Martin Pinda

BONUS – MALUS SYSTÉM A HLAD PO BONUSE[1]

Úvod

Bonus - malus systém sa prevažne využíva v poistení motorových vozidiel. Poistenie daného druhu ma významné postavenie medzi inými druhmi poistenia a to preto, lebo zaznamenávajú vysokú škodovosť a vysokú frekvenciu škôd a tiež množstvo motorových vozidiel sa rapídne zvyšuje. Tento typ poistenia tvorí na rozdiel od iných poistných produktov u všetkých poisťovní veľmi veľký poistný kmeň, čo na jednej strane znamená vysoký príjem poistného, ale aj na druhej strane vysoké množstvo vyplácania poistných plnení. Najdôležitejším poistením motorových vozidiel je povinné zmluvne poistenie, ktoré je zákonom dané vo väčšine krajín na svete t.j. zo zákona vyplýva, že každý majiteľ motorového vozidla musí mať uzatvorené povinné zmluvné poistenie. Tento systém odmeňuje vodiča motorového vozidla, ktorý nespôsobuje škodové udalosti, resp. veľmi málo vo forme výhodnejšieho poistného (bonus). Na druhej strane postihuje vodiča, ktorý spôsobí viac nehôd a to vo forme prirážky (malus) k základnému poistnému. Tieto systémy vedú vodičov správať sa zodpovednejšie pri vedení motorového vozidla a tiež umožňujú lepšie oceniť individuálne riziko jednotlivých poistencov. Takto ohodnotenému riziku poisťovňa stanoví spravodlivejšie poistné a poisťovňa si zachová finančnú solventnosť. Cieľom tohto príspevku je popísanie výpočtu hranice, na základe ktorej sa poistenec bude rozhodovať, či sa mu oplatí nahlásiť poistnú udalosť, alebo bude znášať škodu na vlastný vrub.

1 BONUS – MALUS SYSTÉM

V prvom rade pri realizácií systému bonus – malus je potrebné definovať triedy tohto systému, pravidlá zaradenia nového rizika do triedy, pravidlá prechodu z jednej triedy do druhej podľa minulého škodového priebehu a pravidlá, podľa ktorých sú určené zľavy a prirážky rizika k danej triede systému bonus – malus.

Označme M systém bonus – malus. Tak podľa [1]aktuárska definícia tohto systému M je popísaná nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Každé poisťované riziko na začiatku obdobia poistenia sa zaradí do určitej bonus – malus triedy, podľa pravidiel zaradenia rizika do systému.
2. $H, H = 1,2,3, \ldots$ je počet tried systému bonus – malus.
3. Poistné π na poistné obdobie je funkciou triedy systému bonus – malus:

[1] Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0806/14: Kalkulácia SCR na krytie rizík neživotného poistenia v súlade s potrebami praxe (zodpovedný vedúci doc. RNDr. Jozef Fecenko CSc.)

$\pi = \pi(j), j = 1,2,\ldots,H$, pričom $\pi(j) \leq \pi(j+1), j = 1,2,\ldots,H-1$.

4. Pri uzatvorení poistnej zmluvy budú všetky riziká zaradené do triedy a, pričom platí $a\epsilon\{1,2,\ldots,H\}$.
5. Priradenie rizík k jednotlivým triedam systému bonus – malus závisí od presne stanovených pravidiel prestupu R.

Na začiatku každého nového poistného obdobia sa zaradí poistenec do určitej bonus – malus triedy, ktorá sa stanoví v závislosti od počtu nahlásených poistných udalostí z predchádzajúceho obdobia a od príslušnosti k triede v predchádzajúcom období.

Pravidlá, podľa ktorých poistenec prejde z triedy i do triedy j sú opísané v matici prestupu $R = \left(N_{ij}\right)$ typu $H \times H$. Tieto pravidlá nazveme pravidlá prestupu. Prvky N_{ij} matice prestupu sú množiny s týmito vlastnosťami:

- $N_{ij} \subset \{0,1,2,3,\ldots\}, i,j = 1,2,3,\ldots,H$,
- $\bigcup_{j=1}^{H} N_{ij} = \{0,1,2,3,\ldots\},\ \ i,j = 1,2,3,\ldots,H$,
- $N_{ij} \cap N_{ik} = \emptyset$, a$j \neq k, i,\ \ j,k = 1,2,3,\ldots,H$,

kde N_{ij} je množina, ktorej každý prvok určuje počet poistných udalostí v priebehu predchádzajúceho poistného obdobia. Poistenec, ktorý sa nachádza v triede i prejde do triedy j práve vtedy, ak v predchádzajúcom období sa počet nahlásených škodových udalostí rovná niektorému prvku množiny N_{ij}. Ak $N_{ij} = \emptyset$, tak prechod poistenca z triedy i do triedy j je nemožný. Takýto prípad označíme v matici prestupu bodkou.

