



**Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave**

a

**Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Prahe**

1. MEDZINÁRODNÝ SEMINÁR DOKTORANDOV

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Prahe

ZBORNÍK

18. – 19. november 2004

18. – 19. listopad 2004

Praha

Medzinárodný programový výbor:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha

prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava

prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava

prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha

doc. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava

prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha

Organizačný výbor:

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Mgr. Juraj Pekár

Ing. Martin Lukáčik

Ing. Jan Fábry

dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD.

Ing. Zuzana Figlová

Organizačný sekretariát:

Mgr. Juraj pekár

EU FHI KOVE

Dolnozemska 1/b

852 35 Bratislava

e-mail: pekar@euba.sk

Ing. Jan Fábry

VŠE Praha, KEKO

nám. W. Churchilla 4

130 67 Praha 3

e-mail: fabry@vse.cz

Editor: Ing. Radovan Beťko

Web editor: Ing. Martin Lukáčik

Zborník neprešiel jazykovou úpravou. Za odbornú stránku príspevkov zodpovedajú autori.

ISBN 80-225-2000-4

Obsah

Radovan BEŤKO: Výber portfólia na báze dlhodobých historických charakteristík aktív	4
Michal R. ČERNÝ: Růstové křivky v ekonometrii	12
Zuzana ČÍČKOVÁ, Marian REIFF: Energetická funkcia Hopfieldovej neurónovej siete pri riešení úlohy o obchodnom cestujúcom	21
Jiří DOLEJŠÍ: Kritický řetěz – omezení kontraproduktivních projektových zákonů	25
Andrea FURKOVÁ: Zvyšovanie výrobnnej kapacity ako nástroj stratégie obmedzovania vstupu na trh	32
Michaela CHOCHOLATÁ: Overenie kurzovej politiky v rámci Marshall-Lernerovej podmienky pre Slovenskú republiku	38
Vladislav CHÝNA: Globalizace světových akciových trhů	45
Jana KALČEVOVÁ: Vliv vzdělání na výši příjmů	52
Martina KUNCOVÁ: Modely zásob a jejich použitelnost v dodavatelských řetězcích	60
Martin LUKÁČIK: Analýza stacionarity vybraných ekonomických indikátorov Slovenska v absolútnych hodnotách a po logaritmickej transformácii	68
Stanislav MĚLNÍČEK: Řešení úlohy obchodního cestujícího pomocí řezů	73
Marian REIFF: Model LTL 3PL prepravcu	80
Kvetoslava SURMANOVÁ, Zuzana ČÍČKOVÁ: Modelovanie indexu spotrebiteľských cien Box- Jenkinsovou metodológiou	87
Karol SZOMOLÁNYI: Konzistencia monetárnej politiky v ekonomike SR	95

Výber portfólia na báze dlhodobých historických charakteristík aktív

Radovan Beťko

1. Portfólio v priestore priemeru a rozptylu

Markowitz navrhol *pravidlo M – V*: očakávané výnosy – rozptyl výnosov, ktoré je súčasťou základu klasickej modernej teórie portfólia. V príspevku sa budeme zaoberať výberom portfólia z priestoru očakávané výnosy – rozptyl výnosov, ktorú však začneme získaním a opisom potrebnej údajovej základne pre výber portfólia, ďalej bude opísaná metóda získaním dodatočnej a spresňujúcej informácie týchto údajov pomocou úlohy cieľového programovania ako aj opis úlohy výberu portfólia z tohto priestoru. Charakteristiky agregovaných kapitálových trhov

1.1. Charakteristiky agregovaných kapitálových trhov

Pri všetkých analýzach sme vychádzali z agregovaných nominálnych a reálnych indexov akcií, obligácií a pokladničných poukázok uvedených v *Dimson, Marsh a Stauton* (2001). Autori v nej poskytujú údaje za 15 krajín sveta menovite za Austráliu, Belgicko, Dánsko, Francúzsko, Holandsko, Írsko, Japonsko, Kanadu, Nemecko, Španielsko, Švajčiarsko, Švédsko, Taliansko, USA a Veľkú Britániu.

Podobu týchto indexov uvediem za USA v tab.1(a) a 1(b), ako reprezentujúcu krajinu s kapitalizáciou obchodovaných akcií vo výške 16,6 triliónov USD, čo je takmer polovica (46%) z svetovej hodnoty, ktorá jednoznačne dominujú v celosvetovom meradle. V tab. 1(b) sú hodnoty reálnych indexov t.j. hodnoty indexov očistených od inflácie, s ktorými budeme ďalej narábať.

Informácie o nominálnych a reálnych výnosoch, ktoré sú merané prostredníctvom aritmetického a geometrického priemeru, o najnižšom a najvyššom ročnom výnose za každú kategóriu aktív a štandardnej odchýlke, ktorá slúži ako miera rizika sú uvádzané podľa vyššie spomínanej publikácie v tab.2.

Tab. 1: Nominálne (1a) a reálne (1b) hodnoty indexov kapitálových trhu USA za obdobie 1900 – 2000

(a)				
1.január	Akcie	Obligácie	Poukážky	Inflácia
1900	1	1	1	1
1910	2,51	1,31	1,59	1.27
1920	3,96	1,66	2,5	2.57
1930	14,41	2,96	4,16	2.34
1940	14,12	4,77	4,73	1.9
1950	35,25	6,56	4,96	3.21
1960	118,21	6,52	6,05	4
1970	416,93	7,52	9,01	5.13
1980	791,25	12,87	16,78	10.44

(b)			
1.január	Akcie	Obligácie	Poukážky
1900	1	1	1
1910	1.98	1.03	1.26
1920	1.54	0.65	0.97
1930	6.16	1.27	1.78
1940	7.41	2.5	2.48
1950	10.98	2.04	1.54
1960	47.05	1.63	1.51
1970	81.28	1.47	1.76
1980	75.82	1.23	1.61

1.január	Akcie	Obligácie	Poukážky	Inflácia
1990	3686,97	42,23	40,48	17.16
1991	3459,07	44,84	43,66	18.2
1992	4642,23	53,49	46,15	18.76
1993	5058,52	57,80	47,80	19.31
1994	5629,20	68,34	49,28	19.84
1995	5625,65	63,03	51,32	20.37
1996	7676,00	82,99	54,22	20.88
1997	9304,17	82,22	56,99	21.58
1998	12215,55	95,26	59,97	21.95
1999	15077,77	107,70	63,00	22.3
2000	1829,99	104,60	65,94	22.9
2001	16600,41	119,17	69,84	23.67

1.január	Akcie	Obligácie	Poukážky
1990	214.9	2.46	2.36
1991	190.02	2.46	2.4
1992	247.43	2.85	2.46
1993	262.02	2.99	2.48
1994	283.78	3.45	2.48
1995	276.2	3.09	2.52
1996	367.55	3.97	2.6
1997	431.18	3.81	2.64
1998	555.63	4.34	2.73
1999	676.15	4.83	2.83
2000	813.65	4.57	2.88
2001	701.23	5.03	2.95

Tab. 2: Charakteristiky aktív kapitálového trhu USA za obdobie 1900 - 2000

Výnos, %p.a	Aktívum	Aritmetický priemer	Geometrický priemer	Minimálny výnos	Maximálny výnos	Štandardná odchýlka [%]
Nominálny výnos	Akcie	12,0	10,1	-43,9	57,6	20,0
	Obligácie	5,1	4,8	-9,2	40,4	8,1
	Poukážky	4,3	4,3	0,0	15,2	2,8
	Inflácia	3,3	3,2	-10,8	20,4	5,0
Reálny výnos	Akcie	8,7	6,7	-38,1	56,4	20,4
	Obligácie	2,1	1,6	-19,3	35,2	9,9
	Poukážky	1,2	1,1	-15,0	20,0	4,6

Cieľom práce je zostrojenie hranice investičných príležitostí na základe získaných údajov o ročných výnosoch jednotlivých aktív. Vzhľadom na to, že publikácia za obdobie rokov 1900 až 1990 obsahuje údaje len po desaťročiach, vypočítali sme pomocou geometrického priemeru reprezentatívny ročný výnos pre každé uvedené desaťročie. Získané reálne výnosy spolu s ich základnými charakteristikami sú uvedené v tab.3.

Vzájomný pohyb medzi výnosmi jednotlivých aktív možno zistiť pomocou korelačného koeficientu ρ_{ij} , ktorý nadobúda hodnoty od -1 po $+1$, pričom kladná hodnota hovorí o rovnakom pohybe a hodnota blížiac sa k číslu 1 indikuje silnejúcu tendenciu vzájomných pohybov. Všetky tri sledované aktíva vykazujú rovnakú tendenciu vzájomných pohybov. Korelačné koeficienty medzi jednotlivými aktívami sú nasledovné: akcie a obligácie: 0,52141, akcie a pokladničné poukážky: 0,35264 a obligácie a pokladničné poukážky 0,43787. Je potrebné zdôrazniť, že práve tieto údaje sú podstatné pri konštrukcii hranice investičných príležitostí a práve preto je nutné venovať im dostatočnú pozornosť.

V tomto momente je dôležité upozorniť, že charakteristiky aktív autorov *E.Dimsona, P.Marsha a M.Stautona* (2001) uvádzané v tab.2 sú vypočítané na základe úplných ročných údajov. Ak porovnáme charakteristiky všetkých aktív v tab.3 s údajmi vypočítaných na základe všetkých ročných hodnôt agregovaných indexov (tab.2) zistíme dosť podstatné rozdiely v týchto hodnotách. Preto logicky nasleduje otázka, akým spôsobom by dalo vyrovnať s týmto problémom.

