	194,833	191,817	185,517

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z tabuľky č. 4.57 konštatujeme, že na základe Shapleyho hodnoty alokácie úspor v prípade grand koalície $W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ najviac výhry získa prvý hráč, a to v hodnote 345,333 jednotiek usporených nákladov.

Nájdením riešenia na základe utilitárneho riešenia získame nie jeden bod, ale celý interval, v ktorom sa môže pohybovať alokácia „výhry“. Výsledky prezentuje tabuľka č. 4.58 a č. 4.59.

Tabuľka č. 4.58: Utilitárne riešenie rozdelenia nákladov modelu (3.27)-(3.32)

Koalície	náklady	Redistribúcia nákladov medzi hráčov			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1\}$	763,30	763,30			
$W_S = \{w_2\}$	726,70		726,70		
$W_S = \{w_3\}$	750,60			750,60	
$W_S = \{w_4\}$	1053,80				1053,80
$W_S = \{w_1, w_2\}$	1220,20	$\langle 493,6; 763,2 \rangle$	$\langle 457; 726,6 \rangle$		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	1234,80	$\langle 484,3; 763,2 \rangle$		$\langle 471,6; 750,5 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_4\}$	1420,90	$\langle 367,2; 763,2 \rangle$			$\langle 657,7; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	1297,60		$\langle 547,1; 726,6 \rangle$	$\langle 571; 750,5 \rangle$	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	1648,10		$\langle 594,4; 726,6 \rangle$		$\langle 921,5; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_3, w_4\}$	1766,60			$\langle 712,9; 750,6 \rangle$	$\langle 1016,1; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	1569,90	$\langle 92,8; 763,2 \rangle$	$\langle 56,2; 726,6 \rangle$	$\langle 80,1; 750,6 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	1926,90	$\langle 146,6; 763,2 \rangle$	$\langle 110; 726,6 \rangle$		$\langle 437,1; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	1917,20	$\langle 113; 763,2 \rangle$		$\langle 100,3; 750,6 \rangle$	$\langle 403,5; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	2150,50		$\langle 346,3; 726,6 \rangle$	$\langle 370,2; 750,6 \rangle$	$\langle 673,4; 1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	2376,90	$\langle 0; 763,2 \rangle$	$\langle 0; 726,6 \rangle$	$\langle 0; 750,6 \rangle$	$\langle 136,6; 1053,7 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.59: Utilitárne riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	269,80	$\langle 0,1;269,7 \rangle$	$\langle 0,1;269,7 \rangle$		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	279,10	$\langle 0,1;279 \rangle$		$\langle 0,1;279 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_4\}$	396,20	$\langle 0,1;396,1 \rangle$			$\langle 0,1;396,1 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	179,70		$\langle 0,1;179,6 \rangle$	$\langle 0,1;179,6 \rangle$	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	165,40		$\langle 0,1;165,3 \rangle$		$\langle 0,1;165,3 \rangle$
$W_S = \{w_3, w_4\}$	132,40			$\langle 0,1;132,3 \rangle$	$\langle 0,1;132,3 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	670,70	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	616,90	$\langle 0,1;616,7 \rangle$	$\langle 0,1;616,7 \rangle$		$\langle 0,1;616,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	350,50	$\langle 0,1;350,3 \rangle$		$\langle 0,1;350,3 \rangle$	$\langle 0,1;350,3 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	380,60		$\langle 0,1;380,4 \rangle$	$\langle 0,1;380,4 \rangle$	$\langle 0,1;380,4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	917,50	$\langle 0,1;763,3 \rangle$	$\langle 0,1;726,7 \rangle$	$\langle 0,1;760,6 \rangle$	$\langle 0,1;917,1 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

V tabuľke č. 4.59 sú uvedené intervaly, v ktorých každé riešenie nachádzajúce sa v ňom považujeme za optimálne. Nashovo riešenie poskytuje rovnaké hodnoty ako v prípade utilitárneho a výsledky sú prezentované v tabuľke č. 4.60.

Tabuľka č. 4.60 : Nashovo riešenie rozdelenia nákladov

Koalície	náklady	Redistribúcia nákladov medzi hráčov			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1\}$	763,30	763,30			
$W_S = \{w_2\}$	726,70		726,70		
$W_S = \{w_3\}$	750,60			750,60	
$W_S = \{w_4\}$	1053,80				1053,80
$W_S = \{w_1, w_2\}$	1220,20	$\langle 493,6;763,2 \rangle$	$\langle 457;726,6 \rangle$		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	1234,80	$\langle 484,3;763,2 \rangle$		$\langle 471,6;750,5 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_4\}$	1420,90	$\langle 367,2;763,2 \rangle$			$\langle 657,7;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	1297,60		$\langle 547,1;726,6 \rangle$	$\langle 571;750,5 \rangle$	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	1648,10		$\langle 594,4;726,6 \rangle$		$\langle 921,5;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_3, w_4\}$	1766,60			$\langle 712,9;750,6 \rangle$	$\langle 1016,1;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	1569,90	$\langle 92,8;763,2 \rangle$	$\langle 56,2;726,6 \rangle$	$\langle 80,1;750,6 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	1926,90	$\langle 146,6;763,2 \rangle$	$\langle 110;726,6 \rangle$		$\langle 437,1;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	1917,20	$\langle 113;763,2 \rangle$		$\langle 100,3;750,6 \rangle$	$\langle 403,5;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	2150,50		$\langle 346,3;726,6 \rangle$	$\langle 370,2;750,6 \rangle$	$\langle 673,4;1053,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	2376,90	$\langle 0;763,2 \rangle$	$\langle 0;726,6 \rangle$	$\langle 0;750,6 \rangle$	$\langle 136,6;1053,7 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 4.61 : Nashovo riešenie alokácie úspor

Koalície	$s^{(W_S)}$	Alokácia úspor $s^{(W_S)}$			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$W_S = \{w_1, w_2\}$	269,80	$\langle 0,1;269,7 \rangle$	$\langle 0,1;269,7 \rangle$		
$W_S = \{w_1, w_3\}$	279,10	$\langle 0,1;279 \rangle$		$\langle 0,1;279 \rangle$	$\langle 0,1;279 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_4\}$	396,20	$\langle 0,1;396,1 \rangle$			$\langle 0,1;396,1 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3\}$	179,70		$\langle 0,1;179,6 \rangle$	$\langle 0,1;179,6 \rangle$	
$W_S = \{w_2, w_4\}$	165,40		$\langle 0,1;165,3 \rangle$		$\langle 0,1;165,3 \rangle$
$W_S = \{w_3, w_4\}$	132,40			$\langle 0,1;132,3 \rangle$	$\langle 0,1;132,3 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3\}$	670,70	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	$\langle 0,1;670,5 \rangle$	
$W_S = \{w_1, w_2, w_4\}$	616,90	$\langle 0,1;616,7 \rangle$	$\langle 0,1;616,7 \rangle$		$\langle 0,1;616,7 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_3, w_4\}$	350,50	$\langle 0,1;350,3 \rangle$		$\langle 0,1;350,3 \rangle$	$\langle 0,1;350,3 \rangle$
$W_S = \{w_2, w_3, w_4\}$	380,60		$\langle 0,1;380,4 \rangle$	$\langle 0,1;380,4 \rangle$	$\langle 0,1;380,4 \rangle$
$W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$	917,50	$\langle 0,1;763,3 \rangle$	$\langle 0,1;726,7 \rangle$	$\langle 0,1;760,6 \rangle$	$\langle 0,1;917,1 \rangle$

