

GENEROVANIE HODNÔT CELKOVEJ ŠKODY V KOLEKTÍVNYM MODELÍ RIZIKA NA ZÁKLADE APROXIMÁCIE POSUNUTÝM GAMMA ROZDELENÍM V PROSTREDÍ MICROSOFT EXCEL

Abstrakt

S rýchlym vývojom informačných technológií sa vytvoril značný priestor pre použitie počítačových simulácií, ktoré predstavujú efektívnu alternatívu náročných, resp. neexistujúcich analytických riešení aj v rámci aparátu kolektívneho modelu rizika. V príspevku sa budeme zaoberať simuláciou hodnôt celkovej škody na základe aproximácie posunutým gamma rozdelením v prostredí Microsoft Excel. Štatistickým spracovaním týchto hodnôt vieme získať informácie potrebné pri zabezpečovaní solventnosti poisťovne prostredníctvom určenia miery rizika a stanovením potrebného ekonomického kapitálu. Jednou z možností spomínaného generovania je metóda Monte Carlo, ktorej praktická realizácia môže byť pre užívateľa veľmi náročná. Metodológia prezentovaná v príspevku sa v tomto zmysle vyznačuje jednoduchosťou a dosahuje požadovanú presnosť. Dostupnosť určitých funkcií v zošitoch Microsoft Excelu pre vhodným prostredím pre jej realizáciu.

Kľúčové slová

kolektívny model rizika, simulácie, generovanie, aproximácia, posunuté gamma rozdelenie, kvantil, excelovské funkcie

1 KOLEKTÍVNY MODEL RIZIKA A APROXIMÁCIA CELKOVEJ ŠKODY POSUNUTÝM GAMMA ROZDELENÍM V PROSTREDÍ MICROSOFT EXCEL

Predpokladáme model portfólia poistných zmlúv neživotného poistenia, ktorý vytvoríme v určitej poistnej oblasti na základe dostupných dát, resp. odhadov. Štatistickou analýzou údajov o počte a individuálnej výške škody určíme predpokladané rozdelenia náhodných premenných počtu škôd N a individuálnej výšky škody X . Náhodná premenná, ktorá popisuje rozdelenie celkovej škody v tomto portfóliu sa bude riadiť zloženým rozdelením a označíme ju S , čo zapíšeme

$$S \sim Co(p_N(n); F_X(x)),$$

pre jej charakteristiky[1] platí

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) \quad (1)$$

$$D(S) = E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) \quad (2)$$

$$\rho(S) = \frac{\mu_3(S)}{\mu_2^2(S)} \quad (3)$$

Ak existujú prvé tri začiatkové momenty náhodnej premennej S môžeme jej rozdelenie aproximovať rozdelením náhodnej premennej $G + x_0$, ktorá má posunuté gamma rozdelenie [4], kde $G \sim \Gamma(\alpha; \beta)$ s hustotou pravdepodobnosti

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta \cdot x} \cdot x^{\alpha-1} \quad x > 0 \quad (4)$$

čo môžeme zapísať

$$S \approx G + x_0 \quad (5)$$

Potom pre distribučnú funkciu $F_S(x)$ po odvodení dostaneme

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S \leq x) \approx P(G + x_0 \leq x) = P(G \leq x - x_0) = F_G(x - x_0) \\ F_S(x) &\approx F_{G+x_0}(x) = F_G(x - x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Hodnoty parametrov α, β, x_0 určíme zo sústavy troch rovníc, ktoré získame na základe predpokladanej identickosti rozdelení náhodných premenných S a $G + x_0$

$$E(S) \approx E(G + x_0) = \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \quad (7)$$

$$D(S) \approx D(G + x_0) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (8)$$

$$\rho(S) \approx \rho(G + x_0) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \quad (9)$$

V prípade potreby generovania hodnôt celkovej škody S je možné využiť uvedenú aproximáciu v súvislosti s prepojením problematikou kvantilov na základe vzťahu (6) z ktorého vyplýva, že

$$g_p \approx x_p - x_0 \quad (10)$$

Odkiaľ pre kvantil x_p celkovej škody, resp. pre konkrétnu hodnotu náhodnej premennej celkovej škody S platí

$$x_p \approx g_p + x_0, \quad (11)$$

kde g_p je kvantil náhodnej premennej $G \sim \Gamma(\alpha; \beta)$. Kroky, ktoré je potrebné realizovať na simuláciu napríklad 100000 hodnôt prebytku zhrnieme do nasledovného algoritmu.