Pre i-tu triedu systému bonus – malus, kde $i = 1,2,3,\ldots,H$, výška poistného $P(i)$ je daná v percentách zo základného poistného a platí $P(i) \leq P(j)$ pre $i < j$ a z toho vyplýva, že trieda i je vyššie ako trieda j, čiže trieda i je pre poistenca výhodnejšia z hľadiska výšky poistného. Pravidlá prestupu z jednej triedy do druhej sú vyjadrené najčastejšie slovne. Napr. ak poistenec v priebehu roka nenahlásil žiadnu poistnú udalosť, tak postúpi o jednu bonus – malus triedu vyššie, t.j. zvýhodní sa mu poistné alebo zostane v prvej triede. Za každú nahlásenú škodovú udalosť poistenec poklesne o tri bonus – malus triedy alebo zostane v poslednej triede.

Ďalej uplatníme tieto poznatky na konkrétnombonus – malus systéme poisťovne AXA, a.s. Vo všeobecných podmienkach tejto poisťovne možno nájsť všetky základné informácie na formuláciu tohto systému a tiež na jeho následnú analýzu. Rozhodná doba vo všeobecnosti vyjadruje dobu nepretržitého trvania poistenia, ktorá sa počíta v celých ukončených mesiacoch, pričom je znížená za každú poistnú udalosť. Táto poisťovňa znižuje rozhodnú dobu za každú poistnú udalosť o 24 mesiacov. Vstupná trieda je trieda 9 (B0) so základným poistným 100 %. Bonusových tried v tomto systéme je 8 a malusové triedy sú 3. Po každom bezškodovom roku poistenec postúpi o jednu triedu vyššie maximálne však do najvyššej bonusovej triedy, t.j. triedy 1. Každá nahlásená škodová udalosť má za následok pokles poistenca o 2 triedy, t.j. rozhodná doba (doba škodového priebehu) sa zníži o 24 mesiacov. Poistenec maximálne môže klesnúť až do 12. triedy (M3) s poistným 250 %, čiže s malusom 150 %.

Tab. 1Výška poistného v jednotlivých bonus – malus triedach v poisťovni AXA, a.s.

Číslo bonus – malus triedy	Stupeň bonusov a malusov	Výška poistného v % zo základného poistenia
1	B8	50 %
2	B7	55 %
3	B6	60 %
4	B5	65 %
5	B4	70 %
6	B3	75 %
7	B2	80 %
8	B1	90 %
9	B0	100 %
10	M1	130 %
11	M2	190 %
12	M3	250 %

Zodpovedajúca matica prestupu k systému bonus – malus poisťovni AXA, a.s. je znázornená v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 2 Matica prestupu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	{0}	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5}	{6, 7, ...}
2	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5, 6, ...}
3	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	{5, 6, ...}
4	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4, 5, ...}
5	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	{4, 5, ...}
6	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3, 4, ...}
7	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	{3, 4, ...}
8	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2, 3, ...}
9	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	{2, 3, ...}
10	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1, 2, ...}
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	{1, 2, ...}
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	{1, 2, ...}

Predpokladajme, že sa poistenec napr. nachádza v 8. bonus – malus triede. V prípade, že nenahlási v priebehu roku žiadnu poistnú udalosť, tak v nasledujúcom roku postúpi o jednu triedu vyššie, t.j. do 7. triedy. V prípade nahlásenia 1 poistnej udalosti, poistenec zostúpi o 2 triedy nižšie a to do 10. triedy. V prípade nahlásenia viac ako jednej poistnej udalosti, poistenec prejde do poslednej 12. triedy, kde by platil najvyššie poistné.

Prvky matice prechodu definujeme ako pravdepodobnosť

$$p_{ij}^{\vartheta} = P^{\vartheta}(Z_t = j / Z_{t-1} = i), \tag{1}$$

kde ϑ predstavuje škodovosť, alebo škodovú frekvenciu daného rizika.Z_t a Z_{t-1} sú náhodné premenné, ktoré vyjadrujú príslušnosť rizika k bonus – malus triede v časovom období t a $t-1$.