Tab.3: Reálne ročné výnosy aktív USA a ich charakteristiky za 1900 – 2001

1.január	Akcie	Obligácie	Poukážky
1900			
1910	7.07%	0.30%	2.34%
1920	-2.48%	-4.50%	-2.58%
1930	14.87%	6.93%	6.26%
1940	1.86%	7.01%	3.37%
1950	4.01%	-2.01%	-4.65%
1960	15.66%	-2.22%	-0.20%
1970	5.62%	-1.03%	1.54%
1980	-0.69%	-1.77%	-0.89%
1990	10.98%	7.18%	3.90%
1991	-11.58%	0.00%	1.69%
1992	30.21%	15.85%	2.50%
1993	5.90%	4.91%	0.81%
1994	8.30%	15.38%	0.00%
1995	-2.67%	-10.43%	1.61%
1996	33.07%	28.48%	3.17%
1997	17.31%	-4.03%	1.54%
1998	28.86%	13.91%	3.41%
1999	21.69%	11.29%	3.66%
2000	20.34%	-5.38%	1.77%
2001	-13.82%	10.07%	2.43%
Aritm. priemer	9.73%	4.50%	1.58%
Geom.priemer	6.70%	1.61%	1.08%
Štandardná odchýlka	13.10%	9.40%	2.42%
Maximum	33.07%	28.48%	6.26%
Minimum	-13.82%	-10.43%	-4.65%

1.2. Úloha archimedovského cieľového programovania

Pri výpočtoch charakteristík aktív v tab.3 mali ročné hodnoty z konca 20. storočia vyššie váhy t.j. vyššiu významnosť ako hodnoty za desaťročia zo začiatku storočia, ktoré predstavujú oveľa dlhšie sledované obdobie. Tento problém možno riešiť takým spôsobom, kde sa každému výnosu priradí určitá váha λ_t ($t = 1, 2, \dots, 20$), t.j. významnosť, akou sa podieľajú pri výpočte aritmetického priemeru a štandardnej odchýlky. Tieto budú predstavovať cieľové hodnoty pre každé aktívum, ktoré je žiadúce dosiahnuť čo možno najpresnejšie. Takto ponímanú úlohu cieľového programovania možno zapísať v nasledujúcom tvare

$$\min \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 d_{ij}^+ + d_{ij}^-, \quad (1.1)$$

za podmienok

$$\sum_{t=1}^{20} r_{jt} \lambda_t + (0,01 \cdot y_{1j}^0) (d_{1j}^- - d_{1j}^+) = y_{1j}^0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\left(\sum_{t=1}^{20} \lambda_t (r_{jt} - \sum_{t=1}^{20} r_{jt} \lambda_t)^2 \right)^{1/2} + (0,01 \cdot y_{2j}^0) (d_{2j}^- - d_{2j}^+) = y_{2j}^0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

$$\lambda_t \geq 0,05, \quad t = 1, 2, \dots, 20 \quad (1.4)$$

$$\sum_{t=1}^{20} \lambda_t = 1 \quad (1.5)$$

$$d_{ij}^+, d_{ij}^- \geq 0, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

pričom zložky λ_1 až λ_t , označujú váhy jednotlivých t -tych desaťročných resp. po roku 1990 ročných výnosov aktív, $t = 1, 2, \dots, 20$, r_{jt} je výnos j -teho typu aktíva, $j = 1, 2, 3$ v t -tom období,

$\sum_{t=1}^{20} r_{jt} \cdot \lambda_t$ je hodnota priemerného výnosu j -teho typu aktíva, y_{1j}^0 pre $j = 1, 2, 3$, predstavuje hodnotu aritmetického priemeru j -teho typu aktíva, y_{2j}^0 pre $j = 1, 2, 3$, predstavuje hodnotu štandardnej odchýlky j -teho aktíva. Prvky vektorov y_{1i}^0 , y_{2i}^0 predstavujú cieľové hodnoty, charakterizujúce j -te aktívum.

Takto zapísané odchýlkové premenné d_{1j}^+ a d_{2j}^+ reprezentujú percentuálne prekročenie j -tej cieľovej hodnoty a odchýlkové premenné d_{1j}^- a d_{2j}^- reprezentujú percentuálne nesplnenie j -teho cieľa (Mlynarovič, 1998). Potom účelová funkcia (1.1) je súčtom percentuálnych odchýlkových premenných od všetkých cieľových hodnôt a vyjadruje kumulatívne percentuálne nedosiahnutie týchto hodnôt. Ideálne by bolo, keby optimálnemu riešeniu pre vektor váh $\lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ zodpovedali nulové odchýlkové premenné, preto ohraničenia (1.2) – (1.4) sú v tvare “=”, tzn. hľadáme také optimálne riešenie λ^* , pre ktoré sa vypočítané hodnoty aritmetického priemeru a štandardnej odchýlky budú rovnať práve uvádzaným charakteristikám v publikácii *E. Dimsona, P. Marsha a M. Stautona* (2001).

Podmienka (1.4) vyjadruje stav, keď váha (významnosť) jednotlivého výnosu nesmie byť menšia ako 1/101 v 101 ročnom sledovanom období. Podmienka (1.6) vyjadruje nezápornosť odchýlkových premenných, keďže merajú nedosiahnutie cieľovej hodnoty.

Na riešenie úlohy bol použitý analytický nástroj Solver z tabuľkového procesora MS Excel.

V čom je prínos úlohy cieľového programovania (1.1) – (1.6)? Ak nezohľadníme význam, akou váhou sa jednotlivé desaťročné či ročné hodnoty výnosov aktív za jednotlivé kategórie aktív podieľajú pri výpočte ich aritmetického priemeru a štandardnej odchýlky výnosov, potom tieto hodnoty môžeme za všetky sledované krajiny nájsť v Prílohe A, alebo pre USA v tab.3 na str. 6. Napríklad vieme konštatovať, že priemerný výnos akcií, obligácií a pokladničných poukázok v USA vypočítaný týmto spôsobom je jednotlivo 9,726%, 4,497% a 1,585%. Tieto hodnoty sú nadhodnotené oproti skutočným hodnotám priemerných výnosov 8,7%, 2,1% a 1,2% akcií, obligácií a poukázok v percentuálnom vyjadrení o 11,796%, 114,121% a 32,0674%. Naopak štandardné odchýlky výnosov počítané týmto spôsobom (13,103%, 9,396% a 2,421% za jednotlivú kategóriu aktív) sú podhodnotené oproti skutočným hodnotám (20,4%, 9,9% a 4,9%) o 35,770%, 5,093% a 50,584% percent za každú skupinu aktív. Súčet percentuálnych odchýlkových premenných pre všetky druhy aktív v USA dosiahol hodnotu 249,434.

Priemerné výnosy jednotlivých aktív napríklad pre USA počítané s vektorom významnosti λ^* dosiahli skutočné hodnoty priemerných výnosov, až na priemerný výnos akcií, ktorý bol nadhodnotený o $2,81 \cdot 10^{-6}$ percent, čo je pomerne zanedbateľná odchýlka.

Štandardné odchýlky výnosov aktív v USA pri zohľadnení vektora váh boli v prípade akcií podhodnotené o 43,20%, v prípade obligácií sa dosiahla skutočná hodnota 9,9% a štandardná odchýlka pokladničných poukázok sa nedosiahla o 17,944 percent. Kumulatívna percentuálna hodnota nedosiahnutia skutočných charakteristických hodnôt za všetky aktíva v USA po zohľadnení dôležitosti jednotlivých období je 61,1516 percent, čím sme sa priblížili k skutočným hodnotám o viac ako $\frac{3}{4}$ (z 249,434 na 61,1516%) oproti pôvodnému spôsobu výpočtu, čím sa určite posilnia aj nami získané závery.

Korelačné koeficienty medzi výnosmi aktív s vypočítanými váhami za USA sú nasledovné: medzi akciami a obligáciami 0,8415, medzi akciami a pokladničnými poukážkami 0,4278617 a medzi obligáciami a pokladničnými poukážkami 0,4189639. Porovnaním s hodnotami 0,52141, 0,35264 a 0,43787 počítaných z údajov tab.3 bez ich zohľadnenia dôležitosti zistíme značné rozdiely, ktoré v konečnom dôsledku by mohli byť zdrojom skreslenia informácií o aktívach.

1.3. Výber portfólia v priestore priemeru a rozptylu

Pri všeobecnej formulácii *Markowitzovej* úlohy výberu portfólia v priestore očakávaného výnosu a rozptylu výnosov (*Markowitz*, 1952, 1991), t.j. *portfólia typu priemer – rozptyl*, použijeme nasledujúce označenie: $\mathbf{w}$ bude stĺpcový vektor zložiek $w_1, \dots, w_n$, ktoré označujú podiel (váhu) alokujúci do i -teho aktíva v portfóliu, $i = 1, 2, \dots, n$. Súčet týchto váh je rovný 1; $\mathbf{e}$ je stĺpcový vektor, ktorý obsahuje n jednotiek, a horný index T označuje transponovanie vektora alebo matice. $\mathbf{E}$ je stĺpcový vektor očakávaných výnosov $E_1, \dots, E_n$ jednotlivých aktív, pričom sa predpokladá, že nie všetky prvky vektora $\mathbf{E}$ sú navzájom rovné, $\mathbf{C}$ je kovariančná matica typu $n \times n$ s prvkami σ_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Predpokladá sa, že matica $\mathbf{C}$ je regulárna, $\mathbf{C}$ je symetrická a kladne definitná (vyplýva zo skutočnosti, že rozptyly rizikových aktív sú kladné). Pre dané portfólio P jeho rozptyl označujeme symbolom σ_P^2 a je rovný $\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}$ a očakávaný výnos portfólia označený E_P je rovný $\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{E}$.

V súlade s Markowitzovou formuláciou možno úlohu výberu portfólia P s cieľom dosiahnuť stanovený očakávaný výnos E_P s čo možno najmenším rizikom zapísať v tvare

$$\min \sigma_P^2 = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} \quad (1.7)$$

za podmienok

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{e} = 1 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{E} = E_P \quad (1.9)$$

Úloha (1.7) minimalizuje rozptyl výnosov portfólia pri dvoch ohraničeníach:

1. súčet váh portfólia musí byť rovný jednej (ohraničenie (1.8)), čo znamená, že preinvestované celého bohatstvo
2. ohraničujúca podmienka (1.9) identifikuje portfólio, ktoré musí dosiahnuť očakávaný výnos na stanovenej úrovni E_P

Rozptyl akéhokoľvek portfólia s minimálnym rozptylom pre daný očakávaný výnos E_P môžeme vypočítať zo vzťahu

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} = [E_P \ 1] \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot [\mathbf{E} \ \mathbf{e}]^T \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{E} \ \mathbf{e}] \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_P \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= [E_P \ 1] \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_P \\ 1 \end{bmatrix} = [E_P \ 1] \cdot \frac{1}{a \cdot c - b^2} \cdot \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_P \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{a - 2b \cdot E_P + c \cdot E_P^2}{a \cdot c - b^2} \quad (1.10)
\end{aligned}$$

V (1.10) je vzťah medzi rozptylom portfólia s minimálnym rozptylom a jeho daným očakávaným výnosom E_P vyjadrený ako parabola a nazýva sa *hranica portfólií s minimálnym rozptylom*. V priestore očakávaného výnosu a štandardnej odchýlky je tento vzťah opísaný ako hyperbola.

