MATICOVÉ MODELY NA MERANIE VÝKONNOSTI PRODUKČNÝCH SYSTÉMOV

Michal Grell, Eduard Hyránek

Úvod

Dôležitou podmienkou investičného a finančného rozhodovania v podniku je meranie jeho výkonnosti. Pri meraní výkonnosti podniku možno aplikovať moderné prístupy, ktorých účelom je posúdiť efekty vstupov a výstupov produkčných systémov (podnikov). V súčasnosti, v záujme detailnejšieho posúdenia výkonnosti podniku, nie je možné uspokojiť sa s klasickými ukazovateľmi finančnej analýzy – účinnosti, náročnosti alebo rentability. Môžu byť však základom na ďalšie alebo hlbšie skúmanie výkonnosti matematickými metódami, aj keď na rozhodovanie o investíciách a financovaní pre finančných manažérov firmy možno použiť aj ukazovatele, založené na hodnotovom riadení podniku, ako napr. EVA (Economic Value Added), CVA (Cash Value Added), MVA (Market Value Added), CFROI (Cash Flow Return on Investment), SVA (Shareholder Value Added) a iné. Výkonnosť ekonomiky podniku analyzujeme využitím maticového systému ukazovateľov, v ktorom sa aplikuje ich rôzna kombinácia. Maticový model umožňuje riešenie neštandardných úloh operačného výskumu, ktoré vyžadujú interdisciplinárny prístup odborníkov rozličných profesií. Maticový model reprezentuje určitú ekonomickú štruktúru, ktorej opis je možný kombináciou ukazovateľov vstupov a výstupov podnikovej ekonomiky. Analýzou takejto štruktúry možno výpočtami získať aj ďalšie ukazovatele, ktoré charakterizujú výkonnosť podniku. Výsledky sú využiteľné pre externé subjekty – investorov, finančné inštitúcie (banky), dodávateľov a tiež na správu a riadenie spoločnosti (corporate government). Môžu byť súčasťou pravidiel a princípov upravujúcich vzťahy medzi exekutívnym vedením spoločnosti (manažéri, zamestnanci) a jej štatutárnymi orgánmi, akcionármi a ďalšími zainteresovanými stranami. Umožní sa tak transparentnejšie monitorovať realizáciu stanovených cieľov a zisťovať príčiny ich neplnenia.

1. Základné problémy merania výkonnosti produkčných systémov

V systémovej teórii sa systém chápe ako *účelovo definovaná množina prvkov a množina väzieb medzi prvkami, ktoré spoločne určujú vlastnosti celku*. Produkčný systém chápeme ako otvorený systém, ktorý *vstupy* zo svojho okolia *transformuje* na *výstupy*, ktoré opäť poskytuje okoliu. *Vstupy* do systému sú zdroje, ktoré potrebuje podnik (organizácia) na vytváranie požadovaných výstupov. Môžu to byť ľudské zdroje, suroviny, materiál, stroje, zariadenia, energia, kapitál, informácie a pod. *Výstupy* zo systému môžu byť nielen výrobky, ale aj služby alebo informácie pre zákazníkov. Tieto výstupy súhrnne nazývame *produkty*. *Transformačný proces* je spôsob transformácie vstupov na požadované výstupy [1]. Produkt a transformačný proces sú základné zložky produkčného systému.

Všeobecne možno konštatovať, že meranie a zlepšovanie výkonnosti podniku predstavuje posudzovanie jeho schopnosti dosahovať ciele optimálnym spôsobom. Analýza vzájomného vzťahu *cieľov*, *vstupov* a *výstupov* produkčného systému umožňuje meranie a zlepšovanie *výkonnosti* produkčných systémov z dvoch hľadísk:

a) z hľadiska efektívnosti dosahovania podnikových cieľov (úspornosť, účelnosť),
b) z hľadiska spôsobu realizácie (účinnosť).

Na základe kvantifikácie vstupov, výstupov, cieľov a transformačného procesu možno potom definovať jednotlivé ukazovatele výkonnosti, a to [1]:

- *úspornosť* – minimalizovaním nákladov pri obstarávaní vstupov so zreteľom na ciele,
- *účinnosť* – vyjadrením vzťahov medzi vstupmi a výstupmi v transformačnom procese,
- *účelnosť* – vzťahuje sa na výstupy so zameraním na uspokojovanie potrieb zákazníkov.

Je zrejmé, že ukazovatele *úspornosti, účinnosti* a *účelnosti* možno konštruovať rozličným spôsobom. V procese merania výkonnosti podniku (Performance Measurement) [14] predstavujú systém finančných a nefinančných ukazovateľov – *kľúčových indikátorov výkonnosti* (KPI – Key Performance Indicators). V súčasnosti sú tieto systémy založené na integrácii finančnej analýzy a analýzy strategických faktorov úspešnosti podniku. Príkladom takéhoto systému je *Balanced Scorecard* (BSC), ktorý predstavuje prepojenie cieľov finančnej výkonnosti podniku s jeho strategickými cieľmi [5]. Nástrojom merania výkonnosti sú *metriky*, t.j. presne vymedzené finančné alebo nefinančné ukazovatele alebo hodnotiace kritériá, ktoré sa používajú na hodnotenie úrovne výkonnosti v konkrétnej oblasti podniku [14]. Metriky vytvárame spravidla uplatnením dvoch hľadísk [14]:

- *hľadisko pridanej hodnoty;*

Meriame produkt procesu (výstup), vytvorenú pridanú hodnotu a vložené zdroje, spotrebu na vytvorenie pridanej hodnoty (napr. *EVA, MVA* a pod.).

- *hľadisko parametrizácie;*

Meriame parametre procesu, ako napr. priebežná doba procesu (doba od prvého vstupu zdroja do procesu až do vytvorenia výstupu), priechodnosť procesu (množstvo produktu vytvoreného v danom čase) a pod. Parametre by mali poskytovať objektívne a presné informácie o priebehu jednotlivých procesov (napr. *univerzálne parametre výkonnosti procesov, parametre výkonnosti výrobných a nevýrobných procesov, meranie výkonnosti podľa odchýlok alebo indexu výkonnosti* a pod.).

Rovnako dôležitá je ***jednoznačná formulácia väzieb ukazovateľov***, ktorá má na kvantitatívne hodnotenie ekonomickej reality rovnaký vplyv ako ***jednoznačná definícia jednotlivých ukazovateľov (metrík)***, prvkov systému. Potom vymedzenie väzieb prvkov je súčasťou definície akéhokoľvek systému. Ak teda hovoríme o *systéme ukazovateľov*, mali by byť medzi príslušnými ukazovateľmi definované väzby. Formulácia väzieb ukazovateľov je predpokladom na prechod od *sústavy ukazovateľov* k vyššiemu kvalitatívnemu stupňu: *systému ukazovateľov* [16]. Základné členenie ukazovateľov uvádzame v tab.1. Väzby ukazovateľov (indikátorov) môžu byť v podstate vyjadrené *slovným opisom, graficky* a *matematicky*. Ďalej sa zaoberáme matematickou formuláciou väzieb.