Predpokladáme konštantnú dĺžku časového intervalu, t.j. 1 rok a tiež predpokladáme, že pravdepodobnosti $p_{ij}^{\vartheta}(t)$ nezávisia od časového obdobia t. Potom

$$p_{ij}^{\vartheta}(t) = p_{ij}^{\vartheta}.$$

Matica prechodu pre riziká so škodovosťou ϑ je

$$\boldsymbol{P}^{\vartheta} = \left(p_{ij}^{\vartheta}\right)_H^H, \tag{2}$$

kde prvok p_{ij}^{ϑ} vyjadruje pravdepodobnosť, že poistenec so škodovosťou ϑ, ktorý sa nachádza v i-tej bonus – malus triede v nasledujúcom roku prestúpi do j-tej bonus – malus triedy. Keďže poistenec vždy prejde práve do jednej triedy, tak sa musí súčet každého riadku matice $\boldsymbol{P}^{\vartheta} = \left(p_{ij}^{\vartheta}\right)_H^H$ rovnať práve 1.

Pre poistencov so škodovosťou ϑ v jednotlivých rokoch platí pre relatívnu početnosť ich očakávaného rozloženia rekurentný vzťah

$$X^{\vartheta}(k+1) = X^{\vartheta}(k)\boldsymbol{P}^{\vartheta}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Pre všetky zložky vektorov $X^{\vartheta}(k), k = 0,1,2,\dots$ platí, že ich súčet sa rovná 1.

Pre všetky systémy bonus – malus, ktoré možno opísať Markovovými reťazcami, existuje vektor stacionárnych pravdepodobností. Tento vektor predstavuje pravdepodobnosť s akou sa bude riziko po neobmedzenej dlhej dobe vyskytovať v určitej bonus – malus triede. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúcich troch vlastností Markovových reťazcov, ktoré systémy bonus – malus spĺňajú:

1. Množina stavov Markovovho reťazca je konečná. Ide o konečný Markovov reťazec s množinou stavov$\{1,2,\dots,H\}$, ktorá je konečná.
2. Markovov reťazec je ireducibilný. To znamená, že každá bonus – malus trieda je dosiahnuteľná z inej ľubovoľnej bonus – malus triedy.
3. Stavy Markovovho reťazca sú aperiodické. V každom systéme bonus – malus existuje najvýhodnejšia trieda, ktorú keď poistenec dosiahne a naďalej si neuplatní poistný nárok, tak v tejto triede ostáva.

Vektor stacionárnych pravdepodobností X je určený

$$X^{\vartheta} = \lim_{k\to\infty} X^{\vartheta}(k), \tag{3}$$

alebo z rovnice

$$X^{\vartheta} = X^{\vartheta}\boldsymbol{P}^{\vartheta} \tag{4}$$

za predpokladu, že platí podmienka

$$x_1^{\vartheta} + x_2^{\vartheta} + \dots + x_n^{\vartheta} = 1.$$

Označme základné poistné $\pi = \pi_a$, kde a je vstupná trieda do systému bonus – malus. Poistné π_i je poistné, ktoré prislúcha i-tej bonus – malus triede. Potom priemerné poistné pre poistencov so škodovosťou ϑ v stacionárnom stave je vyjadrené

$$\bar{\pi} = \sum_{i=1}^{H} x_i^{\vartheta} \pi_i = \sum_{i=1}^{H} x_i^{\vartheta} \frac{P(i)}{100} \pi. \tag{5}$$

Niekedy sa tento vzťah využíva aj na stanovenie hodnôt $P(i)$ v závislosti od rôznych škodovostí poistencov. Priemerné poistné vyjadrené v percentách zo základného poistného $\bar{P}$ systému v stacionárnom stave je

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{H} x_i^{\vartheta} P(i). \tag{6}$$

Predpokladajme, že priemerný slovenský vodič nahlási škodovú udalosť raz za 10 rokov. Jeho škodová frekvencia ϑ je teda $0{,}1$. Predpokladajme ďalej, že počet nahlásených škodových udalostí počas roka sa riadi Poissonovým rozdelením, v našom prípade, s parametrom $\vartheta = 0{,}1$. Toto rozdelenie použijeme pri vytvorení matice prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s. a to s použitím vzťahu pre pravdepodobnostnú funkciu Poissonovho rozdelenia podľa [4]

$$P(N = k) = \frac{\vartheta^k}{k!} e^{-\vartheta}, \quad k = 0,1,2,\dots; \vartheta > 0. \tag{7}$$

Tab. 3 zobrazuje maticu prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s.