Horná časť hranice portfólií s minimálnym rozptylom identifikuje množinu portfólií s najvyšším očakávaným výnosom pre daný rozptyl. Tieto portfóliá na nazývajú *efektívne portfóliá* v priestore očakávaného výnosu a rozptylu. Efektívne portfóliá sú podmnožinou portfólií s minimálnym rozptylom.

Uvedené výsledky umožňujú identifikovať portfólio s *globálne minimálnym rozptylom*. Je to portfólio s najmenším možným rozptylom pre akýkoľvek očakávaný výnos, označený E_G , ktorý vypočítame minimalizáciou hodnoty funkcie (10) podľa premennej E_P a dostaneme

$$E_P = \frac{b}{c} \quad (1.11)$$

Rozptyl tohto portfólia, označený σ_G^2 , vypočítame dosadením (22) do (21) a dostaneme

$$\sigma_G^2 = \frac{a - 2b \cdot E_G + c \cdot E_G^2}{a \cdot c - b^2} = \frac{a - 2b \cdot \frac{b}{c} + c \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2}{a \cdot c - b^2} = \frac{1}{c} \quad (1.12)$$

Podobne po dosadení E_G z (22) do (20) nájdeme váhy portfólia s globálne minimálnym rozptylom, označené $\mathbf{w}_G$,

$$\mathbf{w}_G = \mathbf{C}^{-1} \cdot [\mathbf{E} \ \mathbf{e}] \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} E_G \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{C}^{-1} [\mathbf{E} \ \mathbf{e}] \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b/c \\ 1 \end{bmatrix}}{(ac - b^2)} = \frac{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}}{c} \quad (1.13)$$

2. Analýza kapitálového trhu za obdobie rokov 1900 až 2001

2.1. Markowitzova úloha výberu portfólia

Na opísanom trhu aktív teraz skonštruujeme hranicu investičných príležitostí tak, aby obsahovala také portfólia aktív, ktoré zabezpečujú dosiahnutie požadovaného výnosu pri čo možno najmenšom riziku. Časť tejto hranice, od bodu ktorému zodpovedá portfólio s globálne minimálnym riziko potom, ako je známe s teórie portfólia, tvorí množinu efektívnych portfólií.

2.2. Hranica množiny investičných príležitostí pri možných krátkych predajoch

V tejto časti predpokladáme, že všetky tri uvažované aktíva, teda akcie, obligácie aj poukážky, sú rizikovými aktívami. V tomto prípade možno efektívnu hranicu aproximovať riešením úloh ktoré sa definujú ako na Markowitzovom modeli výberu portfólia. Z výpočtového hľadiska ide teda o riešenie série kvadratického programovania. Umožnenie krátkych predajov znamená, že investor si môže jednotlivé nástroje aj požičiavať, čo z technického hľadiska znamená, že podiel takéhoto aktíva v portfóliu je vyjadrený zápornou váhou, resp. zápornou percentuálnou hodnotou. Na efektívne zvládnutie riešenia sérií úloh bola využitá procedúra Solver z tabuľkového prostredia Excel so špeciálne vytvorenou VBA procedúrou (Mlynarovič, 2001). Niektoré optimálne portfóliá sme opísali v Tab.4 pričom efektívna hranica, ktorú vytvárajú, je ilustrovaná na obr. 1.

Z tabuľky je evidentné, že pri portfóliách s najnižším rizikom je optimálne investovať čo najviac do najbezpečnejších aktív t.j. Vládnych pokladničných poukážok a obligácií, pričom model pri historicky očakávanom výnose okolo 1% dokonca odporúča zbavovať sa investícií do akcií. Pri portfóliách s najvyššími výnosmi ale aj rizikom naopak je najvhodnejšie investovať čo najviac do akciových inštrumentov a paradoxne aj do pokladničných poukážok, kým pri investíciách do obligácií sa odporúča zaujať krátku pozíciu.

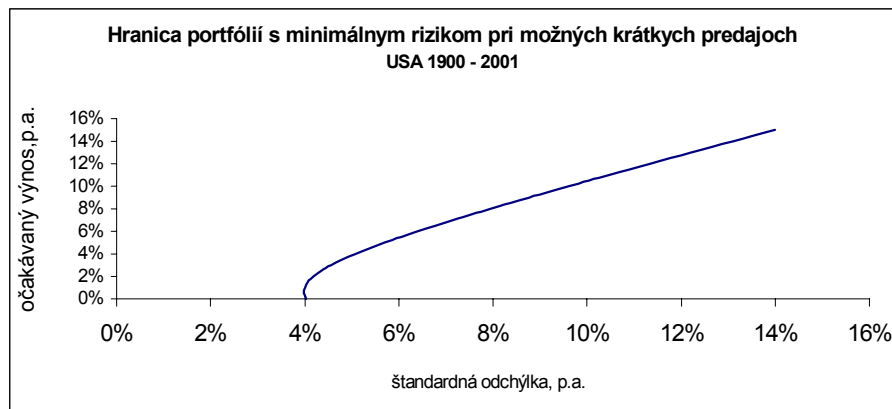
Tab. 4: Vybrané efektívne portfóliá a ich charakteristiky (možné krátke predaje)

Názov portfólia		I	II	III	IV	V
Očakávaný výnos, p.a.		0,8435%	2,50%	5,00%	7,50%	10,00%
Riziko merané štand.odchýlkou, p.a.		3,98559 %	4,350%	5,701%	7,549%	9,610%
Minimálny výnos (5% hladin. významnosti)		-5,92%	-4,66%	-4,38%	-4,92%	-5,81%
Pravdepodobnosť nekladného výnosu		43,69%	28,27%	19,02%	16,02%	14,90%
Pravdepodobnosť pre výnos menší ako 10%		99,06%	95,77%	80,98%	62,97%	50,00%
Pravdepodobnosť pre výnos vyšší ako 20%		0,00%	0,00%	0,43%	4,89%	14,90%
Aktívum	Akcie	-8,59 %	19,38%	56,63%	93,88%	131,13%
	Obligácie	7,26 %	-17,06%	-49,69%	-82,33%	-114,96%
	Pokladničné poukážky	101,02 %	97,68%	93,06%	88,45%	83,83%

V tab. 4 je opísaných päť vybraných efektívnych portfólií . Prvé z týchto portfólií je to efektívne portfólio, ktorému zodpovedá (globálne) najmenšie možné riziko (so štandardnou odchýlkou 3,985597 % p.a.) a historicky očakávaný výnos 0,633167 % p.a.

Na základe údajov z tabuľky vieme formulovať niekoľko konštatovaní:

- Riziko pri všetkých portfóliách s očakávaným výnosom menším približne ako 8% p.a. bolo vždy vyššie ako očakávaný výnos, ale pre portfóliá s očakávaným výnosom vyšším približne ako 8% p.a., riziko rastie pomalším tempom ako očakávaný výnos.
- Celková možnosť dosiahnutia straty pre každé vybrané portfólio sa pohybuje približne na úrovni okolo mínus 5% p.a.



Obr. 1

- Pravdepodobnosť dosiahnutia nekladného výnosu postupne klesá s hodnoty 42,54% na 14,90% pre portfólio s očakávaným výnosom 10% p.a. Pravdepodobnosť dosiahnuť reálny výnosu, ktorý je menší ako 10% je u každého portfólia veľmi vysoká. Zároveň žiadne z vybraných portfólií nemá pravdepodobnosť dosiahnuť výnos vyšší ako 20% vyššiu ako 14,9%.
- Individuálny investor vo všeobecnosti nevyužíva možnosť krátkych predajov. V tomto prípade však aj portfólio s globálne minimálnym rizikom predpokladá krátky predaj akcií, a to do rizika približne 4 %. V štruktúre všetkých portfólií so zvyšovaním rizika stúpa podiel akcií a prekvapujúco aj pokladničných poukázok, a v skladbe portfólia do záporných hodnôt sa dostáva podiel obligácií. Všetky portfólia od rizika približne 4 % odporúčajú krátky predaj obligácií, čo zrejme naznačuje, že dlhodobo dochádzalo k reálnemu poklesu cien indexov obligácií pravdepodobne v dôsledku rastu reálnych úrokových mier.

Summary

This paper deals with problem of choice optimal portfolio at base of long-term historical characteristics of assets.

Literatúra

1. *Mlynarovič, V.* (1998): Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania. Vydavateľstvo Ekonóm.
2. *Mlynarovič, V.* (2001): Finančné investovanie – Teórie a aplikácie, IUA EDITION.
3. *Dimson, E., P. Marsh and M. Staunton* (2001): MILLENIUM BOOK II. 101 Years of Investment Returns, London Business School.

Ing. Radovan Beťko (betko@dec.euba.sk)

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Fakulta hospodárskej informatiky

Ekonomická univerzita

Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, Slovenska republika

Růstové křivky v ekonometrii

Michal R. Černý¹

Růstovými křivkami v tomto článku rozumíme křivky, které bývají někdy nazývány křivkami sigmoidálními². Jsou to křivky, které popisují závislost jistého jevu nejčastěji na čase, a tato závislost prochází třemi fázemi: fází počáteční stagnace, kdy se s časem sledovaná veličina (téměř) nemění, tato fáze je následována fází růstu, která posléze přechází opět do stagnace (nasycení).

Růstové křivky představují důležitou třídu modelů, pomocí kterých je možno popisovat řadu procesů z nejrůznějších oborů. V biochemii se pomocí růstových křivek modelují procesy růstu počtu mikroorganismů v potravinách a nechá se pomocí nich například studovat zrání piva či sýrů. Biochemická interpretace je taková, že po počátečním impulsu, kdy je mikroorganismům vytvořeno prostředí, kde se mohou začít množit (vhodná teplota, pH apod.), obvykle chvíli trvá, než se růst projeví (1. fáze), posléze dochází k růstu téměř exponenciálnímu (2. fáze), avšak tento růst způsobí tvorbu metabolitů, jejichž přítomnost v prostředí růst brzdí a tento růst posléze ustává a počet mikroorganismů se ustálí (3. fáze).

