

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 103003/I/2017/3610297405

Opakované hry, ich riešenie a aplikačné možnosti

Diplomová práca

2017

Bc. Róbert Matiašovic

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Opakované hry, ich riešenie a aplikačné možnosti

Diplomová práca

Študijný program: Operačný výskum a ekonometria
Študijný odbor: Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Bratislava 2017

Bc. Róbert Matiašovic



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Róbert Matiašovic
Študijný program: Operačný výskum a ekonometria (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Typ záverečnej práce: Inžinierska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Opakované hry, ich riešenie a aplikačné možnosti.

Anotácia: Teória hier (historické pozadie a analýza súčasného stavu, vybraté ekonomické aplikácie), konečné a nekonečné opakované hry, princípy ich riešenia a aplikačné využitie. Praktická ukážka riešenia konečných aj nekonečných hier využitím vhodného softvéru. Zhrnutie výsledkov.

Vedúci: doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.
Katedra: KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie
FHI Vedúci katedry: prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Dátum zadania: 19.10.2015

Dátum schválenia: 04.11.2015
prof. Ing. Michal Fendek, PhD.
vedúci katedry

ČESTNÉ VYHLÁSENIE

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne s použitím literatúry, ktorej zdroje uvádzam podľa zvyklostí.

Dátum:

.....

POĎAKOVANIE

Ďakujem doc. Ing. Zuzane Čičkovej, PhD. za ochotu, čas, cenné rady a usmernenia pri písaní diplomovej práce.

ABSTRAKT

MATIAŠOVIC, Róbert: *Opakované hry, ich riešenie a aplikačné možnosti*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI. – doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2017, 60 strán.

Záverečná práca je zameraná na aplikácie rôznych typov opakovaných hier s poukázaním na možnosti ich riešenia. Práca je rozdelená do 4 kapitol. Obsahuje 2 tabuľky, 7 grafov, 19 obrázkov a 6 príloh. Prvá kapitola je venovaná vývoju teórie hier, súčasnému stavu, uvedené sú niektoré typy hier, ako aj niektoré aplikácie teórie hier v ekonómii. V druhej kapitole je stanovený cieľ práce. V tretej kapitole sú definované niektoré základné pojmy, metodika na riešenie konečných a nekonečných opakovaných hier v normálnej aj rozvinutej forme. Ďalej sa vedujeme softvérovému prostrediu Gambit a Matlab, ktoré budeme využívať na riešenie opakovaných hier v 4. kapitole. V záverečnej štvrtej kapitole sú uvedené konkrétne riešenia niektorých opakovaných hier. Konečné opakované hry sú riešené prostredníctvom programu Gambit a nekonečné opakované hry sú riešené v programe Matlab ako súboj dvoch racionálnych hráčov. Výsledky konečných opakovaných hier sú zobrazené pomocou rozhodovacích stromov a nekonečných opakovaných hier prostredníctvom grafov získaných priemerných hodnôt.

Kľúčové slová:

Teória hier, Väzňova dilema, opakované hry.

ABSTRACT

MATIAŠOVIC, Róbert: *Iterated games, their solutions and application possibilities*. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operations Research and Econometrics. – doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2017, 60 pages.

The final thesis is focused on the applications of different types of iterated games, pointing to the possibilities of their solution. The thesis is divided into 4 chapters. It contains 2 tables, 7 graphs, 19 pictures and 6 attachments. The first chapter is devoted to the development of game theory, to the current state, to some types of games, and to the applications of game theory in economics. In the second chapter, the goal is set. In the third chapter some basic concepts are defined as well as the methodology for solving the finite and infinite iterated games in normal and extensive form. Further we will focus on software environment Gambit and Matlab, which will be used to resolve repeated games in Chapter 4. The final fourth chapter lists specific solutions of some iterated games. The finite iterated games are solved through the Gambit program and infinite iterated games are solved in Matlab as a duel of two rational players. The results of the finite iterated games are displayed using decision trees and infinite iterated games through graphs of the average values obtained.

Key words:

Game theory, Prisoner's dilemma, iterated games.

Obsah

Úvod.....	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	11
1.1 Vývoj teórie hier	11
1.2 Niektoré typy hier	14
1.3 Ekonomické štruktúry a teória hier	17
1.3.1 Cournotov model	18
1.3.2 Bertrandov model	19
2 Cieľ práce	21
3 Metodika práce a metódy skúmania	22
3.1 Opakované hry	22
3.2 Reprezentácia hier	26
3.2.1 Normálna forma hry.....	27
3.2.2 Rozvinutá forma hry	29
3.3 Dominancia	31
3.4 Softvér	33
3.4.1 Gambit	33
3.4.2 MatLab.....	34
4 Výsledky práce	35
4.1 Konečné opakované hry	35
4.2 Nekonečné opakované hry	44
4.2.1 Funkcie v MatLabe	45
4.2.2 Stratégia „vždy spolupracovať“	47
4.2.3 Stratégia „vždy zraď“	48
4.2.4 Stratégia „Tit-for-Tat“	50
4.2.5 Stratégia „Grim“	51
4.2.6 Zhrnutie.....	52
Záver	55
Použitá literatúra	57
Prílohy.....	60

Úvod

Teória hier je vedná disciplína zaoberajúca sa matematickými modelmi konfliktov a spolupráce medzi inteligentnými racionálnymi rozhodovateľmi. Teória hier sa aplikuje hlavne v oblasti ekonómie, politológie a psychológie, ako aj v počítačovej vede, biológii a v logických hrách, napr. poker, šach, dáma, atď. Pôvodne sa teória hier zaoberala hrami s tzv. nulovým súčtom, kde zisk jedného hráča predstavuje stratu druhého hráča. Dnes sa teória hier uplatňuje v širokej škále typov hier.

Teória hier poskytuje explanačný a predikčný rámec správania sa jednotlivcov, ktorých správanie je racionálne. Snahou je podať vysvetlenie správania sa živých, ako aj neživých systémov (počítače, IT a i.), ktorých správanie vedie k dosiahnutiu určitých vedomých alebo nevedomých cieľov. Vzhľadom na racionálne správanie sa jedincov a prediktivnosť algoritmov, ktoré sa používajú na riešenie hier, poskytuje tak aj možnosť predvídať výsledky hry, na základe úplnosti alebo neúplnosti informácií vstupujúcich do rozhodovacieho procesu. Vďaka deskriptívnosti, ako aj normatívnosti, teória hier nachádza uplatnenie všade tam, kde je možnosť presne určiť pravdepodobnosť a priradenie váhy jednotlivým činiteľom rozhodovania.

V tejto práci sa zameriame na konečné a nekonečné opakované hry, ktoré sú založené na princípe väzňovej dilemy. Väzňova dilema patrí medzi najznámejšie a najviac využívané hry v teórii hier. Budeme využívať reprezentáciu hier na základe normálnej a rozvinutej formy hry. Vysvetlíme dominanciu stratégií, ktorú možno použiť na riešenie hry. Na riešenie konkrétnych príkladov použijeme softvérové prostredie programov Gambit a MatLab.

Štruktúra práce je nasledovná:

V prvej kapitole sa budeme zaoberať históriou teórie hier. Popíšeme vývoj teórie hier. Zameriame sa na hru Väzňova dilema a na možnosti využitia teórie hier v ekonomických príkladoch.

V druhej kapitole je uvedený cieľ práce. Ide o teoretické stanovenie cieľa, ktorý sa pokúsime dokázať a vyriešiť v ďalších častiach práce.

V tretej kapitole je uvedená metodika práce, podľa ktorej budeme postupovať pri riešení príkladov pre konečné opakované hry a nekonečné opakované hry. Táto kapitola

obsahuje aj popis softvérového prostredia programov Gambit a MatLab, bez ktorých by riešenie úloh bolo vzhľadom na rozsah hry veľmi ťažko realizovateľné.

V záverečnej kapitole „Výsledky práce a diskusia“ uvidíme najskôr riešenie pre konečné opakované hry. Riešenie hry uvidíme pomocou vektorových vzťahov. Pomocou softvéru Gambit zakreslíme rozhodovacie stromy, ktoré vyriešime na základe spätnej indukcie. Ďalej sa budeme venovať nekonečným opakovaným hrám. Uvidíme štyri základné stratégie správania sa, ktoré sa pri nekonečných hrách používajú, a následne urobíme simuláciu hry dvoch hráčov, ktorá bude mať 1000 opakovaní, pričom využijeme softvér. Na záver porovnáme výsledky priemerných hodnôt v nekonečných opakovaných hrách pri použití rôznych stratégií rozhodovania.

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

Konflikt bol ústrednou témou v celej histórii ľudstva. Vzniká, keď sa dvaja alebo viac jednotlivcov s rôznymi hodnotami stretnú a snažia sa riadiť priebeh udalostí. Toto správanie jednotlivcov predstavuje súťaženie, pretože každý jednotlivec sa snaží získať pre seba to najlepšie.

1.1 Vývoj teórie hier

Už v sedemnástom storočí, poprední matematici Christiaan Huygens (1629-1695) a Gottfried W. Leibniz (1646-1716) navrhli vytvorenie disciplíny, v ktorej by využili vedecké metódy na štúdium ľudského konfliktu a interakcie. V priebehu devätnásteho storočia niekoľko popredných ekonómov vytvorilo jednoduché matematické modely na analýzu konkrétnych príkladov konkurenčných situácií. Prvý všeobecný matematický teorém v tejto oblasti bol preukázaný matematikom Ernstom Zermelom (1871-1956) v roku 1912. Tento teorém označil, že akákoľvek konečná hra s dokonalými informáciami, ako je tic-tac-toe, dáma alebo šach, má optimálne riešenie v čistej stratégii. Hovorí sa o hre, kde hráči majú dokonalé informácie a v každej fáze hry si je každý z hráčov vedomý všetkých svojich posledných ťahov, ako aj ťahov svojich súperov.

Skoré diskusie o príkladoch formulácie a riešenia hier dvoch hráčov sú známe dlho pred vzostupom modernej matematickej teórie hier. Prvá známa diskusia o teórii hier bola spomenutá v liste, ktorý v roku 1713 napísal Charles Waldegrave svojmu strýkovi, britskému diplomatovi Jamesovi Waldegravovi. V tomto liste Waldegrave poskytuje riešenie minimaxovej zmiešanej stratégie, ktorej cieľom bolo riešenie dvojčlennej verzie kartovej hry „le Her¹“. Problém je teraz známy ako Waldegraveov problém².

¹ BELLHOUSE, D. R. FILLION, N. 2015. *Le Her and Other Problems in Probability Discussed by Bernoulli Montmort and Waldegrave* [online]. Institute of Mathematical Statistics. ISSN: 10.1214/14-STS469, 2015, vol. 30, no. 1 (platné k 20. 02. 2017)

² Predpokladajme, že existuje N počet hráčov, ktorí hrajú proti sebe. Prvých dvoch hráčov hrajú medzi sebou. Víťaz z tohto súboja hrá s tretím hráčom. Porazený každej hry kladie jednu jednotku do hrnca. Hra pokračuje rovnakým spôsobom cez všetkých hráčov, kým jeden z hráčov neporazí všetkých ostatných hráčov.

V diele z roku 1838 „*Recherches sur les Principes mathématiques de la Théorie des richesses*“ (Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth³), Augustin Cournot považuje duopol za dvojčlennú hru a predstavuje riešenie, ktorým je obmedzená verzia Nashovej rovnováhy, a zároveň je prvým príkladom teoretickej hernej analýzy. Matematik Emile Borel (1871-1956) sa zaoberal hrou 2 hráčov v roku 1921 a zaviedol pojem ako napríklad zmiešané alebo náhodné stratégie. John von Neumann dokázal v roku 1928, že každá hra dvoch hráčov s nulovým súčtom, musí mať optimálnu zmiešanú stratégiu. Jeho výsledok bol rozšírený o existenciu v rovnovážnej zmiešanej stratégii pre hry s viacerými hráčmi. Základy súčasnej teórie hier boli položené v roku 1944 zverejnením monumentálneho zväzku „*Teória hier a ekonomické správanie*“ (*Theory of Games and Economic Behavior*⁴) autormi von Neumannom a ekonómom Oskarom Morgensternom. Táto kniha definuje mnoho základných pojmov a problémov, ktoré sú používané dodnes.

V roku 1950 John Nash dokázal, že konečné hry majú vždy rovnovážny bod, pri ktorom všetci hráči zvolia stratégie, ktoré sú pre nich najlepšie pri daných možnostiach svojich súperov. Toto centrálne poňatie nekooperatívnej teórie hier sa stalo základom pre analýzu tohto typu hier. V rokoch 1950 až 1960 bola aplikácia teórie hier rozšírená na problematiku vojny a politiky. Okrem týchto oblastí teória hier našla uplatnenie aj v sociológii a psychológii a biológii. Teória hier získala osobitnú pozornosť v roku 1994 udelením ceny Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy, ktorú získali John Nash, John Harsanyi a Reinhard Selten. Medzi ďalšími, ktorí získali túto cenu za prínos k teórii hier patrí napríklad Mirrless a Vickrey (1996), Aumann a Schelling (2005), Hurwity, Maskin a Myerson (2007), Sharpley (2012), Roth (2015)⁵.

V posledných 20 rokoch teória hier spôsobila revolúciu v ekonomike priemyselných organizácií a tiež ovplyvňuje mnoho ďalších odvetví, najmä teórie menovej politiky a medzinárodného obchodu. Jedným z najväčších prínosov teórie hier je skúmanie

³ COURNOT, A. 1838. *Mathematical Principles of the Theory of the Wealth*. London: Macmillan & CO., Ltd. (platné k 20.3.2017)

⁴ NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. 2007. *Theory of Games and Economic Behavior* [online]. Princeton: Princeton University Press. 2007, 674s. ISBN 978-0-691-11993-9

⁵ Cena Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda (platné k 14. 03. 2017) dostupné na: <http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/CENA%20SVEDSKEJ%20RISSKEJ%20BANKY%20ZA%20ECONOMICKE%20VEDY%20NA%20PAMIATKU%20ALFREDA%20NOBELA/sk-sk/>

správania firiem v konkurenčnom prostredí. Ignorovanie rozhodnutí konkurenčných firiem je aplikovateľné len na konkurenčne dokonalých trhoch, kde jedna firma alebo spotrebiteľ nemajú žiadny vplyv na celý trh. Ale v mnohých prípadoch je tento predpoklad nesprávny. Mnoho väčších priemyselných firiem konkuruje niekoľkým menším firmám. Dominancia môže vzniknúť napríklad vybudovaním nového závodu alebo znížením cien. Týmto dominujúca firma môže ovplyvniť ostatné firmy a ich správanie. Tento problém sa netýka iba priemyslu. Niektoré krajiny môžu uložiť obchodné sankcie proti ostatným krajinám v snahe vyvinúť tlak na ochranenie trhov. Vláda môže nastaviť krátkodobé úrokové sadzby, keď je inflácia príliš nízka. Tieto príklady sú svojím spôsobom rovnaké ako hry. Napríklad žiadny futbalový tréner neplánuje uskutočniť útok bez prihliadnutia pravdepodobnej reakcie obrancov súperovho tímu. Nashov koncept (1950) ukazuje ako hry skončia, keď hráči nespolupracujú alebo sa nechcú dohodoriť medzi sebou (nekooperatívny typ hry). V tomto prípade "Nashova rovnováha"⁶ nastáva, keď žiadny hráč nemôže profitovať zo zmeny rovnovážnej stratégie vzhľadom na to, že pozná stratégie ostatných hráčov.

Matematické základy teórie hier boli hlavným nástrojom pre modelovanie a navrhovanie automatizovaných rozhodovacích procesov v interaktívnych prostrediach. Výskum v týchto aplikáciách teórie hier je témou posledných konferenčných a časopiseckých príspevkov⁷, ale zatiaľ je stále v počiatočnej fáze. Automatizácia strategických rozhodnutí zvyšuje potrebu, aby tieto aplikácie boli účinnejšie a aby boli odolné voči zneužitiu. Tieto požiadavky tiež rieši teória hier.

Pre rozhodovacia je teória hier matematickým nástrojom, ktorý metodicky stanovuje strategické voľby pre štruktúrované a analyzované problémy. Proces formálne modeluje situáciu ako hru, kde vyžaduje od rozhodovacia vyčíslenie výplat hráčov a ich strategické možnosti s cieľom stanoviť svoju efektívnu reakciu. Jedná sa o normatívne aplikácie teórie hier s cieľom zlepšiť strategické rozhodovanie.