Tab. 3 Matica prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,9048	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06	0	7,5E-08	1,3E-09
2	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06	0	7,7E-08
3	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06	7,7E-08
4	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06
5	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	3,8E-06
6	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002
7	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0,0002
8	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0047
9	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0,0047
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0952
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0,0952
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0,0952

Vektor začiatočných pravdepodobností $X^{\vartheta}(0)$ v poisťovni AXA, a.s. má tvar

$$X^{\vartheta}(0) = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0).$$

Znamená to, že prví poistenci, ktorí vstúpia do systému budú zaradený do 9. bonus – malus triedy. Podľa vzťahu (3) alebo (4) určíme vektor stacionárnych pravdepodobností X^{ϑ}. Tento vektor v poisťovni AXA, a.s. je určený zložkami:
(0,77899461; 0,08192758; 0,09054398; 0,02216711; 0,01630569; 0,0050712; 0,00297819; 0,00107829; 0,00056009; 0,00022131; 0,00010736; 0,00004459).

Tento vektor predstavuje podiel poistencov v jednotlivých bonus – malus triedach, za predpokladu, že systém je ustálený (systém sa nemení v závislosti od počtu rokov). Najviac poistencov by sa v tomto prípade nachádzalo v prvej bonus – malus triede s najvyšším bonusom a to 50 % zo základného poistného.

Podľa vzťahu (6) vypočítame priemerné stacionárne poistné $\bar{P}$

$$\begin{aligned}\bar{P} \quad = \quad & 0{,}77899461 \cdot 50 + 0{,}08192758 \cdot 55 + 0{,}09054398 \cdot 60 + \\ & + 0{,}02216711 \cdot 65 + 0{,}01630569 \cdot 70 + 0{,}00507120 \cdot 75 + \\ & + 0{,}00297819 \cdot 80 + 0{,}00107829 \cdot 90 + 0{,}0005601 \cdot 100 + \\ & + 0{,}0002213 \cdot 130 + 0{,}0001073 \cdot 190 + 0{,}0000446 \cdot 250 \doteq \\ & \doteq 52{,}30261\ \%.\end{aligned}$$

Za predpokladu, že systém poisťovne AXA, a.s. je v ustálenom stave, tak priemerné poistné od každého poistenca tohto systému by bolo približne 52,30261 % zo základného poistného, t.j. poistného, ktoré poistenec platí v základnej triede (9. trieda).

2 HLAD PO BONUSE

Nie každá škoda musí znamenať poistné plnenie pre poisťovňu. Pojem *hlad po bonuse* označuje správanie poistenca, ktorý nenahlási poisťovni poistnú udalosť a znáša škodu na vlastný vrub. Dôvodom je snaha zachovať si výhodný bonus a teda aj výhodnejšie poistné. Je dôležité uvažovať o hranici, kedy sa poistencovi oplatí nahlásiť poistnú udalosť a kedy sa poistencovi oplatí znášať škodu na vlastný vrub. Niektorí poisťovatelia umožňujú poistencom priplatiť zotrvanie vo vyššej triede vo forme extra poistného alebo umožnia zotrvať v najvyššej triede v prípade jednej nehody, ak poistenec zotrváva v najvyššej triede niekoľko rokov. Takto sa stal z pôvodného zámeru, a to diferencovať riziko, silný marketingový nástroj.

Existuje množstvo metód, pomocou ktorých sa dá vyjadriť hranica uplatnenia nároku za škodu po poistnej udalosti.

Odhad výšky škody, po ktorú si poistenec neuplatní nárok na poistné plnenie

I. metóda

Predpokladajme, že poistenec si uplatní nárok len vtedy, ak výška škody bude väčšia ako zvýšené poistné v horizonte uvažovaných nasledujúcich h rokov. V týchto rokoch predpokladáme, že nenastane žiadna poistná udalosť. Ak sa poistenec nachádza v i-tej bonus – malus triede, tak po h rokoch, v ktorých si neuplatní poistné plnenie sa bude nachádzať v triede j_h, kde

$$N_{i,j_1}, N_{j_1,j_2}, N_{j_2,j_3}, \dots, N_{j_{h-1},j_h}$$

je postupnosť prvkov matice prestupu$R$ s vlastnosťou

$$N_{i,j_1} = N_{j_1,j_2} = N_{j_2,j_3} = \cdots = N_{j_{h-1},j_h} = \{0\}.$$

Ak si poistenec uplatní nárok na poistné plnenie, tak po h rokoch, v ktorých si už neuplatní poistné plnenie, sa bude nachádzať v triede k_h, kde

