PETROHRADSKÝ PARADOX A ROVNÁ DAŇ

Jiří NEČAS, Vysoká škola ekonomická v Praze

1. Úvod

V přírodovědě poslední čtvrtiny 20. století výrazně vzrostl zájem o nelineární zákonitosti [nerovnovážná termodynamika – viz Prigogine (1997, 2001) a deterministický chaos – viz Gleick (1996)]. Tento trend má co říci i do oblasti ekonomie. V ekonomické praxi je používání lineárních funkcí a lineárně tvořených ukazatelů hodně běžné. Přitom často je třeba postihnout chování člověka a jeho vnímání ekonomických kvantit. Z fyziologické akustiky a optiky je známo, že člověk vnímá různé objektivně měřitelné kvantity nelineárně. Není důvod, proč by podobné tvrzení nemělo platit pro kvantity ekonomické, speciálně pro bohatství, resp. množství peněz (příjem). Nelineární vnímání kvantit se pak promítá do rozhodování, jak to demonstruje známý „petrohradský paradox." Na základě jeho klasického Bernoulliova vysvětlení budeme analyzovat vypovídací hodnotu aritmetického průměru příjmů jako ukazatele životní úrovně, a pak zaměříme pozornost k dnes hojně užívanému pojmu „rovná daň," jehož význam se při vykročení za hranice lineárních vztahů výrazně změní.

Připomeňme nejdříve, oč v petrohradském paradoxu jde – viz Hušek (1989), resp. Nečas (1978). Potenciálnímu hráči je nabínuto sehrát partii hry, která záleží na tom, že se hází mincí tak dlouho, dokud nepadne líc. Objeví-li se líc ponejprv v n-tém hodu, dostane částku 2^n Kč, a tím hra končí. Potom potenciálního hráče vyzveme, aby sám určil částku, kterou je ochoten vložit za možnost partii hry sehrát. Přestože střední hodnota výhry je nekonečná, je nepravděpodobné, že by byl ochoten k vkladu přesahujícímu 100 Kč.

Daniel Bernoulli vysvětlil tento jev tím, že funkce užitku[1)] peněz není lineární a přímo stanovil její tvar. Označme x množství peněz a u jemu odpovídající užitek. Bernoulli vyšel z předpokladu, že marginální užitek z peněžní jednotky je nepřímo úměrný vlastněné částce peněz, tj.

$$du/dx = a/x, \tag{1}$$

kde a je kladná konstanta, spojená s volbou jednotky pro užitek. Integrací odtud získáme

$$u = a \ln (x/x_0) \tag{2}$$

Integrační konstanta x_0 vyjadřuje jakousi prahovou (minimální v daném kontextu registrovatelnou) částku peněz. K otázce této prahové hodnoty se ještě vrátíme; pro úvahy o petrohradském paradoxu zvolme $a = 1$, $x_0 = 1$ Kč.

---

1) Užitek jako vyjádření preferencí bývá často chápán jako veličina invariantní vůči jakékoli rostoucí transformaci. V tomto článku se však na užitek aplikují lineární operace (sčítání, násobení reálným číslem), a proto o něm budeme uvažovat jako o veličině invariantní jen vůči násobení kladným reálným číslem, což odpovídá libovůli při volbě jednotky. V tomto smyslu se pojem užitek v souvislosti s petrohradským paradoxem běžně používá – viz Hušek (1989), resp. Nečas (1978). Omezíme se na užitek přiřazený peněžním částkám.

Střední hodnota užitku při rozhodnutí „hrát“ je pak

$$(\ln 2)/2 + (\ln 4)/4 + ... + (\ln 2^k)/ 2^k + ... =$$
$$= \ln 2\ (1/2 + 2/4 + ... + k/ 2^k + ...) = 2 \ln 2 = \ln 4$$

Tedy střední hodnota užitku při rozhodnutí hrát odpovídá částce 4 Kč.

2. Weberův-Fechnerův zákon

Jistěže jak volba prahové hodnoty, tak i sama volba tvaru funkce, tj. předpoklad (1), jsou diskutabilní; podobné úvahy by bylo možno dělat za obecnějších předpokladů, např.

$$du/dx = a/x^b \quad (0 < b \quad 1) \tag{3}$$

Zůstaňme však u Bernoulliho logaritmického tvaru funkce užitku (tj. budeme uvažovat hodnotu $b = 1$). Ten totiž velice úzce koresponduje s obecným *Weberovým-Fechnerovým zákonem*[2] týkajícím se subjektivního vnímání objektivních veličin: podle Weberova-Fechnerova zákona člověk vnímá objektivně měřitelné veličiny logaritmicky (intenzita vjemu je přímo úměrná logaritmu skutečně vnímané veličiny). S Weberovým-Fechnerovým zákonem se lze setkat prakticky jen v textech věnovaných akustice či optice, nicméně jeho formulace i význam přesahují nejen oblast akustiky[3] a optiky, nýbrž celou fyziku;[4] v tomto článku jej budu aplikovat na vnímání ekonomických kvantit.