Zdroj: Vlastné spracovanie

5 Diskusia

Predložená dizertačná práca je sumarizáciou viacročného záujmu o problematiku riešenia kooperatívnych úloh rozvozu. Prvé skúsenosti vychádzali z analýzy modifikácie základnej úlohy rozvozu (Pekár a kol., 2012) v článku *Kooperatívna okružná úloha* (Figurová a Čičková, 2017), kde bol predstavený prvý kooperatívny model rozvozu, ktorý považujeme za východiskový atribút záverečnej práce. Základná úloha rozvozu vychádza z problému okružnej úlohy s viacerými strediskami, ktorý je v súčasnosti stále objektom záujmu rôznych výskumníkov predovšetkým z oblasti operačného výskumu a umelej inteligencie, čo sme uviedli v prvej kapitole záverečnej práce. V úlohe rozvozu s viacerými strediskami je cieľom nájsť najlacnejší rozvoz medzi výrobnými strediskami (skladmi) a ich konečnými zákazníkmi. Našou základnou úlohou bolo zistiť, či vzájomnou spoluprácou výrobných stredísk dochádza k úspore prepravných nákladov. Z tohto dôvodu sme stanovili cieľ modifikovať základnú úlohu rozvozu s viacerými strediskami uvažovaním kooperatívneho správania sa subjektov na základe teórie hier. Vo všeobecnosti by mali zo spolupráce vyplývať určité benefity vo forme usparených prepravných nákladov (čo v našom prípade považujeme za „výhru“), ktoré chceme následne prerozdeliť medzi jednotlivých hráčov. Vychádzame z teórie vyjednávania, pričom využívame tieto spôsoby rozdelenia výhry – utilitárne riešenie, rovnostárske riešenie, Nashovo riešenie a Shapleyho hodnotu. Tieto metódy prerozdelenia „výhry“ predstavujeme v empirickej časti záverečnej práce.

Jedným z hlavných výsledkov práce je vytvorenie nových modelov kooperatívneho rozvozu. Predstavené originálne modely v štvrtej kapitole slúžia na vyčíslenie rozvozu s optimálnymi (minimálnymi) prepravnými nákladmi v prípade kooperácie vlastníkov skladov.

5.1 Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov

Predložená záverečná práca je sústredená na prezentovanie nových modelov kooperatívnej úlohy rozvozu, pričom vychádzame z teórie hier. V kooperatívnej úlohe rozvozu s viacerými skladmi sa teda domnievame, že majitelia jednotlivých skladov sú zároveň aj hráčmi, ktorí chcú spolupracovať s ostatnými vlastníkami logistických skladov s cieľom ďalšej minimalizácie svojich prepravných nákladov. V prípade kooperácie medzi jednotlivými skladmi môžu byť zákazníci obslužení nie len vozidlom svojho východiskového strediska, ale aj vozidlom iného hráča vo vytvorenej koalícii.

Výsledky práce členíme na dve časti. V prvej časti sme testovali fungovanie matematických modelov na úlohe menšieho rozmeru, aby sme dosiahli optimálne riešenie v reálnom čase. Na nájdenie riešenia sme používali solver Cplex 12.8.0.0 v rámci zakúpenej licencie na používanie softvéru GAMS na počítačovom zariadení INTEL® Core(i7 8565U) 4 CPU, E8500 @ 8 GB DDR4 pre Windows 10 Pro. Skúmali sme výsledky dvoch základných úloh kooperatívneho rozvozu, a to konkrétne kooperatívnej úlohe rozvozu s homogénnym a heterogénnym dopravným parkom. Obidva matematické modely sme porovnávali v dvoch prípadoch. V prvom prípade sa vozidlo hráčov po obsluhu svojich zákazníkov musí vrátiť do svojho východiskového skladu. Zaujímalo nás, či uvoľnením tohto predpokladu dochádza k ďalšej úspore prepravných nákladov, a preto sme skúmali, ako sa zmenia výsledky matematických modelov po prijatí predpokladu o znovunaložení vozidla v inom ako východiskovom sklade, odkiaľ môže vozidlo ďalej pokračovať vo svojej trase. Kooperatívny rozvoz a jeho modifikácie sme testovali na dátach týkajúcich sa 15 obslužných miest v Bratislave, ktoré majú hráči za úlohu obslúžiť. Pre prehľadné spracovanie výsledkov danej problematiky uvádzame tabuľky č. 5.1 a č. 5.2, v ktorej vyčíslujeme minimálne prepravné náklady grand koalície (t. j. koalícia, v ktorej spolupracujú všetci hráči navzájom). Pri každom modeli vyčíslujeme aj čas výpočtu programu systému GAMS, prostredníctvom solvera CPLEX, ktorý využíva univerzálnu metódu vetvenia a rezov.

Tabuľka č. 5.1: Zhrnutie výsledkov predstavených matematických modelov

Koalície	CoHomFVRP_ návrat jedno ¹⁶	CoHomFVRP znovu jedno ¹⁷	CoHetFVRP návrat jedno ¹⁸	CoHetFVRP_ znovu jedno ¹⁹
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	42,91j. 17606,9sekúnd	40,77j. 913,09sekúnd	35,50j. 1689,7sekúnd	32,97j. 6127,91sekúnd

Zdroj: Vlastné spracovanie

¹⁶ Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a návratom do svojho východiskového skladu s predpokladom existencie jedného vozidla

¹⁷ Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a predpokladom znovunaloženia v inom ako východiskovom sklade s predpokladom existencie jedného vozidla.

¹⁸ Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a návratom do svojho východiskového skladu s predpokladom existencie jedného vozidla.

¹⁹ Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a predpokladom znovunaloženia v inom ako východiskovom sklade s predpokladom existencie jedného vozidla.

Tabuľka č. 5.2: Zhrnutie výsledkov predstavených matematických modelov

Koalície	CoHomFVRP_ návrát viac ²⁰	CoHomFVRP _znovu_ viac ²¹	CoHetFVRP _návrát viac ²²	CoHetFVRP_ znovu_ viac ²³
$W_S=\{w_1, w_2, w_3\}$	39,06j. 150,27sekúnd	37,37j. 3,25sekúnd	35,26j. 6,83sekúnd	32,97j. 57,69sekúnd

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z hľadiska výpočtovej náročnosti môžeme konštatovať, že výsledky matematických modelov s predpokladom existencie viacerých vozidiel v stredisku (resp. môže jedno vozidlo uskutočniť viacero jázd) sú lepšie, pretože čas výpočtu bol oveľa prijateľnejší, ako v prípade existencie len jedného vozidla. Konštatujeme, že zavedením predpokladu o znovunaložení vozidla v inom ako východiskovom sklade sa v oboch prípadoch znížili prepravné náklady. Matematický model, ktorý uvažuje rôznorodú kapacitu vykazuje najlepšie výsledky v hodnote 32,97 jednotiek prepravných nákladov.

Čiastkovým cieľom záverečnej práce bolo aj prerozdelenie usporených nákladov medzi jednotlivých hráčov. V tretej kapitole „metodika práce a metódy skúmania“ sme uviedli niekoľko spôsobov alokácie úspor, pričom sme predpokladali, že hráči si vstupom do koalície musia polepšiť aspoň o nejakú malú hodnotu (v našom prípade je to 0,1) oproti jednočlenným koalíciám. Týmto predpokladom sme zabezpečili podmienku individuálnej stability, na základe ktorej hráč v koalícii získa pri prerozdelení nákladov aspoň toľko, koľko by získal samostatným rozvozom. Z toho mu plynú výhody vo forme usporených nákladov.

V druhej časti výsledkov záverečnej práce sme testovali predstavené modely kooperatívneho rozvozu na reálnom príklade z praxe, a to konkrétne na údajoch, ktoré poskytla firma Karlovarské minerální vody, a. s., ktorá je najväčším výrobcom a distribútorom nealkoholických nápojov v strednej Európe. Keďže ide o veľkú

²⁰ Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a návratom do svojho východiskového skladu s predpokladom existencie viacerých vozidiel (jázd)

²¹ Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a predpokladom znovunaloženia v inom ako východiskovom sklade s predpokladom existencie viacerých vozidiel (jázd).

²² Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a návratom do svojho východiskového skladu s predpokladom existencie viacerých vozidiel (jázd)

²³ Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a predpokladom znovunaloženia v inom ako východiskovom sklade s predpokladom existencie viacerých vozidiel (jázd)

spoločnosť, ktorá denne uskutočňuje niekoľko rozvozov, predpoklady sme značne zjednodušili. Z údajov od firmy sme získali adresy ich výrobných stredísk odkiaľ potom uskutočňujú rozvoz ich tovarov do obslužných miest pomocou vozidiel s rovnakou kapacitou (homogénny dopravný park). Z tohto dôvodu sme za východiskový model považovali *Kooperatívnu úlohu rozvozu s homogénnym dopravným parkom*. Na nájdenie riešenia sme používali solver Cplex 12.8.0.0 v rámci zakúpenej licencie na používanie softvéru GAMS na počítačom AMD RYZEN 7 1700, 8 CPU, @ 24 GB RAM. Keďže na základe testovacieho modelu z podkapitoly 4.1 vyšli lepšie výsledky, pri hľadaní riešenia sme zaviedli predpoklad o znovunaložení vozidla v inom ako východiskovom sklade. V každom prípade sa potvrdilo, že vzájomným využívaním vozidiel iných hráčov v koalícii dochádza k značnej úspore prepravných nákladov. Napr. v prípade grand koalície $W_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ hráči vzájomným kooperovaním ušetria približne 917,50 jednotiek nákladov (vo forme prejdenej vzdialenosti). Tieto náklady potom opäť prerozdělujeme medzi hráčov tak, aby si vstupom do koalície nikto nepohoršil svoju situáciu, a teda platí podmienka individuálnej stability pre každého hráča.

5.2 Prínosy pre teóriu a prax

V tejto časti záverečnej práce vyzdvihneme prínosy pre teóriu a prax, ktoré vyplývajú z podstaty tejto práce. Z pohľadu teórie považujeme za prínosnú prvú kapitolu, v ktorej boli predstavené výskumné práce prevažne v indexovaných a karentovaných časopisoch a tretiu kapitolu, v ktorej sú prezentované matematické formulácie úloh, ktoré tvoria východiskový atribút pri tvorení nových modelov týkajúcich sa kooperatívneho rozvozu. Prínosným hodnotíme predovšetkým tvorbu originálnych matematických modelov v tvare celočíselného zmiešaného programovania, ktoré vychádzajú z doteraz publikovaných prác z oblasti riešenej problematiky (Figurová a Čičková, 2017; Figurová a Čičková, 2018; Figurová, 2018; Figurová a Čičková, 2019).

Z praktického hľadiska hodnotíme ako prínosné spracovanie dát vo forme testovacej úlohy menšieho rozmeru a úlohy založenej na reálnom podklade na ich následnú aplikáciu na predstavenú kooperatívnu úlohu rozvozu. V prvom prípade testovania modelov sme vytvorili maticu najkratších vzdialeností medzi 15 adresami zákazníkov v Bratislave, ktorí požadujú dovoz určitého tovaru od troch logistických spoločností. Úlohou bolo dokázať riešiteľnosť nami zvolených modifikácií kooperatívneho rozvozu v reálnom čase. Potvrdzujeme, že v prípade takejto úlohy

menšieho rozmeru (konkrétne matica 18x18) sa podarilo nájsť optimálne riešenie prostredníctvom algebrického systému GAMS v celkom prijateľnom čase (v prípade trojkoalície max. 150 sekúnd). Za prínosné považujeme zápisy matematických formulácií všetkých predstavených modelov v prostredí GAMS, pričom jednotlivé kódy uvádzame v prílohe záverečnej práce. V prípade *Kooperatívneho rozvozu s homogénnym dopravným parkom v oboch situáciách (návrat i znovunaplnenie vozidla)* sme implementovali aj podmienku individuálnej stability, ktorá zabezpečuje, že rozvoz daného hráča v koalícii nebude nákladnejší ako jeho samostatný rozvoz. V ostatných prípadoch túto podmienku zabezpečujeme na základe uvedených spôsobov alokácie úspor, ktoré vychádzajú z teórie vyjednávania.

Prínosné pre prax považujeme aj spustenie zdrojových kódov na reálnych dátach firmy Karlovarské minerální vody, a. s., ktorá uskutočňuje rozvoz svojich výrobkov na 20 územiach sveta. Z dôvodu výpočtovej zložitosti prezentovaných úloh sme s pomocou vhodného softvérového a hardvérového zabezpečenia umožňujúcim paralelizáciu výpočtov spustili kód matematického modelu na vzdialenom serveri, ktorý zabezpečil riešenie v reálnom čase. Pre účely dizertačnej práce sme predpokladali, že táto firma vlastní 4 výrobné strediská (reálne ich vlastní 11) s neobmedzenou kapacitou a existenciou viacerých vozidiel, ktorých kapacita je rovnaká. Zákazníkov, ktorý sa nachádzajú na českom (ČR), slovenskom (SVK), rakúskom (AU) a maďarskom trhu (HU) a ich priradenie k jednotlivým hráčom (výrobným strediskám) vizuálne prezentujeme na obrázku č. 4. Každý hráč potom musí obslúžiť svoju množinu zákazníkov, to znamená výrobné stredisko w_1 , w_2 a w_3 nachádzajúce sa v ČR uspokojuje požiadavky českých zákazníkov a w_4 nachádzajúce sa v AU má na starosti slovenských, rakúskych a maďarských zákazníkov. Hlavným cieľom bolo dokázať, že vzájomnou spolupracou výrobných stredísk tejto firmy sa dokáže ušetriť značné množstvo prepravných nákladov vo forme usporenej prepravnej vzdialenosti vozidiel. Skúmali sme, či sa daným hráčom oplatí spolupracovať, a teda či je splnená podmienka, na základe ktorej hráči dosahujú spolupracou výhody. Spôsoby alokácie výhier sme zapísali ako úlohy matematického programovania v tretej kapitole (pričom boli prispôbené úlohe kooperatívneho rozvozu). V tabuľkách č. 4.54 - 4.61 potom možno vidieť, ako si hráči medzi sebou rozdeľujú prepravné náklady na základe teórie vyjednávania. Spravodlivú alokáciu úspor v prípade grand koalície vyčíslujeme prostredníctvom Shapleyho hodnoty v tabuľkách č. 4.56 a 4.47. Nájdením riešenia na základe predstaveného originálneho

matematického modelu môžu logistické spoločnosti uvedené modely používať na svoje každodenné rozhodovanie pri optimalizovaní ciest v prípade doručovania svojho tovaru prostredníctvom svojich vozidiel. Otázkou ďalej ostáva, ako zlepšiť získané výsledky z hľadiska času výpočtu (doposiaľ jeden výpočet na získaných dátach trval pri dvojčlennej koalícii aj 80000 sekúnd), prípadne model rozšíriť o ďalšie predpoklady a ohraničujúce podmienky (napr. časové okná a pod.)

Záver

Hlavným cieľom predloženej dizertačnej práce je prezentácia nových matematických modelov na riešenie úloh kooperatívneho rozvozu a overenie ich funkcionality riešením zodpovedajúcich úloh. Na to, aby sme splnili náš hlavný cieľ, sme postupne v jednotlivých častiach dizertačnej práce naplňali čiastkové ciele.