$$N_{i,k_1}, N_{k_1,k_2}, N_{k_2,k_3}, \dots, N_{k_{h-1},k_h}$$

je postupnosť prvkov matice prestupu$R$ s vlastnosťami

$$N_{i,k_1} = \{1\}$$

a

$$N_{k_1,k_2} = N_{k_2,k_3} = \cdots = N_{k_{h-1},k_h} = \{0\}.$$

Priemerný počet uplatnených poistných nárokov u priemerného slovenského vodiča počas jedného roka je $0{,}1$, t.j. v priemere jedna poistná udalosť za 10 rokov. Z toho vyplýva, že je rozumné zvoliť za h práve hodnotu 10 alebo menšiu.

Podľa $[3]$ poistenec, ktorý sa nachádza v i-tej bonus – malus triede, si uplatní nárok na poistné plnenie vtedy, ak výška škody bude väčšia ako

$$x_i = \sum_{m=1}^{h} \left(\pi_{k_m} - \pi_{j_m}\right)\beta^m, \quad i = 1, 2, \dots, h \tag{8}$$

kde β je odúročiteľ. Predpokladajme, že jeho hodnota je konštantná na nasledujúcich h rokov a hodnoty $\pi_i, i = 1, 2, \dots, h$ vyjadrujú poistné v i-tej bonus – malus triede.

Označme F distribučnú funkciu výšky škody pre poistky portfólia v systéme bonus – malus. Potom pravdepodobnosť, že si poistenec uplatní nárok na poistné plnenie po vzniku poistnej udalosti, ak sa nachádza v i-tej bonus – malus triede je $1 - F(x_i)$. Pravdepodobnosť p bude predstavovať pravdepodobnosť nastatia poistnej udalosti. Potom pravdepodobnosť toho, že poistenec, ktorý sa nachádza v i-tej bonus – malus triede, si uplatní nárok na poistné plnenie v prípade nastatia poistnej udalosti predstavuje škodovosť

$$\vartheta = p\left(1 - F(x_i)\right).$$

II. metóda

Hlavná nevýhoda prvej metódy je, že neuvažuje možnosť nastátia viac ako jednej škodovej udalosti v horizonte uvažovaných rokoch. Táto metóda však už zohľadňuje túto skutočnosť. Na jej riešenie využijeme optimalizačný rozhodovací proces. Vzhľadom na označenie premenných v softvérovej realizácii tohto modelu, trochu zmeníme označenie premenných.

Podľa [1]stratégiu poistenca definujeme vektorom $\boldsymbol{x} = (x_1, x, \dots, x_H)$, kde x_i predstavuje hranicu výšky škody, ktorú keď prekročí, tak si poistenec uplatní nárok na poistné plnenie, ak sa nachádza v i-tej bonus – malus triede. Odhad začiatočného vektora $\boldsymbol{x}$ možno uskutočniť napríklad *I. metódou*. V špeciálnom prípade sa tento vektor môže rovnať aj nulovému vektoru. Označme F ako distribučnú funkciu náhodnej premennej X, ktorá vyjadruje výšku škody. Potom pravdepodobnosť p_i, ktorá predstavuje pravdepodobnosť nenahlásenia škody poistenca, ktorý sa nachádza v i-tej bonus – malus triede, je

$$p_i = F(x_i) = \int_0^{x_i} f(x)dx, \tag{9}$$

kde $f(x)$ je funkcia hustoty náhodnej premennej výšky škody. Priemerná výška neuplatnenej škody je

$$E^i(X) = \frac{1}{p_i}\int_0^{x_i} xf(x)dx. \tag{10}$$

Zo vzorca pre úplnú pravdepodobnosť vyplýva, že pravdepodobnosť uplatnenia k poistných nárokov je

$$\bar{p}_k^i(\lambda) = \sum_{h=k}^{\infty} p_h(\lambda)\binom{h}{k}(1-p_i)^k p_i^{h-k}, \tag{11}$$

kde $p_h(\lambda)$ predstavuje pravdepodobnosť nastatia h škôd v priebehu roka. Predpokladáme, že náhodná premenná, ktorá predstavuje počet škôd počas roka sa riadi Poissonovým rozdelením s parametrom λ. V tom prípade priemerný počet nahlásených škôd je vyjadrený vzťahom