Tab. 1: Základné členenie ekonomických ukazovateľov

<table>
<tr><th colspan="4">Ukazovateľ</th><th>Stručná charakteristika</th></tr>
<tr><td colspan="4">Absolútny</td><td>Vyjadrenie určitého javu bez vzťahu k inému javu.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Relatívny</td><td>Vyjadrenie veľkosti jedného javu, pripadajúceho na mernú</td></tr>
<tr><td>Podielový</td><td colspan="2">Vzťahový</td><td>Index</td><td>jednotku druhého javu.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stavový</td><td colspan="2">Tokový</td><td>Závislosť hodnôt ukazovateľov od dĺžky časového obdobia, o ktorom vypovedá.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Syntetický</td><td colspan="2">Analytický</td><td>Komplexnosť výpovede o ekonomickej realite.</td></tr>
</table>

Zdroj: Vlastné spracovanie podľa [16]

Podrobnejšie sa zaoberáme ukazovateľmi z hľadiska pridanej hodnoty a vychádzame z toho, že výpočty sú určené istým konečným súborom číselných údajov (vstupy) a konečným súborom vyčísliteľných funkcií týchto vstupov. Naším cieľom je určiť hodnoty týchto funkcií (výstupy). Formálne to možno zapísať ako transformáciu typu:

$$\mathbf{y} = f\,(\mathbf{x}) \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor vstupných údajov,

$\mathbf{y}$ – vektor výstupných údajov,

$f = f_{i,\ i=1,\ \ldots,\ k}$ – transformácia, ktorá môže zahŕňať celý komplex procedúr transformácií.

2. Maticové usporiadanie ukazovateľov výkonnosti

Matematická formulácia väzieb môže byť reprezentovaná napr. *maticovou sústavou*, ktorá vznikne vertikálnou a horizontálnou kombináciou ukazovateľov [16]. Ukazovatele usporiadané vertikálne predstavujú riadky matice a stĺpce matice vytvárajú ukazovatele usporiadané horizontálne. Ich kombinácia tvorí prvky matice, ktoré môžu reprezentovať rozličné typy *pomerových ukazovateľov*.

2.1 Matica ukazovateľov a konštrukcia maticového modelu

Pomerové ukazovatele môžu opisovať ekonomické javy na makroekonomickej, ale aj mikroekonomickej úrovni. Ďalej sa zaoberáme mikroekonomickou (podnikovou) úrovňou, a potom prvky matice môžu byť reprezentované kombináciou ukazovateľov súvahy a výsledovky, vstupov a výstupov a pod. Príkladom môže byť sústava ukazovateľov, ktorá vznikne kombináciou ukazovateľov súvahy a výsledovky, napríklad vektor ukazovateľov súvahy **s** = (aktíva, kmeňové imanie, dlhy, investičný majetok, hmotný investičný majetok, obežný majetok, zásoby) a vektor ukazovateľov výsledovky **v** = (výnosy, pridaná hodnota, čisté výkony, hrubý a čistý zisk) podľa tab. 2.

Samozrejme, jednotlivé prostriedky formulácie väzieb možno kombinovať. Napríklad v pyramídovej sústave možno zapísať aj matematické väzby ukazovateľov. V niektorých sústavách nie je však typ matematickej väzby explicitne uvedený, ale môže vyplývať z názvu typu sústavy a slovného opisu väzby (napr. v bilancii sa automaticky predpokladajú aditívne väzby ukazovateľov). Ďalej sa budeme zaoberať matematickým modelom systému ukazovateľov.

Tab. 2: Maticová sústava ukazovateľov

s – v	v_1	v_2	...	v_j	...	v_n
s_1	v_1/ s_1	v_2/ s_1		v_j/ s_1		v_n/ s_1
s_2	v_1/ s_2	v_2/ s_2				
.						
.						
.						
s_i	v_1/ s_i	v_2/ s_i		vj/ s_i		v_n/ s_i
.						
.						
.						
s_m	v_1/ s_m	v_2/ s_m		v_j/ s_m		v_n/ s_m

Zdroj: Vlastný formálny zápis podľa [16]

Maticový model podniku formálne opisuje závislosť medzi jeho ekonomickými veličinami. Modelom možno riešiť rozličné reálne problémy, pričom mnohé z nich sa vyskytujú opakovane. Majú charakter *typových problémov* a v operačnom výskume – ktorý predstavuje rozvoj a aplikáciu metód určených na podporu manažérskych rozhodnutí sa v súvislosti s používaním matematických modelov a metód v riadení, najmä v USA, operačný výskum nazýva priamo *veda o manažmente* (management science) – sú prezentované ako *štandardné problémy* a zodpovedajú im aj *štandardné modely* (napríklad štruktúrne modely, modely a metódy matematického/optimálneho programovania, modely a metódy dynamického programovania, sieťového plánovania, stochastické a simulačné modely a metódy) [15]. Na riešenie úloh, ktoré sú spojené so štandardnými modelmi slúžia aj štandardné, dobre prepracované a softvérovo podporované metódy. Neštandardné úlohy sa odchyľujú od štandardných štruktúr a metód riešenia. Ak akceptujeme lineárnosť vzťahov medzi ekonomickými veličinami, potom všeobecne sú maticové modely (napr. vo forme úloh lineárneho programovania alebo v inom tvare) vhodné na kvantitatívnu analýzu takýchto vzťahov. Prezentovaný maticový model zaraďujeme medzi neštandardné úlohy operačného výskumu, ktoré vyžadujú interdisciplinárny prístup odborníkov rôznych profesií.

Východiskom na formuláciu *maticového modelu* sú absolútne ukazovatele, ktoré usporiadame podľa tab. 3. Ak tieto ukazovatele ďalej rozdelíme na ukazovatele *výsledkov* (výstupov) – **v** – a *nárokov* (vstupov) – **n** – ekonomiky napr. v oblasti výkonnosti podniku, tak možno konštruovať číselné indikátory pomocou vzťahu **v**/**n**, ktoré sú z hľadiska charakteru relatívne ukazovatele a z hľadiska konštrukcie sú kombináciou vzťahov medzi absolútnymi ukazovateľmi typu *vstup* a *výstup*. Význam použitých označení v tab. 3 je takýto [2]:

v je stĺpcový vektor výstupov rozmeru n,

n – stĺpcový vektor vstupov rozmeru m,

A – matica účinnosti vstupov rozmeru m.n, kde $a_{ij} = v_j/n_i$,

C – matica náročnosti výstupov rozmeru n.m, kde $c_{lk} = n_k/v_l$,

B – matica štruktúry vstupov rozmeru m.m, kde $b_{ik} = n_k/n_i$,

D – matica štruktúry výstupov rozmeru n.n, kde $d_{lj} = v_j/v_l$.

2.2 Formulácia základných vzťahov v maticovom modeli

Rozdelenie ukazovateľov podľa tab. 3 umožňuje odvodiť niekoľko vzájomných vzťahov medzi maticami **A, B**, **C** a **D** a vektormi **v** a **n**. Platia napr. tieto vzťahy:

$\mathbf{A}\,\mathbf{v}' = n\,\mathbf{n}'$ (2)

$\mathbf{C}\mathbf{n}' = m\mathbf{v}'$ (3)

$\mathbf{AC} = n\mathbf{B}$ (4)

$\mathbf{A}^T\mathbf{n} = m\mathbf{v}$ (5)

$\mathbf{C}^T\mathbf{v} = n\mathbf{n}$ (6)

Tab. 3: **Maticový zápis ukazovateľov**

v – n n – v		1, 2, 3, .., j, ..., n $v_1, v_2, v_3, ..., v_j, ...v_n$	1, 2, 3, ..., k, ..., m $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...n_m$
1	n_1		1
2	n_2		
.	.		**B** = (b_{ik})
.	.	**A** = (a_{ij})	
i	n_i		
m	n_m		1
		1	
1	v_1		
2	v_2		
. .			
.	.		
l	v_l	**D** = (d_{lj})	**C** = (c_{lk})
.			
n	v_n	1	

Zdroj: Vlastný formálny zápis podľa [2]

Užitočné je aj sledovanie vývoja $\Delta\mathbf{v}/\Delta\mathbf{n}$. Všeobecne platí, že Δ môže predstavovať vzťah *absolútny, prírastkový, diferenciálny, diferenčný* a pod., pričom / môže vyjadrovať typ *podielového, rozdielového*, prípadne iného vzťahu. Uvádzame niektoré možné vzťahy v prírastkovom tvare podielového typu (napr. vzťah (11) možno odvodiť vhodnou úpravou vzťahu (7) a to:

$\mathbf{A}^T\Delta\mathbf{n}\Delta\mathbf{n}'^T = m\ \Delta\mathbf{v}\Delta\mathbf{n}'^T$):

$$\mathbf{A}^T\Delta\mathbf{n} = m\ \Delta\mathbf{v} \qquad (7)$$
$$\mathbf{C}^T\Delta\mathbf{v} = n\ \Delta\mathbf{n} \qquad (8)$$
$$\Delta\mathbf{B}^T = \Delta\mathbf{n}\Delta\mathbf{n}'^T \qquad (9)$$
$$\Delta\mathbf{A}^T = \Delta\mathbf{v}\Delta\mathbf{n}'^T \qquad (10)$$
$$\Delta\mathbf{A}^T = m^{-1}\ \mathbf{A}^T\Delta\mathbf{B}^T \qquad (11)$$

Vzťahy v maticovom modeli možno potom prezentovať aj kompaktným maticovým zápisom:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix} = (n + m) \begin{pmatrix} \mathbf{n}' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} \qquad (12)$$

kde $\mathbf{v}'$ je vektor, pre ktorého prvky platí $v_j' = 1/_{vj}$,

$\mathbf{n}'$ – vektor, pre ktorého prvky platí $n_i' = 1/n_i$.

2.3 Základná matematická analýza

Nech platí, že m, n sú prirodzené čísla a p_j, q_i (kde i = 1, 2, ..., m a j = 1, 2, ..., n) sú reálne čísla rôzne od nuly, potom definujeme stĺpcové vektory $\mathbf{p}^T = (p_1, p_2, ..., p_n)$, $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, ..., q_m)$, $\mathbf{p}'^T = (p'_1, p'_2, ..., p'_n)$ a $\mathbf{q}'^T = (q'_1, q'_2, ..., q'_m)$, pričom $p'_j = 1/p_j$ a $q'_i = 1/q_i$ (T je znak transponovania). Definujeme súčinom $\mathbf{q}'\mathbf{p}^T$ súbor m . n reálnych čísel, ktoré označíme s_{ij}. Potom $\mathbf{S} = (s_{ij})$ je matica o m riadkoch a n stĺpcoch, pre ktorú platí

$$\mathbf{S} = \mathbf{q}'\mathbf{p}^T \qquad (13)$$

Ďalej sa budeme zaoberať spôsobom transformácie vektora **p** na vektor **q** alebo naopak. Úpravou vzťahu (13) môžeme tieto transformácie zapísať takto:

$$\mathbf{S}\ \mathbf{p}' = n\ \mathbf{q}' \qquad (14)$$

resp. $\mathbf{q}^T\mathbf{S} = m\ \mathbf{p}^T$ (15)

Vo vzťahoch (14) a (15) **S** vystupuje ako matica transformácie. Za predpokladu, že poznáme maticu **S** a jeden z vektorov **p**, **q** je riešenie takejto transformácie veľmi jednoduché. Takáto interpretácia poskytuje tiež obmedzený priestor na kvantitatívnu analýzu takejto transformácie.

Upravme preto vzťah (15) na tvar

$$\mathbf{S}^T\mathbf{q} = m\ \mathbf{p} \qquad (15a)$$

položme

$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{p}'$, $\mathbf{d}^{(1)} = n\ \mathbf{q}'$, $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{q}$, $\mathbf{d}^{(2)} = m\ \mathbf{p}$.

Potom, ak máme zadanú maticu **S**, vzťah

$$\mathbf{S}\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{d}^{(1)} \qquad (16)$$

predstavuje výpočet vektora **p** na základe zadaného vektora **q** a vzťah

$$\mathbf{S}^T\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{d}^{(2)} \qquad (17)$$

predstavuje výpočet vektora **q** na základe vektora **p** a tieto vzťahy riešime ako všeobecnú sústavu m(n) lineárnych rovníc pre n(m) neznámych. Matica **S** má niektoré špeciálne charakteristiky, ktoré treba mať na zreteli z hľadiska formulácie typov výpočtových vzťahov. Samozrejme, že matice **A**, **B**, **C** a **D** v maticovom modeli sú špeciálnym prípadom matice **S**.

*<u>Niektoré špeciálne charakteristiky matice **S**</u>*

Matica **S** má tieto charakteristiky:

1. *lineárna závislosť riadkov*

$s_{i-k,j} = q_i/q_{i-k}\ .\ s_{ij}$,

kde i = k+1, k+2,..., m (18a)
j =1, 2, ..., n
k < m

2. *lineárna závislosť stĺpcov*

$s_{i,\ j-k} = p_{j-k}/p_j\ .\ s_{ij}$,

kde i = 1, 2,..., m (18b)
j = k+1, k+2,..., n
k < n

3. *z charakteristík v bodoch 1 a 2 vyplýva, že hodnosť matice **S** sa rovná jeden*, t.j.

$$h\ (\mathbf{S}) = 1 \qquad (18c)$$

Pre špeciálne prípady, napr. **S** = **B**, možno odvodiť ďalšie charakteristické vzťahy, napr.:

$$1 / \sum_{k=1}^{m} b_{1k} + 1/ \sum_{k=1}^{m} b_{2k} + ... + 1/ \sum_{k=1}^{m} b_{mk} = 1 \qquad (19)$$

$$1 / \sum_{i=1}^{m} (1/ b_{i1}) + 1/ \sum_{i=1}^{m} (1/ b_{i2}) + ... + 1/ \sum_{i=1}^{m} (1/ b_{ik}) = 1 \qquad (20)$$

<u>Niektoré aspekty riešenia systému lineárnych rovníc</u>

Maticový zápis ukazovateľov podľa tab. 3 predpokladá realizáciu rozličných typov výpočtov podľa vzťahu (1), pričom v mnohých ekonomických aplikáciách jeho riešenie spočíva v tom, že zložitejší problém sa linearizuje. Algebrická linearizácia má tieto vlastnosti:

f ($\mathbf{x} + \mathbf{y}$) = f ($\mathbf{x}$) + f (y), (21)
f (c $\mathbf{x}$) = c f ($\mathbf{x}$), kde c je ľubovoľné číslo. (22)

Ak vyjadríme skúmané javy pomocou funkcie f, ktorá má vlastnosti uvedené vo vzťahoch (21) a (22) tak vznikli podmienky, aby jadrom riešenia týchto problémov bolo **riešenie systému lineárnych rovníc** (SLR). Z hľadiska výpočtov na báze riešenia systému lineárnych rovníc budeme ďalej pracovať so vzťahom (16). ??Podľa predpokladu $p_j \neq 0$, $q_i \neq 0$, a teda SLR je nehomogénna.