Vyjádření užitku ve tvaru (2) Weberovu-Fechnerovu zákonu odpovídá. Užitek charakterizuje vnímání objektivní hodnoty, jíž je množství peněz (příjem), a tedy obecné formulaci tohoto zákona skutečně odpovídá. A použití Weberova-Fechnerova zákona zde je v souladu s Bernoulliho vysvětlením petrohradského paradoxu.

Dále již nebudu uvažovat vklad do hry, nýbrž příjem za určité období (v české praxi měsíc). Pro volbu prahové hodnoty se nabízí životní minimum, minimální mzda, odečitatelná nezdaněná část příjmu apod. (tedy v České republice hodnota cca mezi 3 000 a 7 000 Kč). Přes nepochybné metodologické problémy, které s sebou volba referenční prahové hodnoty přináší, je žádoucí věnovat užitku jako logaritmické funkci příjmu pozornost.

---

2) Wilhelm Weber (1804 – 1891), německý fyzik, blízký spolupracovník Gausse. Gustav Theodor Fechner (1801 – 1877), německý fyzik, filozof a psycholog, zakladatel „psychofyziky.“

3) V akustice platí, že intenzita sluchového vjemu závisí nejen na velikosti (hustotě) energetického toku (jde o energii mechanického vlnění), nýbrž i na frekvenci; ucho je k různým frekvencím různě citlivé. Pro jednoduchost se této závislosti na frekvenci můžeme vyhnout tak, že uvažujeme jen monochromatické vlnění. Fyziologická akustika pak pracuje s vyjádřením závislosti intenzity vjemu *I na hustotě W* příslušného energetického toku ve tvaru

$$I = K.\ln(W/W_0),$$

kde K je konstanta daná volbou měřítka intenzity vjemu (při použití decibelů je $K = 10 / \ln 10$) a W_0 je prahová hodnota (práh slyšitelnosti), jež musí být překročena, aby byl podnět vnímán. Ve skutečnosti je tato hodnota závislá na subjektu, avšak pro praxi se přijímá určitý konsensus a definuje obecně přijímaná *referenční hodnota* (pro frekvenci 1 kHz je $W_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$). Přestože zde dochází k jakési umělé *objektivizaci subjektivního vjemu* (umožněné zmíněnou dohodou o „definitorické hodnotě“ subjektivního parametru), fyziologická akustika se rozvinula a rozvíjí a má četné aplikace.

4) Fyzikální veličinou, jejímž vnímáním (na rozdíl od hustoty energetických toků) se fyzika zpravidla nezabývá, je čas. Nicméně známá zkušenost, že s přibývajícím věkem člověku čas „plyne rychleji,“ je v kvalitativním souladu s Weberovým-Fechnerovým předpokladem o logaritmickém vnímání objektivních veličin. Prahovou hodnotou zde může být věk, od něhož si člověk začíná pamatovat události (jistě velmi subjektivní, avšak zhruba 2 až 3 roky); s logaritmickým vnímáním času je v souladu i to, že si nikdo nepamatuje na svůj začátek (subjektivně „existuje od svého –   “).

3. Ukazatel charakteristické hodnoty příjmu

Velice často se hovoří o průměrném příjmu, což je sice užitečný ukazatel *úhrnné* výše příjmů, pro lepší vytvoření představy „normovaný na hlavu," nicméně o středním užitku (o vnímané charakteristické hodnotě příjmu) vypovídá velice málo. Uvažujme proto soubor N lidí s příjmy x_i (i = 1, 2, ..., N), jimž odpovídají hodnoty užitku

$$u_i = \ln (x_i/x_0) \tag{4}$$

(x_0 je referenční prahová hodnota; měřítko pro hodnoty užitku je dáno vztahem (4), tj ve vztahu (2) klademe a = 1).