$$\bar{\lambda}^i = \sum_{k=0}^{\infty} k\bar{p}_k^i(\lambda). \tag{12}$$

Pri uvažovaní nezávislosti náhodných premenných výška škody a početnosť škôd, tak očakávané priemerné náklady na vlastný vrub poistenca z nenahlásených škôd sú vyjadrené

$$E(X)\left(\lambda - \bar{\lambda}^i\right).$$

Očakávané náklady poistenca na jeden rok, ktoré sú diskontované k začiatku roka, v ktorom sa poistenec nachádza v i-tej bonus – malus triede, sú vyjadrené ako (aproximujeme dobu poistných plnení v strede roka)

$$E(x_i) = b_i + \sqrt{\beta}E(X)\left(\lambda - \bar{\lambda}^i\right), \tag{13}$$

kde β predstavuje odúročiteľ a $b_i = \frac{P(i)}{100}\pi$ je výška poistného v i-tej bonus – malus triede. Ďalej tiež uvažujeme, že všetky platby, okrem poistného, sa realizujú v strede roka. Predpokladajme, že vektor diskontovaných očakávaných platieb je

$$\bar{v}(\lambda) = \big(v_1(\lambda), v_2(\lambda), \dots, v_H(\lambda)\big).$$

Potom platí

$$v_i(\lambda) = E(x_i) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i(\lambda) v_{T_k(i)}(\lambda), \quad i = 1,2,\dots,H \tag{14}$$

kde výraz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i(\lambda) v_{T_k(i)}(\lambda)$$

predstavuje očakávané platby poistenca v i-tej bonus – malus triede, ktoré sú platené bezprostredne na konci bežného roka, resp. na začiatku ďalšieho roka, a pričom β $(\beta < 1)$ je diskontovaný faktor.
Poznamenajme, že$T_k(i) = j$ práve vtedy, ak poistenie z triedy i sa presunie do triedy j po k nahlásených poistných udalostiach.

Vzťah (14) v maticovom tvare je

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\lambda)' = E(\boldsymbol{x}') + \beta \bar{\boldsymbol{P}}(\lambda) \bar{\boldsymbol{v}}(\lambda)', \tag{15}$$

kde matica $\bar{P}(\lambda)$ je taká matica, ktorej prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci je rovný súčtu takých $\bar{p}_k^i(\lambda)$, pre ktoré platí rovnosť $T_k(i) = j$. Vektory označené čiarkou (apostrofom) znamenajú transponované vektory daného vektora. Riadková norma matice $\beta\bar{P}(\lambda)$ je menšia ako 1 a z toho vyplýva, že tento systém lineárnych rovníc má jediné riešenie, a to znamená, že príslušný iteračný proces je konvergentný.

Ak nastane poistná udalosť v čase t počas roka s výškou škody x, tak má poistenec dva varianty:

1. Neuplatní si nárok na poistné plnenie a teda jeho očakávané diskontované náklady k okamihu vzniku poistnej udalosti sú

$$\beta^{-t} E(x_i) + x + \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i\big(\lambda(1-t)\big) v_{T_{k+m}(i)}(\lambda), \tag{16}$$

kde m predstavuje počet poistných udalostí, ktoré už nastali od začiatku roka.

2. Uplatní si poistné plnenie a teda jeho očakávané diskontované náklady sú

$$\beta^{-t} E(x_i) + \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i\big(\lambda(1-t)\big) v_{T_{k+m+1}(i)}(\lambda). \tag{17}$$

Tieto obe rozhodnutia sú ekvivalentné práve vtedy, keď hodnota výšky škody je

$$x_i = \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i\big(\lambda(1-t)\big)\Big(v_{T_{k+m+1}(i)}(\lambda) - v_{T_{k+m}(i)}(\lambda)\Big), \qquad i = 1,2,\dots,H. \tag{18}$$

Neznáme hodnoty x_i v tejto sústave rovníc sú implicitne zahrnuté v pravdepodobnosti $\bar{p}_k^i\big(\lambda(1-t)\big)$.
Pre fixné $\bar{\boldsymbol{v}}(\lambda)$ má táto sústava rovníc práve jedno riešenie. Optimálnu stratégiu

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_H^*)$$

možno určiť použitím nasledujúceho algoritmu.