Podľa Frobeniovej vety [13] SLR má riešenie vtedy a len vtedy, ak hodnosť h($\mathbf{S}$) matice sústavy sa rovná hodnosti h($\mathbf{S}_r$) matice rozšírenej. Ekvivalentnými úpravami sústavy (16) možno dokázať, že platí

h ($\mathbf{S}$) = h ($\mathbf{S}_r$) = 1<n (23)

Z toho vyplýva, že takáto SLR má vždy nekonečne mnoho riešení s n-1 stupňami voľnosti. Podstatné preto je hľadať také spôsoby riešenia SLR, ktoré vytvárajú predpoklady na ekonomickú analýzu a nebudú len komplikovanejšou metódou hľadania takého riešenia, ktoré možno jednoducho získať použitím vzťahov (14) a (15). V súvislosti so vzťahom (16) budeme predpokladať, že m ≤ n, t.j. počet neznámych je väčší alebo sa rovná počtu rovníc. Nebudeme sa teraz zaoberať prípadom keď platí, že je viac rovníc ako neznámych – pozri vzťah (17). Zaoberáme sa však využitím vlastností pseudoinverznej matice (pre každú maticu, či už štvorcovú singulárnu/regulárnu alebo obdĺžnikovú, existuje jediná pseudoinverzná matica, ktorú tiež nazývame *Moore-Penroseova* inverzia matice [4] s niektorými vlastnosťami inverzných matíc, pomocou ktorých možno v každom prípade určiť, či SLR má riešenie). Pseudoinverzná matica $\mathbf{P}_S$ spĺňa niektoré z týchto podmienok:

$\mathbf{S}\,\mathbf{P}_S\,\mathbf{S} = \mathbf{S}$ (24a)
$\mathbf{P}_S\,\mathbf{S}\,\mathbf{P}_S = \mathbf{P}_S$ (24b)
$(\mathbf{S}\,\mathbf{P}_S)^T = \mathbf{P}_S$ (24c)
$(\mathbf{P}_S\,\mathbf{S})^T = \mathbf{P}_S$ (24d)

Matica $\mathbf{P}_S$, ktorá spĺňa všetky podmienky (24a) – (24d) je určená jednoznačne a označovaná symbolom $\mathbf{S}^+$ ako zovšeobecnená *Moore-Penroseova* inverzia matice **S**. V praktických aplikáciách majú veľký význam množiny pseudoinverzných matíc, ktoré spĺňajú niektoré z vyššie uvedených podmienok, napr.:

- **S**{a} – množina matíc $\mathbf{P}_S$, ktoré spĺňajú podmienku (24a),
- **S**{a,c} – množina matíc $\mathbf{P}_S$, ktoré spĺňajú podmienky (24a), (24c),
- **S**{a,d} – množina matíc $\mathbf{P}_S$, ktoré spĺňajú podmienky (24a), (24d),
- **S**{a,b,c,d} = $\mathbf{S}^+$ – množina matíc $\mathbf{P}_S$, ktoré spĺňajú všetky podmienky.

2.4 Ekonomická analýza – možnosti aplikácií

Vzhľadom na vlastnosti matice **S** sú v podstate možné riešenia, ktorých východiskom je pôvodná matica **S** alebo modifikovaná matica **S** (tab.4).

Tab. 4: Prehľad výpočtových postupov v maticovom modeli

Matica S	Typy výpočtov	Zameranie výpočtov
Pôvodná	A1. Využitie pseudoinverzných matíc	Variantné riešenia vstupov a výstupov
	A2. Extrapolácia časových radov	Prognózovanie
	A3. Analýza štruktúry vzťahov	Stabilita štruktúry
	A4. Ekonometrické výpočty	Analýza príčinných vzťahov
Modifikovaná	B1. Riešenie SLR	Výpočet vstupov a výstupov Analýza vlastných čísel matice
	B2. Lineárna viackriteriálna optimalizácia	Meranie efektívnosti vstupno-výstupných transformácií

Zdroj: Vlastné spracovanie

A. riešenie s pôvodnou maticou S

A1. Výpočet pomocou pseudoinverzných matíc

1.1 Ak je (16) konzistentná sústava m lineárnych rovníc pre n neznámych, definujeme pre k = 1, 2, ..., m vektory $\mathbf{x}_k$ ($\mathbf{x}_0 = 0$) podľa postupu, ktorý je uvedený v [4]. Pritom v každej iterácii je $\mathbf{x}_k$ riešením prvých k rovníc s minimálnou euklidovskou normou. Tento postup riešenia umožňuje napísať všeobecné riešenie konzistentnej sústavy v tvare

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_m + \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{u}\,, \qquad (25)$$

kde $\mathbf{S}_m$ je matica, ktorej explicitný výpočet nie je v tomto prípade potrebný a zodpovedá príslušnej pseudoinverznej matici $\mathbf{P}_S$, ktorá spĺňa podmienky (24a), (24b), (24d),

u – ľubovoľný stĺpcový vektor reálnych čísiel.

Na základe vhodne zvolených kritérií pre vektor **u** môže tento vzťah vytvárať predpoklady na výpočet variantných riešení.

1.2 Ak postačuje, aby matica $\mathbf{P}_S$ vyhovovala podmienke (24a), potom jej výpočet realizujeme podľa vzťahu:

$$\mathbf{P}_S = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T \qquad (26)$$

A2. Maticu **S** môžeme získať prognózovaním, čo predstavuje v praxi problém extrapolácie časových radov koeficientov sij, napríklad:

- na základe lineárnej funkcie (rovnomerný rast) času v tvare $g_0 + g_1t$, kde g_0, g_1 sú regresné koeficienty a t je čas,
- exponenciálnej funkcie (progresívny rast) $e^{(g_0 + g_1t)}$, kde e je základ prirodzených logaritmov,
- logaritmickej funkcie (degresívny rast) ln $(g_0 + g_1t)$, kde ln označuje prirodzený logaritmus.

Možno použiť aj iné typy funkcií času (parabolické, hyperbolické, logistické a pod.), ale praktické skúsenosti ukazujú, že je vhodnejší výber jednej z uvedených funkcií a jej prípadné doplnenie o autoregresívnu transformáciu (hodnoty časového radu v bežnom období sú priamo vyjadrené v závislosti od hodnôt v predchádzajúcich obdobiach). Posúdenie presnosti prognózy možno vykonať známymi metódami, pričom najvhodnejším základom pre extrapolačné metódy bude tá funkcia, ktorá vedie k minimálnej hodnote štandardnej odchýlky za všetky obdobia časového radu. Môžeme však vychádzať aj z toho, že pre východiskové obdobie napr. platí **DC** = n**C**, potom na analýzu presnosti prognózy využijeme vzťah (**D** – **G**) **C** = **O**, kde **G** je diagonálna matica, ktorá má prvky na hlavnej diagonále rovné číslu n a **O** je nulová matica.

A3. Vychádzame z toho, že matica **S** vyjadruje charakteristiky určitej štruktúry vzťahov v ekonomike podniku. Predpokladáme, že tieto vzťahy sa v čase menia. Nech štruktúra v období t je reprezentovaná maticou

$$\mathbf{S}(t) = s_{ij}(t), \quad t = 1, 2, \dots, r; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \qquad (27)$$

Potom vývoj štruktúr v jednotlivých obdobiach možno opísať maticami **S**(1), **S**(2), ..., **S**(t), ..., **S**(r). Na vyjadrenie zmien štruktúry možno použiť rôzne syntetické charakteristiky. Zaoberáme sa definovaním vzdialenosti týchto štruktúr, a to napríklad v zmysle (kde i, j a t spĺňajú podmienky podľa vzťahu (27)):

- metriky

$$\sqrt{\sum_i \sum_j (S(t) - S(t+1))^2} \qquad (28)$$

- koeficientu

$$\beta = \frac{\sum_i \sum_j \left(\left|s_{ij}(1) - s_{ij}(2)\right| + \dots + \left|s_{ij}(r-1) - s_{ij}(r)\right|\right)}{\sum_i \sum_j s_{ij}(r)} \qquad (29)$$

Vzťahy v štruktúre sú tým stabilnejšie, čím je vzdialenosť týchto štruktúr menšia. Ďalej je zrejmé, že $\beta \geq 0$. Rast hodnoty β signalizuje nestabilitu štruktúr, menšej hodnote zodpovedá väčšia stabilita a v prípade $\beta = 0$ sú vzťahy v štruktúre konštantné. Z hľadiska skúmania stability štruktúry môžeme uvažovať, ktorá kombinácia vstupov a výstupov vytvára väčšiu stabilitu, čo môže ovplyvniť stratégiu podniku.