Průměrná hodnota užitku pak je

$$\begin{aligned} u_{avg} &= N^{-1} (\ln (x_1/x_0) + \ln (x_2/x_0) + ... + \ln (x_N/x_0)) = \\ &= N^{-1} (\ln (x_1) + \ln (x_2) + ... + \ln (x_N)) - \ln x_0 \ = \\ &= \ln ((x_1 \,.\, x_2 . \ ... \ . \, x_N)^{1/N}) - \ln x_0 \ = \\ &= \ln ((x_1 \,.\, x_2 . \ ... \ . \, x_N)^{1/N}/x_0) \end{aligned} \tag{5}$$

Průměrná hodnota užitku tedy odpovídá příjmu

$$(x_1 \,.\, x_2 \,. \ ... \ . \, x_N)^{1/N},$$

tedy *geometrickému průměru* příjmů jednotlivců, a to nezávisle na volbě referenční hodnoty x_0.

S geometrickým průměrem se ve statistických výkazech prakticky nesetkáváme. Přitom to, jak je vnímána sledovaná kladná veličina, zřejmě vystihuje lépe než aritmetický průměr. Jeho opomíjení může souviset s určitou setrvačností (před érou počítačů byl jeho výpočet zdlouhavý), avšak může být motivováno i určitou obavou z pravdy.

4. Rovná daň

Velikost daně z příjmu je zpravidla rostoucí (a dokonce konvexní, nikoli ovšem ryze konvexní, nebo• bývá po částech lineární) funkcí výše příjmu. Zvláště z některých míst na pravé části politického spektra se ozývající volání po „rovné dani" zpravidla znamená nahradit ji funkcí lineární. Pokud však vezmeme v úvahu logaritmické vnímání množství peněz, tedy i příjmu, pojem „rovná daň" může nabýt výrazně jiný smysl.

Předpokládejme, že vztah mezi příjmem x a užitkem u je dán vztahem

$$u = \ln (x/x_0) \tag{6}$$

Část hrubého příjmu x_b tvoří daň x_d, zbytek x_n je čistým příjmem, $x_b = x_d + x_n$

Hrubému příjmu x_b odpovídá „hrubý užitek"

$$u_b = \ln (x_b/x_0) \tag{7}$$

„Rovné dani" by bylo možno rozumět tak, že vždy by měl být zachován stejný podíl hrubého (u_b) a čistého (u_n) užitku, tj.

$$u_n = \quad u_b \qquad (0 < \quad < 1) \tag{8}$$

Čistému užitku u_n pak odpovídá čistý příjem x_n vyjádřený identitou

$$u_n = \ln (x_n/x_0), \tag{9}$$

tedy

$$x_n = x_0 \exp(u_n), \tag{10}$$

odkud pomocí vztahů (8) a (7) dostaneme

$$x_n = x_b \ . \ x_0^{1-} = x_b \ , \tag{11}$$

kde hodnota konstanty = $(1/x_0)^{-1}$ závisí na zvolené hodnotě a na prahové hodnotě x_0. Velikost daně[5)] tedy je

$$x_d = x_b - x_n = x_b (1 - x_b^{-1}) = x_b (1 - (x_b/x_0)^{-1}) \tag{12}$$

Daňová sazba (podíl x_d/x_b daně a hrubého příjmu) je tedy dána výrazem

$$= x_d/x_b = 1 - (x_b/x_0)^{-1}; \tag{13}$$

V Tabulce 1 ve sloupcích (C) až (F) je uvedena výše daňové sazby[6)] pro vybrané hodnoty koeficientu v závislosti na podílu x_b/x_0 (sloupec (A); hodnota v každém následujícím řádku je $2^{1/4}$ – násobkem [tj. zhruba 1,19 – násobkem] hodnoty z řádku předchozího). Ve sloupci (B) této tabulky jsou uvedeny hodnoty velikosti hrubého příjmu x_b odpovídající relativním hodnotám uvedeným ve sloupci (A) pro referenční hodnotu x_0 = 3170 Kč. Sloupce (C) až (F) Tabulky 1 odpovídají po řadě hodnotám = 1,0; 0,95; 0,9; 0,85; 0,8; 0,75.

Z hodnot uvedených v Tabulce 1 je vidět, že navrhovaná daňová sazba je progresívní (tj. že je rostoucí funkcí[7)] hrubého příjmu x_b); **progresivita daně z příjmu tedy sama o sobě neznamená znevýhodňování lidí s vyššími příjmy, nýbrž je vyjádřením skutečnosti logaritmického vnímání množství peněz**, na něž upozornil už r. 1738 Bernoulli a které je speciálním případem zákonitostí, jimž se v druhé polovině 19. století věnoval Fechner.