V teórii hier sa väčšinou uvažuje o jednokolovej hre. Hráči, ktorými môžu byť ľudia alebo organizácie, si vyberajú zo zoznamu dostupných možností. Tieto voľby sa nazývajú stratégie. Stratégia, ktorú si hráči vybrali, ich povedie k výsledkom, ktoré popisujú dôsledky rozhodnutí. Predpokladáme, že hráči majú svoje preferencie a chcú

⁶ OSBOURNE, M. J. – RUBINSONSTEIN, A. 1994. *A Course in Game Theory* [online]. London: The MIT Press. 1994, 353s. ISBN-13: 978-0262650403

⁷ BINMORE, K. - VULKAN, N. 1999. *Applying Game Theory to Automated Negotiation*. New Brunswick: Kluwer Academic Publishers. 1999. (platné k 26. 02. 2017)

získať viac než ostatní. Ľudia sa často zapájajú do prebiehajúcich vzťahov, a tak isto aj firmy denno-denne súťažia proti sebe. V reálnom svete sa však stretávame s konfliktmi, ktoré sa opakujú. Firmy, ktoré si konkurujú, sa stretávajú na trhu. V konkurenčnom procese sa firmy snažia pravidelne stanoviť optimálnu cenu a výšku produkcie. Môžeme uvažovať o tom, že dlhodobý vzťah mení chovanie hráčov.

Pre štúdium opakovaných konfliktných situácií boli v teórii hier vytvorené modely opakovaných hier. Na rozdiel od klasickej hry, kde sa hráči stretnú a hrajú hru iba jedenkrát, v opakovaných hrách sa budú tieto rozhodovania opakovať. V opakovaných hrách sa jednotlivé voľby stratégií budú označovať pojmom akcia, a termínom stratégia sa budú označovať postupnosti všetkých akcií v rámci celej opakovanej hry. Pri opakovaných hrách, hráč môže vykonávať rozhodovanie v danej fáze v závislosti od celej histórie hry v už skorších etapách. To znamená, že hráč sa môže pokúsiť odmeniť alebo potrestať ostatných hráčov. Hráč môže byť ochotný obetovať niečo zo svojej výplaty v jednej etape s cieľom vytvoriť renomé, ktoré využije v ďalších etapách.

1.2 Niektoré typy hier

Predmetom štúdia v oblasti teórie hier je hra, ktorá je formálnym modelom interaktívnej rozhodovacej situácie. Táto situácia obvykle zahŕňa niekoľko hráčov. Hra s iba jedným hráčom sa zvyčajne vedie ku klasickým optimalizačným úlohám. Predmetom skúmania teórie hier sú hry s viacerými hráčmi. Hra je charakterizovaná hráčmi, ich preferenciami a informáciami, strategickými akciami, ktoré majú k dispozícii ako aj informáciami, ktoré môžu ovplyvniť výsledok.

Hry môžu byť opísané z rôznych pohľadov a úrovní. Koaličná hra (alebo kooperatívna hra) je popis na vysokej úrovni, so zameraním iba na to, aké odmeny platieb môže získať každá potenciálna skupina alebo koalícia spoluprácou jej členov. Ako príklad možno uviesť, že hráči môžu byť členmi niektorej strany v parlamente. Každá strana má rôznu silu, ktorá je založená na počte kresiel, ktoré sú obsadené členmi tejto strany. Hra teda opisuje, aké koalície medzi stranami môžu tvoriť väčšinu. Kooperatívna teória hier skúma koaličné hry, ktoré berú ohľad na relatívne množstvo sily rôznych hráčov, alebo ako by si mala koalícia rozdeliť odmenu platieb medzi sebou. Najviac aplikácií nájdeme v situáciách, ktoré vznikli v politológii alebo medzinárodných vzťahoch, kde pojmy ako sila sú veľmi dôležité. Napríklad Nash navrhol riešenie pre rozdelenie ziskov na základe

dohody pri vyjednávaní, ktorá závisí len od pomeru síl medzi vyjednávajúcimi pozíciami oboch strán.

Na rozdiel od kooperatívnej teórie hier, nekooperatívna teória hier sa zaoberá analýzou strategických rozhodnutí. Paradigma nekooperatívnej teórie hier sú podrobnosti o usporiadaní a načasovaní výberu stratégií hráčov, ktoré sú rozhodujúce pre určenie výsledku hry. Na rozdiel od Nashovho kooperatívneho modelu, nekooperatívny model vyjednávania predpokladá špecifické procesy, v ktorých je vopred rozhodnuté, ktorý z hráčov v danom čase dostane možnosť na predloženie ponuky. Pojem "nekooperatívny" znamená, že tento odbor teórie hier explicitne modeluje rozhodovacie procesy hráčov z ich vlastného záujmu. Každý z hráčov sa snaží získať pre seba to najlepšie.

Teória hier modeluje rôzne typy hier. Hlavným predpokladom v mnohých variantoch hier je, že hráči sa správajú racionálne. Racionálny hráč je ten, kto vždy zvolí rozhodnutia, ktoré najviac preferuje a prinesú mu najväčší výsledok vzhľadom na stratégiu protihráča. Predpoklady racionality môžu byť zmiernené a výsledné modely boli nedávno použité na analýzu správania. Výsledky boli zhrnuté v diele od autorov Plott a Smith „*Príručka experimentálnej ekonomiky*“ (*Handbook of experimental economics*⁸).

Uvedme niekoľko príkladov konkurenčného boja. Coca-Cola sa stretáva pri konkurencii s firmou Pepsi (a hŕstkou malých firiem) na trhu nealkoholických nápojov. Anheuser-Busch súperí so spoločnosťou Miller a Coors a ďalších menších pivovarov, na trhu s pivom. V Japonsku súťaží spoločnosť Kajima proti Shimizu, Obayashi, Taisei, a Kumagi Gumi (a množstvo iných staviteľov) v stavebnom priemysle. Konkurencia medzi firmami môže mať vážny dopad na správanie firiem. Znížením ceny svojich produktov bude Coca-Cola priťahovať nielen nových zákazníkov, ale taktiež bude preberať niektorých pôvodných zákazníkov konkurenčnej spoločnosti Pepsi. Ak spoločnosť Pepsi nie je ochotná sa zmieriť so svojou stratou príjmov (nepravdepodobný scenár), bude musieť nájsť riešenie a reagovať na zníženie cien spoločnosti Coca-Cola. V skutočnosti, bez ohľadu na to, čo by spoločnosť Pepsi mohla urobiť, jej reakcia na zníženie cien spoločnosti Coca-Cola bude mať vplyv na celkový zisk spoločnosti. Analyzovanie a predvídanie reakcií všetkých svojich konkurentov tak zohráva pri rozhodovaní veľkú úlohu.

⁸ PLOTT, CH. – SMITH, V. 2008. *Handbook of Experimental Economics Results*, Amsterdam: NORTH-HOLLAND [online], ISBN 978-0-444-82642-8.

Podľa autora [22] dve spoločnosti (Coca-Cola a Pepsi) súperia v predávaní nealkoholických výrobkov. Obe firmy majú dve možnosti:

- ponechať pôvodné ceny;
- znížiť ceny.

Na obrázku č.1 je znázornená hra, v ktorej súperia dve spoločnosti, ktoré vyrábajú nealkoholické nápoje.

		Pepsi	
		nemeniť	znížiť
Coca-Cola	nemeniť	4 4	6 2
	znížiť	2 6	3 3

Obrázok 1: Hra medzi spoločnosťou Coca-Cola a Pepsi (zisk je uvedený v miliónoch eur)

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit podľa údajov od autorov [22]

Zníženie cien zodpovedá tiež novej reklamnej kampani, prilákaniu nových zákazníkov, prípadne uvedenie nového výrobku na trh. Predpokladajme, že obe firmy súčasne volia stratégiu predaja a tým sa rozhodujú, či znížiť ceny svojich výrobkov alebo ponechať aktuálne ceny. Výška celkového zisku pri danej stratégii zobrazená je na obrázku č.1. Červené číslo v spodnej časti každej bunky predstavuje výšku zisku pri danej stratégii pre spoločnosť Coca-Cola. Modré číslo v hornej časti každej bunky zas predstavuje výšku zisku pri danej zvolenej stratégii spoločnosti Pepsi. V prípade, že sa spoločnosť Coca-Cola rozhodne znížiť svoje ceny a spoločnosť Pepsi na to nebude reagovať a ponechá pôvodné ceny, zisk pre spoločnosť Coca-Cola bude predstavovať 6 miliónov eur, pričom zisk spoločnosti Pepsi bude iba 2 milióny. Otázkou teraz je, ako sa má správať každá spoločnosť, teda akú stratégiu použije. Z hry na obrázku č.1 vyplýva, že v prípade, že konkurenčná spoločnosť Pepsi nebude meniť ceny svojich výrobkov, pre spoločnosť Coca-Cola je výhodné znížiť ceny výrobkov, čo zabezpečí zisk 6 miliónov eur. Znížením cien výrobkov získa Coca-Cola o 2 milióny eur viac, ako v prípade, keby ponechala pôvodné ceny. V prípade, že spoločnosť Pepsi tieto ceny výrobkov zníži, spoločnosť Coca-Cola ponechá pôvodné ceny, zisk spoločnosti Pepsi bude 6 miliónov. Zisk spoločnosti Coca-

Cola klesne zo 4 miliónov eur na 2 milióny eur. Aj v tomto prípade by bolo pre spoločnosť Coca-Cola výhodnejšie, keby tiež znížila ceny všetkých výrobkov, pričom strata by bola len jeden milión eur.

Práve sme poukázali na to, že bez ohľadu na stratégiu, ktorú použije konkurenčná spoločnosť, pre obe strany je najvýhodnejšie znížiť cenu svojich výrobkov. Z tohto dôvodu by sme mohli predpokladať, že spoločnosť Coca-Cola bude vždy voliť stratégiu znížiť ceny výrobkov. Analýzu, ktorú sme teraz urobili pre spoločnosť Coca-Cola, môžeme použiť aj z pohľadu druhej spoločnosti. Vzhľadom na to, že sa jedná o symetrickú hru, malo by byť jasné, že spoločnosť Pepsi by mala tiež znížiť svoje ceny výrobkov bez ohľadu na to, akú stratégiu použije spoločnosť Coca-Cola. V závere môžeme povedať, že obe spoločnosti by volili prvú stratégiu, t. j. zníženie cien výrobkov.

1.3 Ekonomické štruktúry a teória hier

V tejto kapitole sa pokúsime poukázať na hlavné ekonomické aplikácie z oblasti trhových štruktúr. Trhové štruktúry určujú základnú charakteristiku trhu a majú vplyv na to, ako trh funguje, či sú alebo nie sú hráči na trhu schopní konkurencie, a či majú aj vplyv na cenu, alebo o tom, či a ako sú hráči na trhu organizovaní. Existujú štyri základné trhové štruktúry:

- dokonalá konkurencia,
- monopol,
- monopolistická konkurencia,
- oligopol.

.

Určujúce charakteristiky, podľa ktorých budeme medzi nimi rozlišovať, sú:

- počet firiem na trhu,
- homogenita výrobku (diferenciácie),
- prekážky vstupu na trh,
- schopnosť ovplyvňovať trhovú cenu,
- možnosť necenovej konkurencie.

Dokonalú konkurenciu možno podľa [10] definovať takto:

„Dokonale konkurenčný trh sa vyznačuje týmito znakmi: na trhu existuje veľký počet firiem; vyrábané výrobky sú homogénne; neexistujú bariéry vstupu do odvetvia; jednotlivá firma je cenovým príjemcom; dopyt po výrobkoch jednotlivkej firmy je dokonale elastický; na trhu existuje dokonalá informovanosť.“

Na rozdiel od dokonalej konkurencie, v prípade monopolu ide o jednu firmu, ktorá ovláda trh. Definícia monopolu znie: *„Monopol, resp. čistý alebo prirodzený monopol, predstavuje trhovú štruktúru, v ktorej z určitých dôvodov jeden výrobca produkuje celý objem výroby odvetvia, a teda úplne kontroluje ponuku určitej komodity a má výrazný vplyv na tvorbu ceny. Inými slovami, výrobca vytvára monopol, ak: je jediným dodávateľom homogénneho výrobku na trhu; k tomuto výrobku neexistujú žiadne substitučné tovary; dostatočný počet spotrebiteľov prejavuje o výrobok záujem, inými slovami dopyt po výrobku je postačujúci.“*

V prípade, ak sa na trhu stretne viac firiem, nejde už o monopol, ale o oligopol. Základným oligopolom je duopol, kde sú na trhu dve firmy. Podľa Fendeka je definícia oligopolu nasledovná: *„Základnou črtou trhovej štruktúry oligopolu je bližšie nešpecifikovaný počet kupujúcich, ale len malý počet predávajúcich. Nie je explicitne definovaná horná hranica prípustného počtu predávajúcich, aby trhová štruktúra ešte zodpovedala klasifikácii oligopolu. Kľúčovým problémom totiž nie je počet predávajúcich, ale spôsob, akým navzájom komunikujú, ako reagujú na svoje individuálne zámery a ako spoločne riešia podmienky a atribúty trhovej rovnováhy oligopolu. to znamená, ako riešia otázky trhovej ceny svojich produktov, ako stanovujú celkovú ponuku odvetvia a ako sa dohodnú na individuálnej spoluúčasti oligopolistov na kreovaní celkovej ponuky oligopolu v odvetví na relevantnom trhu.“*

1.3.1 Cournotov model

Cournotov model patrí medzi základné modely teórie hier. V roku 1838 ho odvodil Antoine Augustin Cournot⁹. Jeho model sa snaží nájsť optimálne množstvo výrobkov, ktoré firmy budú ochotné dodávať na trh.

Predpoklady modelu podľa [20] sú:

- na trhu vystupujú dve firmy, $i \in 1, 2$;

⁹ COURNOT, A. 1838. *Mathematical Principles of the Theory of the Wealth*. London: Macmillan & CO., Ltd. (platné k 20.3.2017)

- dopytová funkcia má lineárny tvar $P(Q) = M - Q$, kde Q je celkové množstvo dodávané na trh (pre $Q \geq M$ je $P(Q) = 0$);
- postavenie oboch firiem na trhu je rovnocenné a ich produkty sú homogénne, t. j. $Q = q_1 + q_2$, kde q_i označuje produkciu jednej firmy;
- hraničné náklady c sú konštantné, t. j. nákladová funkcia $C_i(q_i) = cq_i$, kde $c < M$;
- výstup je ľubovoľne deliteľný, priestor stratégií preto môžeme označiť $S_i = [0, \infty)$;
- firmy volia optimálne množstvo súčasne.

Prvým predpokladom trhu, ako to opisuje Cournot, je, že existujú dvaja hráči. Ak tento predpoklad nie je splnený, potom je štruktúra trhu popísaná ako monopol (kde je iba jeden hráč) alebo konkurenčný trh (s väčším množstvom hráčov). Výrobky, ktoré sú dodávané na trh, sú homogénne, t. j. že spotrebiteľ nerozlišuje medzi nimi. Ide o model, v ktorom firmy medzi sebou nespolupracujú. Namiesto toho sa každá firma snaží získať na trhu čo najväčšie zisky.

1.3.2 Bertrandov model

Firmy môžu súťažiť medzi sebou rôznym spôsobom a na rôznych úrovniach. Napríklad môžu súťažiť na základe ich voľby cien, množstva výrobkov a kvality výrobkov. Základná konkurencia sa týka tvorby ceny. Bertrandov model skúma previazanosť medzi rozhodnutiami súperov, ktoré sú založené na základe tvorby ceny.

Bertrandov model duopolu sa objavil ako kritika Cournotovho modelu, kde bolo hlavným nedostatkom, že Cournotov model zanedbáva schopnosť firiem stanoviť cenu. Práve stanovenie rovnovážnej ceny je cieľom tohto modelu. Predpoklady modelu sú podobné, ako pri Cournotovom modeli.