Majme zvolenú začiatočnú stratégiu vyjadrenú vektorom $\boldsymbol{x}$, napríklad odhadom pomocou I. metódy, alebo ho zvolíme $\boldsymbol{x} = (0,0,\dots,0)$,t.j. poistenec si uplatňuje poistné plnenie na všetky škody.

Pretože vo vzťahu

$$E(x_i) = b_i + \sqrt{\beta} E(X)\big(\lambda - \bar{\lambda}^i\big)$$

je

$$\sqrt{\beta} E(X)\big(\lambda - \bar{\lambda}^i\big) = 0,$$

tak vzťah(13)možno redukovať na

$$v_i(\lambda) = b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i(\lambda) v_{T_k(i)}(\lambda), \quad i = 1,2,\dots,H.$$

Všeobecne, ak poznáme teda začiatočnú stratégiu $x = (x_1, x_2, \dots, x_H)$ tak riešime systém rovníc

$$v_i(\lambda) = E(x_i) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i(\lambda) v_{T_k(i)}(\lambda), \quad i = 1,2,\dots,H. \tag{19}$$

Tento systém a v spojitosti s ním aj ďalší systém nebudeme riešiť priamymi metódami, ale postupnými iteráciami. K tomu, aby sme mohli začať iteračný proces, odhadneme prítomnú hodnotu vektora všetkých platieb t.j. ak sú všetky škody nahlásené. Potom vypočítame prvé, lepšie priblíženie optimálnej hranice a postupne sa dostaneme k optimálnej hranici.

Ak poznáme vektor $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_H)$, tak riešime systém rovníc

$$x_i = \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k^i\big(\lambda(1-t)\big)\Big(v_{T_{k+m+1}(i)}(\lambda) - v_{T_{k+m}(i)}(\lambda)\Big), \qquad i = 1,2,\dots,H, \tag{20}$$

t.j. vypočítame ďalšie priblíženie optimálneho vektora $\boldsymbol{x}$. Takých iterácií vykonáme dostatočný počet a tým dostaneme vektor $\boldsymbol{x}$ (optimálnu stratégiu správania sa poistenca pri nahlasovaní poistnej udalosti).

Predpokladajme, že poistenec poistený v poisťovni AXA, a.s. sa nachádza v 7. bonus – malus triede. Na základe *I. metódy* určíme hraničnú výšku škody tohto poistenca. Táto hraničná výška škody určuje hranicu, kedy sa poistencovi oplatí nahlásiť poistnú udalosť na úkor straty výhodnejšieho bonusu. Ďalej predpokladáme, že poistenec nahlási poistnú udalosť raz za desať rokov, t.j. poistenec v prípade nahlásenia poistnej udalosti už nasledujúcich desať rokov nenahlási žiadnu poistnú udalosť. Podľa vzťahu (8) táto hraničná výška poistenca v 7. bonus – malus triede je

$$\begin{aligned} x_7 = {} & (500-375)\cdot 0{,}9 + (450-350)\cdot 0{,}9^2 + (400-325)\cdot 0{,}9^3 + \\ & + (375-300)\cdot 0{,}9^4 + (350-275)\cdot 0{,}9^5 + (325-250)\cdot 0{,}9^6 + \\ & + (300-250)\cdot 0{,}9^7 + (275-250)\cdot 0{,}9^8 + (250-250)\cdot 0{,}9^9 + \\ & + (250-250)\cdot 0{,}9^{10} \doteq 416{,}2 \end{aligned}$$

Z tohto výsledku vyplýva, že ak sú splnené naše predpoklady, tak poistencovi, ktorý sa nachádza v 7. bonus – malus triede sa neoplatí nahlásiť poistnú udalosť, ak výška škody nepresiahne hodnotu $416{,}2$ €. Analogicky možno určiť hranicu pre všetky bonus – malus triedy systému.

Predpokladajme, že v poisťovni AXA, a.s. sa počet škôd riadi Poissonovým rozdelením s parametrom $\vartheta = 0{,}1$. Ďalej predpokladajme, že výška poistných plnení sa riadi exponenciálnym rozdelením s parametrom $\delta = 0{,}005$, výška odúročiteľa $\beta = 0{,}9$, počet už nahlásených škôd $m = 0$ a uvažujeme, že čas $t = 0$. Výška základného poistného, t.j. poistné 9. bonus – malus triedy je 500 €.