Povídání o zrání piva či sýrů zdánlivě nepatří do textu o ekonomii, avšak popsáný proces biochemický má řadu analogií v procesech ekonomických a porozumění těmto procesům nám umožní volbu vhodných modelů při vysvětlování ekonomických jevů. Ostatně, růstové modely historicky vznikaly z potřeby biologie a zemědělství a řada modelů byla odvozena právě v důsledku této potřeby.

Jedním z příkladů, které popisují obdobný proces, je dynamika poptávky po zboží dlouhodobé spotřeby (podrobněji viz [6]). Předměty dlouhodobé spotřeby (např. byty, auta apod.), narozdíl od běžné, rychloobrátkové spotřeby, obvykle vyžadují velkou počáteční investici, která se postupně během poměrně dlouhé doby spotřebovává.³ Budeme-li zkoumat individuální poptávku po předmětech dlouhodobé spotřeby, shledáme, že po počátečním růstu této poptávky dojde k relativnímu nasycení, které trvá dlouhou dobu, a dochází jen k výdajům na reprodukci. Individuální vybavenost předměty dlouhodobé spotřeby tak delší dobu stagnuje. Podobný trend lze pozorovat i u poptávky většího počtu subjektů po předmětech dlouhodobé spotřeby, které se nově uvádějí na trh. Po uvedení na trh obvykle dojde jistě fází

¹ Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická Praha; cernym@vse.cz

² A to i přesto, že tyto křivky ani zdaleka nepřipomínají tvar písmene sigma. Písmeno sigma může mít podle kontextu různý tvar, jako například ve slově ΣΙΣΥΦΟΣ, avšak tento tvar autorovi růstové křivky – i přes veškerou snahu – neasociuje.

stagnace k růstu této poptávky, avšak po jisté době se poptávka ustálí na jisté rovnovážné úrovni, která odráží jen nutnost reprodukce předmětů dlouhodobé spotřeby, kterými jsou již subjekty vybaveny. Z uvedených úvah je vidět, že při prognose a modelování poptávky po předmětech dlouhodobé spotřeby je třeba brát v úvahu nejen čas, úspory (neboť předměty dlouhodobé spotřeby bývají financovány z úspor či z úvěrů a mají tak povahu investic), ale i takové faktory, jako je vybavenost subjektů těmito předměty a jejich vývoj v čase.

Ruku v ruce s poptávkou po předmětech dlouhodobé spotřeby lze modelovat i poptávku po zdrojích na jejich financování. Příkladem za všechny mohou být hypotéky – po uvedení hypoték na trh nastala fáze postupného růstu poptávky po nich, která trvá dosud, a lze do budoucna očekávat, že se tato poptávka (nedojde-li k zásadní změně podmínek, legislativy apod.) ustálí na jisté, rovnovážné hladině.

Při analýze podobných procesů vždy proti sobě jdou dvě síly. Jedna síla, ať už biologická nebo ekonomická, působí na růst sledované veličiny, zatímco druhá na její pokles. Vzájemný poměr těchto sil pak určuje tempo růstu a jejich vyrovnávání má za důsledek nalezení tržní či biologické rovnováhy systému.

V dalším textu používáme t jako nezávisle proměnnou (která v drtivé většině případů reprezentuje čas). Dále označme $f(t)$ nebo jen f objem sledované veličiny (objem poptávky po zboží dlouhodobé spotřeby, objem poptávky po hypotékách apod.) v čase t . Funkce f může mít mnoho podob a může záviset na řadě parametrů, které explicitně uvedeme jako argumenty funkce podle kontextu. My funkci f zde budeme předpokládat jen to, že jejím definičním oborem je reálný interval (omezený či neomezený) a že je na svém definičním oboru diferencovatelná podle t .

Obecně lze popsané procesy modelovat funkcemi, které jsou řešením rovnice typu

$$\frac{df}{dt} = g(f) \cdot (h(a) - h(f)), \quad (1)$$

kde g a h jsou rostoucí spojitě funkce splňující $g(0) = 0$ a $h(0) = 0$ a a je konstanta, která určuje stav nasycení. Rovnice popisuje situaci, kdy tempo růstu vysvětlované veličiny f je úměrné aktuální hodnotě veličiny f („typ“ této úměry popisuje funkce g) a kdybychom místo výrazu $h(a) - h(f)$ psali v (1) jen $a - f$, bylo by tempo růstu úměrné tomu, kolik ještě zbývá veličině f k dosažení nasycené úrovně a . Rovnice (1) je poněkud obecnější; v ní použitou funkci h můžeme nazvat *užitkovou funkcí*, která (nějak) kvantifikuje užitek z toho, že

³ V podnikovém účetnictví se tato dlouhodobá spotřeba zachycuje pomocí odpisů dlouhodobého majetku.

sledovaná veličina má aktuální hodnotu f . Výraz $h(a) - h(f)$ pak popisuje rozdíl mezi užitek z aktuální výše veličiny f a užitek, kterého má být dosaženo při nasycení. Je zřejmé, že požadavek, aby funkce užitku h byla spojitá, rostoucí a splňovala $h(0) = 0$ zaručuje, že bude-li se hodnota f blížit k hodnotě, kdy nastává nasycení, půjde tempo růstu df/dt k nule a hodnota f bude konvergovat k rovnovážnému stavu (nasycení). Dobře známý logistický model

$$L(t, a, b, k) = \frac{a}{1 + be^{-kt}} \quad (2)$$

je (po obvyklé parametrizaci) řešením rovnice (1) pro $g(f) = f$ a $h(f) = f$.

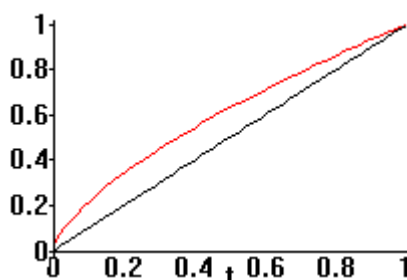
V roce 1938 von Bertalanffy studoval – a jsme opět u biologie – model růstu zemědělských zvířat. Uvažoval tak, že přírůstek biologické hmoty roste s jistou mocninou hmotnosti zvířete a proti tomu lineárně ubývá. Ekonomicky zní takový model možná ještě přirozeněji. Aktuální poptávka f na jedné straně indukuje další, dodatečnou poptávku. Představme si například trh s mobilními telefony – po uvedení na trh se postupně rozšiřují zprávy o kvalitách nového telefonu, lidé si jej doporučují mezi sebou a lavinovitě tak indukují další poptávku po telefonu. Na druhé straně ovšem, jak dochází k nasycení trhu, proti počátečnímu dynamickému nárůstu začne působit pozvolný, lineární trend reprezentující nasycení, který růst poptávky brzdí. Tuto situaci popisuje rovnice

$$\frac{df}{dt} = uf^d - vf, \quad (3)$$

kde d , u a v jsou konstanty. Von Bertalanffy uvažoval pouze $0 < d < 1$. Empiricky odhadl hodnotu exponentu d na $2/3$. Při fixaci $d = 2/3$ a obvyklé parametrizaci pak má jeho model tvar

$$B(t, a, k, l) = a(1 - \frac{1}{3}e^{-k(x-l)}). \quad (4)$$

Následující obrázek pro ilustraci ukazuje srovnání funkcí $f^{2/3}$ a f . Je z něj vidět, jak od nuly roste kladný člen $f^{2/3}$ v (3) rychleji než záporný člen f .



Fixace parametru $d = 2/3$ ovšem nemůže být uspokojivá. Vyjděme nyní z modelu (3), kde parametr d nebudeme považovat za fixní. Položme na model (3) přirozenou podmínku, aby v okamžiku nasycení (tj. $f = a$) bylo tempo růstu rovno nule:

$$\frac{df}{dt} = 0 \text{ při } f = a. \quad (5)$$

Dosazení (5) do (3) dává

$$0 = uf^d - vf = ua^d - va = a(ua^{d-1} - v)$$

a jelikož je rozumné předpokládat, aby úroveň nasycení a byla ostře větší než nula, dostáváme

$$ua^{d-1} - v = 0 \text{ a tudíž } v = ua^{d-1}.$$

Model (3) pak dává

$$\frac{df}{dt} = uf^d - vf = uf^d - ua^{d-1}f = ua^{d-1}f \cdot \left(\frac{f^{d-1}}{a^{d-1}} - 1\right).$$

Rozšíříme-li poslední výraz zlomkem $(1-d)/(1-d)$, dostaneme po substituci $k = ua^{d-1}(1-d)$ tvar

$$\frac{df}{dt} = \frac{ua^{d-1}(1-d)}{1-d} f \cdot \left(\frac{f^{d-1}}{a^{d-1}} - 1\right) = \frac{k}{1-d} f \cdot \left(\left(\frac{f}{a}\right)^{d-1} - 1\right) = \frac{k}{1-d} f \cdot \left(\left(\frac{a}{f}\right)^{1-d} - 1\right).$$

Poslední rovnici už vyřešíme snadno. Parametr d musí být nenulový; vyšetřeme například

$d > 1$. Substituce $y = f^{1-d} - a^{1-d}$ dává $\frac{dy}{dt} = (1-d)f^{-d} \frac{df}{dt}$ a po úpravě $\frac{df}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{f^d}{1-d}$.

Dosadíme-li tuto substituci do (6) spolu s vyjádřením $a^{1-d} = f^{1-d} - y$, dostaneme

$$\frac{dy}{dt} \frac{f^d}{1-d} = \frac{k}{1-d} f \cdot \left(\frac{f^{1-d} - y}{f^{1-d}} - 1\right) = -\frac{k}{1-d} f^d y \quad (6)$$

a rovnice tak přechází do jednoduchého tvaru $\frac{dy}{dt} = -ky$, jejímž řešením je $y = e^{-k(t-l)}$. Po

dosazení do substituce dostáváme tzv. *Richardsovu křivku*

$$f = (a^{1-d} + e^{-k(t-l)})^{\frac{1}{1-d}}. \quad (7)$$

Obdobně bychom postupovali v případě $d < 1$; použili bychom substituci $y = a^{1-d} - f^{1-d}$ a dospěli bychom k tvaru Richardsovy křivky

$$f = (a^{1-d} - e^{-k(t-l)})^{\frac{1}{1-d}}. \quad (8)$$

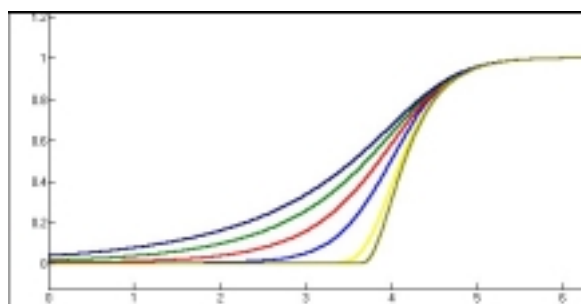
Oba tvary (7) a (8) lze reparametrisovat do jednotného tvaru

$$R(t, a, d, k, c) = a(1 + (d - 1)e^{-k(t-c)})^{\frac{1}{1-d}}, \quad (9)$$

který se užívá nejčastěji.