1. Vypočítame na základe aproximácie rozdelenia celkovej škody S posunutým gamma rozdelením zo vzťahov (7),(8),(9) hodnoty parametrov α, β, x_0
2. Využijeme prostredie Microsoft Excel [1] na generovanie kvantilov g_p náhodnej premennej G pomocou funkcie GAMMA.INV, ktorej syntax vzhľadom na formát hustoty rozdelenie náhodnej premennej $G \sim \Gamma(\alpha; \beta)$ upravíme nasledovne

$$g_p = \text{GAMMA.INV}\left(p; \alpha; \frac{1}{\beta}\right) \quad (12)$$

Hodnotu p zadáme prostredníctvom funkcie RAND(), ktorá je generátorom náhodných čísel z intervalu (0;1). Opakovaním tohto algoritmu kopírovaním vzorca $x_p \approx g_p + x_0$, ktorý sme vložili do bunky získame 100000 hodnôt náhodnej premennej celkovej škody S .

$$x_1, x_2, \dots, x_{100000} \quad (13)$$

Tento počet simulácií môžeme považovať za dostatočný v súvislosti s dosiahnutím presnosti pri ich štatistickom spracovaní na základe analýzy, ktorej sme sa venovali v rámci simulácií v iných príspevkoch.

2 PRAKTICKÁ REALIZÁCIA V PROSTREDÍ V MICROSOFT EXCEL

Na základe štatistického spracovania údajov [2] o počte škôd a individuálnej výške škody v skúmanom portfóliu poistných zmlúv neživotného poistenia predpokladáme ich nasledovné rozdelenie

$$N \sim Po(100), \quad X \sim \Gamma(5; 2)$$

To znamená, že celková škoda S sa riadi zloženým Poissonovým rozdelením

$$S \sim CoPo(\lambda = 100; F_X(x)),$$

so základnými charakteristikami

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) = 100 \cdot 2,5 = 250$$

$$\begin{aligned} D(S) &= E(N) \cdot D(X) + E^2(X) \cdot D(N) = \\ &= 100 \cdot 1,25 + 2,5^2 \cdot 100 = 750 \end{aligned}$$

$$\rho(S) = 0,127802$$

Aproximáciou rozdelenia celkovej škody S rozdelením náhodnej premennej $G + x_0$, ktorá má posunuté gamma rozdelenie, získame pre simuláciu potrebné hodnoty parametrov α, β, x_0 .

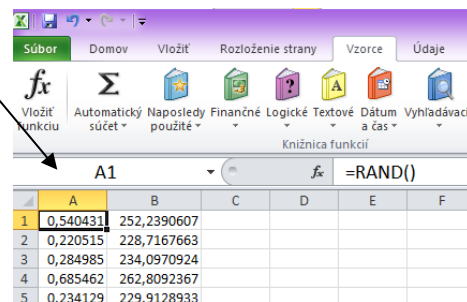
$$0,127802 \approx \rho(G + x_0) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \alpha = 244,8976$$

$$750 \approx D(G + x_0) = \frac{\alpha}{\beta^2} \Rightarrow \beta = 0,571428$$

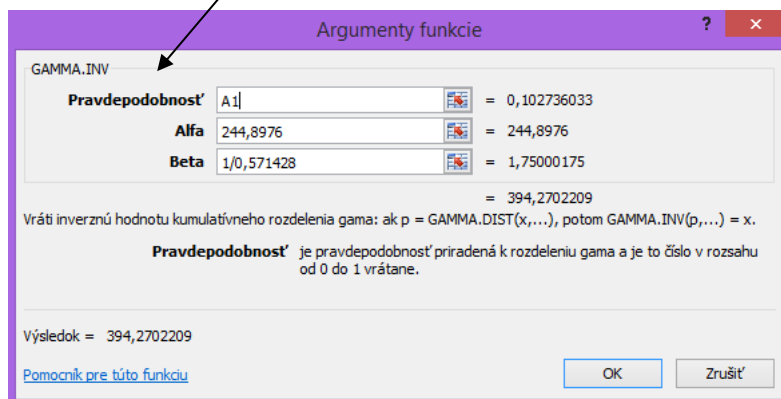
$$250 \approx E(G + x_0) = \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \Rightarrow x_0 = -178,533$$

Návod na generovanie 100000 hodnôt celkovej škody $S \sim CoPo(\lambda = 100; F_X(x))$ v prostredí Microsoft Excel:

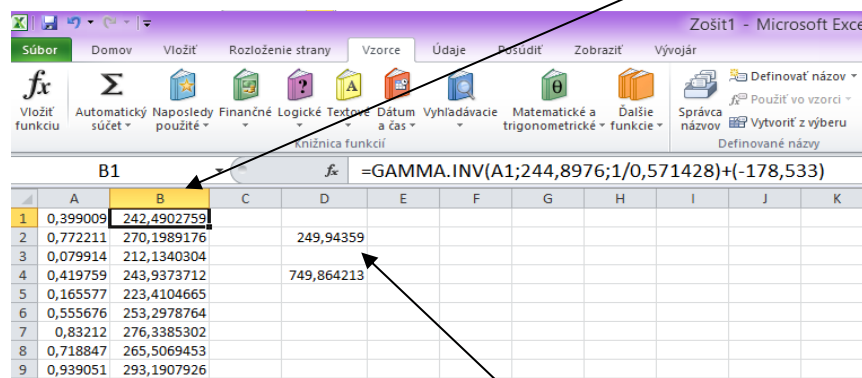
Vložíme do bunky A1 funkciu RAND() na generovanie hodnôt p z intervalu (0;1). (Ak chceme, aby funkcia RAND vygenerovala náhodné číslo, ale nechceme, aby sa čísla menili pri každom prepočte bunky v hárku, môžeme do riadka vzorcov zadať výraz = RAND() a potom stlačením klávesu F9 zameniť vzorec za náhodné číslo.) Potom následne kopírujeme tento vzorec potiahnutím myšou až po bunku A100000.



Do bunky B1 vložíme funkciu GAMMAINV v syntaxe $=\text{GAMMA.INV}\left(A1;\alpha;\frac{1}{\beta}\right)$, pomocou ktorej vypočítame príslušný kvantil náhodnej premennej $G \sim \Gamma(\alpha;\beta)$ označený g_p .



V bunke B1 pripočítame k uvedenej funkcii hodnotu x_0 a tak vytvoríme vzorec $x_p \approx g_p + x_0$, na základe jeho kopírovania po bunku B100000 vygenerujeme 100000 hodnôt náhodnej premennej S .



Len pre názornosť sme štatisticky spracovali nasimulované hodnoty pomocou dostupných excelovských funkcií a určili strednú hodnotu $E(S) = 249,94359$ a disperziu $D(S) = 749,864213$. Môžeme konštatovať, že tieto hodnoty sú porovnateľné s vypočítanými hodnotami $E(S) = 250$ a $D(S) = 750$. Štatistickým spracovaním týchto hodnôt by sme mohli určiť hodnoty distribučnej funkcie celkovej škody, ktoré by boli v prípade tohto počtu simulácií (100000) porovnateľné s výsledkami dosiahnutými exaktnými metódami.

Záver

Prezentovaná metodológia generovania hodnôt celkovej škody predstavuje jednoduchý riešiteľský nástroj, pomocou ktorého možno na základe ich adekvátneho štatistického spracovania zaujať stanovisko v problematike zabezpečenia solventnosti daného portfólia poistných zmlúv v neživotnom poistení. Jej dostupnosť umožní užívateľovi analyzovať situácie aj v prípadoch, kde exaktné riešenia neexistujú, resp. sú extrémne náročné. Vyžaduje si to však vhodnú implementáciu simulácií do riešenia daného problému z oblasti kolektívneho modelu rizika.

Použitá literatúra

1 HORÁKOVÁ, G.- MUCHA, V. 2006. *Teória rizika v poistení. I. časť.* Bratislava: EKONÓM, 2006. 174 s. ISBN 80-225-2141-8

2 RUBINSTEIN, R. 1981. *Simulation and the Monte Carlo method.* Toronto: John Wiley & Sons, Inc.. 1981.278 s. ISBN 0-471-08917-6

3 WALKENBACH, J. 2010. *Excel® 2010. Power Programming with VBA.* New Jersey. John Wiley & Sons, Inc. 2010.1052s. ISBN 978-0-470-47535-5

4 KLUGMAN, S. A. – PANJER, H. H. – WILLMOT, G. E. 1998. *Loss Models* (From Data Decision). New York: John Wiley & Sons, Inc. 1998. 644 s. ISBN 0-471 23884-8

Kontaktné údaje

Mgr. Vladimír Mucha, PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 810, e-mail: vladimir.mucha@euba.sk