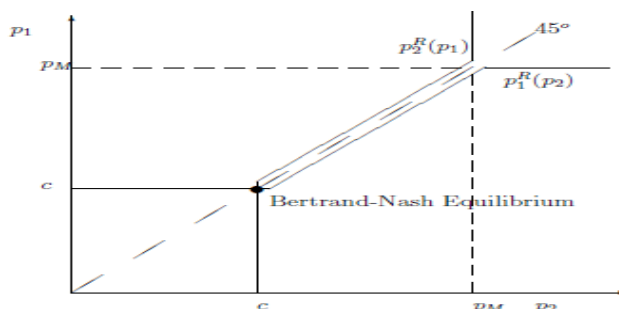
Predpoklady modelu podľa [24] sú:

- na trh vystupujú dve firmy, $i \in 1, 2$;
- dopytová funkcia po výrobku firmy i je funkciou cien, ktorú môžeme zapísať nasledovne $q_i(p_i, p_j) = M - p_i + bp_j$, kde $b > 0$ a označuje, akou náhradou je výrobok firmy i za výrobok spoločnosti j ;
- hraničné náklady c sú konštantné;

- priestor stratégií je tvorený možnými cenami výrobkov a môžeme ho označiť $S_i = [0, \infty)$;
- firmy stanovujú optimálnu cenu súčasne.

Z pohľadu Bertrandovho modelu sa firmy prvotne nezaujímajú o výstupný objem produkcie a jeho následný predaj bez ohľadu na cenu. Namiesto toho volia predajnú cenu, za ktorú výrobky budú predávať, a potom vyrobia požadované množstvo výrobkov. Vychádza sa z predpokladu, že akýkoľvek racionálny spotrebiteľ sa predovšetkým zaoberá cenou pri dokonale substitučných produktoch. Z tohto dôvodu je v tomto modeli dôležitá premenná cena. Ak sú ceny obidvoch firiem rovnaké, trh sa rovnomerne rozdelí medzi tieto firmy. Ak jedna firma účtuje nižšiu cenu ako jej konkurent, potom bude dodávať na celý trh svoje výrobky. Na druhej strane, akonáhle konkurent podhodnotí cenu druhej firmy, táto firma nebude schopná uzatvárať transakcie a nebude dosahovať zisk. Tento mechanizmus je vždy motiváciou, aby firma podhodnocovala cenu svojho konkurenta a tým ovládla trh.

Cena bude preto neustále klesať až k bodu, kde firma už nebude môcť zvýšiť svoj zisk znížením ceny, čo nastane vtedy, keď sa marginálne náklady MC rovnajú cene P . Ak sa firma rozhodla znížiť cenu pod marginálne náklady MC , dosiahla by len stratu. Ak sa spoločnosť rozhodla zvýšiť cenu nad MC a jej konkurent predá výrobky za cenu $P = MC$, firma nebude môcť nič predat' a tým nedosiahne žiadny zisk. Z toho vyplýva, že situácia, kedy obe firmy predávajú výrobky za cenu $P = MC$, je Nashova rovnováha, pretože stratégia oboch firiem je najlepšou reakciou na jeden druhého. (Bertrand, 1883, Nicholson & Snyder, 2010)¹⁰



Obrázok 2: Nashova rovnováha v Bertrandovom modeli

Zdroj: Nicholson, W., & Snyder, C. M. (2010). Intermediate microeconomics and its application. Mason, OH: South-Western/Cengage Learning.

¹⁰ NICHOLSON, W. - SNYDER, C. M. 2010. *Intermediate microeconomics and its application*. Mason, OH: South-Western/Cengage Learning.

2 Cieľ práce

Cieľom tejto práce je analýza aplikácie rôznych typov opakovaných hier s poukázaním na možnosti ich riešenia. V práci sme si zvolili hlavný a parciálne ciele.

Hlavným cieľom práce je konkrétne riešenie príkladov pre konečné a nekonečné opakované hry, o ktorých môžeme hovoriť že ide o hru typu Väzňova dilemma. Hlavný cieľ záverečnej práce bude naplnený prostredníctvom splnenia parciálnych cieľov.

Po zoznámení sa so súčasným stavom problematiky, ktorému sa venujeme v prvej kapitole, môžeme pristúpiť k samotným riešeniam hier, ktorým je venovaná tretia a štvrtá kapitola. V tretej kapitole sú definované niektoré základné pojmy, metodika a postupy pri riešení opakovaných hier. Ďalej je tu spomenuté programové prostredia Gambit a MatLab, ktoré budeme využívať na riešenie opakovaných hier.

Štvrtá kapitola sa venuje výsledkom, ktoré pre konečné opakované hry boli zapísané pomocou vektorového zápisu a zobrazené aj prostredníctvom rozhodovacích stromov, kde využijeme spätnú indukciu. Pre nekonečné opakované hry budú uvedené rôzne stratégie, z ktorých si hráči môžu vybrať. Tieto stratégie budú preklopené do programovacieho jazyka v MatLab R2017a. Zároveň sa bude skúmať aj vplyv kôl na celkové výsledky, ktoré nám algoritmus vráti.

3 Metodika práce a metódy skúmania

S dôrazom na zrozumiteľnosť v nasledovnej časti uvedieme základné prvky, ktoré sa v teórii hier používajú. Podľa [9] možno základné pojmy definovať nasledovne:

- hráči – účastníci rozhodovacej situácie (jedinci, podniky, politické strany);
- hra – konfliktná situácia medzi účastníkmi (hráčmi) rozhodovacej situácie;
- stratégia – konkrétna alternatíva, ktorú môže hráč zvoliť;
- priestor možných stratégií – množina všetkých dostupných stratégií;
- optimálna stratégia – alternatíva, ktorá je pre hráča najvýhodnejšia;
- platba hráča – výsledok hry v závislosti od zvolených alternatív;
- inteligentný hráč – hráč, ktorý má dokonalé informácie a maximalizuje svoju platbu.

3.1 Opakované hry

Jednokolová hra je hra, ktorú hráči hrajú iba jeden raz. V reálnom svete sa však väčšina hier hrá v širšom kontexte. Akcie danej situácie môžu ovplyvniť nie len súčasnú situáciu, ale môžu zmeniť aj správanie hráčov v budúcich rozhodovaniach. Keď sa hráč rozhoduje v danej situácii, berie do úvahy aj dôsledky svojich činov v súčasnosti, ako aj budúce možnosti. Napríklad firmy, ktoré si navzájom konkurujú, sa stretávajú na trhu neustále. To znamená, že si konkurujú viackrát, musia neustále meniť ceny výrobkov a veľkosť produkcie. Čerpacie stanice sa dennodenne rozhodujú, aké predajné ceny na pohonné hmoty môžu použiť. Supermarkety sa rozhodujú nie len o cenách tovarov, ale tak isto aj o tom, čo budú predávať. Toto môže viesť k veľkým počtom rozhodovaní sa, ktoré sa môžu zdať ako iracionálne. Môžeme teda predpokladať, že dlhodobé vzťahy, môžu zmeniť správanie hráčov. Inak sa hráči správajú v hre, ktorá sa hrá iba jeden raz. Inak sa správajú v hrách, ktoré sa opakujú, kde protihráči poznajú ich predchádzajúce správanie.

Opakovaná hra sa nazýva aj ako iteračná hra. Opakovaná hra je hraná opakovane v priebehu jednotlivých časových obdobiach (*obdobie 1, obdobie 2, obdobie 3, , T*) s rovnakými hráčmi. Počet období *T* môže byť akékoľvek konečné kladné číslo. Taktiež počet období *T* môže byť aj nekonečno, čo predstavuje situáciu, v ktorej hráči v priebehu času neustále komunikujú.

Podľa autorov [4] uvažujme o nasledovných definíciách a vzťahoch (3.1.1 – 3.1.6). Máme hru G s počtom N hráčov. Hra G je jednokolová hra a hrá sa práve raz. Uvažujme o opakovaní hry G . Na rozdiel od jednokolovej hry budeme voľbu stratégie jednotlivých hráčov označovať pojmom **akcia**. Termínom **stratégia** budeme označovať celú postupnosť zvolených akcií v rámci celej opakovanej hry. Každý hráč $i = 1, 2, \dots, N$ má konečný neprázdny priestor akcií, ktorý budeme označovať A_i . Keďže hra G je hraná opakovane vo viacerých kolách, potom súbor všetkých jednokolových hier G , je teda tiež hrou, ktorú nazývame opakovaná hra. Opakovanú hru budeme označovať G^* . Hra môže byť hraná pre rôzne časové okamžiky ($t = 0, 1, 2, \dots, T$). Pokiaľ je čas:

- $T < \infty$ - hovoríme o konečne opakovanej hre;
- $T = \infty$ - hovoríme o nekonečne opakovanej hre.

V opakovanej hre vychádzame z nasledujúcich predpokladov:

- každý hráč má vo všetkých svojich jednotlivých kolách hry rovnaký priestor akcií A_i , a teda platí $A_i^t = A_i^{t+1}$;
- zisky (výplaty) hráčov vo všetkých kolách sú rovnaké, v niektorých hrách môžu byť však diskontované;
- zisky (výplaty) hráča závisia iba od profile akcií súčasnej hry bez ohľadu na to, ktoré kolo v poradí sa hrá;
- hráči sa rozhodujú a uskutočňujú svoje akcie pre konkrétnu hru súčasne;
- každý z hráčov pozná akcie, ktoré urobil jeho protihráč v predchádzajúcich kolách.

Z prvých troch predpokladov je jasné, že prostredie pre opakovanú hru je stacionárne, nemení sa. Matica ziskov má pre každé kolo rovnaký rozmer a obsahuje rovnaké hodnoty. Z ďalších dvoch predpokladov vyplýva, že jednotlivých kolách je voľba stratégie jedného hráča podmienená voľbou stratégie protihráča z minulých kôl.

Nech teda $a_i^t \in A_i$ je akcia hry, ktorú zvolí hráč i v období t . Potom vektor $\mathbf{a}^t = (a_1^t, a_2^t, a_3^t, \dots, a_n^t)$ je profil akcií, ktoré sú volené v čase t . Priestor profilov akcií je karteziánsky súčin¹¹ priestorov akcií všetkých hráčov A_i a budeme ho označovať A .

Funkcia výplat pre hráča i v iteratívnej hre je definovaná ako:

$$u_i(a) = u_i(a^1, a^2, a^3, \dots, a^t) \quad (3.1.1)$$

Platba hráčov v konečnej opakovanej hre je súčet výplat v rámci všetkých etáp. Pre nekonečnú opakovanú hru budeme brať výplatu vyčíslovať na úrovni priemeru výplat v rámci všetkých etáp, pretože suma v tomto prípade môže byť nekonečná.

Voľba novej stratégie v súčasnej hre je podmienená voľbou akcií predchádzajúcich hier. Tuto podmienenosť vyjadríme pomocou **histórie**, ktorá predstavuje všetky predchádzajúce realizované profily akcií. História v období t je definovaná ako:

$$h^t = (a^0, a^1, a^2, \dots, a^{t-1}) \quad (3.1.2)$$

pre $t = 1, 2, 3, \dots, t - 1$

Inak povedané, história h^t v čase t predstavuje, aké stratégie (kombinácie individuálnych akcií v jednokolovej hre) boli zvolené vo všetkých predchádzajúcich kolách. Pre vysvetlenie pojmu história, ešte môžeme dodať:

- história h^0 je prázdna množina;
- história h^t obsahuje taktiež informácie o históriách $h^{t-1}, h^{t-2}, h^{t-3}, \dots, h^0$;
- história h^T sa označuje za konečnú históriu v čase t , pričom v nekonečne opakovanej hre má konečná história nekonečnú dĺžku ($T = \infty$).

Ako príklad uveďme hru „Kameň, papier, nožnice“. Predpokladajme, že túto hru hrajú dvaja hráči. Hráč 1 v prvom kole zvolil nožnice, v druhom kole papier. Hráč 2

¹¹ Karteziánsky súčin množiny A a množiny B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) , kde prvky a sú prvky z množiny A , a prvky b sú prvky z množiny B . Karteziánsky súčin množín A a B sa bežne označuje znakom $A \times B$. Formálne sa karteziánsky súčin definuje vzťahom $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

v prvom kole zvolil kameň, v druhom kole zvolil nožnice. Hra pokračuje tretím kolom. História h^2 preto bude mať nasledovné vyjadrenie:

$$h^2 = \{(nožnice, kameň), (papier, papier)\}$$

Ďalej definujeme priestor histórie H^t , t.j. množina všetkých možných histórií v opakovanej hre. Priestor histórie v období t je určený ako karteziánsky súčin priestor akcií A pre jednotlivé kolá opakovanej hry.

$$H^t = (A)^t = A^1 \times A^2 \times A^3 \times \dots \times A^t \quad (3.1.3)$$

kde, A je zoznam stratégií, z ktorých si hráč môže vybrať v každej iterácii.

Napríklad v hre väžňova dilemma je priestor histórií v prvom kole ($t = 0$) nasledovný:

$$H^1 = \{(spolupráca, spolupráca), (spolupráca, zrada), (zrada, spolupráca), (zrada, zrada)\}$$

V druhom kole ($t = 1$) bude priestor histórií H^2 , čo predstavuje $A^1 \times A^2 = 4 \times 4 = 16$ možných histórií h^2 .

$$\begin{aligned} H^2 = \{ & (spolupráca, spolupráca), (spolupráca, spolupráca); (spolupráca, spolupráca), \\ & (spolupráca, zrada); (spolupráca, spolupráca), (zrada, spolupráca); \\ & (spolupráca, spolupráca), (zrada, zrada); (spolupráca, zrada), (spolupráca, spolupráca); \\ & (spolupráca, zrada), (spolupráca, zrada); (spolupráca, zrada), (zrada, spolupráca); \\ & (spolupráca, zrada), (zrada, zrada); (zrada, spolupráca), (spolupráca, spolupráca); \\ & (zrada, spolupráca), (spolupráca, zrada); (zrada, spolupráca), (zrada, spolupráca); \\ & (zrada, spolupráca), (zrada, zrada); (zrada, zrada), (spolupráca, spolupráca); \\ & (zrada, zrada), (spolupráca, zrada); (zrada, zrada), (zrada, spolupráca); \\ & (zrada, zrada), (zrada, zrada)\}. \end{aligned}$$

Ďalej sa budeme zaoberať stratégiami hráčov v opakovanej hre. Priestor stratégií S_i je množina všetkých stratégií s_i , pre ktoré sa môže rozhodnúť hráč i v opakovanej hre. Čisté stratégie pre hráča i v opakovanej hre môžeme vyjadriť pomocou postupnosti funkcií:

$$s_i(h^t): T \rightarrow A_i \quad (3.1.4)$$

Funkcia $s_i(h^t)$ priradzuje akciu $a_i^t \in A_i$ pre hráča i s históriou $h^t \in H^t$. Hráč vyhodnotí výsledok ukončenej hry vrátane zvolených stratégií ostatných hráčov v období $t-1$ a na základe týchto informácií zvolí novú akciu pre budúce obdobie t . Prirodzene, v začínajúcom období (teda v prvom kole hry), hráč nemá žiadne informácie o predchádzajúcich stratégiách ostatných hráčov, pretože história akcií protihráčov v začínajúcom období je prázdna. Profil stratégií, pre ktoré sa hráči rozhodli, je uvedený vo vektore s^t pre obdobie t :

$$s^t = (s_1(h^1), s_2(h^2), s_3(h^3), \dots, s_n(h^t)) \quad (3.1.5)$$

Poznámka: poznamenajme, že dolným indexom označujeme hráča a horným indexom poradie hry.

Stratégie hráča i v opakovanej hre môžeme vyjadriť ako $(T+1)$ -zložkový vektor:

$$s_i = (s_i(h^1), s_i(h^2), s_i(h^3), \dots, s_i(h^T)) \quad (3.1.6)$$

Analyzujeme správanie sa hráčov počas hrania opakovanej hry. Na začiatku hry v počiatočnom nultom období neexistuje žiadna história, teda nultá história je prázdna množina, t. j. $h^0 = \emptyset$. Každý hráč si zvolí svoju akciu pre počiatočné nulté kolo a_i^0 . Po uskutočnení počiatočného nultého kola sa vytvorí história pre prvé obdobie $t = 1$, ktorú zapisujeme $h^1 = (a^0)$. Všetkým hráčom sú tieto informácie poskytnuté, a preto volia svoje stratégie pre ďalšie kolo $s_i(h^1)$. Po odohraní ďalšieho kola je história opäť aktualizovaná, t.j. zlúčením profilu akcií prvého kola a histórie, ktorá bola platná pre prvé kolo, vznikne história h^2 . Táto história je poskytnutá všetkým hráčom, aby mohli zvoliť svoje ďalšie stratégie na základe predchádzajúcom správaní protihráčov. Hra takýmto spôsobom pokračuje aj pre ďalšie kolá hry.