Prvá kapitola záverečnej práce je venovaná teoretickému vymedzeniu okružných úloh. V tejto kapitole sa venujeme vymedzeniu podstaty úlohy rozvozu s viacerými strediskami, ktorá slúži ako východiskový atribút záverečnej práce. Taktiež táto kapitola obsahuje prehľad publikácií týkajúcich sa nami skúmanej problematiky. Na základe mnohých článkov a príspevkov v tejto kapitole možno potvrdiť, že zavedenie predpokladu kooperácie do dopravných problémov môže viesť k značnej úspore nákladov napr. v logistike. Keďže predmetom dizertačnej práce je riešenie kooperatívnej úlohy rozvozu, prínosnou časťou úvodnej kapitoly prezentujeme teóriu hier ako nástroj riešenia kooperatívnych dopravných úloh.

V druhej kapitole prezentujeme jednotlivé ciele našej práce. Dosiahnutie základného cieľa je podmienené splnením čiastkových cieľov. Objektom záujmu bolo zostavenie nových matematických modelov kooperatívneho rozvozu vo forme modelov celočíselného zmiešaného programovania. Pre účely tejto diplomovej práce sme zvolili prístup k riešeniu úloh optimalizačnou metódou. Zápis nových modelov kooperatívneho rozvozu bol realizovaný v prostredí optimalizačného programu GAMS. Čiastkovým cieľom bola prezentácia a následná implementácia rôznych metód redistribúcie usporených nákladov, ktoré hráčom vyplývajú zo vzájomnej kooperácie.

Významnou kapitolou dizertačnej práce je tretia časť, ktorá bola venovaná kooperatívnym hrám. Dôležité bolo predovšetkým uvedenie matematických modelov úlohy rozvozu s viacerými strediskami a jej kooperatívneho rozšírenia, z ktorého sme vychádzali pri zostavovaní kooperatívneho rozvozu v štvrtej kapitole. V tejto kapitole prezentujeme aj redistribúciu usporených nákladov na základe teórie vyjednávania. Naším čiastkovým cieľom zabezpečenie výpočtov vo vhodnom softvérovom prostredí. Keďže výpočty realizujeme v systéme GAMS, venujeme pozornosť v tejto kapitole aj tomuto softvéru, ktorý sa využíva predovšetkým v oblasti optimalizácie, pretože dáva možnosť zapisovania optimalizačných úloh pomocou ich matematických formulácií v kompaktnom tvare (v ich matematickom zápise).

Najdôležitejšou časťou práce je štvrtá kapitola, v ktorej sa nachádzajú výsledky celej záverečnej práce. V úvodnej časti tejto kapitoly sme najskôr prezentovali fungovanie predstavených modelov kooperatívneho rozvozu a jeho modifikácii na úlohe menšieho rozmeru. V tomto prípade plynú zo spolupráce určité benefity vo forme usporeních prepravných nákladov (čo v našom prípade považujeme za „výhru“), ktoré chceme následne prerozdeliť na základe teórie vyjednávania medzi jednotlivých hráčov. Teória vyjednávania je zvyčajne prepojená s teóriou užitočnosti. „Výhry“ v tomto prípade reprezentujú hráčovú užitočnosť, ktorá mu plynie zo spolupráce a ktorú chce hráč maximalizovať. V tejto práci sme prezentovali modifikácie rôznych rozdelení takýchto „výhier“ vo forme nákladov a príslušných usporeních nákladov. Z tohto dôvodu sme uvádzali termín „výhra“ úvodzovkách (v porovnaní so všeobecnou funkciou užitočnosti vo forme zisku). Následne aplikujeme teoretické poznatky na reálnom príklade z praxe. Zaoberáme sa doručovaním jednotlivých zásielok na českom, slovenskom, rakúskom a maďarskom trhu za jeden deň a viacerými vozidlami spoločnosti Karlovarské minerální vody, a. s.. Výpočet optimálnej trasy bol vyriešený za predpokladu, že všetky požiadavky na úlohu sú vopred známe, pričom cieľom bola minimalizácia celkovej vzdialenosti prejdenej vozidlami s rovnakou kapacitou. Predpokladali sme, že hráči (výrobné strediská) poznajú všetky adresy doručenia (pričom každému hráčovi prislúcha vlastná množina zákazníkov) čo znamená, že počas pracovnej smeny vozidla už nemohla od žiadneho zákazníka prísť nová požiadavka. Na základe vstupných dát, ktoré sú tvorené štyrmi hráčmi a 40 adresami doručenia nachádzajúcich sa v Českej republike, Slovenskej republike, Maďarsku a Rakúsku sa podarilo prostredníctvom optimalizačného softvéru nájsť riešenie úlohy kooperatívneho rozvozu s homogénnym dopravným parkom a znovunaplnením v inom ako východiskovom stredisku. Možno konštatovať, že takto zvolenou cestou by prešlo vozidlo hráča podstatne menej kilometrov v porovnaní so situáciou, keby hráč rozvoz uskutočňuje samostatne. Prínosné je aj zavedenie podmienky individuálnej stability na základe ktorej docielime, že pri následnej redistribúcii usporeních nákladov hráč získa minimálne toľko, koľko by získal samostatným postupom (nekooperatívnym správaním). Výpočty boli realizované v systéme GAMS. Pri porovnávaní výsledných prepravných nákladov prijímame záver, že zavedenie predpokladu o vzájomnom využívaní vozidiel hráčov, ktoré sa môžu znovunaplniť v inom ako východiskovom sklade umožňuje zníženie prepravných nákladov.

Podstata nášho hlavného cieľa dizertačnej práce, ako aj čiastkových cieľov, bola naplnená v jednotlivých kapitolách záverečnej práce. Prezentované matematické modely na riešenie kooperatívnej úlohy rozvozu možno pri splnených predpokladoch modelov aplikovať aj v reálnych podnikoch poskytujúcich logistické služby.

Zoznam použitej literatúry

- [1] ADELZADEH, M. – ASL, V. M. – KOOSHA, M. 2014. A mathematical model and a solving procedure for multi-depot vehicle routing problem with fuzzy time window and heterogeneous vehicle. In *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, vol. 75, no. 8, p. 793-802. [cit. 2020-01-06]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s00170-014-6141-8>.
- [2] ALONSO, F. – ALVAREZ, M. J. – BEASLEY, J. 2008. A tabu search algorithm for the periodic vehicle routing problem with multiple vehicle trips and accessibility restrictions. In *Journal of the Operational Research Society*, 2008, vol. 59, no. 7, p. 963-976. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2602405>.
- [3] ARAS, N. – AKSEN, D. – TEKIN, M. T. 2011. Selective multi-depot vehicle routing problem with pricing. In *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2011, vol. 19, no. 5, p. 866-884. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2010.08.003>.
- [4] AUDY, J.F. – D'AMOURS, S. – ROUSSEAU, L.M. 2011. Cost allocation in the establishment of a collaborative transportation agreement—an application in the furniture industry. In *Journal of the Operational Research Society*, 2011, vol. 62, n. 6, p. 960-970. [cit. 2020-01-06]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/jors.2010.53>.
- [5] AUMANN, R. J. – MASCHLER, M. B. 1964. *The Bargaining Set for Cooperative Games*. In: DRESHER, M – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. (ed.), *Annals of mathematics studies*, Princeton: Princeton University Press, 1964, no. 52, p. 443-476.
- [6] AXELROD, R. 1984. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books, Inc., Publishers. 264 p. ISBN 978-0465005642.
- [7] BAKER, B. M. – AYECHIEW, M. A. 2003. A Genetic Algorithm for the Vehicle Routing Problem. In *Computer and Operation Research*, 2003, vol. 30, no. 5, p. 787-800. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: [http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548\(02\)00051-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(02)00051-5).
- [8] BALDACCI, R. – MINGOZZI, A. 2009. A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. In *Mathematical Programming*, 2009, vol. 120, n. 347. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s10107-008-0218-9>.
- [9] BANIAK, A. – DUBINA, I. 2012. Innovation analysis and game theory: A review. In *Innovation – Organization and Management*, 2012, vol. 14, no. 2, p. 178-191. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.5172/impp.2012.14.2.178>.
- [10] BARRON, E. N. 2013. *Game Theory: An Introduction, 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons. 2013. ISBN 978-1118216934.
- [11] BATTARRA, M. – CORDEAU, J.F. – IORI, M. 2014. Pickup-and-Delivery Problems for Goods Transportation. In *Vehicle Routing*, Bologna: Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Optimization Society, 2014, p. 162. ISBN 978-1-611973-58-7.
- [12] BELL, M.G.H. 2000. A game theory approach to measuring the performance reliability of transport network. In *Transportation Research*, vol. 34, no. 6, p. 533-545. [cit. 2020-01-47]. Dostupné na: [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(99\)00042-9](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(99)00042-9).