Richardsova křivka má tu obrovskou výhodu, že v sobě obsahuje logistickou křivku (2) jako podmodel pro $d = 2$, von Bertalanffyho model pro $d = 2/3$ a známou Gompertzovu křivku jako „limitní“ podmodel pro $d \rightarrow 1$. Tato obecnost je značnou výhodou, protože zaručuje značnou pružnost Richardsovy křivky a umožňuje spojovat výhody jednotlivých podmodelů. Logistická křivka například často nevyhovuje praktickým aplikacím díky tomu, že je symetrická kolem své inflexe.

Následující obrázek ukazuje tvar Richardsovy křivky $R(t, 1, d, 3, 4)$ „odleva doprava“ pro $d = 5$, $d = 4$, $d = 3$, $d = 2$ (logistická křivka), $d \rightarrow 1$ (Gompertzova křivka) a $d = 2/3$ (von Bertalanffyho křivka; body mimo definiční obor (9) jsou doplněny nulou).



Stejně jako v případě řady dalších nelineárních modelů nám dává jejich odvození jako řešení diferenciální rovnice popisující konkrétní situaci *porozumět podstatě této křivky* a tudíž i meze jejího použití. Budeme-li modelovat ekonomický proces, je nejprve třeba zhodnotit, zdali výchozí předpoklady použité pro konstrukci tohoto modelu, tedy rovnice (3), může dostatečně popsat danou ekonomickou realitu. Připomeňme, že rovnice (3) popisovala situaci, kdy na tempo růstu sledované veličiny proti sobě působí dvě síly – jedna „dynamická“ s exponenciálním faktorem d a proti ní „pozvolná“, lineární síla, která proces tlumí. Pokud by taková interpretace dané ekonomické situace byla příliš reduktivní, těžko může Richardsův model (a jeho zmiňované podmodely, jako křivka logistická či Gompertzova) při modelování tohoto procesu uspět. V takové situaci by ovšem bylo možno například sutudovat modely složitější, například zobecnění modelu (3) do tvaru

$$\frac{df}{dt} = uf^{d_1} - vf^{d_2}.$$

Velkou výhodou nelineárních modelů oproti lineárním bývá dobrá interpretace významu jednotlivých parametrů. Význam parametrů nám dává informaci o chování ekonomického procesu (např. délka počáteční stagnace, tempo růstu, inflexe a maximum tempa růstu, horní asymptota – úroveň nasycení, konec fáze růstu a počátek fáze stability).

Podrobnou analýzu uvádí např. Hlubinka [3].

Z praxe je dobře známo, že při odhadu parametrů nelineárních modelů pomocí iteračních metod (nejčastěji nelineárních nejmenších čtverců) hrají podstatnou roli jejich počáteční odhady. Kvalitní počáteční odhady lze stanovit z pozorovaných dat právě díky názornému významu parametrů. Odhady parametrů Richardsovy křivky lze samozřejmě použít i při odhadu parametrů jejích podmodelů.

Z výrazu (9) je zřejmé, že parametr a je bodem nasycení (horní asymptotou) a parametr c křivku pouze posouvá. Je třeba upozornit, že tvar (9) má v případě $d < 1$ omezený definiční obor – je-li k kladné, křivka (9) je definována pouze pro $t \geq c + \ln(1 - d)/k$ a je-li k záporné, pouze pro $t \geq c - \ln(1 - d)/k$. Tato skutečnost komplikuje situaci při numerické minimalisaci kritériální funkce při prokládání křivky daty, neboť dostane-li se iterační proces blízko okraji definičního oboru, může se stát, že během několika dalších kroků se část pozorování octne mimo definiční obor, což má za následek divergenci iteračního procesu.

Nastiňme krátce význam parametrů. Richardsova křivka roste, je-li (a) $d > 1$ a $k > 0$ nebo (b) $d < 1$ a $k > 0$. Příklad (a) je nejtypičtější; její limita v $-\infty$ je 0 a limita v $+\infty$ je a . V tomto případě křivka modeluje jak první fázi stagnace, tak i růst a konvergenci procesu k rovnováze. Často se přípustný obor parametrů přímo takto omezuje. V případě (b) křivka sice též roste, avšak limita v $-\infty$ nedává dobrý smysl díky omezenému definičnímu oboru. Richardsova křivka je pak schopna modelovat pouze část růstové fáze a finální konvergenci k rovnovážnému stavu. Pro ekonomické aplikace se nejvíce hodí případ (a); budeme proto uvažovat jen jej.

Bod c je bodem inflexe. Pokud bychom do (9) dosadili $t = c$, obdržíme hodnotu $ad^{\frac{1}{1-d}}$. Proto poměr $ad^{\frac{1}{1-d}} : a = d^{\frac{1}{1-d}}$ popisuje poměr bodu nasycení ku inflexi (tj. úrovni sledované veličiny, kdy je její růst nejrychlejší). Pomocí tohoto poměru – řekněme mu *poměr asymetrie* – lze tedy usuzovat na míru nesymetrie Richardsovy křivky kolem inflexe. Funkce $d^{\frac{1}{1-d}}$ nabývá hodnoty

$1/2$ pro $d = 2$; to je Richardsova křivka symetrická a přechází v logistickou křivku. Poměru asymetrie lze využít k počátečnímu odhadu hodnoty parametru d z dat; sofistikovanější postup navrhuje Hlubinka [3].

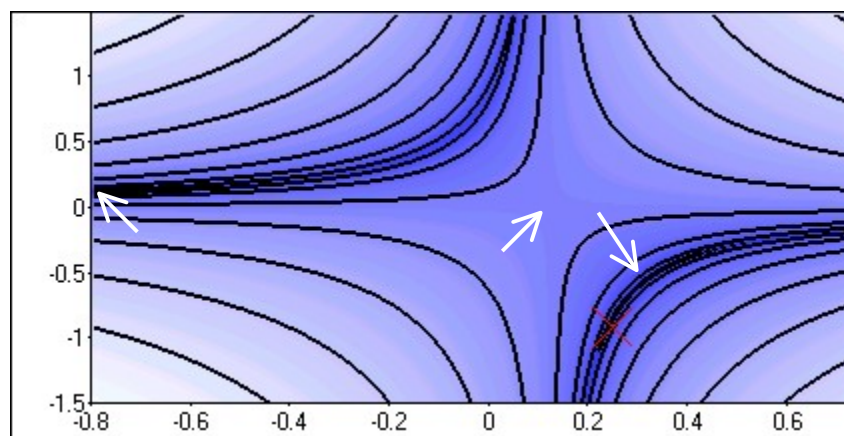
Míru asymetrie lze – kromě poměru asymetrie – měřit i mnoha jinými způsoby, například jako

$$\int_0^T |a - R(c + t) - R(c - t)| dt ,$$

kde T je dostatečně velká konstanta (příp. lze uvážit $T \rightarrow \infty$) a píšeme pouze $R(\cdot)$, přičemž ostatní parametry považujeme za konstantní.

Jistým problémem je interpretace parametru d . Jak jsme uvedli, hraje roli v míře asymetrie Richardsovy křivky. V praxi se osvědčuje, je-li jako počáteční odhad zvolena hodnota $d = 2$, kdy je Richardsova křivka symetrická (je to de facto logistická křivka), a nechat jej během iteračního postupu upravovat. Na druhou stranu lze ovšem očekávat, že parametr d bude při numerickém odhadu činit největší potíže, neboť je „nejvíce nelineární“.

Obecně lze problémy, které s odhadem parametrů nelineárních modelů vyvstávají v praxi, ukazuje následující obrázek. Je zde zachycen vrstevnicový graf, jak může vypadat graf kriteriální funkce $\sum_i (y_i - R(t_i, a, d, k, c))^2$, kde dvojice (y_i, t_i) jsou pozorovaná data, v průběhu její numerické minimalisace. V grafu je zachycena závislost hodnot kriteriální funkce (tmavé oblasti označují menší, světlé oblasti větší hodnoty) na hodnotách dvou parametrů Richardsovy křivky (vodorovná a svislá osa), přičemž ostatní parametry jsou považovány za konstantní.



V obrázku je zachycen křížek, který ukazuje, jak se numerický minimalizační algoritmus přibližuje k jednomu z lokálních minim, které je označeno „nejpravější“ šipkou; „prostřední“ šipka ukazuje sedlový bod a „nejlevější“ šipka ukazuje na oblast divergence, „rokli“ na grafu funkce. Obrázek ukazuje, jak obtížné může být nalezení globálního minima kriteriální funkce

růstového modelu a jak významnou roli hraje počáteční odhad hodnot parametrů z dat. Jak je vidět, zatímco z lineárních modelů jsme zvyklí, že kritériální funkce má tvar paraboloidu, v případě nelineárních modelů může být tvar velmi komplikovaný.

Význam parametru k zjistíme, budeme-li zkoumat hodnotu maxima derivace Richardsovy křivky. Hodnota derivace Richardsovy křivky v inflexi je $akd^{\frac{1}{1-d}}$; budeme-li uvažovat na chvíli $a = 1$, pak parametr k popisuje, kolikrát je maximální tempo růstu vyšší než poměr asymetrie.

Této interpretaci lze s výhodou využít i při stanovování počátečních odhadů parametrů při prokládání křivek daty pomocí numerických metod.