A4. Maticový zápis ukazovateľov predstavuje súčasne matematický zápis určitých vzťahov medzi ukazovateľmi, a preto umožňuje formulovať aj *ekonometrický model*, ktorý môže vyjadrovať konkrétny *funkčný vzťah* medzi vybratými ukazovateľmi. Vzťahy (2) – (6), prípadne aj (7) – (11) môžu byť východiskom na definovanie *jednorovnicového* ekonometrického modelu. Všeobecný jednorovnicový lineárny model má tvar [10]:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + u_i \quad (30)$$

kde

y_i je i-té pozorovanie závisle premennej Y,

x_{ij} – reprezentujú i-té pozorovanie vysvetľujúcich premenných X_1, X_2, ..., X_k,

β_k – odhadnuté parametre rovnice,

u_i – náhodná zložka i-tého pozorovania.

Maticový zápis (12) možno použiť aj na formuláciu *viacrovnicového* ekonometrického modelu [10]. Na základe (12) ďalej platí:

$\mathbf{Av}' + \mathbf{Bn}' = (n + m)\ \mathbf{n}'$ (31a)

$\mathbf{Dv}' + \mathbf{Cn}' = (n + m)\ \mathbf{v}'$ (31b)

Výraz (31a) ukazuje, že je možné uvažovať o vzťahu *účinnosti výstupov a štruktúry vstupov* na strane jednej a *podielu jednotky vstupu na vytvorení jednotky výstupu* na strane druhej. Výraz (31b) vytvára predpoklad, že existuje vzťah medzi *štruktúrou výstupov a náročnosťou vstupov* na strane jednej a *podielu jednotky výstupu na spotrebe jednotky vstupu* na strane druhej [6]. Viacrovnicový ekonometrický model vznikne vhodným výberom rovníc z obidvoch vzťahov.

B. riešenie s modifikovanou maticou S

Modifikácia matice S spojená s riešiteľnosťou systému lineárnych rovníc

Modifikácia matice **S** je spojená s riešiteľnosťou SLR alebo s ekonomickou aplikáciou, ktorá je vyjadrená pomocou SLR. Tieto dva aspekty pôsobia vzájomne, a preto z dôvodov prehľadnosti zaoberáme sa obidvomi hľadiskami osobitne.

a) hľadisko riešiteľnosti

B1. Vychádzame z toho, že SLR s n neznámymi, ktorej rozšírená matica je trojuholníkového tvaru, je vždy riešiteľná. Ak je $h(\mathbf{S}_r)$ hodnosť tejto rozšírenej matice, tak v prípade, že $h(\mathbf{S}_r) = n$, resp. $h(\mathbf{S}_r)<n$, má SLR práve jedno, resp. nekonečne mnoho riešení. Úpravu na trojuholníkový tvar možno vecne interpretovať takto:

- niektoré prvky s_{ij} nepovažujeme pre daný výpočet za významné,
- niektoré prvky s_{ij} vylúčime ako v praxi neobvyklé.

V tab. 5 je uvedený prípad, keď koeficienty Vy/VK a Vy/Na nepovažujeme za významné a koeficient T/Na vylúčime ako v praxi neobvyklý, pretože bežne sa pracuje s nákladovosťou (tzv. *halierový ukazovateľ nákladovosti*), teda pomerom Na/T.

Tab. 5: Príklad modifikovanej matice

	Výnosy (Vy)	**Tržby (T)**	**Výroba (V)**	**Zisk (Z)**
Pracovníci (P)	Produktivita práce z výnosov	Produktivita práce z tržieb	Produktivita práce z výroby	Rentabilita práce
Vlastný kapitál (VK)	0	Účinnosť vlastného kapitálu	Využitie vlastného kapitálu	Rentabilita vlastného kapitálu
Náklady (Na)	0	0	Využitie nákladov	Rentabilita nákladov

Zdroj: [2]

Takouto úpravou sa, samozrejme, potom modifikuje aj východiskový vzťah (16), čo možno vyjadriť zápisom $\mathbf{S}_M\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{R}\ \mathbf{q}'$, kde $\mathbf{S}_M$ je matica, ktorá vznikne úpravou matice **S** a **R** je diagonálna matica, ktorá má na hlavnej diagonále prvky r, r-1, r-2, ..., r-m+1, kde r = n. V súlade s predpokladom $m \leq n$ zaoberáme sa zvlášť prípadom m = n a zvlášť prípadom, keď platí m < n.

1.1 Prípad m = n

Z hľadiska riešenia SLR môžeme postupovať v podstate dvomi spôsobmi:

(i) vychádzame z toho, že m-tá rovnica je vlastne priamym vyjadrením n-tej neznámej a postupným dosadzovaním do predchádzajúcich rovníc dostaneme riešenie,

(ii) riešime pomocou inverznej matice, ktorá vždy existuje a ľahko možno odvodiť jej všeobecný tvar.

V špeciálnom prípade, napr. **S** = **B**, dostávame homogénnu SLR v tvare (**B** – **R**) **x** = **0**, ktorá má nekonečne mnoho riešení, pretože determinant | B – R | rovná nule. Tieto riešenia závisia od jedného parametra.

Priestor na analýzu vytvára taký prístup, ktorý vychádza z poznatku, že ak **S** je horná alebo dolná trojuholníková matica n-tého rádu, tak diagonálne prvky sii sú práve všetky vlastné čísla matice **S**. Obmedzíme sa na prípad, keď matica **S** má n lineárne nezávislých vlastných vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, ktoré zodpovedajú vlastným číslam $s_{11}, s_{22}, ..., s_{nn}$. Označíme Δs_{kj} ($| \Delta s_{kj} | \leq \varepsilon$) ?malé zmeny v prvkoch matice **S**. Nech ďalej $s_{ii} (\varepsilon) = s_{ii} + \Delta s_{ii}$ sú vlastné čísla zmenenej matice $\mathbf{S} (\varepsilon) = \mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}$. Za uvedených predpokladov sa dá odvodiť približný odhad

$$| \Delta s_{ii} | < \chi_i \varepsilon \tag{32}$$

kde $\chi_i = l/|\cos\alpha_i|$ a α_i je uhol vektoru $\mathbf{v}_i$ a vlastného vektoru matice S^T, ktorý zodpovedá jej vlastnému číslu $\overline{s_{ii}}$.

Problémom je stanovenie ε. Možno odvodiť vzťah

$$\Delta s_0 = (q_0 \Delta p_0 - p_0 \Delta q_0)/q_0 \, . \, q_1 \tag{33}$$

kde index 0 je východiskové obdobie a index 1 je bežné obdobie. Potom možno voliť $\varepsilon = \max \{\Delta s_0\}$ (pre všetky i, j), pričom ε vyhovuje tzv. normálovým vzťahom. Ekonomické normály predstavujú skupinu nerovností medzi medziročnými tempami rastu jednotlivých ukazovateľov, napr.:

- zisk > tržby > náklady > materiálové náklady > mzdové náklady > pracovníci,
- zisk > tržby > zásoby,
- zisk > tržby > DHM > mzdové náklady > pracovníci.

1.2 V prípade m < n systém rovníc nemá nikdy jediné riešenie. Môžeme aplikovať výpočet pomocou pseudoinverzných matíc, napr. podľa vzťahu (26).

b) hľadisko ekonomickej aplikácie

B2. Ďalej sa budeme zaoberať nasledujúcim prípadom:

Nech r je prirodzené číslo a p_{jk}, q_{ik} (kde k = 1, 2, ..., r) sú reálne čísla rôzne od nuly, pre ktoré platí

$$\sum_{k=1}^{r} p_{jk} = p_j \tag{34}$$

a

$$\sum_{k=1}^{r} q_{jk} = q_j \tag{35}$$

Definujeme stĺpcové vektory $\mathbf{v}^T{}_j = (p_{j1}, p_{j2}, ..., p_{jr})$ a $\mathbf{u}^T{}_i = (q_{i1}, q_{i2}, ..., q_{ir})$, $\mathbf{v}'^T{}_j = (p'_{jk})$, $\mathbf{u}'^T{}_i = (q'_{ik})$, kde $p'_{jk} = 1/p_{jk}$ a $q'_{ik} = 1/q_{ik}$.