Smyslem těchto úvah není přinést hotové konkrétní doporučení pro reformu přímých daní.[8)] Jde o to prostřednictvím určitého zatím poněkud netradičního pohledu ukázat, že problematika spravedlnosti a rovnosti není tak jednoduchá, jak někteří politici a jim sekundující novináři proklamují. Dnešní vývoj v přírodních vědách ukazuje, že pro život a pro fungování celého zemského systému mají stěžejní roli nelinarity. Snaha po linearizaci znamená zploštění skutečnosti. Doba, kdy linearizace byla nutná z výpočtových důvodů, již minula. Dnešní možnosti informační techniky jsou nesmírné a umožňují vystihnout závislosti a zákonitosti, k nimž dříve z praktických důvodů nemohlo být přihlíženo.

---

5) Platí:

$dx_d/dx_b = 1 - (x_b/x_0)^{-1} > 0;$

$d^2x_d/dx_b^2 = (1-). \ .x_0^{-1}.(x_b/x_0)^{-2} > 0;$

velikost daně je tedy rostoucí konvexní funkcí daňového základu. (Nerovnosti platí, nebo• 0< <1,$(x_b/x_0)^{-1}$<1.)

6) Platí:

$d \ /dx_b = (1-).x_0^{-1}.(x_b/x_0)^{-2} > 0;$

$d^2 \ /dx_b^2 = -(1-).(2-).x_0^{-2}.(x_b/x_0)^{-3} < 0;$

velikost daňové sazby je tedy rostoucí konkávní funkcí daňového základu. (Nerovnosti platí, nebo• 0< <1.)

7) Z předchozích dvou poznámek plyne, že pro uvažovanou daňovou sazbu platí:

$d^2x_d/dx_b^2 = \ .d \ /dx_b;$

skutečnost, že daňová sazba je rostoucí funkcí hrubého příjmu, tedy znamená totéž, jako že velikost daně je jeho konvexní funkcí.

8) Dnes se velikost daně z příjmu (x_d) vyjadřuje pomocí konvexní po částech lineární funkce hrubého příjmu (x_b). Současná daňová sazba = x_d/x_b se s výjimkou hodnot pro extrémně nízké a extrémně vysoké příjmy poměrně dobře shoduje se sazbou v tomto článku navrhovanou.

Literatura

Frank, R. H., Bernanke, B. S.: *Ekonomie*. Praha, Grada 2003.
Gleick, J.: *Chaos*. Praha, Ando 1996.
Mankiw, G. N.: *Zásady ekonomie*. Praha, Grada 1999.
Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika*. Praha, SNTL – Alfa 1976.
Hušek, R., Maňas, M.: *Matematické modely v ekonomii*. Praha, SNTL 1989.
Nečas, J. (ed.): *Aplikovaná matematika. Oborová encyklopedie*. Praha, SNTL 1977 – 1978 (2. sv.).
Prigogine, I.: *The End of Certainity*. New York, The Free Press 1997.
Prigogine, I., Stengersová, I.: *Řád z chaosu*. Praha, MF 2001.
Samuelson, P. A.: *Foundations of Economic Analysis*. New York, Atheneum 1971.
Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D.: *Economics*. New York, McGraw-Hill 1992.
Swoboda, H.: *Moderní statistika*. Praha, Svoboda 1977.

Tabulka 1

Relativní výše hrubého příjmu x_b/x_0	Výše hrubého příjmu x_b při refereneční hodnotě x_0=3 170 Kč	Daňová sazba					
	=	1	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
1	3170,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,189207115	3769,79	0,00	0,86	1,72	2,57	3,41	4,24
1,414213562	4483,06	0,00	1,72	3,41	5,07	6,70	8,30
1,681792831	5331,28	0,00	2,57	5,07	7,50	9,87	12,19
2	6340,00	0,00	3,41	6,70	9,87	12,94	15,91
2,37841423	7539,57	0,00	4,24	8,30	12,19	15,91	19,48
2,718281828	8616,95	0,00	4,88	9,52	13,93	18,13	22,12
2,828427125	8966,11	0,00	5,07	9,87	14,44	18,77	22,89
3,363585661	10662,57	0,00	5,88	11,42	16,64	21,54	26,16
4	12680,00	0,00	6,70	12,94	18,77	24,21	29,29
4,75682846	15079,15	0,00	7,50	14,44	20,86	26,80	32,29
5,656854249	17932,23	0,00	8,30	15,91	22,89	29,29	35,16
6,727171322	21325,13	0,00	9,09	17,35	24,87	31,70	37,91
8	25360,00	0,00	9,87	18,77	26,80	34,02	40,54
9,51365692	30158,29	0,00	10,65	20,17	28,67	36,27	43,06
11,3137085	35864,46	0,00	11,42	21,54	30,50	38,44	45,47
13,45434264	42650,27	0,00	12,19	22,89	32,29	40,54	47,79
16	50720,00	0,00	12,94	24,21	34,02	42,57	50,00
19,02731384	60316,58	0,00	13,70	25,52	35,72	44,52	52,12
22,627417	71728,91	0,00	14,44	26,80	37,37	46,41	54,15