- [13] BELL, M.G.H. 2004. Games, heuristics, and risk averseness in vehicle routing problems. In: *Journal of Urban Planning and Development*, 2004, vol.130, no. 1, p. 37–41. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9488\(2004\)130:1\(37\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9488(2004)130:1(37)).
- [14] BERNARDES DE OLIVEIRA, F. – ENAYATIFAR, R. – SADAEI, H. J. – GUIMARAES, F. G. – POTVIN, J.Y. 2016. A cooperative coevolutionary algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. In *Expert Systems with Applications*, 2016, vol. 43, p. 117-130. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.08.030>
- [15] BLACKWELL, D. 1956. An analog of the minimax theorem for vector payoffs. In *Pacific Journal of Mathematics*, 1956, vol. 6, no. 1, p. 1-8. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.2140/pjm.1956.6.1>.
- [16] BODIN, L. – GOLDEN, B. L. 1981. Classification in Vehicle Routing and Scheduling. In *Networks*, 1981, vol. 11, p. 97-107. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1002/net.3230110204>.
- [17] BOREL, E. 1921. La théorie du jeu les équations intégrales à noyau symétrique. In *Comptes Rendus l'Académie*, 1921, vol. 173, p. 1304-1308. English translation by Savage, L.: The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels. In *Econometrica*, 1953, vol. 21, no. 1, p. 97-100. ISSN 00129682.
- [18] BRANZEI, R. – DIMTROV, D. – TIJS, S. 2008. *Models in cooperative game theory*. New York: Springer Science and Business Media, 2008. ISBN 978-3-540-77954-4.
- [19] BRÄYSY, O. – GENDREAU, M. 2005. Vehicle Routing Problem With Time Windows, Part II: Metaheuristics. In *Transportation Science*, 2005, vol. 39, n. 1, p. 119-139. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1287/trsc.1030.0057>.
- [20] BREZINA, I. – ČÍČKOVÁ, Z. 2006. Solving the travelling salesman problem using the ant colony optimization. In *Management information systems*, vol. 6, no. 4, p. 10-14.
- [21] BURCHETT, D. – CAMPION, E. 2002. Mix fleet vehicle routing problem – An application of Tabu search in the grocery delivery industry. In *Management Science Honors Project*. New Zeland: University of Canterbury, 2002.
- [22] CANTU-FUNES, R. – SALAZAR-AGUILAR, M. A. – BOYER, V. 2018. Multi-depot periodic vehicle routing problem with due dates and time windows. In *Journal of the Operational Research Society*, 2018, vol. 69, no. 2, p. 296-306. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/s41274-017-0206-7>.
- [23] CARLSSON, J. – GE, D. – SUBRAMANIAM, A. – YE, Y. 2009. Solving Min-Max Multi – Depot Vehicle Routing Problem. In *Fields Institute Communications*, 2009, vol. 55, p. 31-46. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <http://dx.doi.org/10.1090/fic/055/03>.
- [24] CLARKE, G. – WRIGHT, J. R. 1964. Scheduling of Vehicle Routing Problem from a Central Depot to a Number of Delivery Points. In *Operations Research*, vol. 12, no. 4, p. 519-643. [cit. 2020-01-15]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568>.
- [25] CONTARDO, C. – MARTINELLI, R. 2014. A new exact algorithm for the multi-depot vehicle routing problem under capacity and route length constraints. In *Discrete Optimization*, 2014, vol. 12, p. 129-146. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2014.03.001>.
- [26] CORDEAU, F. – LAPORTE, G. 2001. A Tabu Search Algorithm For The Site Dependent Vehicle Routing Problem With Time Windows. In *Information Systems*

- and *Operational Research*, 2001, vol. 39, no.3, p. 292-298. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1080/03155986.2001.11732443>.
- [27] COURNOT, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses (Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth)*. Paris: L. Hachette, 1838.
- [28] CREVIER, B. – CORDEAU, J. – LAPORTE, G. 2007. The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes. In *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 176, no. 2, p. 756-773. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.08.015>.
- [29] CRUIJSSEN, F. – DULLAERT, W. – FLEUREN, H. 2007. Horizontal Cooperation in Transport and Logistics: A Literature Review. In *Transportation Journal*, 2007, vol. 46, no. 3, p. 22-39. ISSN 0041-1612.
- [30] ČIČKOVÁ, Z. – BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2008. Riešenie úlohy rozvozu materiálu s časovými oknami samoorganizujúcim sa migračným algoritmom. In *AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach. 12. medzinárodná vedecká konferencia*. Bratislava: Iura Edition, 2008. ISBN 978-80-8078-233-7.
- [31] ČIČKOVÁ, Z. – BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2013. Solving the Real-life Vehicle Routing Problem with Time Windows Using Self Organizing Migrating Algorithm. In *Ekonomický časopis: časopis pre ekonomickú teóriu, hospodársku politiku, spoločensko-ekonomické prognózovanie*. Bratislava: Ekonomický ústav SAV, Prognostický ústav SAV, 2013, roč. 61, č. 5, s. 497-513. ISSN 0013-3035.
- [32] ČIČKOVÁ, Z. 2008. Optimalizácia rozvozu materiálu. In *Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008, s. 4- 6. ISBN 978-80-225-2498-8.
- [33] ČIČKOVÁ, Z. 2013. Riešenie okružných úloh: habilitačná práca. Bratislava, 2013. 125 s.
- [34] DANTZIG, G. – FULKERSON, R. – JOHNSON, S. 1954. Solution of a large – scale traveling-salesman problem. In *Operatins Research*, 1954, vol. 2, no. 4.
- [35] DANTZIG, G. – RAMSER, J. 1959. The truck Dispatching Problem. In *Management Science*, 1954. vol. 6, no. 1, p. 80-91. ISSN 0096-3984.
- [36] DEMÚTH, A. 2013. *Teória hier a problém rozhodovania*. Trnava: Filozofická fakulta Trnavskej university v Trnave, 2013. ISBN: 978-80-8082-580-5.
- [37] DIMAND, M. A. – DIMAND, R. W. 1996. *A history of Game Theory, Vol. 1. From the Beginnings to 1945*. London a New York: Routledge, 1996, 200 p. ISBN 978-0415072571
- [38] DONDO, R. – CERDÁ, J. 2007. A cluster-based optimization approach for the multi-depot heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows. In *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 176, no. 3, p. 1478-1507. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.07.077>.
- [39] DRAZEN, A. – LIMAO, N. 2008. A bargaining theory of inefficient redistribution policies. In: *International Economic Review*, 2008, vol. 49, n. 2, p. 621-657. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1111/j.1468-2354.2008.00492.x>
- [40] DULAI, T. – WERNER-STARK, A. 2010. Algorithm based on vehicle cooperation for Multi-Depot Vehicle Routing Problem. In *International Conference on Operations Research, München*. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.13140/2.1.2895.3929>
- [41] ECONOMIDES, A. SILVESTER, J. 1990. A game theory approach to cooperative and non-cooperative routing problems. In *SBT/IEEE International Symposium on Telecommunications*, Rio de Janeiro, Brazil. Rio de Janeiro: IEEE, 1990, pp. 597-601. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1109/ITS.1990.175673>.