3.2 Reprezentácia hier

Rôzne typy hier možno matematicky formalizovať. Každá hra obsahuje súbor hráčov, ktorí hru hrajú, súbor stratégií, ktoré si môžu hráči zvoliť, a z ohodnotenia ťahov pre každú kombináciu stratégií. Hra môže byť reprezentovaná a vyjadrená v nasledovných formách:

- normálna (strategická) forma;
- rozvinutá forma;
- forma charakteristickej funkcie;
- forma rozdeľujúcej funkcie.

V nekooperatívnych hrách, kde hráči nemôžu medzi sebou navzájom spolupracovať, sa využíva rozvinutá alebo normálna forma reprezentácie hry. Kooperatívne hry sú často reprezentované charakteristickou funkciou.

3.2.1 Normálna forma hry

Strategická forma, ktorá sa taktiež nazýva aj ako normálna forma, je základným typom hry v nekooperatívnej teórii hier. Hra v strategickej forme uvádza stratégie každého hráča a výsledky, ktoré je možné dosiahnuť každou možnou kombináciou stratégií. Výsledok hry je reprezentovaný samostatným prínosom pre každého hráča, ktorý sa označuje aj ako užitočnosť. Užitočnosť vyjadruje, ako veľmi dosiahnuté výsledky uspokojia hráča.

Definícia 1:

„Hra N -hráčov je v tvare $G = (S_1, S_2, \dots, S_N; u_1, u_2, \dots, u_N)$, kde pre každé $i \in N = \{1, 2, \dots, N\}$, S_i je súbor všetkých stratégií, ktoré sú dostupné pre hráča i , a $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ je Neumann-Morgensternova funkcia užitočnosti i -teho hráča.“ (Yildiz, 2012)

Poznamenajme, že užitočnosť hráča nezávisí iba od jeho zvolenej stratégie, ale aj od stratégií, ktoré zvolili jeho protihráči. Okrem toho, u_i je Neumann-Morgestenova funkcia užitočnosti, kde hráč i sa snaží maximalizovať očakávanú hodnotu užitočnosti u_i (očakávané hodnoty sú vypočítané vzhľadom na osobné preferencie hráča). Môžeme teda tvrdiť, že hráč sa správa racionálne, ak sa snaží maximalizovať očakávanú hodnotu u_i .

Predpokladáme, že počet hráčov je $N = \{1, 2, \dots, N\}$, potom súbor stratégií dostupných pre každého hráča i je S_i a každý hráč i sa snaží maximalizovať svoju očakávanú hodnotu užitočnosti na základe svojich preferencií.

V prípade, ak počet hráčov $N = \{1, 2\}$, môžeme vyjadriť hru v normálnej forme pomocou bimaticy¹²:

		2	
		<i>a</i>	<i>b</i>
1	<i>A</i>	0, 2	1, 1
	<i>B</i>	4, 1	3, 2

Obrázok 3: Bimatica výplat

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

V tomto prípade hráč 1 má dve stratégie, „A“ alebo „B“, hráč 2 má stratégie „a“ a „b“. V každom časti bimaticy, prvá hodnota predstavuje výplatu pre hráča 1, druhá hodnota výplatu pre hráča 2 (napr. $u_1(A, a) = 0$, $u_2(A, a) = 2$).

Existuje niekoľko pravidiel, ktoré môžu byť použité na vytvorenie tzv. „správnej“ hry typu väznova dilemma. V nasledujúcej matici výplat, sme premenovali odmeny každého hráča, s cieľom určiť podmienky potrebné pre navrhnutie hry väznova dilemma. V tradičnej hre väznova dilemma máme podmienku¹³:

$$A > B > C > D \text{ (v absolútnom vyjadrení)} \quad (3.2.1)$$

Tabuľka 1: Podmienky tvorby matice typu Väznova dilemma

		Hráč 2	
Hráč 1		Spolupráca	Zrada
	Spolupráca	B, B	D, A
	Zrada	A, D	C, C

¹² Zlúčenie dvoch matíc A a B^T.

¹³ Game Theory II: Prisoner's Dilemma (<http://policonomics.com/lp-game-theory2-prisoners-dilemma>)

3.2.2 Rozvinutá forma hry

Na získanie riešenia hry môžeme použiť aj rozsiahlejšiu formu hry, ktorá sa obvykle nazýva strom hry. Strom hry je podrobnejší ako strategická forma hry. Pri strome hry ide o kompletný opis toho, ako sa hra hrá v priebehu času. Strom hry zahŕňa poradie, v ktorom hráči vykonávajú rozhodnutia, informácie o predchádzajúcich ťahoch protihráčov, ktoré majú hráči v čase, keď sa rozhodujú a čas, za ktorý je hra vyriešená. Každý uzol (vrchol) predstavuje bod, v ktorom sa hráč rozhoduje. Hráči sú zvyčajne označení číslom pri každom uzle. Čiary, ktoré smerujú od uzla smerom nadol, predstavujú možné stratégie, ktoré si daný hráč *i* môže zvoliť. Výplaty (odmeny) hráčov sú reprezentované hodnotou na konci posledných čiar.

Definícia 2:

„Strom je množina uzlov a orientované hrany spájajúce tieto uzly tak, že:

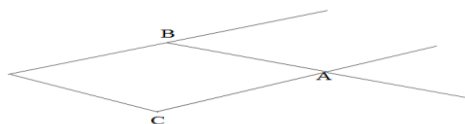
- pre každý uzol je priradená najviac jedna vstupná hrana;
 - pre ľubovoľné dva uzly je priradená jedinečná cesta, ktorá spája tieto uzly.“
- (Yildiz, 2012)

Predstavme si vetvy, ktoré vychádzajú z kmeňa stromu. Uvedieme si zopár príkladov, kde na obrázku č.4 je zobrazený strom, ale na obrázku č.5 a č.6 nie je.



Obrázok 4.

Zdroj: YILDIZ, M.: 14.12 Economic Applications of Game Theory (http://web.mit.edu/14.12/www/02F_lecture3-602.pdf, platné k 12. 04. 2017)



Obrázok 5.

Zdroj: YILDIZ, M.: 14.12 Economic Applications of Game Theory (http://web.mit.edu/14.12/www/02F_lecture3-602.pdf, platné k 12. 04. 2017)

Na obrázku č.5. nie je zobrazený strom, pretože bod A môžeme dosiahnuť dvomi alternatívnymi cestami (cez bod B a bod C).



Obrázok 6.

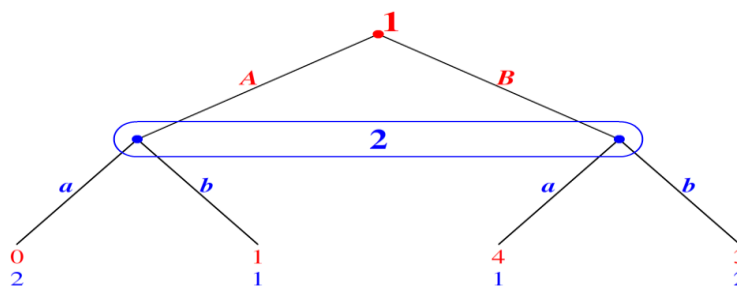
Zdroj: YILDIZ, M.: 14.12 Economic Applications of Game Theory (http://web.mit.edu/14.12/www/02F_lecture3-602.pdf, platné k 12. 04. 2017)

Na obrázku č.6 nie je zobrazený strom, pretože body A a B nie sú spojené s bodmi C a D.

Definícia 3:

„Hra sa skladá zo súboru hráčov, stromu, priradeniu každého uzla stromu (s výnimkou koncových uzlov) k hráčovi a výplat pre každého hráča na každom koncovom uzli.“
(Yildiz, 2012)

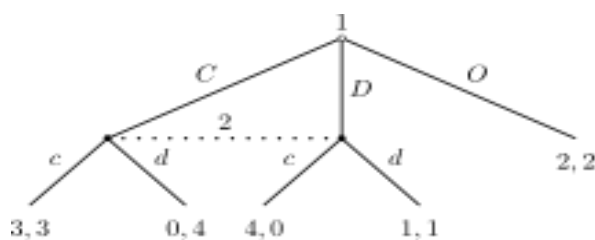
V predchádzajúcej hre znázornenej na obrázku 3 sú dvaja hráči. Danú hru prevedieme do rozvinutej formy hry, t. j. znázorníme rozhodovací strom. Začína hráč 1, ktorý má možnosti „A“ a „B“. Hráč 2 pozná ťah hráča 1 a vyberá si medzi ťahmi „a“ a „b“. Ak uvažujeme, že prvý hráč si vyberie „B“ a druhý hráč zvolí možnosť „A“, potom platba hráča 1 bude 4 a platba hráča 2 bude 1.



Obrázok 7: Rozhodovací strom

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Pomocou rozvinutej formy hry sa dajú opísať aj hry so simultánnym pohybom a hry s neúplnými informáciami. V takýchto prípadoch použijeme bodkovanú čiaru, ktorá spája uzly na znázornenie, že sa jedná o rovnaký súbor informácií (t. j. hráči nevedia, v ktorom bode sa nachádzajú) alebo je okolo takýchto uzlov nakreslená uzavretá čiara.



Obrázok 8: Hra s neúplnými informáciami

Zdroj: YILDIZ, M.: 14.12 Economic Applications of Game Theory (http://web.mit.edu/14.12/www/02F_lecture3-602.pdf, platné k 12. 04. 2017)

Hra v rozvinutej forme môžu byť analyzovaná priamo, alebo ju môžeme previesť do zodpovedajúcej strategickej formy. Na analýzu rozvinutej formy hry sa používa spätná indukcia, ktorá rieši problém od konca za účelom zistenia optimálneho sledu akcií. V teórii hier sa tento princíp využíva na výpočet rovnováh podhier.¹⁴

3.3 Dominancia

Vzhľadom k tomu, že považujeme všetkých hráčov za racionálnych, svoje stratégie vyberajú podľa lepšieho výsledku. V krajnom prípade, hráč môže mať dve stratégie A a B. Ak akákoľvek platba pri stratégii A je lepšia ako platby stratégie B (vzhľadom na všetky stratégie protihráča), potom môžeme povedať, že stratégia A dominuje stratégii B. Racionálny hráč nikdy nebude vyberať stratégiu, ktorá je dominovaná ostatnými stratégiami. Niektoré hry môžeme priamo riešiť vylúčením dominovaných stratégií.

Použijeme označenie s_{-i} na označenie zoznamu stratégií, ktoré sú hrané protihráčmi

$$s_{-1} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad (3.3.1)$$

Definícia 4:

„Stratégia s_i^* silno dominuje stratégií s_i , vtedy a len vtedy ak platí:“ (Yildiz, 2012)

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i} \quad (3.3.2)$$

¹⁴ AUMANN, R. J. 1995. *Backward induction and common knowledge of rationality*. In Games and Economic Behavior. ISSN 0899-8256, 1995, vol. 8, no. 1, p. 6 – 19 [platné k 24. 04. 2017]

To znamená, že bez ohľadu na to, akú stratégiu zvolí protihráč, zvolenie stratégie s_i^* je silno lepšie ako stratégia s_i pre hráča i . V takomto prípade, ak hráč i sa správa racionálne, nikdy nebude voliť stratégiu s_i , ktorá je silno dominovaná.

Zmiešaná stratégia σ_i dominuje stratégii s_i podobným spôsobom:

$$\begin{aligned} \sigma_i(s_{i1})u_i(s_{i1}, s_{-i}) + \sigma_i(s_{i2})u_i(s_{i2}, s_{-i}) + \dots + \sigma_i(s_{ik})u_i(s_{ik}, s_{-i}) \\ > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Racionálny hráč i nikdy nebude voliť stratégiu, ktorá je dominovaná čistou alebo zmiešanou stratégiou, a prináša mu menšiu výplatnú hodnotu.

Definícia 5:

„Stratégia s_i^* slabo dominuje stratégií s_i , vtedy a len vtedy ak platí: (Yildiz, 2012)

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i} \quad (3.3.4)$$

alebo

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad (3.3.5)$$

pre niektoré $s_{-i} \in S_{-i}$.“

To znamená, že bez ohľadu na to, akú stratégiu zvolí protihráč, zvolenie stratégie s_i^* je aspoň tak dobré ako stratégia s_i , a zároveň niektoré zložky stratégie s_i^* sú lepšie ako stratégia s_i . V prípade, že hráč sa správa racionálne, môže zvoliť stratégiu s_i len vtedy, ak sa domnieva, že sa lepšie možnosti neobjavia.

Dominované stratégie budeme ilustrovať na hre typu väzňova dilemma. Väzňova dilemma je hra v strategickej forme medzi dvomi hráčmi (väzňami). Každý z väzňov má dve stratégie: spolupracovať s políciou alebo zradiť. Označme si tieto stratégie pre prvého väzňa ako spolupracovať = C, zradiť = D. Rovnakým spôsobom môžeme označiť stratégie aj pre druhého hráča, spolupracovať = c, zradiť = d.

	c	d
C	2, 2	0, 3
D	3, 0	1, 1

Obrázok 9: Hra väzňova dilemma

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Obrázok č.9 predstavuje bimaticu platieb dvoch hráčov v hre väzňova dilemma. Hráč 1 vyberá svoje stratégie po riadkoch (C alebo D), zároveň hráč 2 vyberá svoje stratégie po stĺpcoch (c alebo d). Kombinácia stratégií (C, c) prinesie každému z hráčov výplatu vo výške 2 roky vo väzení, a kombinácia stratégií (D, d) prinesie každému z hráčov po 1 roku. Keby sa hráč 1 rozhodne spolupracovať, a zároveň hráč dva by zradil, prvý hráč by získal 0 rokov a bol by prepustený, a druhý hráč by dostal 3 roky vo väzení. Obdobná situácia by bola, keby hráč jedna zradí, a hráč dva spolupracuje.

3.4 Softvér

Realizáciu konkrétnych výpočtov budeme realizovať použitím vhodného softvéru. Na riešenie konečných opakovaných hier bude použitý softvér Gambit, a na výpočet nekonečných opakovaných hier softvér MatLab.

3.4.1 Gambit¹⁵

Gambit je open-source nástroj pre výpočty v teórii hier. Pomocou nástroja Gambit môžeme vytvárať, analyzovať a skúmať modely hier. Pomocou grafického rozhrania Gambit môžeme získať predstavu o jednoduchých hrách alebo nástrojoch príkazového riadku a Python API pre skriptovanie, ktoré podporujú výskumy a praktické aplikácie na svetovej úrovni. Gambit grafické používateľské rozhranie poskytuje "integrované vývojové prostredie", ktoré pomáha vizuálne konštruovať hry a skúmať ich hlavné strategické vlastnosti. Grafické rozhranie je do značnej miery určené na interaktívnu

¹⁵ Gambit - dostupné na internetovej stránke <http://gte.csc.liv.ac.uk/index/> (platné k 14. 03. 2017)

výstavbu a analýzu malých až stredných hier. Grafické rozhranie je ideálne pre študentov, ktorí sa učia o základoch teórie hier.

3.4.2 *MatLab*¹⁶

MatLab (z angl. “matrix laboratory”) je numerické výpočtové prostredie a štvrtá generácia programovacieho jazyka. Je postavený na základe jazyka Fortran. MATLAB umožňuje manipuláciu s maticami, vykresľovanie funkcií a dát, implementáciu algoritmov, vytváranie používateľských rozhraní a prepojenie s programami napísanými v iných jazykoch. MatLab je využívaný na rôzne inžinierske výpočty, algoritmy a modelovanie, tvorbu simulácií, analyzovanie dát, atď. Ďalšou možnosťou využitia MatLabu je práca s grafmi. Matlab umožňuje vykreslenie 2D a 3D grafov, ako aj rôzne iné povrchové grafy či farebné mapy.

Využitie MatLabu a výsledky riešenia nekonečných opakovaných hier sú opísané v časti 4.2, kde bude použitý voľne dostupný zdrojový kód, ktorý si pre naše účely upravíme.