Maticu **S** môžeme potom modifikovať takto:

$$\mathbf{S}^j{}_M = \mathbf{u}^T{}_i \, \mathbf{v}'^T{}_j \tag{36}$$

alebo

$$\mathbf{S}^i{}_M = \mathbf{v}^T{}_j \, \mathbf{u}'^T{}_i \tag{37}$$

SLR bude mať tvar

$$\mathbf{S}^j{}_M \, \mathbf{v}_j = \mathbf{q} \tag{38}$$

alebo

$$\mathbf{S}^i{}_M \, \mathbf{u}_i = \mathbf{p} \tag{39}$$

čo možno interpretovať ako výpočet vektora $\mathbf{v}_j$ pri zadanej matici $\mathbf{S}^j{}_M$ a vektora **q**, resp. výpočet vektora $\mathbf{u}_i$ na základe zadanej matice $\mathbf{S}^i{}_M$ a vektora **p** (j, i je počet takýchto matíc, resp. možných SLR).

Na základe vzťahov (38) alebo (39) môžeme problém formulovať aj ako úlohu lineárneho programovania. V teórii sa rozpracovali metódy na meranie efektívnosti pri viacerých vstupoch a výstupoch. Výsledky tejto teórie aplikujeme na meranie efektívnosti vstupno-výstupných transformácií v ekonomike podniku. Možno sa napr. zaoberať formuláciou a analýzou úlohy lineárneho programovania na podklade vzťahu (38) ako lineárnej viackriteriálnej optimalizačnej úlohy:

$$\max \mathbf{C}\mathbf{v}_j \, \{\mathbf{v}_j \mid \mathbf{S}^J{}_M \mathbf{v}_j \leq \mathbf{q}; \, \mathbf{v}_j \geq 0\} \tag{U.1}$$

kde $\mathbf{C} = \{c_{rj}\}$ je matica s.n rozmerná. Agregáciou kritérií voľbou vektora $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, ..., t_s\} > 0$, kde $\sum_r t_r = 1$ a $r = 1, 2, ..., s$, preformulujeme úlohu (U.1) na jednokriteriálnu:

$$\max \mathbf{tCv}_j \{\mathbf{S}^J{}_M \mathbf{v}_j \leq \mathbf{q};\ \mathbf{v}_j \geq 0\} \qquad \text{(U.2)}$$

V praktických aplikáciách riešime ešte jednoduchšiu úlohu, kedy minimalizujeme odchýlky medzi výstupmi (**v**) a vstupmi (**n**), pričom vektor **t** dostaneme ako riešenie:

$$\min \sum_j w_j = z$$

za podmienok

$$\sum_i u_i\, \mathbf{S}^J{}_{M,\,ij} - \sum_r t_r c_{rj} - w_j = 0$$

$$\sum t_r = 1 \qquad \text{(U.3)}$$

$$u_i,\ t_r,\ w_j \geq 0$$

3. Realizácia modelových výpočtov. Analýza výsledkov riešenia

Vstupné údaje maticového modelu uvádzame v tab. 6. Výpočty realizujeme kombináciou ukazovateľov vstupov (pracovníci, materiálové náklady, dlhodobý hmotný majetok) a výstupov (výnosy spolu, zisk čistý, výroba) fiktívneho podniku XY.

3.1 Charakteristika ukazovateľov v maticiach A, B, C, D. Údajová základňa maticového modelu

Ukazovatele z pohľadu súvahy aj výsledovky rozdelíme na *vstupy* (náklady) a *výstupy* (výnosy) ekonomiky podniku takto:

Výkaz	Vstupy	Výstupy
Súvaha	ZDROJE (Pasíva)	MAJETOK (Aktíva)
Výsledovka	NÁKLADY	VÝNOSY

Z pohľadu **súvahy** ukazovatele predstavujú informácie o stave a štruktúre majetku podniku a o zdrojoch jeho krytia k určitému momentu analyzovaného obdobia (*stavové veličiny*). Z pohľadu **výsledovky** ukazovatele predstavujú informácie o výške podnikových výnosov a nákladov (*tokové veličiny*).

V matici **A** sú ukazovatele typu *výstup/vstup* a vyjadrujú efektívnosť. Je potrebné, aby všetky rástli.

V matici **C** sú ukazovatele typu vstup/výstup, ktoré je na zabezpečenie rastu efektívnosti potrebné minimalizovať.

V matici **B** sú ukazovatele typu vstup/vstup, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi podnikovými vstupmi. Za najpoužívanejší je považovaný ukazovateľ *vybavenosti pracovnej sily dlhodobým majetkom* meraný pomerom stavu dlhodobého majetku a počtu pracovníkov.

V matici **D** sú ukazovatele typu výstup/výstup a prezentujú vzťahy medzi podnikovými výstupmi. Medzi najdôležitejšie ukazovatele patria *rentabilita výroby* a *rentabilita výnosov* (ziskovosť výnosov). Za pozitívny trend možno považovať rast týchto ukazovateľov.

Budeme uvažovať údaje podniku XY v časovom období rokov 2005 až 2008 (tab. 6).

3.2 Realizácia a analýza modelových výpočtov

Prezentujeme výsledky výpočtov A4 a B2 (tab. 4). Na realizáciu výpočtov sme využili nástroje Excelu (Analýza dát, Riešiteľ).

Ekonometrické modelovanie (výpočet A4)
Využitím vzťahu (5) formulujeme jednorovnicový ekonometrický model. Vstupné údaje sú v tabuľke 7.

Model má tvar (regresná priamka výnosov):

$$\hat{y} = 449510{,}7795 - 374{,}86879994 x_1 - 1{,}22101762\, x_2 + 3{,}92455372\, x_3 \qquad (40)$$

V lineárnej regresnej rovnici (40) má prvý parameter charakter konštantného člena a každý ďalší parameter vyjadruje o koľko sa zvýši závisle premenná, ak sa príslušná vysvetľujúca premenná zvýši o jednotku. Štandardné chyby regresných koeficientov a konštanty sa rovnajú 0. Koeficient determinácie má hodnotu 1, to znamená, že medzi odhadovanými a skutočnými hodnotami nie je žiaden rozdiel.

Tab. 6: Vstupné údaje maticového modelu

Obdobie	Ukazovatele vstupov a výstupov v tis. Sk					
	VSTUPY			VÝSTUPY		
	Pracovníci (počet) n_1	Materiálové náklady n_2	Dlhodobý hmotný majetok n_3	Výnosy spolu v_1	Zisk čistý v_2	Výroba v_3
2005	346	624155	316383	799364	-42814	699421
2006	306	607016	320860	852856	-16192	716029
2007	270	510476	209294	546384	-142061	540922
2008	240	465193	200360	577857	15776	565332

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tab. 7: Ekonometrické modelovanie

Obdobie	Závisle premenná (y_i)	Vysvetľujúce premenné (x_{ij})		
	Výnosy spolu	Pracovníci	Materiálové náklady	DHM
2005	799364	346	624155	316383
2006	852856	306	607016	320860
2007	546384	270	510474	209294
2008	577857	240	465193	200360

Zdroj: vlastný

Model lineárneho programovania
(výpočet B2)
Úlohu (U.3) sme použili na meranie efektívnosti vstupno-výstupných transformácií v podniku XY v rokoch 2005 až 2008. **Riešime dva prípady**:

1. prípad

Na meranie efektívnosti používame náročnosti jednotlivých vstupov a to: mzdovú, materiálovú a fondovú. Ako výstupy vystupujú výnosy spolu, zisk čistý a majetok spolu na 1 mil. Sk výnosov. Tieto údaje sú uvedené v tabuľke vstupných údajov (tab. 8).