- [42] EUCKEN, W. 2004. *Zásady hospodářského řádu*. Praha : Liberální institut, 2004. ISBN 80-86389-32-4
- [43] EZUGWU, A. – AKUTSAH, F. – OLUSANYA, O. – ADEWUMI, O. 2018. Enhanced intelligent water drops algorithm for multi-depot vehicle routing problem. In *PLoS ONE*, 2018, vol. 13, no. 3. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0193751>.
- [44] FÁBRY, J. 2006. Dynamické okružní a rozvozní úlohy: disertační práce. Praha : VŠE, FIS, 2006. 142 s.
- [45] FIGUROVÁ, D. – ČÍČKOVÁ, Z. 2017. Cooperative vehicle routing problem. In *AIESA Medzinárodná vedecká konferencia, 9. november 2017, Bratislava*. Bratislava: Publisher Letra Edu, 2017, s. 35. ISBN 978-80-972866-0-6.
- [46] FIGUROVÁ, D. – ČÍČKOVÁ, Z. 2018. Shapleyho hodnota aplikovaná v kooperatívnej úlohe rozvozu. In *Competition. International Scientific Conference, 17th–18th May, 2018, Jihlava, Czech Republic*. Jihlava : College of Polytechnics Jihlava, 2018. s. 67-74. ISBN 978-80-88064-37-4.
- [47] FIGUROVÁ, D. 2018b. Prístupy prerozdelenia výhier v kooperatívnej hre. In: *AIESA – Budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach, október 2018 v Bratislave*. Bratislava : Letra Edu, 2018. s. 433-438. ISBN 978-80-89962-14-3.
- [48] FIGUROVÁ, D. 2018b. Rovnostárske riešenie rozdelenia výhry v kooperatívnej hre. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu. Mezinárodní vědecký seminář*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2018. s. 34-39. ISBN 978-80-225-4563-1.
- [49] FIGUROVÁ, D. 2019. Utilitárne riešenie pri alokácii úspor z kooperatívnej hry. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu. Mezinárodní vědecký seminář*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2019. s. 25-30. ISBN 978-80-225-4650-8.
- [50] GAVISH, B. – SRIKANTH, K. 1986. An Optimal Solution Method for Large-Scale Multiple Traveling Salesmen Problems. In *Operations Research*, 1986, vol. 34, p. 698 – 717.
- [51] GHANNADPOUR, S. F. – NOORI, S. – TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R. – GHOSEIRI, K. 2014. A multi-objective dynamic vehicle routing problem with fuzzy time windows: Model, solution and application. In *Applied Soft Computing*, 2014, vol. 14, no. 1, p. 504-527. [cit. 2020-01-10]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.08.015>.
- [52] GILLIES D.B. 1953. Some theorems on n-person games: PhD. Thesis, Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [53] GIOSA, I. D. – TANSINI, I. L. – VIERA, I. O. 2002. New assignment algorithms for the multi-depot vehicle routing problem. In *Journal of the Operational Research Society*, 2002, vol. 53, n. 9, p. 977-984. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601426>.
- [54] GOGA, M. 2017. *Metodologické východiská modelovania koalíčných vzťahov v teórii hier*. . In *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska. Vedecký workshop: 4.december 2017, Bratislava*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2017. s. 1-12. ISBN 978-80-225-4430-6.
- [55] GUAJARDO, M. – RÖNNQVIST, M. 2015. Operations research models for coalition structure in collaborative logistics. In *European Journal of Operational Research*, 2015, vol. 240, no. 1, p. 147-159. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.06.015>.

- [56] GUEZOULI, L. – ABDELHAMID, S. 2017. A New Multi-Criteria Solving Procedure for Multi-Depot FSM-VRP with Time Window. In *International Journal of Applied Industrial Engineering*, 2017, vol. 4, no. 1, p. 1-18. ISSN 2155-4153.
- [57] GUTIN, G. – PUNNEN, A. P. 2007. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. US: Springer US, 2007, 749 p. ISBN 978-1-4020-0664-7.
- [58] HAFEZALKOTOB, A. – CHAHARBAGHI, S. – LAKEH, T. M. 2019. Cooperative aggregate production planning: a game theory approach. In *Journal of Industrial Engineering International*, 2019, vol. 15, p. 19-37. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s40092-019-0303-0>.
- [59] HAFEZALKOTOB, A. – MAKUI, A. 2015. Cooperative maximum-flow problem under uncertainty in logistic networks. In *Applied Mathematics and Computation*, vol. 250, p. 593-604. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.080>.
- [60] HASANI-GOODARZI, A. – TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R. 2012. Capacitated Vehicle Routing Problem for Multi-Product Cross- Docking with Split Deliveries and Pickups. In *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2012, vol. 62, p. 1360-1365. [cit. 2020-01-16]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.232>.
- [61] HO, W. – HO, G. T. S. – LAU, H. C. W. 2008. A hybrid genetic algorithm for the multi-depot vehicle routing problem. In *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2008, vol. 21, no. 4, p. 548-557. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2007.06.001>.
- [62] HOLLANDER, Y. – PRASHKER, J. N. – MAHALEL, D. 2006. Determining the desired amount of parking using game theory. In *Journal of Urban Planning and Development-ASCE*, 2006, vol. 132, no.1, p. 53-61. [cit. 2020-01-02]. Dostupné na: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9488\(2006\)132:1\(53\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9488(2006)132:1(53)).
- [63] CHÁVEZ, J. J. S. – ESCOBAR, J. W. – ECHEVERRI, M. G. 2016. A multi-objective Pareto ant colony algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing problem with Backhauls. In *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 2016, vol. 7, no. 1, p. 35-48. ISSN 1923-2926.
- [64] CHOBOT, M. – TURNOVEC, F. – ULAŠÍN, V. 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa, 1991. ISBN 80-05-00702-7.
- [65] CHOI, E. – TCHA, D.W. 2007. A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem. In *Computers and Operations Research*, 2007, vol. 34, no. 7. p. 2080-2095. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.08.002>.
- [66] IRNICH, S. 2000. *A Multi-Depot Pickup and Delivery Problem with a Single Hub and Heterogenous Vehicles*. In *European Journal of Operational Research*, 2000, vol. 122, no. 2, p. 310-328. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00235-0](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00235-0)
- [67] JANÁČEK, J. 2003. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina: EDIS, 2003. 248 s. ISBN 80-8070-031-1.
- [68] JIN, M. – LIU, K. – EKSIOGLU, B. 2008. A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. In *Operations Research Letters*, 2008, vol. 36, no. 2, p. 265-270. [cit. 2020-01-12]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.orl.2007.05.012>.
- [69] JUAN, A. A. – BARRIOS, B. – GONZÁLEZ-MARTÍN, S. – FAULIN, J. – COCCOLA, M. – BEKTAS, T. 2012. Combining biased randomization with meta-heuristics for solving the multi-depot vehicle routing problem. In *Proceedings of*