¹⁶ MatLab, verzia R2017a - dostupné na internetovej stránke <https://uk.mathworks.com/products/matlab.html> (platné k 17. 03. 2017)

4 Výsledky práce

Ako sme už spomenuli v prvej kapitole, väčšina firiem sa nachádza na konkurenčnom trhu. V nasledujúcej časti si zobrazíme súperenie firiem Coca-Cola a Pepsi. Budeme uvažovať s touto maticou platieb (obr. 10) pričom budeme konečnú opakovanú hru. Pre rozsiahlosť príkladu, budeme uvažovať iba o troch obdobiach, v ktorých sa hra bude odohrávať.

		Pepsi	
Coca-Cola	nemeniť	4 6	6 2
	znížiť	2 3	6 3

Obrázok 10: Hra medzi spoločnosťou Coca-Cola a Pepsi (zisk je uvedený v miliónoch eur)

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit podľa údajov od autorov [22]

4.1 Konečné opakované hry

Pre konečné opakované hry je stanovený presný počet období $T < \infty$, ktorý je známy všetkým účastníkom hry. Keďže je počet období dopredu známy všetkým hráčom, v poslednom kole môže dôjsť k zmene chovania hráčov. Všeobecne bolo dokázané, že hráči zvyčajne spolupracujú až do okamihu, kedy sa hra blíži ku koncu. Potom hráči spoluprácu prerušia, lebo už im nehrozí žiadny trest za zradu od ostatných hráčov.

Ďalej budeme pokračovať s bimaticami výplat, ktoré spĺňajú predpoklad (3.2.1) a môžeme teda hovoriť o hre typu Väzňova dilema.

Viacnásobná rozhodovacia situácia je opísaná z hľadiska stratégií, ktoré sú dostupné pre rozhodovateľa, t. j. v tomto prípade pre každú spoločnosť (znížiť cenu alebo ponechať pôvodné ceny). Hodnota ziskov pre jednotlivé spoločnosti je určená ako funkcia všetkých stratégií (hodnoty ziskov sú zobrazené na obrázku č.10). Pred prvým kolom rozhodovania majú obe spoločnosti na výber z dvoch možností. Kombinácie všetkých

možností stratégií, ktoré môžu nastať, môžeme zapísať ako priestor akcií pre prvé obdobie ($t=0$) nasledovne:

$$H^1 = A^0$$

$$H^1 = \{(znížiť, znížiť), (znížiť, nemeniť), (nemeniť, znížiť), (nemeniť, nemeniť)\}$$

Predpokladajme, že v prvom období, obe firmy ponechajú pôvodné ceny výrobkov. Preto stratégie jednotlivých hráčov zapíšeme nasledovne:

$$s_1 = (nemeniť)$$

$$s_2 = (nemeniť)$$

Funkcia platieb pre jednotlivé spoločnosti po prvom kole je nasledovná:

$$u_1(a) = u_1(4)$$

$$u_2(a) = u_2(4)$$

Po prvom kole je teda jasné, ktoré stratégie použili jednotlivé spoločnosti. Preto v druhom kole môžeme zapísať históriu stratégií. Priestor akcií H^2 pre druhé kolo bude pozostávať zo 16 možných histórií, ktoré môžu nastať. Všetky možnosti, ktoré môžu nastať v druhom kole sú zobrazené nižšie:

$$H^2 = A^0 \times A^1$$

$$\begin{aligned} H^2 = \{ & (znížiť, znížiť), (znížiť, znížiť); (znížiť, znížiť), (znížiť, nemeniť); \\ & (znížiť, znížiť), (nemeniť, znížiť); (znížiť, znížiť), (nemeniť, nemeniť); \\ & (znížiť, nemeniť), (znížiť, znížiť); (znížiť, nemeniť), (znížiť, nemeniť); \\ & (znížiť, nemeniť), (nemeniť, znížiť); (znížiť, nemeniť), (nemeniť, nemeniť); \\ & (nemeniť, znížiť), (znížiť, znížiť); (nemeniť, znížiť), (znížiť, nemeniť); \\ & (nemeniť, znížiť), (nemeniť, znížiť); (nemeniť, znížiť), (nemeniť, nemeniť); \\ & (nemeniť, nemeniť), (znížiť, znížiť); (nemeniť, nemeniť), (znížiť, nemeniť); \\ & (nemeniť, nemeniť), (nemeniť, znížiť); (nemeniť, nemeniť), (nemeniť, nemeniť)\}. \end{aligned}$$

Keďže vieme, že spoločnosti v prvom kole zvolili stratégiu nemeniť svoje ceny výrobkov, história h^1 bude nasledovná:

$$h^1 = (nemeniť, nemeniť)$$

V ďalšom kole majú obe spoločnosti k dispozícii rovnaké stratégie ako v prvom kole. Avšak v tomto kole už poznajú správanie svojho súpera z predchádzajúceho kola. V prípade, že by spoločnosť Coca-Cola sa rozhodla znížiť ceny svojich výrobkov, lebo očakáva, že spoločnosť Pepsi nebude meniť svoju stratégiu z prvého kola, jej zisk bude 6 miliónov eur. Funkcia stratégií bude potom nasledovná:

$$\begin{aligned}s_1 &= ((nemeniť), (znížiť)) \\ s_2 &= ((nemeniť), (nemeniť))\end{aligned}$$

Platba hráčov po druhom kole je nasledovná:

$$\begin{aligned}u_1(a) &= u_1(4, 6) \\ u_2(a) &= u_2(4, 2)\end{aligned}$$

Hra teraz pokračuje ďalším kolom. V treťom kole bude priestor akcií H^3 pozostávať zo 64 možných prípadov.

$$H^3 = A^0 \times A^1 \times A^2$$

Pre rozsiahlosť zápisu je tento zápis priložený v prílohe 1.

Po druhom kole vieme, že spoločnosť Coca-Cola sa rozhodla svoje ceny výrobkov znížiť. Na toho rozhodnutie spoločnosti Coca-Cola bude reagovať druhá spoločnosť tiež znížením cien svojich výrobkov a tým jej opäť konkurovať. História stratégií po druhom kole je nasledovná:

$$h^2 = ((nemeniť, nemeniť), (znížiť, nemeniť))$$

Keďže spoločnosť Pepsi nechce stratiť svojich zákazníkov, rozhodne sa znížiť tiež ceny svojich výrobkov. Spoločnosť Coca-Cola získala po minulom rozhodnutí znížiť svoje ceny zisk väčší o 2 milióny eur. Preto toto rozhodnutie nebude meniť a v ďalšom kole bude voľiť opäť stratégiu nízkych cien. Stratégie po treťom kole sú nasledovné:

$$\begin{aligned}s_1 &= ((nemeniť), (znížiť), (znížiť)) \\ s_2 &= ((nemeniť), (nemeniť), (znížiť))\end{aligned}$$

Rozhodnutie spoločnosti Pepsi znížiť ceny výrokov zvýši svoj zisk, a zároveň zníži zisk konkurenčnej spoločnosti Coca-Cola. Hra po treťom kole končí a história po poslednom kole je nasledovná:

$$h^3 = ((nemeniť, nemeniť), (znížiť, nemeniť), (znížiť, znížiť))$$

V konečných opakovaných hrách sa hodnota platieb získaná za všetky kolá vyjadruje ako ich súčet.

$$u_1(a) = u_1(4, 6, 3)$$

$$u_2(a) = u_2(4, 2, 3)$$

Spoločnosť Coca-Cola po troch kolách získa 13 miliónov eur, a spoločnosť Pepsi iba 9 miliónov eur.

V nasledujúcej časti si zobrazíme tú istú situáciu, ale prostredníctvom normálnej a rozvinutej formy hry. Normálna forma hra sa zobrazuje pomocou matice platieb. Matica platieb pre prvé kolo je nasledovná:

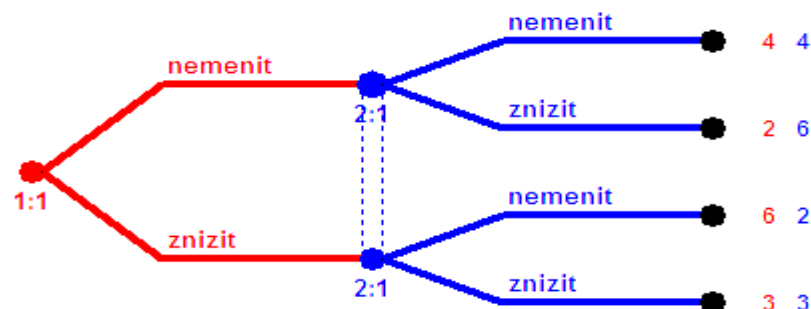
	1	2
1	4 4	2 6
2	6 2	3 3

Obrázok 11: Matica platieb pre 1. kolo hry

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Na obrázku č. 11 môžeme vidieť hodnoty platieb, aké môžu získať jednotlivé spoločnosti, keď sa rozhodnú pre stratégiu 1 – nemeniť ceny, alebo pre stratégiu 2 – znížiť ceny.

Rozvinutá forma hry sa zobrazuje prostredníctvom rozhodovacieho stromu, kde sú ukázané jednotlivé možnosti, ako sa hra môže hrať.

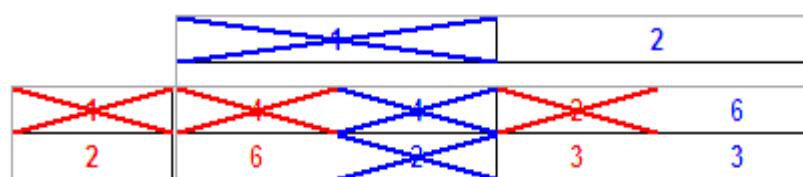


Obrázok 12: Rozhodovací strom pre 1. kolo hry

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Na obrázku č.12 sú zobrazené stratégie pre prvého hráča, modrou farbou sú zobrazené stratégie pre druhého hráča. Bodkované čiary predstavujú neinformovanosť hry. To znamená, že druhý hráč nevie, ako sa rozhodol jeho protihráč.

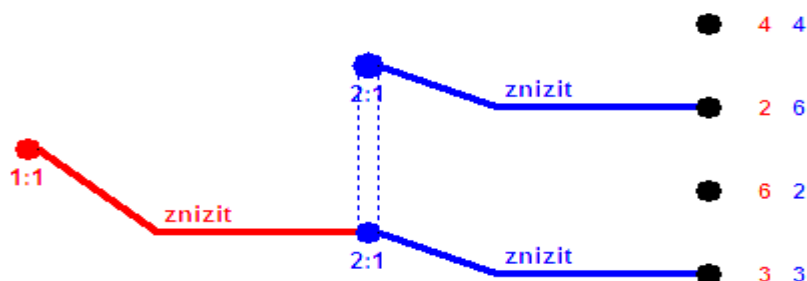
Pokiaľ by sa hra hrala iba pre jedno kolo, Nashova rovnováha by bola v bode znížiť-znížiť. Pre normálnu formu hry je Nashova rovnováha zobrazená na obrázku č.11 získaná pomocou použitia dominantných stratégií.



Obrázok 13: Použitie dominancie na získanie Nashovej rovnováhy pre 1. kolo hry

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Pre rozvinutú formu hry získame Nashovu rovnováhu už hneď po prvej eliminácii dominantných stratégií.



Obrázok 14: Nashovej rovnováhy prostredníctvom rozhodovacieho stromu

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Predstavme si, že táto hra sa bude hrať v dvoch kolách. Ako sme uviedli predchádzajúcim príklade, priestor akcií H^2 pozostáva zo 16 možností hry.

	11*1	11*2	12*1	12*2	2*11	2*12	2*21	2*22
111**	4 0	4 0	2 0	2 0	2 0	2 0	0 6	0 6
112**	4 0	4 0	2 0	2 0	3 0	3 0	1 4	1 4
121**	5 0	5 0	3 3	3 3	2 0	2 0	0 6	0 6
122**	5 0	5 0	3 3	3 3	3 0	3 0	1 4	1 4
2**11	5 0	3 0	5 0	3 0	3 0	1 0	3 0	1 0
2**12	5 0	3 0	5 0	3 0	4 0	2 2	4 0	2 2
2**21	6 0	4 0	6 0	4 0	3 0	1 0	3 0	1 0
2**22	6 0	4 0	6 0	4 0	4 0	2 2	4 0	2 2

Obrázok 15: Výstup z programu Gambit pre dvojkolovú hru

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Zápis stratégií:

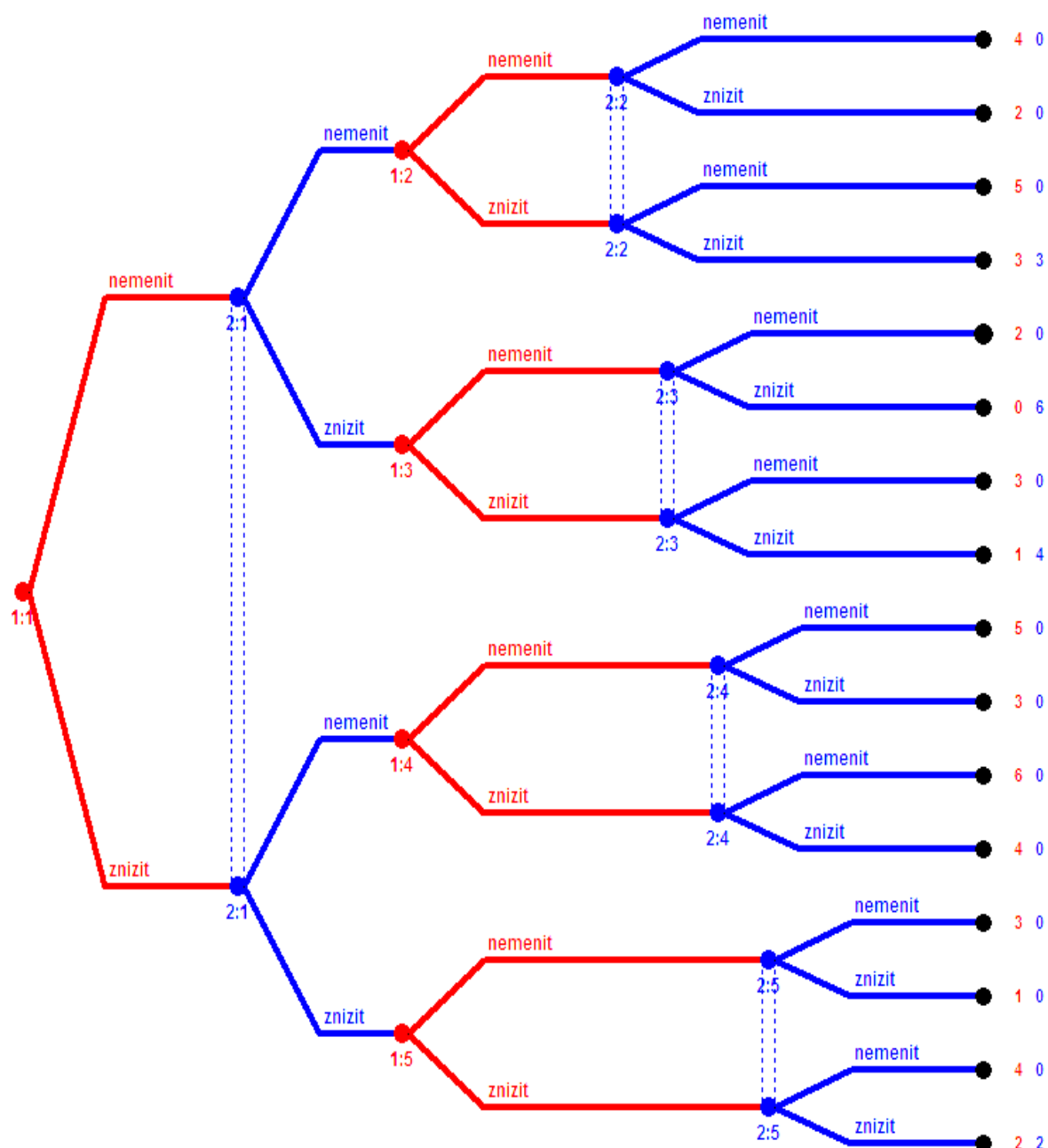
- A-BC znamená, prvý hráč volí v prvom kroku stratégiu **A** (1 – nemeniť alebo 2 – znížiť), v druhom kroku volí stratégiu **B**, ak druhý hráč zvolil stratégiu 1 v prvom kroku, inak volí stratégiu **C**, ak druhý hráč zvolil stratégiu 2.