Formulácia úlohy s konkrétnymi údajmi je uvedená v tab. 9 a výsledky riešenia sú zhrnuté v tab. 10, kde na základe vzťahu

$$E_j = \sum_r \mathbf{t}_r \mathbf{c}_{rj} \,/\, \sum_i \mathbf{u}_i \, \mathbf{S}^J_{M,\, ij}$$

sme vypočítali efektívnosť a poradie v jednotlivých rokoch.

Ide o efekt vstupno-výstupných transformácií, pričom uvedený podnik je v sledovanom období rovnako efektívny. Z realizácie ľavých strán modelu však možno usudzovať, že podnik je v roku 2007 menej efektívny. Ako kritériá v podstate vystupujú čistý zisk a majetok spolu, pričom výpočet je realizovaný na báze výnosov spolu. V riešení zo vstupov získali vyššie ocenenie (váhu) vlastné imanie (u_3) a z výstupov majetok spolu (t_3). Možno teda usudzovať, že podnik:

- napriek tomu, že je efektívny, príčinou je vyšší podiel majetku,
- menšiu efektívnosť vstupno-výstupných transformácií v roku 2007 možno zdôvodniť vyššími nárokmi na vstupy (vlastné imanie).

2. prípad

Na meranie efektívnosti používame náročnosti jednotlivých vstupov a to: pracovnú, materiálovú a fondovú (meranú DHM). Ako výstupy vystupujú výnosy spolu, zisk čistý a výroba na 1 mil. Sk výnosov. Tieto údaje sú uvedené v tabuľke vstupných údajov (tab. 11).

Tab. 8: Vstupné údaje 1. prípadu

Obdobie	Vstupy			Výstupy		
	u_1 – mzdové náklady	u_2 – materiálové náklady	u_3 – vlastné imanie	t_1 – výnosy spolu	t_2 – zisk čistý	t_3 – majetok spolu
	mzdová náročnosť	materiálová náročnosť	fondová náročnosť	na 1 mil. Sk výnosov	na 1 mil. Sk výnosov	na 1 mil. Sk výnosov
2005	73099	624155	535566	799364	-42814	535566
	0,09145	0,78081	0,66999	1	-0,05356	0,66999
2006	74268	607016	533176	852856	-16192	533176
	0,08708	0,71175	0,62517	1	-0,01899	0,62517
2007	81661	510474	416235	546384	-142061	416235
	0,14946	0,93428	0,76180	1	-0,26000	0,76180
2008	88553	465193	444757	577857	15776	444757
	0,15324	0,80503	0,76967	1	0,02730	0,76967

Zdroj: Vlastné výpočty

Tab. 9: Formulácia úlohy 1. prípadu

	u_1	u_2	u_3	t_1	t_2	t_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,09145	0,78081	0,66999	-1	0,05356	-0,66999	-1				= 0
2	0,08708	0,71175	0,62517	-1	0,01899	-0,62517		-1			= 0
3	0,14946	0,93428	0,76180	-1	0,26000	-0,76180			-1		= 0
4	0,15324	0,80503	0,76967	-1	-0,02730	-0,76967				-1	= 0
				1	1	1					= 1
	u_1	u_2	u_3	t_1	t_2	t_3	w_1	w_2	w_3	w_4	≥ 0
							min w_1	+ w_2	+ w_3	+ w_4	= z

Zdroj: Vlastné spracovanie

Vysvetlivky:

stĺpec 1 – mzdová náročnosť
2 – materiálová náročnosť
3 – fondová náročnosť
7 až 10 – roky 2005 až 2008

stĺpec 4 – výnosy spolu
5 – zisk čistý
6 – majetok spolu

Tab. 10: Efektívnosť vstupno-výstupných transformácií v 1. prípade

Váhy u_i, t_r	Odchýlky w_j	Poradie efektívnosti	Efektívnosť
$u_1 = 0$	$w_1 = 0$	1	1
$u_2 = 0$	$w_2 = 0$	1	1
$u_3 = 1$	$w_3 = 0$	1	1
$t_1 = 0$	$w_4 = 0$	1	1
$t_2 = 0$			
$t_3 = 1$			

Zdroj: Vlastné výpočty

Tab. 11: Vstupné údaje 2. prípadu

Obdobie	Vstupy			Výstupy		
	u_1 – pracovníci	u_2 – materiálové náklady	u_3 – dlhodobý hmotný majetok	t_1 – výnosy spolu	t_2 – zisk čistý	t_3 – výroba
	pracovná náročnosť	materiálová náročnosť	fondová náročnosť	na 1 mil. Sk výnosov	na 1 mil. Sk výnosov	na 1 mil. Sk výnosov
2005	346	624155	316383	799364	-42814	699421
	0,00043	0,78081	0,39579	1	-0,05356	0,87497
2006	306	607016	320860	852856	-16192	716029
	0,00036	0,71175	0,37622	1	-0,01899	0,83957
2007	270	510474	209294	546384	-142061	540922
	0,00049	0,93428	0,38305	1	-0,26000	0,99000
2008	240	465193	200360	577857	15776	565332
	0,00042	0,80503	0,34673	1	0,02730	0,97833

Zdroj: Vlastné výpočty

Formulácia úlohy je analogická ako v 1. prípade a výsledky riešenia sú zhrnuté v tab. 12, kde na základe vzťahu $E_j = \sum_r \mathbf{t}_r \mathbf{c}_{rj} / \sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{S}^J_{M,\, ij}$ sme vypočítali efektívnosť a poradie v jednotlivých rokoch.

Tab. 12: Efektívnosť vstupno-výstupných transformácií v 2. prípade

Váhy u_i, t_r	Odchýlky w_j	Poradie efektívnosti	Efektívnosť
$u_1 = 0$	$w_1 = 0{,}06888$	2	0,93112
$u_2 = 0{,}52579$	$w_2 = 0$	1	1
$u_3 = 1{,}66332$	$w_3 = 0{,}12837$	3	0,87163
$t_1 = 1$	$w_4 = 0$	1	1
$t_2 = 0$			
$t_3 = 0$			

Zdroj: Vlastné výpočty

Ide o efekt vstupno-výstupných transformácií, pričom uvedený podnik je v sledovanom období efektívny v rokoch 2006 a 2008. Aj realizácia ľavých strán modelu potvrdzuje, že podnik je menej efektívny v rokoch 2005 a 2007. Ako kritériá v podstate vystupujú čistý zisk a výroba, pričom výpočet je realizovaný na báze výnosov spolu. V riešení zo vstupov získali vyššie ocenenie (váhu) materiálové náklady (u_2) a dlhodobý hmotný majetok (u_3) a z výstupov výnosy spolu (t_1). Možno teda usudzovať, že podnik:

- vyšší podiel výnosov spôsobil efektívnosť v rokoch 2006 a 2008,
- vysoké nároky na vstupy (materiálové náklady, dlhodobý hmotný majetok) spôsobili menšiu efektívnosť v rokoch 2005 a 2007.

V oboch prípadoch sa podnik pozerá na efekty transformácie vstupov na výstupy z pohľadu výnosov a potvrdzuje sa vysoká náročnosť na majetkové vstupy. Možno konštatovať, že tieto výpočty poskytujú syntetický pohľad a identifikujú slabé aj silné miesta. Ďalšia analýza môže byť potom cielenejšia a efektívnejšia.