- the Winter Simulation Conference*. Berlin: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2012. ISBN 9781467347815.
- [70] KALAI, E. 1977. Proportional Solutions to Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons. In *Econometrica*, 1977. vol. 45, no. 7, p. 1623-1630. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://www.jstor.org/stable/1913954>.
 - [71] KARAKATIČ, S. – PODGORELEC, V. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. In *Applied Soft Computing*, no. 27, p. 519-532.
 - [72] KIR, S. – YAZGAN, H. R. – TÜNCEL, E. 2017. A novel heuristic algorithm for capacitated vehicle routing problem. In *Journal of Industrial Engineering International*, 2017, vol. 13, no. 3, p. 323-330. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s40092-017-0187-9>.
 - [73] LABADIE, N. – PRODHON, C. A. 2014. Survey on Multi-criteria Analysis in Logistics: Focus on Vehicle Routing Problems. London: Springer London Ltd, 2014, p. 3-29. ISBN 978-1-4471-5295-8.
 - [74] LAHYANI, R. – COELHO, L. C. – RENAUD, J. 2018. Alternative formulations and improved bounds for the multi-depot fleet size and mix vehicle routing problem. In *OR Spectrum*, 2018, vol. 40, no. 1, p. 125-157. ISSN 0171-6468.
 - [75] LAPORTE, G. – NORBERT, Y. – TAILLEFER, S. 1988. Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems. In *Transportation Science*, 1988, vol. 22, no. 3, p. 161-230. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1287/trsc.22.3.161>.
 - [76] LAPORTE, G. 2009. A concise guide to the Traveling Salesman Problem. In *Journal of the Operational Research Society*, 2010, vol. 61, no. 1, p. 35-40. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/jors.2009.76>.
 - [77] LEUNG, S. C. H. – ZHOU, X. – ZHANG, D. – ZHENG, J. 2011. Extended guided tabu search and a new packing algorithm for the two-dimensional loading vehicle routing problem. In *Computers and Operations Research*, 2011, vol. 38, no. 1, p. 205-215. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2010.04.013>.
 - [78] LI, J. – LI, Y. – PARDALOS, M. 2016. Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. In *Journal of Combinatorial Optimization*, 2016, vol. 31, no. 2, p. 515-532. ISSN 1382-6905.
 - [79] LIU, R. – JIANG, Z. – FUNG, R. Y. K. – CHEN, F. – LIU, X. 2010. Two-phase heuristic algorithms for full truckloads multi-depot capacitated vehicle routing problem in carrier collaboration. In *Computers and Operations Research*, 2010, vol. 37, no. 5, p. 950-959. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2009.08.002>
 - [80] LOZANO, S., MORENO, P., ADESO-DIAZ, B., & ALGABA, E. (2013). Cooperative game theory approach to allocating benefits of horizontal cooperation. In *European Journal of Operational Research*, 2013, vol 229, no. 2, p. 444-452. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.02.034>.
 - [81] LU, Y. – LU, J. – JIA, H. 2011. Study on the Environmental Cost-sharing Method for Reverse Logistics in Household Appliances. In *Energy Procedia*, 2011, vol. 5, p. 186-190. [cit. 2020-01-22]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2011.03.033>.
 - [82] MARINAKIS, Y. – MIGDALAS, A. – PARDALOS, P. M. 2007. A new bilevel formulation for the vehicle routing problem and a solution method using a genetic algorithm. In *Journal of Global Optimization*, 2007, vol. 38, no. 4, p. 555-580. ISSN 1573-2916.

- [83] McCAIN R.A. 2008. Cooperative games and cooperative organizations. In *The Journal of Socio-Economics*, 2008, vol. 37, no. 6, p. 2155–2167. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.socrec.2008.02.010>.
- [84] MILLER, C.E., TUCKER, A.W., ZEMLIN, R.A. 1960. Integer programming Formulation of Traveling Salesman Problems. In *Journal of the ACM*, 1960, vol. 7, no. 4, p. 326-329. [cit. 2020-02-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1145/321043.321046>.
- [85] MITCHELL, J. 2011. Branch-and cut methods. In COCHRAN, J.J. – COX, L.A. – KESKINOCAK, P. – KHAROUFEH, J.P. – SMITH, J.C., *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2011. ISBN 9780470400630.
- [86] MIRABI, M. – GHOMI, S.M.T.F – JOLAI, F. 2010. Efficient stochastic hybrid heuristics for the multi-depot vehicle routing problem. In *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2010, vol. 26, no. 6, p. 564-569. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.06.023>.
- [87] MONTOYA-TORRES, J. R. – FRANCO, J. L. – ISAZA, S. N. – JIMÉNEZ, H. F. – HERAZO-PADILLA, N. 2015. A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. In *Computers and Industrial Engineering*, 2015, vol. 79, p. 115-129. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.029>.
- [88] MYERSON, R. 1991. *Game Theory*, Cambridge: MA. Harvard University Press, 1991. 600 p. ISBN 9780674341166
- [89] NAGALAKSHMI, M. R. – GANGADHARAN, M. 2017. Optimisation of Customer Demand for Multi-Depot Dynamic Vehicle Routing Problem using Stochastic Demand and Variant of Ant Algorithm. In *IOSR Journal of Mathematics*, 2017, vol. 13, no. 2, p. 49-55. ISSN 2278-5728.
- [90] NASH, J. F. 1950. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 36, no.1, p. 48-49. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48>.
- [91] NEUMANN, J.V., - Morgenstern, O. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. ISBN 978-0691130613.
- [92] OSBORNE, M. J. 2003. *An introduction to Game Theory*. Toronto: Oxford University Press. 2003. 560 p. ISBN: 978-0195128956
- [93] PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČÍČKOVÁ, Z. – Reiff, M. 2012. *Modelovanie rozmiestnenia recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. ISBN: 978-80-225-3349-2.
- [94] PEŠKO, Š., 2004. *Teória hier*. [online] [cit. 2020-03-20]. Dostupné na: <http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_docs/20170219_202314__0.pdf>
- [95] POLACEK, M. – BENKNER, S. – DOERNER, K. F. – HARTL, R. 2008. A Cooperative and Adaptive Variable Neighborhood Search for the Multi Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows. In *Business Research*, 2008, vol. 1, no. 2, p. 207-218. ISSN 2198-3402.
- [96] POTVIN, J. Y. 2009. State-of-the Art Review—Evolutionary Algorithms for Vehicle Routing. In *INFORMS Journal on Computing*, 2009, vol. 21, no. 4, p. 517-656. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1287/ijoc.1080.0312>.
- [97] PRESCOTT-GAGNON, E. – DESAULNIERS, G. – ROUSSEAU, L. 2014. Heuristics for an oil delivery vehicle routing problem. In *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 2014, vol. 26, no. 4, p. 516-539. ISSN 1936-6582.