Poznamenajme, že v dvojkolovej hre väžňova dilema, stratégia v druhom kole vychádza z histórie predchádzajúcich rozhodnutí. Predpokladajme, že hráč 2 bude spolupracovať v prvom kole, potom bude spolupracovať aj v druhom kole, ak hráč 1 tiež spolupracoval. Ak hráč 1 zradil v prvom kole, tak aj hráč 2 zradí v druhom kole.

Hru si zobrazíme v rozvinutej forme pomocou rozhodovacieho stromu, kde sú zobrazené všetky možné kombinácie stratégie, ktoré môžu v tejto dvojkolovej hre nastať. Na konci stromu sú zobrazené výsledné hodnoty platieb.

Vieme, že jednokolová hra má riešenie v bode *znížiť-znížiť*. V tomto prípade sa hra hrá na dve kolá. V poslednom kole má pre hráča stratégia znížiť hodnotu 3. Opačná stratégia nemeniť má hodnotu 4. Keďže sa zaoberáme posledným kolom v dvojkolovej hre, hráč teraz môže druhého hráča podviesť, lebo mu nehrozí žiadny trest za jeho

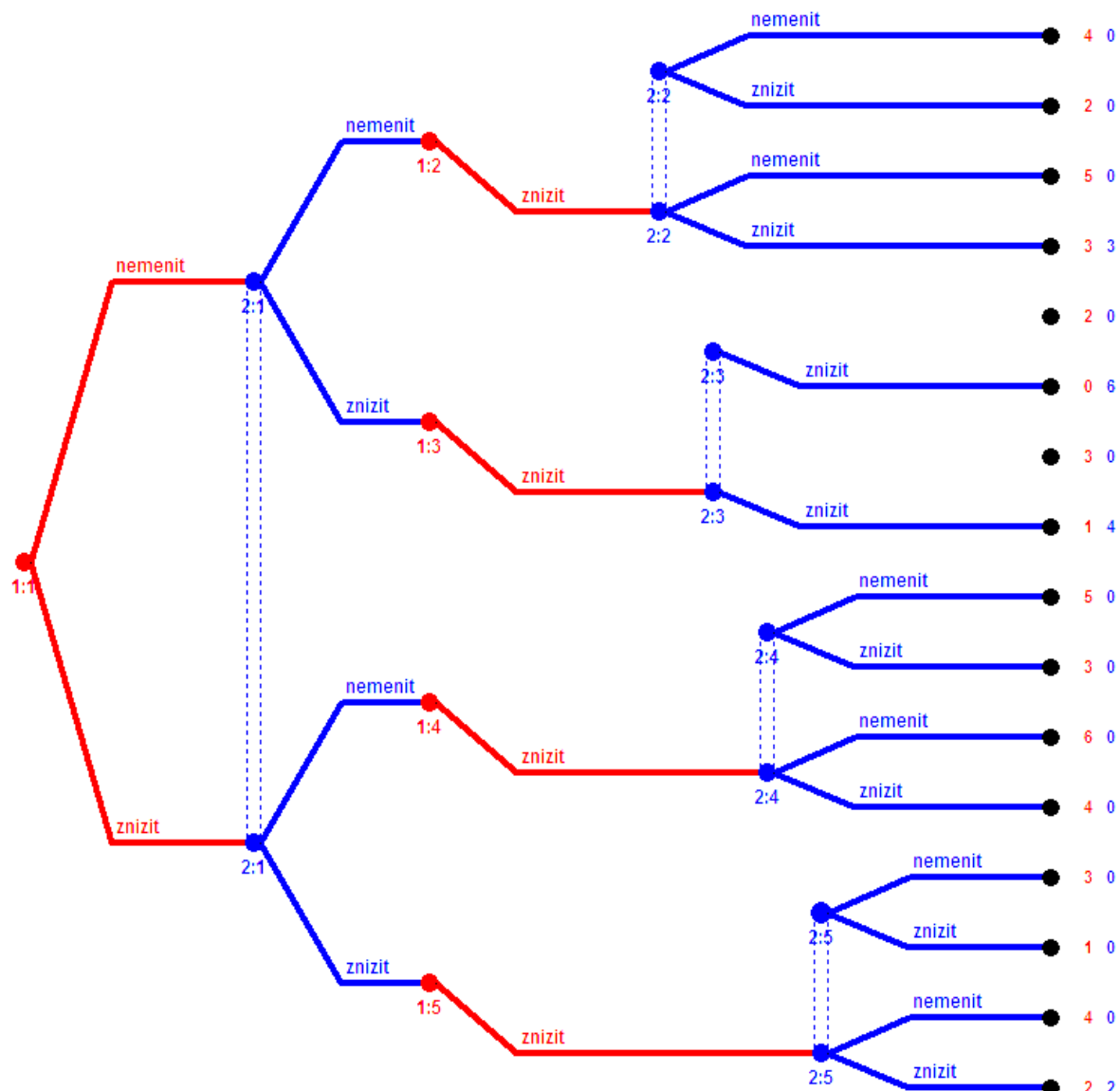
rozhodnutie. Preto zvolenie druhej stratégie je teraz výhodné. Výsledkom hry teda bude rovnaký bod ako v jednokolovej hre (podvod-podvod).



Obrázok 16: Rozhodovací strom pre dvojkolovú hru

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Pri použití dominantných stratégií, môžeme konštatovať, že prvý hráč nikdy nepoužije stratégiu „nemenit“ v druhom kole. Elimináciou tejto stratégie získame nasledovnú formu rozhodovacieho stromu:



Obrázok 17: Rozhodovací strom pre dvojkolovú hru po 1. eliminácii

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

Keď sa na rozhodovací strom po 1. eliminácii dominovaných stratégií pozrieme znova, vidíme, že, vo všetkých prípadoch pre druhého hráča, pokiaľ by volil stratégiu „*nemenit*“, hodnota platby by bola rovná nule. Preto sa druhý hráč rozhodne nevoliť túto stratégiu a v každom kole bude voliť stratégiu „*znížiť*“, ktorá mu v troch prípadoch môže priniesť kladnú hodnotu platieb. Avšak pre prvého hráča, voľbou stratégie „*znížiť*“, si príleží v každom prípade o 1 jednotku bez ohľadu na to, akú stratégiu zvolí druhý hráč. Preto sa prvý hráč rozhodne, že bude voliť iba stratégiu „*znížiť*“. Rozhodovací strom po tomto rozhodnutí vyzerá nasledovne:

4.2 Nekonečné opakované hry

V prípade nekonečného časového horizontu modelujeme konfliktnú situáciu, kde hráči nevedia, v ktorom kole sa hra skončí. V nekonečných opakovaných hrách je počet opakovaní $T = \infty$. Toto je jasný príklad toho, ako prebieha obvyklá situácia na trhu. Firmy nepočítajú s tým, že by sa mala hra v niektorom kroku ukončiť. Nakoľko v týchto hrách nie je presne stanovené posledné kolo hry, v ktorom by mohli obaja hráči zradiť svojho súpera, hráči sa snažia spolupracovať pod hrozbou, že by ich protihráč v prípade zrady potrestal. Je tak potrebné ohodnotiť výplaty hráča. Všeobecne sa predpokladá, že každý hráč chce maximalizovať vážený súčet všetkých svojich platieb. Dôležitú úlohu tu zohráva diskontný faktor δ .

Podľa [27] sa často predpokladá, že váha všetkých platieb tvorí geometrickú postupnosť: pre pevne zadané $\delta \in (0, 1)$. Pre každé obdobie t hráč i získa hodnotu platby u_i^t , potom môžeme všetky jeho platby zhrnúť ako:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i^t \quad (4.2.1)$$

Vzťah pre výpočet konečných a nekonečných diskontovaných súčtov platieb je takýto:

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \delta^t = \frac{\delta^{T_1} - \delta^{T_2+1}}{1 - \delta} \quad (4.2.2)$$

pre všetky $T_2 = \infty$.

V roku 1981 Robert Axelrod a spoločnosť RAND kontaktovali teoretikov teórie hier a poprosili ich o zostavenie rôznorodých stratégií, ktoré boli použité v turnaji založeného na hre typu väznova dilemma. Každá stratégia súťažila s každou v hre, ktorá mala 200 opakovaní. Typ opakované hry nazývame tiež turnajom.

Na skúmanie správania sa v opakovaných hrách sa využívajú turnaje. Rozlišujú sa dva typy turnajov:

- v prvom type turnaja sú použité rôzne stratégie. Hráči sú postavení proti sebe a hru hrajú systémom každý s každým. Hra má vopred určený počet kôl. Víťazom sa stáva hráč, ktorý získa najlepší počet bodov.

- v druhom type turnaja, ktorý sa označuje aj ako tzv. ekologická evolúcia, je princíp hry opačný. Pri týchto typoch turnajov začína každý z hráčov s istou počiatočnou populáciou. Po odohratí súbojov systémom každý s každým sa vylúči počet hráčov, ktorí dosiahli minimálne skóre. Vyradení hráči sú nahradení víťaznými hráčmi z druhej skupiny. V tomto type turnajov sa poukazuje na to, že využívanie zákerných stratégií môže byť nevýhodné.

Namiesto jedného rovnovážnej stratégie pre nekonečné opakované hry existuje veľký počet potenciálnych rovnovážnych stratégií. Uvedieme si iba najčastejšie používané stratégie pre hru Vážňova dilemma:

- stratégia „*vždy spolupracovať*“,
- stratégia „*vždy zraď*“,
- stratégia „*Tit-for-Tat*“ (oko za oko),
- stratégia „*Grim*“.

4.2.1 Funkcie v MatLabe

Na výpočet a simuláciu nasledovných príkladov sme použili programovacie prostredie v softvéri Matlab, v ktorom sme použili dostupný zdrojový kód na výpočet opakovanej hry Vážňova dilemma uvedený v knižnej publikácii „*Teória hier v komunikačných sieťach: kooperatívne riešenie interaktívnych scenárov sietí*“ (*Game theory in communication networks : cooperative resolution of interactive networking scenarios*).¹⁷ Tento kód sme modifikovali pre účely našej práce a vytvorili sme cyklus opakovaní, ktorý pozostával z 1000 opakovaní kôl. Celý zdrojový kód je uvedený v prílohe 2 tejto práce a pozostáva z nasledovných funkcií:

- *Funkcia r*
 - nasledovná funkcia zabezpečuje počet opakovaní hry. Dôležitým parametrom v tejto funkcii je diskontný faktor, ktorý určuje, pre koľko období sa hra bude opakovať.

¹⁷ ANTONIOU, J. – PITSILLIDES, A. 2013. *Game theory in communication networks : cooperative resolution of interactive networking scenarios* [online]. Abingdon: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013. p123 -148. ISBN 13: 978-1-4398-4810-4

- VSTUPNÉ PARAMETRE – vstupným parametrom je pravdepodobnosť $\pi = 0.99654$, že hra bude pokračovať ďalším kolom.
- VÝSTUPNÉ PARAMETRE – výstupným parametrom je počet kôl.
- *Funkcia hra*
 - funkcia hra zabezpečuje aké stratégie budú použité v priebehu hry. V tejto funkcii sú zapísané nasledovné stratégie: vždy spolupracovať, vždy zradiť, Tit-for-Tat, metóda GRIM a náhodne volené stratégie. Pre druhého hráča je v každom pozorovaní nastavená náhodná voľba stratégií.
 - VSTUPNÉ PARAMETRE – vstupnými parametrami sú hráči, ktorí sa zúčastnia hry a ich stratégie.
 - VÝSTUPNÉ PARAMETRE – výstupným parametrom je typ stratégie hry, ktorá sa bude hrať.
- *Funkcia opakovanáhra*
 - táto funkcia tiež pozostáva zo vstupných a výstupných parametrov
 - VSTUPNÉ PARAMETRE – vstupnými dátami pre nasledovnú funkciu je počet opakovaní r , stratégia prvého hráča $p1strat$, stratégia druhého hráča $p2strat$, a payoff tabuľka.
 - VÝSTUPNÉ PARAMETRE – výstupnými dátami je vektor stratégií X prvého hráča, vektor stratégií Y druhého hráča, výsledné celkové skóre prvého hráča a výsledné celkové skóre druhého hráča za všetky opakovania.
- na záver je použitý cyklus, ktorý nám zabezpečí 1000 opakovaní.

Teraz si ukážeme princípy vyššie spomenutých stratégií na jednoduchom príklade, kde matica platieb ma nasledovný tvar:

		Hrac 2	
		spolupr.	zrada
Hrac 1	spolupr.	3 3	5 0
	zrada	0 5	1 1

Obrázok 19: Payoff tabuľka pre nekonečné opakované hry

Zdroj: vlastné spracovanie v programe Gambit

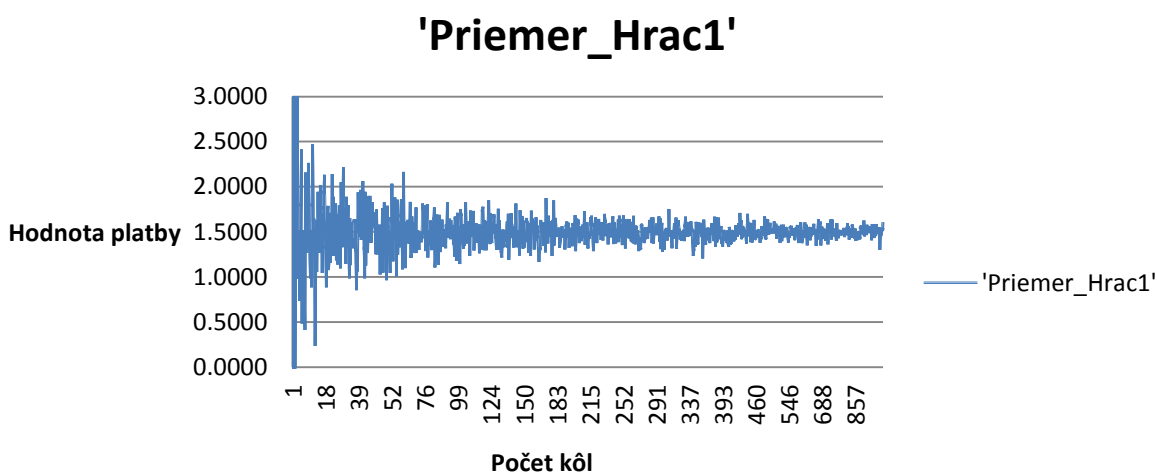
4.2.2 Stratégia „vždy spolupracovať“

Táto stratégia sa označuje aj ako „holubia stratégia“. Pri použití tejto stratégie, prvý hráč volí prvú stratégiu „spolupracovať“, bez ohľadu na to, akú stratégiu použil jeho protihráč, teda druhý hráč volí stratégiu náhodne. Prvý hráč sa bude správať nasledovne podľa vopred zvoleného vzťahu:

$$s_i(h^t) = \text{"spolupráca"} \quad (4.2.2.1)$$

pre všetky $t = 0, 1, 2, \dots, T$

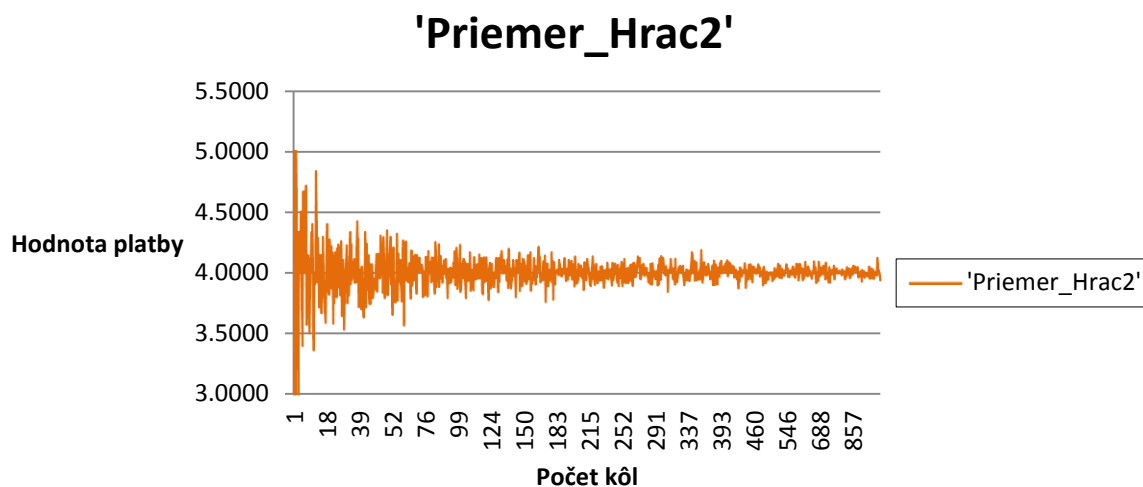
Priemerná hodnota platieb prvého hráča je zobrazená na grafe č.1:



Graf 1: Priemerné hodnoty hráča 1 v stratégii „vždy spolupracovať“

Ako môžeme z grafu vidieť, pri nižšom počte kôl, hodnoty platieb sa pohybujú v intervale $\langle 0;3 \rangle$. Pri zvyšovaní počtu opakovaní sa priemerné hodnoty pohybujú s menším rozptýlením okolo priemeru, ktorý nadobúda hodnotu 1,4934 jednotiek. Keby hráč vždy iba spolupracoval, tak by priemerne dostal skoro 1,5 jednotiek. Čo by pre neho samotného bolo celkom výhodné.