Poznámka. V praxi se setkáváme s problémem, jak poměřovat různé křivky co do tempa jejich růstu. Takové poměřování bývá součástí rozhodování, který z několika různých modelů-kandidátů, které se jeví jako vhodné, nakonec bude použit. Problém je v tom, že různé křivky mívají různý tvar a prosté porovnání hodnot jejich derivací v daném bodě t nemusí o celém průběhu křivky nic spolehlivého vypovídat. Dobrým měřítkem může být *průměrné tempo růstu* zavedené například jako

$$\frac{1}{a} \int_0^a \frac{df}{dt} df \cdot$$

V případě Richardsovy křivky je průměrné tempo růstu $k/(2d + 2)$. Podrobnější analýzu a srovnání různých typů křivek a jejich průměrného tempa růstu viz [1].

Konkrétní algoritmické postupy, jejich silné a slabé stránky při prokládání konkrétních dat růstovými křivkami, zde nediskutujeme; čtenář se může obrátit například na knihu [5].

Úvahy o růstových křivkách v ekonomii lze dále rozšiřovat a prohlubovat. Lze například uvažovat růstové modely s více než jednou inflexí – takové modely popisují situace, kdy po první fázi růstu dochází ke (krátkému) utlumení či stagnaci a pak růstový proces opět nabírá svoji dynamiku. V těchto situacích lze uvážít například modely, které popisují každou z obou růstových fází odděleně, použít součtu dvou růstových křivek s různými inflexemi či další zobecnění standardních křivek.⁴

Poznámka. Jako přirozené zobecnění logistické křivky (3) lze uvažovat například

$$L(t, a, b_1, k_1, b_2, k_2) = \frac{a}{1 + b_1 e^{-k_1 t} + b_2 e^{-k_2 t}} \cdot$$

⁴ Zajímavý výzkum na toto téma provedl předseda České statistické společnosti prof. Jaromír Antoch. Pomocí zobecněných růstových křivek s více inflexemi modeloval například závislost výšky lidí na jejich věku. Existuje i zajímavá diplomová práce MFF UK na toto téma; patrně však díky povodním, které postihly knihovnu MFF UK v Praze-Karlíně, se jí autorovi tohoto textu nepodařilo dohledat.

Popsaný způsob odvození a použití růstových křivek v ekonomii samozřejmě není jediný možný. Sama se nabízí možnost používat jako růstové křivky různě transformované distribuční funkce všech možných pravděpodobnostních rozložení a využívat tak známých vlastností, jako je jejich šikmost, špičatost apod. k úpravě jejich tvaru. Distribuční funkce obvyklých rozložení ovšem mívají tu nevýhodu, že to často nejsou elementární funkce a je třeba pak používat různých aproximací.

Tento přístup se však o přístupu diskutovaného v minulém textu značně liší již díky *interpretaci* takto získaných křivek. Modely Richardsovy, von Bertalanffyho, Gompertzův a další vycházejí z procesu popsaného jistou diferenciální rovnicí a snažíme-li se *vysvětlit* nějaký ekonomický jev, měli bychom nejprve zvážit, zdali tento jev je principiálně možné – alespoň za nějakého zjednodušení – interpretovat jako proces modelovaný příslušnou diferenciální rovnicí. Pokud bychom pouze „našli“ šikovou křivku, avšak její smysl daný jejím odvozením by námi vysvětlovanému procesu odporoval, těžko bychom pak mohli považovat takové vysvětlení za uspokojivé. Není stoprocentním cílem nalezení křivky, která by „co nejtěsněji“ prokládala pozorovaná data; ostatně, máme-li n pozorování veličiny f naměřených v různých časových okamžicích, mohli bychom závislost f „modelovat“ polynomem $(n - 1)$ -ního stupně a dosáhli bychom stoprocentní „úspěšnosti“. Avšak – co bychom pak vlastně *vysvětlili*?

Literatura

- [1] Seber, G. A. F. – Wild, C. J.: *Nonlinear Regression*. Wiley, New York 1988
- [2] Ratkowski, D. A.: *Nonlinear Regression Modelling*. Dekker, New York 1983
- [3] Hlubinka, D.: *Metody prokládání křivek s použitím na reálných datech*. In: Robust'98 (sborník). Jednota českých matematiků a fyziků, Praha 1998, str. 55 – 75
- [4] Monahan, J. F.: *Numerical Methods of Statistics*. Cambridge University Press, 2001
- [5] Antoch, J. – Černý, M. R. – Máša, P.: *Nelineární modely v mikrobiologii*. Výzkumná zpráva, Výzkumný ústav mlékárenský, Tábor 1999
- [6] Hušek, R. – Pelikán, J.: *Aplikovaná ekonometrie – teorie a praxe*. Professional Publishing, Praha 2003

Energetická funkcia Hopfieldovej neurónovej siete pri riešení úlohy o obchodnom cestujúcom

Zuzana Čičková, Marian Reiff

1. ÚLOHA O OBCHODNOM CESTUJÚCOM (TSP)

Predpokladajme, že máme graf G s n uzlami a h hranami. Ak sú jednotlivým hranám grafu priradené ohodnotenia c_{ij} , môžeme formulovať úlohu obchodného cestujúceho. Za úlohu obchodného cestujúceho považujeme dopravný problém s obmedzeniami:

1. aby obchodný cestujúci navštívil každé mesto práve raz,
2. vzdialenosť, ktorú musí prejsť bola minimálna (prípustnosť riešenia je potom daná nájdením Hamiltonovskej kružnice).

Keďže úloha o obchodnom cestujúcom patrí medzi tzv. NP-hard úlohy (čas známych najlepších metód pre riešenie týchto úloh rastie exponenciálne s veľkosťou problému), v centre pozornosti aj naďalej zostávajú heuristické metódy.

2. NEURÓNOVÉ SIETE

Neurónové siete, tak ako ich poznáme dnes, sú výsledkom súbežného vývoja v oblasti modelovania neurobiologických systémov a v oblasti technických aplikácií. Štruktúrou a procesmi napodobňujú skutočné neurónové siete, ktoré sú súčasťou nervovej sústavy človeka.

Súčasťou neurónovej siete:

1. model štruktúry neurónovej siete tzv. architektúra siete,
2. model vlastností prvkov siete (neurónov) a väzieb medzi nimi (synapsie),
3. model prenosu signálu,
4. model prenosu učenia.

(1) až (4) je potrebné popísať matematicky a výpočtovo realizovať (simulátor neurónových sietí)

3. RIEŠENIE TSP POMOCOU NEURÓNOVÝCH SIETÍ

Pri riešení úlohy o obchodnom cestujúcom použitím neurónových sietí je potrebné:

- popísať štruktúru neurónovej siete,
- definovať energetickú funkciu siete (na vyšetrenie stability siete),
- nájsť maticu váh prepojení tak, aby sa energia siete vždy pri zmene jej stavu znížila.

a. Úplnú dopravnú sieť môžeme popísať na tzv. Hopfieldovej sieti s n^2 neurónmi (jednotlivé mestá predstavujú neuróny a prepojenia medzi mestami reprezentujú synapsie, neuróny sú duálne t.j. vstupné aj výstupné zároveň).

b. Zaved'me sústavu binárnych premenných:

$v_{xi} = 1$, ak mesto x je i -tým mestom na trase obchodného cestujúceho

$v_{xi} = 0$, inak

a nech d_{xy} reprezentuje vzdialenosť medzi mestami x a y

Potom napr. trasu A-C-D-B môžeme popísať takto:

	1	2	3	4
A	1	0	0	0
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Energetická funkcia neurónovej siete bude potom funkciou premenných v_{xi}

Určíme:

- penále za to, ak by mesto bolo navštívené viackrát:

$$E^a = \frac{A}{2} \sum_{x=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n v_{xi} v_{xj}$$

- penále za to, ak by na tom istom kroku bolo navštívené viac ako jedno mesto:

$$E^b = \frac{B}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{x=1}^n \sum_{y=1, y \neq x}^n v_{xi} v_{yi}$$

- penále za to, ak by trasa obsahovala viac ako n miest:

$$E^c = \frac{C}{2} \left(\sum_{x=1}^n \sum_{i=1}^n v_{xi} - n \right)^2$$

- penále za to, ak by nájdená trasa nebola najkratšou trasou:

$$E^d = \frac{D}{2} \sum_{x=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{y=1, y \neq x}^n d_{xy} v_{xi} (v_{y,i+1} + v_{y,i-1})$$

pričom:

$$d_{xy} v_{xi} (v_{y,i+1} + v_{y,i-1}) = d_{xy}, \text{ ak mesto } y \text{ je na trase pred alebo za mestom } x$$

$$d_{xy} v_{xi} (v_{y,i+1} + v_{y,i-1}) = 0, \text{ inak}$$

Potom pre skôr uvedený príklad s 5-timi mestami dostaneme :

$$\overbrace{d_{AB} + d_{AC}}^{V_{A1}} + \overbrace{d_{BA} + d_{BD}}^{V_{B4}} + \overbrace{d_{CD} + d_{CA}}^{V_{C2}} + \overbrace{d_{DB} + d_{DC}}^{V_{D3}}$$

Riešenie je optimálne ak funkcia $E = E^a + E^b + E^c + E^d$ nadobúda svoje minimum, pričom A, B, C, D sú konštanty generované metódou pokusov a omylov.

c. Energetická funkcia Hopfieldovej siete pri maticovom číslovaní neurónov vyzerá nasledovne:

$$E_{\text{Hop}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n w_{ij,kl} v_{ij} v_{kl} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n O_{ij} v_{ij}$$

Prepíšme funkciu E v tvare ekvivalentnom funkcii E_{Hop} :

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{x=1}^n \sum_{y=1, y \neq x}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{xi,yj} v_{xi} v_{yj} + \sum_{i=1}^n \sum_{x=1}^n O_{xi} v_{xi}$$

kde

$$w_{xi,yj} = -A\delta_{xy}(1-\delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1-\delta_{xy}) - C - Dd_{xy}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1})$$

$$O_{xi} = Cn$$

4. ALGORITMUS PRE TSP

k1 : Priradenie váh prepojeniam a nastavenie prahov neurónov:

$$w_{xi,yj} = -A\delta_{xy}(1-\delta_{ij}) - B\delta_{ij}(1-\delta_{xy}) - C - Dd_{xy}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1})$$

$$O_{xi} = Cn$$

A,B,C,D sú zvolené parametre siete (sú meniteľné).

k2: Inicializácia: náhodne nastaviť hodnoty neurónov $u_{xi}(0)$ hodnotou z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak,

$$\text{aby } \sum_{x=1}^n \sum_{i=1}^n v_{xi}(0) = n$$

k3: Simulácia pokiaľ sieť neskonvergovala (teda jej stav sa nemení)

- možným problémom je zacyklenie siete

k4: Opakovanie od k2: Ak došlo k zacykleniu siete, je potrebný nový výpočet začínajúci nastavením nových počiatočných hodnôt $u_{xi}(0)$ alebo začať znova od k1 a nastaviť nové parametre A,B,C,D.