Tabulka 2

Výše hrubého příjmu *xb* při refereneční hodnotě x_0=3170 Kč	Relativní výše hrubého příjmu x_b/x_0	Diskutovaná daňová sazba pro =0,907 (%)	Stávající sazba daně Podíl z příjmu (%)	Rozdíl 1 a podílu předchozích 2 sloupců
(B)	(A)	(C)	(D)	(E)
3170	1,000	0,00	0,00	0,00
4000	1,262	2,14	3,11	0,45
5500	1,735	5,00	6,35	0,27
7000	2,208	7,10	8,21	0,16
8500	2,681	8,76	9,41	0,07
10000	3,155	10,13	10,25	0,01
12500	3,943	11,98	12,13	0,01
15000	4,732	13,46	13,44	0,00
17500	5,521	14,69	14,38	-0,02
20000	6,309	15,74	15,08	-0,04
22500	7,098	16,66	15,41	-0,08
25000	7,886	17,47	16,37	-0,06
27500	8,675	18,20	17,15	-0,06
30000	9,464	18,86	17,81	-0,06
35000	11,04	20,02	19,68	-0,02
40000	12,62	21,00	21,22	0,01
45000	14,20	21,86	22,42	0,03
50000	15,77	22,63	23,38	0,03
55000	17,35	23,31	24,16	0,04
60000	18,93	23,93	24,81	0,04
70000	22,08	25,01	25,84	0,03
80000	25,24	25,94	26,61	0,03
90000	28,39	26,74	27,21	0,02
100000	31,55	27,46	27,69	0,01
110000	34,70	28,10	28,08	0,00
120000	37,85	28,68	28,41	-0,01
130000	41,01	29,21	28,68	-0,02
140000	44,16	29,69	28,92	-0,03
150000	47,32	30,14	29,13	-0,03
160000	50,47	30,56	29,31	-0,04
170000	53,63	30,95	29,46	-0,05
1000000	315,5	41,44	31,57	-0,24
10000000	3155	52,73	31,96	-0,39

V tabulce 2 je porovnána navrhovaná sazba s koeficientem = 0,907 a prahovou hodnotou x_0 = 3170 Kč [sloupec (C)] se stávající po částech lineární sazbou daně z příjmu s odečitatelnou částkou rovnou použité prahové hodnotě [sloupec(D)]; ve sloupci (B) je výše příjmu, ve sloupci (A) jeho relativní výše vyjádřená násobkem prahové hodnoty. Sloupec (E) ukazuje, oč se podíl hodnot ze sloupců (C) a (D) liší od 1; kladné hodnoty vyjadřují vyšší hodnotu stávající po částech lineární sazby, záporné pak vyšší hodnoty sazby v tomto článku navrhované, opřené o logaritmické vnímání objektivních hodnot. Je patrno, že se sazby ve značném rozpětí celkem shodují; výraznější odchylka nastává jednak při velmi malých příjmech, jednak pak až při příjmech extrémně vysokých (což může být způsobeno i tím, že konstrukce stávající po částech lineární sazby s extrémně vysokými příjmy příliš nepočítá).

PETERSBURG PARADOX AND EQUAL TAXATION

Jiří NEČAS, University of Economics, 4, W. Churchill Sq., CZ – 130 67 Prague 3 (e-mail: necas@vse.cz)

Abstract:
Daniel Bernoulli's explanation of Petersburg paradox is a special case of general Weber-Fechner's law for area of economy. Till now, this law used to be used outside the area of physics only very rarely. From social point of view, more attention should be payed to subjective perception of economic quantities. This leads to more often use of geometrical mean. Considering Weber-Fechner's law, I can receive a non-traditional view on so called equal taxation.

Keywords: Weber-Fechner's law, Peterburg paradox, equal taxation, perception of quantities, geometrical mean, characteristic value of income

JEL Classification: C20, E62, H24