Na grafe č.2 sú zobrazené priemerné hodnoty druhého hráča, ktorý volí svoje stratégie náhodne, nezávisle od správania sa prvého hráča.



Graf 2: Priemerné hodnoty hráča 2 v stratégii „vždy spolupracovať“

Priemerné hodnoty platieb pre druhého hráča sa pohybujú okolo priemeru s hodnotou 4,0044 jednotiek. V porovnaní s prvým hráčom, druhý hráč by získal o 2,5 jednotky viac. V tomto prípade by druhý hráč nepristúpil na túto stratégiu, lebo má stále motiváciu, že pri zrade by obaja mohli získať menej.

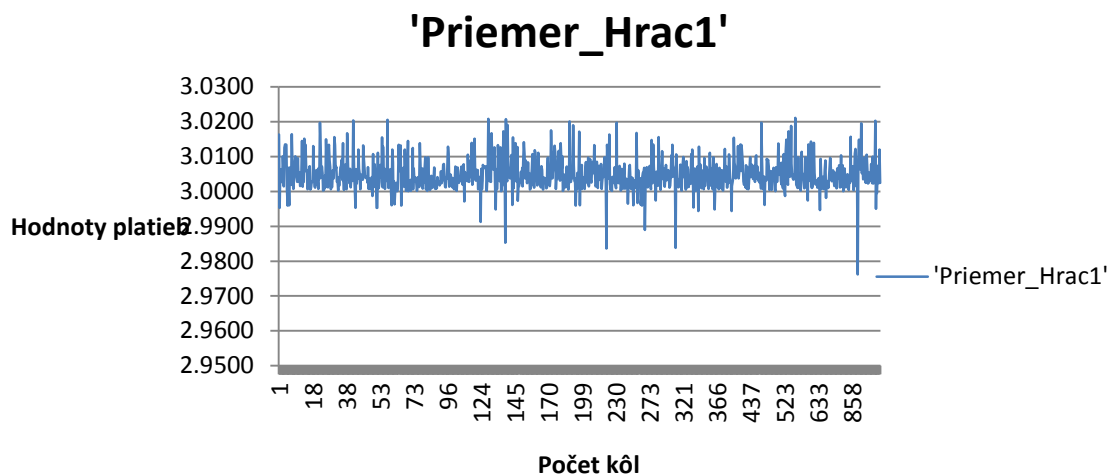
4.2.3 Stratégia „vždy zradiť“

Táto stratégia je označovaná aj ako „jastrabia stratégia“. V porovnaní od predchádzajúcej stratégie, kde prvý hráč volil vždy stratégiu spolupracovať, v tejto stratégii prvý hráč volí opačnú stratégiu, t. j. vždy zradiť, bez ohľadu na to, akú stratégiu použije jeho protihráč. Voľby stratégie prvého hráča sú vyjadrené nasledujúcim vzťahom:

$$s_i(h^t) = \text{"zradiť"} \quad (4.2.3.1)$$

pre všetky $t = 0, 1, 2, \dots, T$

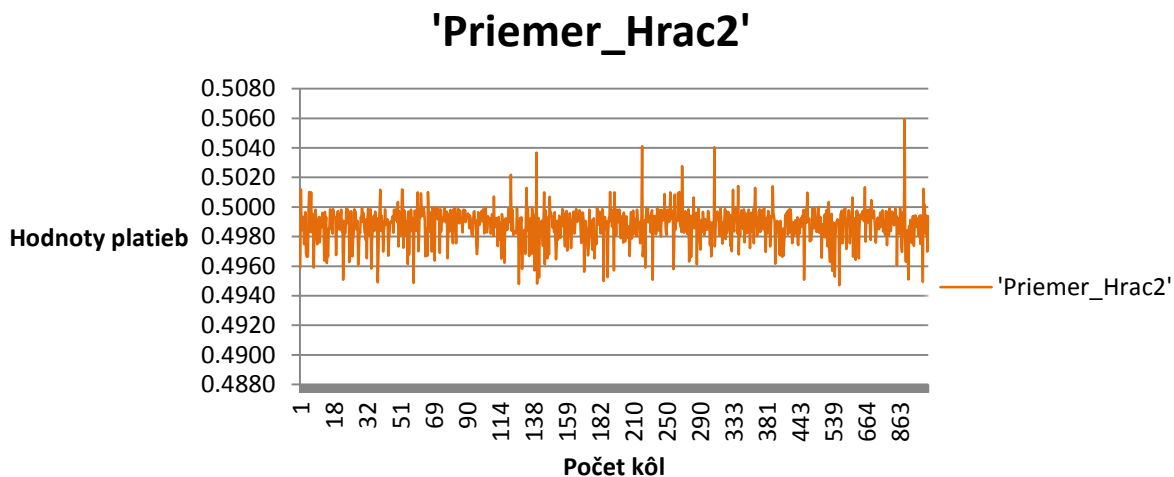
V tomto prípade priemerné hodnoty oboch z hráčov sa zmenili. Prvý hráč nadobúda vyššie priemerné hodnoty ako v predchádzajúcom príklade.



Graf 3: Priemerné hodnoty hráča 1 v stratégii „vždy zraďiť“

Priemerné hodnoty prvého hráča sa pohybujú okolo priemeru s hodnotou 3,0048 jednotiek. Oproti predchádzajúcemu príkladu sa hodnota prvého hráča zvýšila približne o 2,5 jednotiek.

Hodnota druhého hráča sa znížila na priemer 0,4988 jednotiek, čo predstavuje radikálne zníženie oproti prvému príkladu. Preto pre druhého hráča nie je prijateľné, aby hral takúto hru. Výsledky priemerných hodnôt druhého hráča sú zobrazené na grafe č. 4.



Graf 4: Priemerné hodnoty hráča 2 v stratégii „vždy zraďiť“

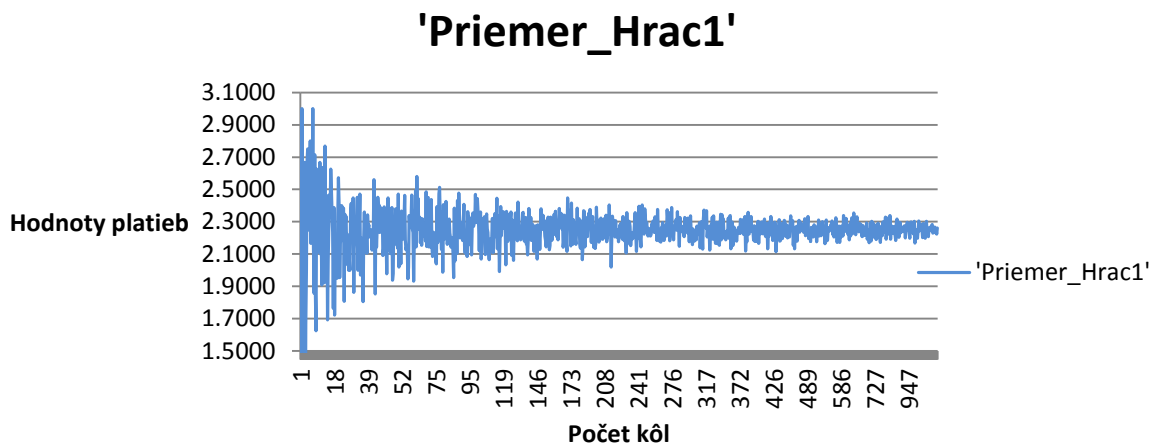
4.2.4 Stratégia „Tit-for-Tat“

Tento princíp riešenia väzňovej dilemy využíva metódu „oko za oko“. To znamená, že pokiaľ v prvom kole prvý hráč zvolil stratégiu „spolupracovať“ a druhý hráč zvolil stratégiu „zradit“, následne prvý hráč mu to vráti a v druhom kole použije stratégiu „zradit“. Takýmto rovnakým spôsobom sa bude celá hra odohrávať ďalej. Tento princíp nabáda hráča na podvádžanie, pokiaľ aj jeho protihráči podvádžali v predchádzajúcom kole, prípadne k spolupráci, ak jeho protihráči spolupracovali v predchádzajúcom kole. Voľba stratégie prvého hráča je teda daná vzťahom:

$$s_i(h^0) = \text{"spolupráca"} \quad (4.2.4.1)$$

$$s_i(h^0) = \begin{cases} \text{"spolupráca"} & \text{ak } a_j^{t-1} = \text{"spolupráca"}, j \neq i \\ \text{"zrada"} & \text{inak} \end{cases} \quad (4.2.4.2)$$

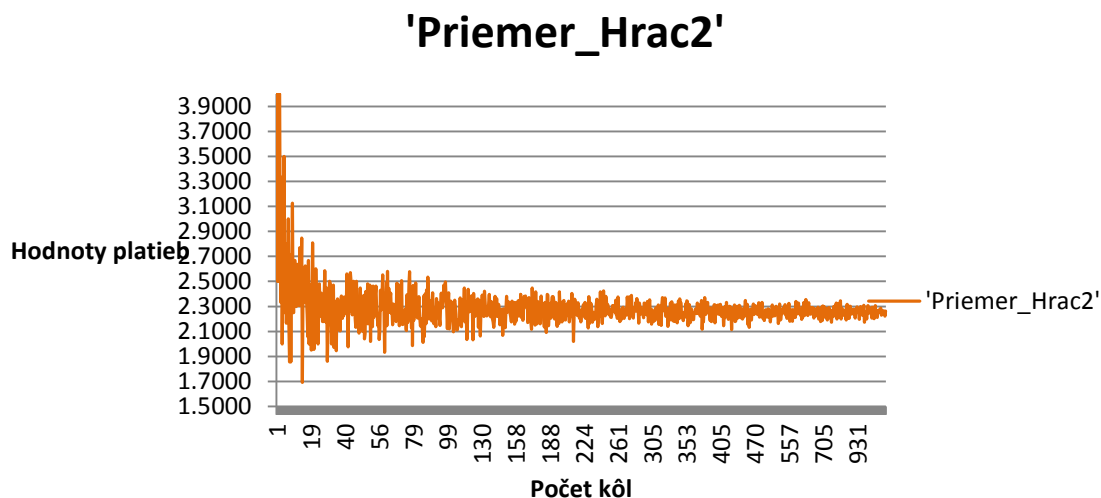
Na nasledovnom grafe č. 5 sú zobrazené získané priemerné hodnoty prvého hráča počas opakovaní hier s rôznymi počtami kôl.



Graf 5: Priemerné hodnoty hráča 1 v stratégii „Tit-for-Tat“

Rozptyl hodnôt je pri nízkom počte opakovaní v intervale $<1,7; 2,7>$. Pri vyššom počte opakovaní sa rozptyl znižuje a dosahuje hodnotu priemeru, ktorý je 2,2445 jednotiek. Druhý hráč v metóde „Tit-for-Tat“ získal približne rovnaké hodnoty, ako prvý hráč. Toto je spôsobené tým, že prvý hráč opakoval voľbu stratégie protihráča v predošlom kole. Preto priemerné hodnoty druhého hráča pri vyššom počte opakovaní sú iba o trochu väčšie

ako hodnoty prvého hráča. Priemer druhého hráča je 2,2837 jednotiek. Hodnoty druhého hráča sú zobrazené na grafe č. 6.



Graf 6: Priemerné hodnoty hráča 2 v stratégii „Tit-for-Tat“

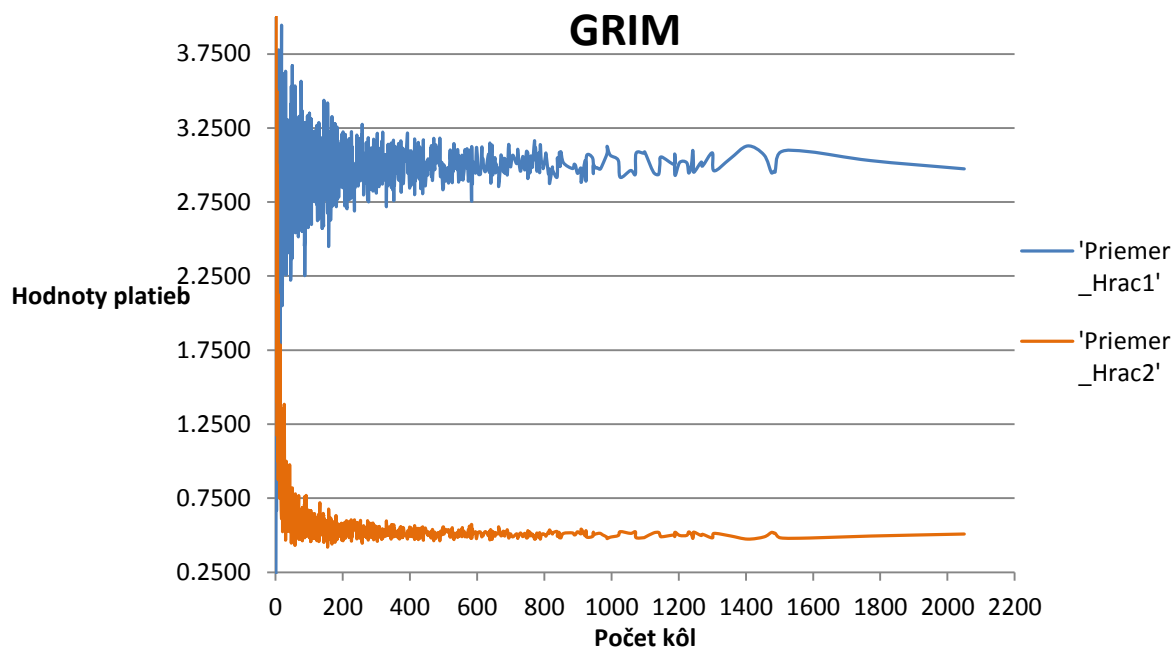
4.2.5 Stratégia „Grim“

Táto metóda je špecifická. Nabáda prvého hráča voliť stratégiu „spolupráca“ v prvom kole a ďalej spolupracovať pokiaľ jeho protihráči v predchádzajúcom kole spolupracovali. Akonáhle protihráč volí stratégiu „zrada“, od toho momentu prvý hráč až do konca hry volí iba stratégiu „zrada“. Táto metóda postihuje nie len zradu protihráča, ale aj zradu hráča samotného. Voľba stratégie prvého hráča je určená vzťahom:

$$s_i(h^0) = \text{"spolupráca"} \quad (4.2.5.1)$$

$$s_i(h^0) = \begin{cases} \text{"spolupráca"} & \text{ak } a_j^\tau = \text{"spolupráca"}, \\ & \text{pre } \tau = 0, 1, 2, \dots, \tau - 1 \\ \text{"zrada"} & \text{inak} \end{cases} \quad (4.2.5.2)$$

Na grafe č. 7 vidieť, že priemerné hodnoty prvého hráča sa pohybujú okolo priemeru 2,9580 jednotiek, pričom priemerné hodnoty pre druhého hráča sú iba okolo 0,6139 jednotiek.



Graf 7: Priemerné hodnoty hráčov v stratégii „GRIM“

Ako môžeme z grafu vidieť, pri nízkom počte kôl hry sú hodnoty výplat skoro rovnaké. Avšak po prvej zrade druhého hráča, sa prvý hráč rozhodne nespolupracovať. Čím sa opäť stratégie začne podobat' predchádzajúcej stratégii „vždy zradit'“.