Summary

In this paper we present Hopfield Neural Network as way to solve Travelling Salesman Problem. Such Neural Nets are suited in principle to that problem, because they minimize an energy function, we present how this optimization problem's objective to energy function can be mapped.

Literatúra

Sinčák,P.,Andrejková,G.: Neurónové siete (Inžiniersky prístup)1.diel.elfa s.r.o.,Košice,1996

<http://neuron-ai.tuke.sk/cig/source/publications/books/NS2/html/node4.html>

<http://neuron.tuke.sk>

Autor

Ing. Zuzana Čičková, EU FHI KOVE Bratislava, cickova@euba.sk

Ing. Marian Reiff , EU FHI KOVE Bratislava, reiff@euba.sk

Recenzent

doc. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU FHI KOVE Bratislava, brezina@dec.euba.sk

Kritický řetěz – omezení kontraproduktivních projektových zákonů

Jiří Dolejší

V podstatě již od začátku sofistikovanějšího vývoje metod řízení projektů v 50. letech 20. století, tj. v době vzniku metody kritické cesty CPM, která byla poprvé využita armádou USA při vývoji nové řady amerických ponorek jako odpovědi na jaderný arzenál tehdejšího SSSR [4], se při zpětných vyhodnoceních úspěšnosti realizovaných projektů často narazilo, ne-li na všechny, tak alespoň na jeden z následujících problémů [1]:

- Projekty většinou nekončí v předem plánovaném čase, natož dříve ;
- Často je nutné řešit konflikty zdrojů;
- Dochází k překračování rozpočtů;
- Někdy nedošlo ani ke splnění původního záměru projektu.

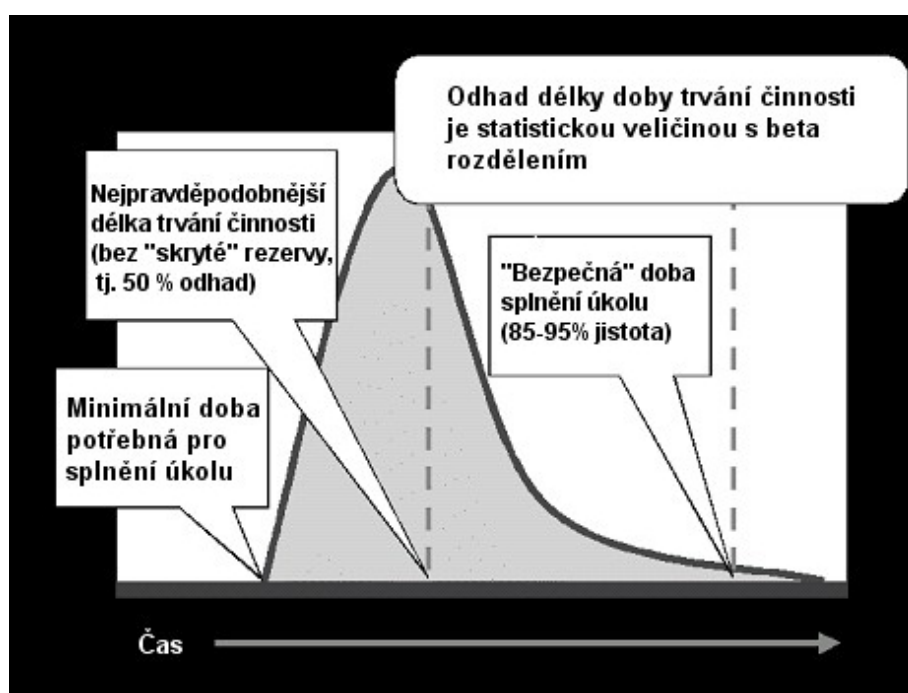
Příčinu těchto neúspěchů lze ve většině případů nalézt v oblasti řízení a plánování projektů, kdy jako základní chybný předpoklad bylo bráno deterministické chápání všech prvků projektu, namísto uvažování o jejich skutečném stochastickém původu.

Právě určitý stupeň nejistoty v odhadech, které se ve fázi plánování projektu podílejí na stanovování termínů, plánování potřebných zdrojů a rozpočtu, má původ v principech chování lidských zdrojů, které vycházejí jak z podstaty lidstva, tak i z existujících pracovních podmínek. Tyto principy, s kterými musí projektový management počítat a snažit se je eliminovat, se dají popsat těmito třemi kontraproduktivními projektovými „zákony“:

- Parkinsonův projektový zákon: „Činnost trvá nejméně tak dlouho, jak dlouhý má přidělený časový interval“
- Murphyho projektový zákon: „Vždy se něco pokazí“
- Studentův syndrom – zdroje mají tendenci zahajovat projektovou činnost „na poslední chvíli“.

Postup, jak v projektovém řízení již při sestavování plánu zohlednit tyto „rušivé“ faktory, uvedl v roce 1997 Dr. Eliyahu Goldratt prostřednictvím své knihy „Critical Chain“. Tato metoda kritického řetězu, která vznikla na základě dlouholetých zkušeností expertů projektového řízení, kteří pracovali pro Avraham Y. Goldratt Institute (AGI), na rozdíl od CPM zohledňuje kromě závislostí mezi činnostmi také hledisko dostupnosti lidských zdrojů, tj. zohledňuje fakt, že lidé musí také pracovat ještě na jiné činnosti (běžná operativa, nebo jiný projekt) a hlavně je v této metodě jiným způsobem nakládáno s rezervami v projektu.

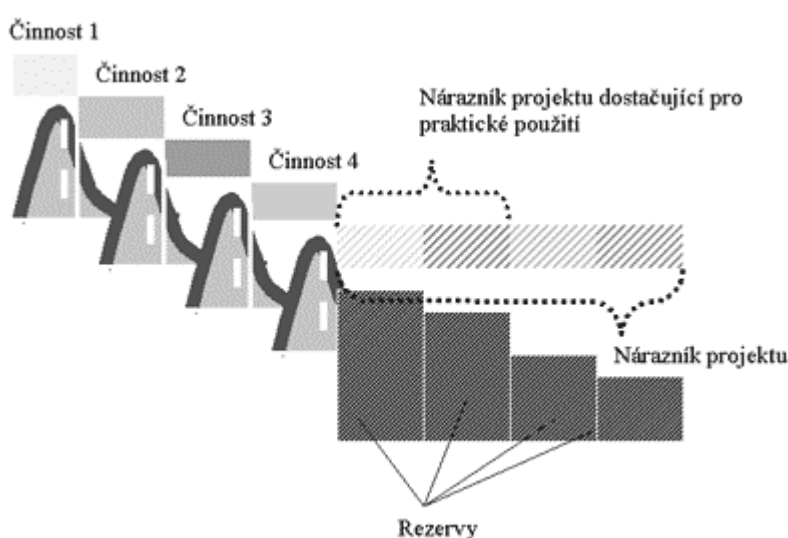
V klasické metodě kritické cesty se délka trvání činnosti, která je statistickou veličinou s beta rozdělením, stanovuje s 85-95% pravděpodobností splnění. To znamená, že každá takto odhadovaná doba potřebná pro provedení činnosti v sobě obsahuje jistou skrytou rezervu. Jelikož je provádění této činnosti na zodpovědnosti určeného pracovníka nebo týmu, je tímto teoreticky v každé činnosti vytvořeno prostředí pro působení Parkinsonova projektového zákona a pokud vyvstanou navíc nějaké předem nepředvídané překážky v plnění (Murphyho zákon), dochází tak ke zpoždění, které pokud jde o činnost na kritické cestě, může zapříčinit až nedodržení termínu splnění celého projektu. Takto odhadovaná „bezpečná“ délka doby splnění úkolu může někdy obsahovat až dvakrát či třikrát delší skrytou rezervu než je skutečná potřebná doba pro provedení činnosti [4].



Obr.1 – Odhad délky doby trvání činností (Beta rozdělení); Zdroj [3]

Metoda kritického řetězu pracuje jen s tzv. nejpravděpodobnější délkou trvání činnosti, tj. s 50% odhadem, kdy v polovině případů skončí činnost před odhadnutým termínem. Jak je ale zřejmé, takto sestavený plán projektu má podstatně nižší šanci na včasné dokončení a proto je rozdíl mezi takto stanovenou dobou a odhadem doby trvání v metodě CPM, tj. již zmiňovaní „skrytá“ rezerva, akumulován za všechny činnosti a v podobě tzv. nárazníku (buffer) vložen na konec celého projektu. Při využití statistického pravidla ohledně odchylek – „Odchylka celku je podstatně menší než součet odchylek jeho jednotlivých částí“ [4] – může být takto vytvořený časový nárazník rezerv celého projektu zhruba ve velikosti poloviny součtu rezerv, které jsou běžně použity v metodě kritické cesty. Případná zpoždění

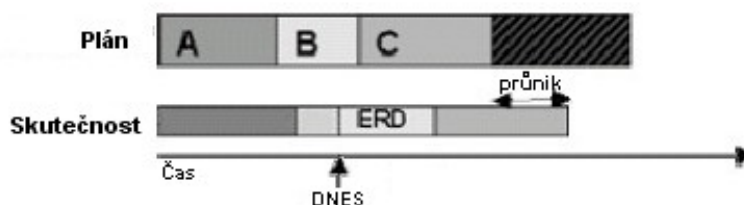
jednotlivých činností (s ohledem na 50% odhady je zpoždění běžná situace) posouvají aktuální konec projektu v čase a dochází tak k průniku do nárazníku projektu. Stav poškození nárazníku projektu je tak jedním ze základních ukazatelů o stavu vývoje projektu, podle kterého se řídí chování nejen vedoucího projektu, ale celého systému – tuto metodu řízení E. Goldratt označuje jako Buffer Management. V praxi se již také prokázalo, že pokud je délka činnosti takto stanovena, není již taková možnost projevení se studentova syndromu, jelikož pracovníci vykonávající danou činnost jsou už od počátku pod dostatečným časovým presem. Je sice možnost čerpat časovou rezervu v nárazníku a to bez jakéhokoliv postihu (k tomu byl přeci nárazník vytvořen), avšak zde je rezerva zcela v kompetenci vedoucího projektu, který může určit maximální podíl, který může opoždující se činnost čerpat. Projektový manager má tak v rukou silný nástroj pro efektivní řízení nejistoty a rizika v projektu.