- [98] RAY, S., SOEANU, A., BERGER, J. – DEBBABI, M. 2014. The multi-depot split-delivery vehicle routing problem: Model and solution algorithm. In *Knowledge-Based Systems*, vol. 71, p. 238-265.
- [99] ROBINSON, J.B. 1949. On the Hamiltonian game (a traveling-salesman problem), California: RAND Research Memorandum, 1949. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/204961.pdf>.
- [100] RUIZ, R. – MAROTO, C. – ALCARAZ, J. 2004. A decision support system for a real vehicle routing problem. In *European Journal of Operational Research*, 2004, vol. 153, no. 3, p. 593-606. [cit. 2020-02-20]. Dostupné na: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(03\)00265-0](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00265-0).
- [101] RUSSELL, R. A. – URBAN, T. L. 2008. Vehicle Routing problem with soft time windows and Erlang travel times. In *Journal of Operation Research Society*, 2008, vol. 59, no. 9, p. 1220-1228. [cit. 2020-03-03]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2602465>.
- [102] SHANKAR, H. – MANI, G. – PANDEY, K. 2014. GIS Based Solution of Multi-Depot Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Window Using Tabu Search Algorithm. In *International Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2014, vol. 3, no. 2, p. 83-100. [cit. 2020-01-10]. Dostupné na: <https://doi.org/10.5923/j.ijtte.20140302.05>.
- [103] SHAPLEY, L. S. 1953. A Value for n-Person Games. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, *Contributions to the Theory of Games*, , Princeton: University Press, vol. p. 307 – 317. [cit. 2020-02-22]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1515/9781400881970-018>.
- [104] STERZIK, S. – KOPFER, H. – YUN, W. 2015. Reducing hinterland transportation costs through container sharing. In *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 2015. vol. 27, p. 382-402. [cit. 2020-03-26]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1007/s10696-012-9167-y>
- [105] SZE, S. N. – TIONG, W. K. 2007. A Comparison between Heuristic and Meta-Heuristic Methods for Solving the Multiple Traveling Salesman Problem. In *Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 2007, vol. 1, no. 1, p. 13-16. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <http://doi.org/10.5281/zenodo.1059677>.
- [106] ŠTEDRON, B. 2007. *Manažerské řízení a informační technologie*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-2052-4.
- [107] TAKAMA, T. – PRESTON, J. 2008. Forecasting the effects of road user charge by stochastic agent-based modelling. In *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 2008, vol. 42, no. 4, p. 738-749. [cit. 2020-01-18]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2008.01.020>.
- [108] TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R. – MAKUI, A. – MAZLOOMI, Z. 2010. A new integrated mathematical model for a bi-objective multi-depot location-routing problem solved by a multi-objective scatter search algorithm. In *Journal of Manufacturing Systems*, 2010, vol. 29, no. 2-3, p. 111-119. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2010.11.005>
- [109] TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R. – SAFAEI, N. – GHOLIPOUR, Y. 2006. A hybrid simulated annealing for capacitated vehicle routing problems with the independent route length. In *Applied Mathematics and Computation*, 2006, vol. 176, no. 2-3, p. 445-454. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.040>.
- [110] THOMAS, B. W. – WHITE III, CH. C. 2007. The dynamic shortest path problem with anticipation. In *European Journal of Operational Research*, 2007,

- vol. 176, no. 2, p. 836-854. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.019>
- [111] TICHÁ, M. 2016. *Vicekriteriální hry: dizertačná práca*. Praha, 2016, 110 s.
- [112] TILLMAN, F. A. 1969. The Multiple Terminal Delivery Problem with Probabilistic Demands. In *Journal Transportation Science*, 1969, vol. 3, no. 3, p. 192-204. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1287/trsc.3.3.192>.
- [113] TOTH, P. – VIGO, D. 2002. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia: S.I.A.M., 2002, 367 p. ISBN 9780898715798.
- [114] TULLOCK, G. 1997. *Economics of Income Redistribution. 2. Edition*. London: Kluwer Academic Publisher, 1997. ISBN 0-7923-0991-5.
- [115] UNČOVSKÝ, L. 1991. *Modely teórie grafov*. Bratislava: ALFA, 1991. 240 s. ISBN 80-05-00812-0.
- [116] VALLE, C. A. – MARTINEZ, L. C. – CUNHA, A. S. – MATEUS, G. R. 2011. Heuristic and exact algorithms for a min–max selective vehicle routing problem. In *Computers and Operations Research*, 2011, vol. 38, no. 7, p. 1054-1065. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2010.10.010>
- [117] VIDOVIĆ, M. – RADIVOJEVIĆ, G. – RAKOVIĆ, B. 2011. Vehicle routing in containers pickup up and delivery processes. In *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2011, vol. 20, p. 335-343. [cit. 2020-01-20]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.08.039>
- [118] WAHYUNINGSIH, S. – SATYANANDA, D. – HASANAH, D. 2016. Implementations of TSP-VRP Variants for Distribution Problem. In *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 12, no. 1, p. 723-732. ISSN 0973-1768.
- [119] WANG, B. – WU, Y. – JI, Z. – LIU, K. J. R. – CLANCY, T. CH. 2008. Game theoretical mechanism design methods. In: *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, vol. 25, no. 6, p. 74-84. ISSN 1053-5888.
- [120] WANG, CH.H. – LU. J.Z. 2009. A hybrid genetic algorithm that optimizes capacitated vehicle routing problems. In *Expert Systems with Applications*, 2009, vol. 36, no. 2, p. 2921-2936. [cit. 2020-01-05]. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2008.01.072>.
- [121] WANG, W. – WU, B. – ZHAO, Y. – FENG, D. 2006. Particle Swarm Optimization for Open Vehicle Routing Problem. In: Huang DS., Li, K., Irwin, G. W. (eds) *Computational Intelligence. ICIC 2006*. Berlin: Springer, 2006, p. 999-1007. ISBN 978-3-540-37274-5
- [122] YOUSEFIKHOSHBAKHT, M. – DIDEHVAR, F. – RAHMATI, F. 2013. Modification of the ant colony optimization for solving the multiple traveling salesman problem. In *Romanian Journal of Information Science and Technology*, 2013, vol. 16, no. 1, p. 65-80. ISSN 1453-8245.
- [123] YU, B. – YANG, Z. – XIE, J. 2011. A parallel improved ant colony optimization for multi-depot vehicle routing problem. In *Journal of the Operational Research Society*, 2011, vol. 62, no. 1, p. 183-188. ISSN 0160-5682.
- [124] ZHANG, Y. – TANG, L. 2007: Solving Prize-Collecting Traveling Salesman Problem with Time Windows by Chaotic Neural Network. In *International Symposium on Neural Networks, ISSN 2007, China*. Berlin: Springer, 2007, vol. 4492, p. 63–71. ISBN 978-3-540-72382-0.
- [125] ZHANG, Y. – TANG, L. 2008: A new hybrid ant colony optimization algorithm for the vehicle routing problem. In: *Pattern Recognition Letters*, 2009 vol. 30, n. 9, p. 848-855. Dostupné na: <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2008.06.001>.

- [126] ZIBAEI, S., HAFEZALKOTOB, A., a GHASHAMI, S. S. 2016. Cooperative vehicle routing problem: An opportunity for cost saving. In *Journal of Industrial Engineering International*, 2016, vol.12, no. 3, p. 271-286. ISSN 1735-5702.

Zoznam príloh

- Príloha č. 1:** *Matica najkratších vzdialeností medzi zákazníkmi aj jednotlivými logistickými strediskami v Bratislave*
- Príloha č. 2:** *Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a znovunaplnením v inom ako východiskovom sklade*
- Príloha č. 3:** *Grafické znázornenie optimálnych ciest motelu I a II*
- Príloha č. 4:** *Spôsoby alokácie úspor na základe teórie vyjednávania (rovnostárske, utilitárne a Nashovo riešenie prostredníctvom GAMS kódu, Shapleyho hodnota prostredníctvom prostredia MS Excel*
- Príloha č. 5:** *Kooperatívna úloha rozvozu s homogénnym dopravným parkom a návratom do východiskového strediska a jej rozšírenie o podmienku individuálnej stability (rozlíšené červenou farbou)*
- Príloha č. 6:** *Grafické znázornenie optimálnych ciest modelu III*
- Príloha č. 7:** *Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a návratom do východiskového strediska*
- Príloha č. 8:** *Kooperatívna úloha rozvozu s heterogénnym dopravným parkom a znovunaplnením v inom ako východiskovom sklade*
- Príloha č. 9:** *Adresy odberných miest (zákazníkov) na českom, slovenskom, maďarskom a rakúskom trhu a ich požadované množstvá dodávaného tovaru*
- Príloha č. 10:** *Matica najkratších vzdialeností medzi zákazníkmi a jednotlivými výrobnými strediskami firmy Karlovarské minerální vody, a.s.*