Keďže výpočty podľa *II. metódy* na výpočet hraničnej priemernej výšky škody pre každú bonus – malus triedu na základe ktorej sa poistenec rozhoduje nahlásiť poistnú udalosť sú matematicky veľmi náročné, tak sme ich realizovali v opensource programe wxMaxima. V tomto programe sme na základe matematického aparátu *II. metóda* existujúci program upravili a prispôsobili na konkrétne podmienky poisťovne AXA, a.s. Priemerné hraničné výšky škôd pre každú bonus - malus triedu podľa tejto metódy sú:

$(78{,}86;\ 142{,}79;\ 199{,}16;\ 250{,}05;\ 295{,}91;\ 360{,}53;\ 441{,}96;\ 623{,}5;\ 1008{,}96;\ 1582{,}921287{,}46;\ 750{,}13)$.

Z týchto výsledkov vyplýva, že poistencovi, ktorý sa nachádza v prvej bonus – malus triede sa neoplatí pri daných podmienkach poisťovne nahlásiť škodovú udalosť, ak výška škody nepresiahne $78{,}86$ €. Poistencovi v druhej bonus – malus triede sa neoplatí nahlásiť škodu, ak výška škody nepresiahne $142{,}79$€, poistencovi tretej bonus - malus triedy, ak výška škody nepresiahne hodnotu $199{,}16$ € atď. Takto si poistenec môže zachovať vyšší bonus na úkor znášania škody na vlastný vrub.

Záver

Povinné zmluvné poistenie nadobúda stále väčší význam. Je zákonom dané, že každý majiteľ motorového vozidla musí uzavrieť povinné zmluvné poistenie a to vo väčšine krajinách sveta. Tak vzniká veľká konkurencia na trhu a poisťovne sa predbiehajú, aby získali priazeň klienta. Jeden z nástrojov ako zaujať klientov je ponúkať bonusové zľavy za zodpovedné vedenie vozidla, t.j. za bez škodový priebeh. Naopak poisťovne postihujú vo forme malusu klientov s vyššou nehodovosťou.Analyzovali a spracovali sme bonus – malus systém poisťovne AXA, a. s. Určili sme pomocou dvoch metód hranicu výšky škody na základe ktorej sa poistenec poistený v poisťovni AXA, a.s. bude rozhodovať, či nahlási škodovú udalosť. V prípade škody nižšej ako je táto hranica, sa poistencovi neoplatí nahlásiť škodovú udalosť a tým si zachová výhodnejší bonus resp. malus na úkor toho, že bude znášať škodu na vlastný vrub.

Kľúčové slová

bonus, malus, poistenie, rozhodná doba, poistná trieda, stacionárne poistné, matica prechodu, matica prestupu, optimálne správanie poistenca

Klasifikácia JEL

C02

LITERATÚRA

[1] LEMAIRE, J.1995. Bonus – malus systems in automobile insurance. USA: Kluwer Academic Publishers Group
[2] LEMAIRE, J. 1996. Automobile Insurance Acturial Models. USA: Kluwer Nijhoff Publisher
[3] FECENKO, J. 2012. Neživotné poistenie. Vydavateľstvo EKONÓM, ISBN 978-80-225-3400-0
[4] PACÁKOVÁ, V. 2014 Aplikovaná poistná štatistika. IURA EDITION, ISBN 80-8078-004-8
[5] FECENKO. J. 2011 Hlad po bonuse a jeho počítačová realizácia v open source systéme maxima. Projekt VEGA č. 1/0931/11: Analýza a modelovanie rizík v zmysle kvantitatívnych štúdií QIS projektu Solvency II.8. medzinárodná vedecká konferencia Aktuárska veda v teórií a praxi. 2011
[6] https://www.axa.sk/

RESUMÉ

Poistenie motorových vozidiel je jednou z najdôležitejších oblastí na poistnom trhu. Pre poisťovňu je dôležité nastaviť podmienky tak, aby mohli konkurovať na poistnom trhu, a aby zachovali solventnosť poisťovne. Taktiež poistenec sa môže rozhodovať, či nahlási škodovú udalosť na úkor poklesu do nižšej triedy, alebo nenahlási škodovú udalosť a zachová si vyšší bonus a bude znášať škodu na vlastné náklady.

SUMMARY

Motor insurance is one of the most important areas of the insurance market. The insurance company is important to set conditions so that they can compete in the insurance market to maintain the solvency of insurers. Also insured we can decide whether to report the damage event expense decline to make lower grade or fails to report damage event retain up higher bonus will know damage at their own expense.

Kontakt

Ing. Martin Pinda, Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: martin.pinda@euba.sk