Záver

Maticové usporiadanie ukazovateľov vytvára priestor na rôzne výpočtové postupy. Pri formulácii výpočtových postupov vychádzame z toho, že ekonomické problémy môžu mať podobnú matematickú štruktúru [8], [9]. Napr. ak sa dostaneme na určitú úroveň abstrakcie, tak *maticová rovnica* a *integrálna rovnica* opisujú podobné matematické situácie t.j. problémy majú podobnú matematickú štruktúru.

Súbor transformácií vo vzťahu (1) možno vytvárať tak, že meníme vlastnosti operátora. Aj keď existuje mnoho druhov operátorov, je užitočné zaoberať sa takými, ktoré ak vynecháme nepodstatné detaily, môžeme považovať za transformácie normovaného lineárneho priestoru do normovaného lineárneho priestoru. Toto nám umožňuje skúmať rovnakým spôsobom maticové rovnice, integrálne rovnice, diferenciálne rovnice, diferenčné rovnice a náhodné procesy. Najdôležitejším faktom je to, že všetky normované lineárne priestory majú geometrickú štruktúru veľmi podobnú obyčajnej dvojrozmernej alebo trojrozmernej Euklidovej geometrii. Dá sa dokázať, že geometrická štruktúra normovaného lineárneho priestoru v skutočnosti obsahuje tri rôzne druhy štruktúr: *množinovú, topologickú* a *algebrickú* [11].

Modifikácia matice **S** môže byť spojená nielen s riešiteľnosťou SLR, ale aj s inými výpočtovými postupmi. Možno sa napr. zamerať na skúmanie štruktúrnych vzťahov (27) rozpracúvaním použitia Markovových reťazcov na *skúmanie stability a predikciu štruktúrnych vzťahov*. Na základe vzťahu (28) možno za určitých podmienok formulovať úlohu cieľového programovania minimalizácie vzdialenosti štruktúr.

Výpočtové postupy na báze riešenia SLR možno rozšíriť aj na súčasné porovnávanie výkonnosti viacerých podnikov, pričom vektory **q**, **p** vo vzťahoch (38) a (39) budú predstavovať úroveň odvetvia hospodárstva (skupiny podnikov).

Príspevok bol spracovaný v rámci úlohy VEGA 1/165/08 „ Interakcie rozpočtovo-kapitálových a finančných rozhodnutí a ich vplyv na rast trhovej hodnoty podniku" na Fakulte podnikového manažmentu Ekonomickej univerzity v Bratislave.

Literatúra

[1] FIALA, P. *Modelování a analýza produkčních systémů*. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2002. 259 s. ISBN 80-86419-19-3.
[2] GRELL, M. *Informačná ekonomika*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2002. 163 s. ISBN 80-225-1561-2.
[3] HEBÁK, P., HUSTOPECKÝ, J. *Vícerozměrné statistické metody s aplikacemi*. 1. vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1987. 452 s.
[4] HLAVÁČEK, L. Hodnocení adaptability výrobního organismu na alternativní cílové záměry. *Ekonomicko-matematický obzor*. 1984, roč. 20, č. 2, ISSN 0013-3027.
[5] KAPLAN, R., S., NORTON, D., P. *Balanced Scorecard. Strategický systém měření výkonnosti podniku*. 3. vyd. Praha: Management Press, 2002. 267 s. ISBN 80-7261-063-5.
[6] KLAS, A. a kol. *Ekonometrické modelovanie*. Bratislava: Vydavateľstvo ALFA, 1979. 335 s.
[7] KRÁĽOVIČ, J., VLACHYNSKÝ, K. *Finančný manažment*. Bratislava: IURA EDITION 2006. 455 s. ISBN 80-8078-042-0.
[8] LANGE, O. *Úvod do ekonomické kybernetiky*. 1. vyd. Praha: ACADEMIA, 1968. 173 s.
[9] LANGE, O. *Celek a vývoj ve světle kybernetiky*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Svoboda, 1966. 128 s.
[10] LUKÁČIKOVÁ, A, LUKÁČIK, M. *Ekonometrické modelovanie s aplikáciami*. Bratislava: Vydava-

teľstvo EKONÓM, 2008. 343 s. ISBN 978-80-225-2614-2.
[11] NAYLOR, A. W., SELL, G. R. *Teória lineárnych operátorov v technických a prírodných vedách*. 1. vyd. Bratislava: ALFA, 1981. 629 s.
[12] ŘEPA, V. *Podnikové procesy. Procesní řízení a modelování*. 2. aktualizované a rozšířené vyd. Praha: Grada Publishing, 2007. 281 s. ISBN 978-80-247-2252-8.
[13] SVÄTOKRÍŽNY, P. *Lineárna algebra v úlohách*. 1. vyd. Bratislava: ALFA,1985. 466 s.
[14] UČEŇ, P. a kol. *Metriky v informatice. Jak objektivně zjistit přínosy informačního systému*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2001. 139 s. ISBN 80-247-0080-8.
[15] UNČOVSKÝ, L., IVANIČOVÁ, Z., BREZINA, I. *Základy operačného výskumu*. Bratislava: Edičné stredisko EU, 1993. 236 s. ISBN 80-225-0500-5.
[16] ZALAI, K. a kol. *Finančno-ekonomická analýza podniku*. 7. přeprac. a rozšír. vyd. Bratislava: Sprintdva, 2010. 446 s. ISBN 978-80-89393-15-2.

Ing. Michal Grell, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky
Katedra aplikovanej informatiky
grell@euba.sk

Ing. Eduard Hyránek, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta podnikového manažmentu
Katedra podnikových financií
hyranek@euba.sk

Doručeno redakci: 2. 12. 2009
Recenzováno: 17. 1. 2010, 25. 5. 2010
Schváleno k publikování: 9. 1. 2012

Abstract

MATRIX MODELS FOR PRODUCTION SYSTEMS EFFICIENCY'S MEASUREMENT

Michal Grell, Eduard Hyránek

In the contribution we deal with firm efficiency's measurement by the matrix system of indicators and various combination of these indicators is applying in this system. In the calculations we apply the indicators in term of added value and formulate relations of these indicators. It is the system of financial and non-financial indicators. Nowadays these systems are based on the integration of financial analysis and the analysis of strategical factors of enterprise fruitfulness. An example of this system is Balanced Scorecard which represents an interconnection of enterprise financial efficiency's goals with its strategical goals. The instrument of efficiency's measurement are metrics i.e. strict financial or non-financial indicators or evaluative criteria which use efficiency's levels in specific area of enterprise. Metrics are created normally in term of added value and of parametrization. We deal more closely with indicators in term of added value. The important thing is also clear formulation of indicator's relations which has the same influence on quantitative evaluation of economic reality as the clear definition of indicators (metrics), system elements. We deal with the mathematical formulation of relations. The mathematical formulation of relations is represented by the matrix system which is created by vertical and horizontal combination of indicators. Indicators co-ordinating vertically represents matrix rows and indicators co-ordinating horizontally represents matrix columns. Its combination generates matrix elements which can represent various types of ratio indicators. We analyse specific computing procedures in matrix model. Enterprise matrix model formally decribes correlation between economic variables of the model. The starting point for the formulation of matrix model are absolute indicators organized in the table. In the table are differentiated by four essential matrix: imput efficiency matrix, output intensity matrix, imput structure matrix and output structure matrix. There are possible e.g., applications based on calculations using the pseudoinverse matrix, single-equation econometric model, multi-equation econometric model, modified matrix, etc. The presented matrix model belongs to operation research's nonstandard problems, which need cross-disciplinary approach of experts from various professions.

Key Words: *firm efficiency, metrics, matrix system of indicators, matrix model, computing procedures in matrix model.*

JEL Classification: *C02, D59, D89.*