4.2.6 Zhrnutie

V predchádzajúcej časti sme si zobrazili výsledky štyroch prístupov riešenia nekonečných opakovaných hier. Teraz si zhrnieme všetky výsledky, ktoré sme doteraz získali. Pridáme aj priemerné hodnoty hier, pri ktorých druhý hráč nebude voliť náhodné stratégie, ale bude sa správať rovnako ako prvý hráč. Priemerné získané hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 2: Priemerné hodnoty získané v hrách

Hráč 1		Hráč 2	
<i>Použitá metóda</i>	<i>Priemerné hodnoty</i>	<i>Použitá metóda</i>	<i>Priemerné hodnoty</i>
Vždy spolupracovať	1,4934	Náhodné stratégie	4,0044
Vždy zradiť	3,0048	Náhodné stratégie	0,4988
Tit-for-Tat	2,2445	Náhodné stratégie	2,2837
GRIM	2,9580	Náhodné stratégie	0,6139
Vždy spolupracovať	3,0000	Vždy spolupracovať	3,0000
Vždy spolupracovať	5,0000	Vždy zradiť	0,0000
Vždy zradiť	0,0000	Vždy spolupracovať	3,0000
Vždy zradiť	1,0000	Vždy zradiť	1,0000

V prípade prvého typu turnaja, bolo by pre hráča výhodné používať stratégiu “*Vždy spolupracovať*”, za predpokladu, že protihráči vyberajú stratégie náhodne. Týmto spôsobom by si hráč zabezpečil najlepšie skóre. Avšak v reálnych turnajoch každý z hráčov volí možnosť, ako vybrať stratégie. Na druhej strane, ak by sa hráči zúčastnili druhého typu turnaja, je pre nich dôležité získať čo najvyššie skóre a tým si zabezpečiť, že môžu pokračovať v hre ďalej. V tomto prípade by bolo výhodné používať stratégiu “*Vždy zradiť*”, za predpokladu, že protihráči volia stratégie náhodne. V reálnych turnajoch hráči nemajú vedomosť o tom, akú stratégiu budú používať protihráči. Existujú tiež turnaje, ktoré predpokladajú, že pri komunikácii môžu nastať chyby, napríklad nesprávne pochopenie zámeru protihráča. Pri takomto turnaji má každý hráč v každom ťahu iba istú pravdepodobnosť, že vie predchádzajúci ťah súperu. Môže sa dokonca stať, že hráč to pochopí úplne opačne, t.j protihráč spolupracoval, ale hráč si myslí, že zradil. V týchto turnajoch sa ukazujú zaujímavé výhody a nevýhody stratégií.

V druhej časti tabuľky máme priemerné hodnoty za predpokladu, že druhý hráč nevyberá stratégie náhodne, ale správa sa rovnako, ako prvý hráč. Pokiaľ by obaja hráči volili stratégiu “*Vždy spolupracovať*”, priemerná hodnota by bola rovnaká, ako platba v jednokolovej hre. Pri použití stratégie “*Tit-for-Tat*“ obomi hráčmi je rozhodujúce, akú stratégiu použijú v prvom kole. Ak by obaja použili stratégiu “*spolupracovať*”, potom by až do konca hry stále spolupracovali, čo predstavuje rovnakú situáciu ako v prípade, ak

obaja hráči použijú stratégiu “*Vždy spolupracovať*”. Ak by v prvom kole obaja hráči použijú stratégiu “*zradiť*”, do konca hry by volili iba zradu, t. j. rovnaká situácia ako v prípade, ak obaja volia stratégiu “*Vždy zradiť*”. Tretím prípadom je použitie stratégie “*Tit-for-Tat*”. Ak prvý hráč použije v prvom kole stratégiu “*spolupracovať*” a druhý hráč zvolí opačnú stratégiu “*zradiť*”, potom platba pre prvého hráča bude 5 jednotiek, pre druhého hráča 0 jednotiek. Avšak v druhom kole by prvý hráč volil stratégiu “*zradiť*”, pretože túto stratégiu použil v predchádzajúcom kole druhý hráč. Rovnakým spôsobom by sa správal aj druhý hráč a preto by volil stratégiu “*spolupracovať*”. Platby hráčov by boli teraz opačné. Prvý hráč by získal 0 jednotiek, druhý hráč by získal 5 jednotiek. platby hráčov by sa do konca hry striedali. Priemerné hodnoty pri párnom počte opakovaní by sa rovnali hodnote 2,5 jednotiek.

Pri klasických turnajoch sa ukázala ako najlepšia metóda v opakovaných hrách stratégia “*Tit-for-Tat*” (oko za oko). Ostatné metódy, ktoré zatiaľ neboli v turnajoch použité sa môžu prejavovať ako účinnejšie. Rozdiely v priemerných hodnotách pri použití metódy “*Tit-for-Tat*” sú minimálne, a tým hráči majú väčšiu pravdepodobnosť na výhru.

Záver

Táto práca sa zaoberala opakovanými hrami, ich riešeniami a aplikačnými možnosťami v ekonomických situáciách. Cieľom práce bolo poukázať na spôsob riešenia opakovaných hier, ktoré sa delia na konečné a nekonečné opakované hry. Po zhrnutí dosiahnutých výsledkov je možné povedať, že cieľ záverečnej práce, ktorý bol definovaný v druhej kapitole, bol dosiahnutý v prvom rozsahu.

Osobitná pozornosť sa v tejto práci venovala opakovaným hrám, ktoré sú založené na princípe Vážňovej dilemy. Po získaní základných vedomostí o opakovaných hrách sme si pripravili bimaticu platieb, ktoré spĺňajú základný predpoklad Vážňovej dilemy.

Opakované hry sa členia na hry s konečným počtom opakovaní a s nekonečným počtom opakovaní. Jednotlivé typy hier sme riešili prostredníctvom softvérového prostredia Gambit a Matlab.

Konečné opakované hry boli riešené pomocou vektorového zápisu, kde sme zapisovali priestor akcií, históriu a použité stratégie. Jednotlivé akcie vytvárali hráči s úplnými informáciami, t. j. poznali predchádzajúce ťahy protihráčov. Následne sme na výpočet konečných opakovaných hier použili program Gambit, v ktorom sme zobrazili rozhodovacie stromy opakovanej hry, ktorá sa odohrávala v dvoch kolách. Pomocou spätnej indukcie sme získali rovnováhy jednotlivých podhier a tak sme získali sled akcií, ktoré hráči uskutočnili. Potvrdili sme, že v hre typu Vážňova dilemma je jediná Nashova rovnováha a to v bode, kde obaja hráči použijú stratégiu „zradit“. Jednotlivé eliminácie dominantných stratégií sú zobrazené na obrázkoch č. 16 – 18.

Pri nekonečných opakovaných hrách boli definované štyri možné stratégie, ako sa mohli hráči rozhodovať. Hráči mali na výber nasledovné stratégie:

- stratégia „*vždy spolupracovať*“,
- stratégia „*vždy zradit*“,
- stratégia „*Tit-for-Tat*“ (oko za oko),
- stratégia „*Grim*“.

Na riešenie nekonečných opakovaných hier bol použitý softvér Matlab. Z dostupných zdrojov bol získaný zdrojový kód, ktorý sme prispôbili zadaniu práce. V prvej časti sme sledovali, aké priemerné platby získa prvý hráč, ktorý volil jednu zo štyroch vopred definovaných stratégií. Druhý hráč vyberal svoje stratégie náhodne. Každá

stratégia bola použitá pre 1000 kôl hry. Priemerné hodnoty platieb, ktoré sme dostali sú zobrazené na grafoch 4.1 – 4.7. V druhej časti sme predpokladali, že druhý hráč nevyberá svoje stratégie náhodne, ale používa rovnaké vopred definované stratégie ako prvý hráč. Všetky kombinácie a ich priemerné platby sú zobrazené v tabuľke č. 2. Ako najlepšia stratégia sa ukázala “*Tit-for-Tat*”, ktorá zobrazuje približne rovnaké priemerné platby pre oboch hráčov. Pri tejto stratégii je najvyššia pravdepodobnosť na výhru, za predpokladu, že obaja hráči nevyberajú stratégie náhodne.

Na základe teoretických poznatkov o opakovaných hrách, predovšetkým hry Vážnova dilema, sme dosiahli všetky ciele v takom rozsahu, v akom sme si ich vopred stanovili.

Použitá literatúra

Knižná literatúra

- [1] ANTONIOU, J. – PITSILLIDES, A. 2013. *Game theory in communication networks : cooperative resolution of interactive networking scenarios* [online]. Abingdon: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013. p123 -148. ISBN 13: 978-1-4398-4810-4
- [2] AUMANN, R. J. - MASCHLER, M. B. 1995. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge: The MIT Press, 1995. 342 s. ISBN 0-262-01147-6
- [3] DÉMUTH, A. 2013. *Teória hier a problem rozhodovania* [online]. Trnava: Filozofická fakulta TU, 2013. 88s. ISBN: 978-80-8082-580-5
- [4] DLOUHÝ, M. – FIALA, P. 2015. *Teorie ekonomických a politických her*. Praha: Oeconomica, 2015. 170s. ISBN 978-80-245-2124-4
- [5] DUTTA, P. K. 1999. *Strategies and Games: Theory and Practice* [online]. London: The MIT Press. 1999, 481s. ISBN: 0-262-04169-3
- [6] FENDEK, M. – FENDEKOVÁ, E. 2008. *Mikroekonomická analýza*, Bratislava: IURA EDITION, 2008, ISBN 978-80-8078-180-4. Strana 453.
- [7] GIBBONS, R. 1992. *Game Theory for Applied Economists* [online]. New Jersey: Princeton University Press. 1992, 267s. ISBN: 0-691-00395-5
- [8] GOGA, M. 2013. *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition, 2013. 144s. ISBN 978-80-8078-613-7
- [9] CHOBOT M. – TURNOVEC F. – ULAŠÍN V. 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Alfa, ISBN: 80-05-00702-7, str. 20.
- [10] LISÝ, J a kol. 2007. *Ekonomía v novej ekonomike*. 2. vydanie. Bratislava: IURA EDITION, 2007, ISBN 978-80-8078-164-4. Strana 192.
- [11] MAILATH, G. J. – SAMUELSON, L. 2006. *Repeated Games and Reputations*. New York: Oxford University Press. 2006, 664s. ISBN: 978-0-19-530079-6
- [12] NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. 2007. *Theory of Games and Economic Behavior* [online]. Princeton: Princeton University Press. 2007, 674s. ISBN 978-0-691-11993-9
- [13] NISAN, N. et al. 2007. *Algorithmic Game Theory* [online]. New York: Cambridge University Press. 2007, 775s. ISBN: 978-0-521-87282-9
- [14] OSBOURNE, M. J. – RUBINSONSTEIN, A. 1994. *A Course in Game Theory* [online]. London: The MIT Press. 1994, 353s. ISBN-13: 978-0262650403

- [15] PLOTT, CH. – SMITH, V. 2008. *Handbook of Experimental Economics Results* [online], Amsterdam: NORTH-HOLLAND, 2008, ISBN 978-0-444-82642-8.
- [16] SULEIMAN, R. – TROITYSCH, K. G. – GILBERT, N. 2000. *Tools and Techniques for Social Science Simulation* [online]. Germany: Kurztiteleufnahme der Deutschen Bibliothek, 2000, 386s. ISBN: 978-3-642-51744-0
- [17] WEINTRAUB, E. R. 1992. *Toward a History of Game Theory* [online]. London: Duke University Press. 1992, 309s. ISBN: 0-8223-1253-0

Internetové zdroje

- [18] BINMORE, K. / VULKAN, N. 1999. *Applying Game Theory to Automated Negotiation*. New Brunswick: Kluwer Academic Publishers. 1999. Dostupné na webovej stránke: <ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/els/esrcls/nj-paper.pdf>, platné k 26. 02. 2017)
- [19] Cena Švédskej ríšskej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda (platné k 14. 03. 2017) dostupné na :
Nobela<http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/CENA%20SVEDSKEJ%20RISSKEJ%20BANKY%20ZA%20EKONOMICKE%20VEDY%20NA%20PAMIATKU%20ALFRED%20NOBELA/sk-sk/>
- [20] COURNOT, A. 1838. *Mathematical Principles of the Theory of the Wealth*. London: Macmillan & CO., Ltd. (<http://www3.nd.edu/~tgresik/IO/Cournot.pdf>, platné k 20.3.2017)
- [21] DOEBELI, M. – HAUERT, Ch. 2005. *Models of cooperation based on the Prisoner's Dilemma and the Snowdrift game*. Blackwell Publishing, 2005. no 8. Dostupné na webovej stránke: <http://www.math.pitt.edu/~bard/classes/3380/spatialgame.pdf>
- [22] HERMALIN, B. E. 2003. *Introduction to Game Theory and the Bertrand Trap*. Berkeley: University of California (Dostupné na webovej stránke: <http://faculty.haas.berkeley.edu/hermalin/bertgame.pdf>, platné k 30. 03. 2017)
- [23] CHOW, C. 2012. *A new strategy for the iterated prisoner's dilemma game*. Scientific Clearing House, 2012. Dostupné na webovej stránke: <https://sciencehouse.wordpress.com/2012/09/04/a-new-strategy-for-the-iterated-prisoners-dilemma-game/>, platné k 16. 03. 2017)
- [24] LEO, W. T. 2008. *Oligopolistic Competition*. St. Francis Xavier University, Department of Economics. 2008 (Dostupné na webovej stránke: <http://people.stfx.ca/tleo/iolecture4.pdf>, platné k 01. 03. 2017)

- [25] NAU, D, 2014. *Introduction to Game Theory: 7. Repeated Games*. University of Maryland. 2014 (Dostupné na webovej stránke: <https://www.cs.umd.edu/users/nau/game-theory/7%20Repeated%20games.pdf>, platné k 08. 03. 2017)
- [26] NICHOLSON, W. - SNYDER, C. M. 2010. *Intermediate microeconomics and its application*. Mason, OH: South-Western/Cengage Learning.
- [27] RATLIFF, J. *Infinitely Repeated Games with Discounting*. University of Arizona, 1996. Dostupné na webovej stránke:
<http://virtualperfection.com/gametheory/5.2.InfinitelyRepeatedGames.1.0.pdf>
- [28] TUROCY, T. L. – STENGEL, B. 2001. *Game Theory*. London School of Economics, 2001. Dostupné na webovej stránke: <http://www.cdam.lse.ac.uk/Reports/Files/cdam-2001-09.pdf>
- [29] YILDIZ, M.: 14.12 *Economic Applications of Game Theory* (dostupné na webovej stránke http://web.mit.edu/14.12/www/02F_lecture3-602.pdf, platné k 12. 04. 2017)
- [30] <http://maths.straylight.co.uk/archives/44> (platné k 17. 03. 2017)
- [31] Gambit - dostupné na internetovej stránke <http://gte.csc.liv.ac.uk/index/> (platné k 14. 03. 2017)
- [32] Game Theory II: Prisoner's Dilemma (<http://policonomics.com/lp-game-theory2-prisoners-dilemma>)
- [33] MatLab, verzia R2017a - dostupné na internetovej stránke <https://uk.mathworks.com/products/matlab.html> (platné k 17. 03. 2017)
- Game Theory II: Prisoner's Dilemma (<http://policonomics.com/lp-game-theory2-prisoners-dilemma>)

Články v časopise

- [34] AUMANN, R. J. 1995. *Backward induction and common knowledge of rationality*. In *Games and Economic Behavior*. ISSN 0899-8256, 1995, vol. 8, no. 1, p. 6 – 19 [platné k 24. 04. 2017]
- [35] BELLHOUSE, D. R. FILLION, N. 2015. *Le Her and Other Problems in Probability Discussed by Bernoulli Montmort and Waldegrave* [online]. Institute of Mathematical Statistics. ISSN: 10.1214/14-STS469, 2015, vol. 30, no. 1 [platné k 20. 02. 2017]
- [36] RAIHANI, N. J. – BSHARY, R. 2011. *Resolving the Iterated Prisoner's Dilemma: Theory and Reality*. In *Journal of Evolutionary Biology*. ISSN 1420-9101.2011.02307, vol 24, no. 8 [platné 14. 02. 2017]

Prílohy