Obr. 2 – Tvorba nárazníku projektu; Zdroj [6]

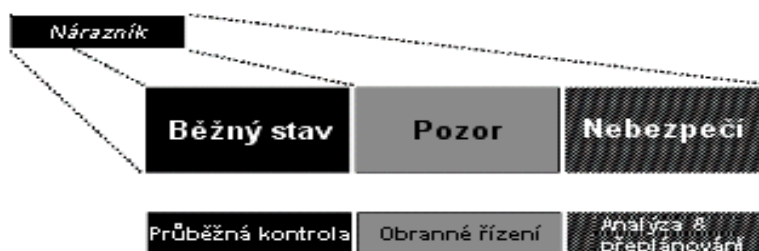
V projektu, který je řízen formou Buffer Managementu zavádí kritický řetěz velice účinný a jednoduchý nástroj pro určení stavu projektu. Postup projektu je určován na základě jednoduché otázky - „Kolik času je potřeba k dokončení činnosti?“ - kladené na zdroje, které aktuálně v projektu pracují. Aktualizace průběhu projektu je založena na odpovědi zdroje, tj. odhadovaném zbytkovém času plnění – ERD (Estimated Remaining Duration) [4]. Při řízení projektu se využívá principu štafetového běžce, kdy jednotlivé zdroje jsou s určitým předstihem informováni o blížícím se termínu zahájení jejich činnosti. Aby se zajistila včasná aktivizace zdrojů na projekt, přidávají se do plánu projektu tzv. Nárazníky zdrojů, což jsou pouze časová znamení, jenž upozorňují na to, aby byl nový zdroj včas upozorněn. Po zahájení práce na projektové činnosti „běží co nejrychleji“ a jakmile činnost dokončí, předají ji

okamžitě dále bez ohledu na termín, který odhadovali, že bude pro splnění potřeba - ERD. Tak se metoda kritického řetězu může naráz vyhnout jak Parkinsonovu zákonu (neboť zpracovatel činnosti je neustále dotazován, aby upravoval svůj minulý odhad délky trvání) a není zde ani moc prostoru pro odkládání začátku zpracování úkolu (studentův syndrom).



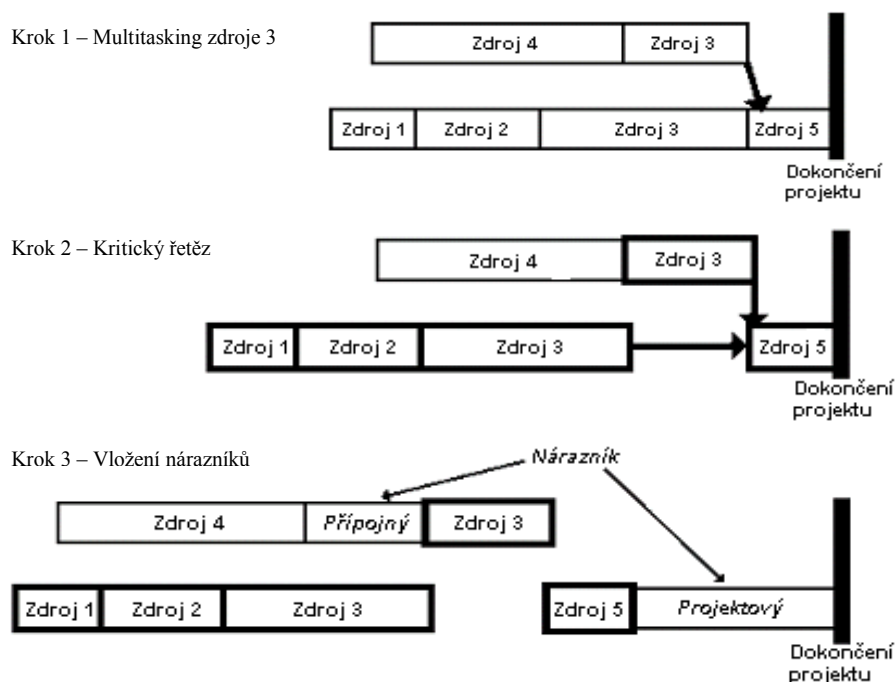
Obr. 3 – Odhad zbytkového času (ERD); Zdroj [4]

Tím se promítne skutečná dynamičnost v řízení celého projektu, protože pokud ERD umístíme ode dneška dále, tak další činnosti v řetězci budou posunuty na pozdější začátek, případně dřívější začátek a okamžitě je možno vidět „zakousnutí“ projektu do bufferu. Sledování stavu nárazníku projektu je potom zobrazeno v Buffer Reportu, který se dívá v projektu dopředu se znalostí získanou dosavadním průběhem a umožňuje určit dopad dosavadního průběhu na projekt jako celek. Report funguje také jako varování, co se stane pokud necháme projektu dosavadní průběh. Dále je možné Buffer Report používat pro analýzy typu „Co se stane, když ...“ a následně pro hodnocení dopadu možných problémů nebo opatření. Metoda kritického řetězu doporučuje reakce s ohledem na stav čerpání projektového nárazníku tak, že pokud čerpání zasahuje až do druhé třetiny, je nutné přemýšlet o případných krocích, které mohou následovat pokud se situace nezlepší. Pokud z celého nárazníku zbývá už jen poslední třetina, je nutné aby vedoucí projektu začal jednat a provedl hloubkovou analýzu toto čerpání. Pokud je tento průnik do rezervy skokový, „ozval“ se Murphyho projektový zákon a na některé z probíhajících činností vznikla nepředvídaná událost zbrzdžující celý projekt. Při pravidelném sledování, například v týdenních intervalech (záleží na povaze projektu a jeho časové jednotce), Buffer Report však na tuto událost včas poukáže.



Obr. 4 Buffer Report – čerpání nárazníku projektu; Zdroj [3]

Dalším důležitým principem kritického řetězu je, že plánuje zahájení činností na dobu, která je nezbytně nutná, aby činnost neohrozila včasné ukončení projektu. Pokud totiž pracovník má před sebou dvě činnosti, může si vybrat dříve činnost, kterou ještě není nezbytné zahájit, neboť po dokončení všech na ní závislých činností se stejně bude čekat ještě dlouhou dobu na dokončení jiných větví projektového plánu. Nebo bude pracovník nucen neustále „přeskakovat“ z jedné činnosti na druhou. Metoda kritického řetězu totiž také dává návod, jak řešit problém konfliktu zdrojů – tzv. multitasking, kdy přeskakování mezi činnostmi může projekt prodloužit až cca 4 – 6 krát. Zde je druhý přínosný pilíř metody kritického řetězu, neboť E. Goldratt doporučuje, aby zdroji bylo umožněno plynulé postupné zpracovávání jednotlivých činností, ale je nutno předem určit jejich priority. Jak je na obrázku zobrazeno, tyto činnosti pak budou zahrnuty do kritického řetězu projektu. Před integrační místa, kdy se vedlejší cesta připojuje ke kritickému řetězu se přidává další ochrana splnění projektu – Přípojný nárazník (Feeding Buffer). Ty mají stejnou funkci jako nárazník projektu pouze s tím rozdílem, že „chrání“ integrační místa multitaskingového zdroje a zabezpečují, aby byly požadavky plynule splněny.



Obr. 5 Multitasking *zdroje 3* – Vznik kritického řetězu; Zdroj [7]

Řízení projektů metodou kritického řetězu je metoda jenž se uplatňuje nejen u řízení jednotlivého projektu, ale síla tohoto nového pohledu na projektový management se ukazuje hlavně v multiprojektovém prostředí. V řadě praktických aplikací tohoto postupu bylo

dosáhnu podstatného zkrácení délky trvání projektů a zároveň se zvýšila pravděpodobnost dokončení projektu OTIFOB (on time, in full, on budget).

Bohužel i tato metoda, jak poukazuje P. Opletal [5] ve svém článku, má i své nedostatky, na které je potřeba upozornit. Především jde o odhady doby trvání činností, kdy není vždy dobré počítat s tím, že všichni lidé při plánování neznáme činnosti provádějí odhad tak, že uvažují s nejhorším možným průběhem a tudíž si „naplánují“ svou skrytou rezervu. Jsou totiž i lidé, kteří si naplánují práci tak, že naplánované úkoly pak ani nejdou stihnout. Nebo se jedná o takové činnosti, které jsou pro daný zdroj úplně nové, tudíž by mohl být stanoven i zcela podhodnocený odhad doby pro zpracování úkolu, toto se stává hlavně, pokud není daná činnost naplánována do většího detailu. Další otázkou je samotné plánování rezerv projektu. Proto aby bylo možno účinně řídit rezervy není nutné zavádět Buffer Management, ale lze toto vyřešit i zavedením a vyčleněním samostatných prázdných činností o potřebné délce. Nebo naopak v případech, kdy jsou nám nereálné termíny a obsahy činností vnuceny (např. nutnost získat zakázku, uvést nový výrobek na trh apod.) projekt žádné rezervy nemá, tudíž ani pomocí sofistikovaných metod kritického řetězu v podstatě není co řídit.

Literatura:

- [1] Dr. Goldratt, E.: Critical Chain; Nort River Press, Great Barrington, MA. 1997
- [2] A.Y. Goldratt Institute: TOC Project Management; A.Y. Goldratt Inst., New Haven 1998
- [3] Patric, F.S.: Critical Chain Scheduling and Buffer Management...; Project Management Institute, 1999 – www.focusedperformance.com
- [4] van Aalst, S., Šmíra, M.: Zkrácení T2M – Time to Market; www.goldratt.cz
- [5] Opletal. P., Critical chain; IT Systém 7-8/2002 – Řízení projektů, 2002
- [6] I.C.C.C.: Metoda Kritického řetězu; www.iccc-group.cz
- [7] Newbold, R.C.: Introduction to Critical Chain Project Management, ProChain Solutions, Inc. www.prochain.com

Summary:

The subject of this article is to describe new method of project management – „Critical chain“, developed by E. Goldratt. This method can protect from project's negative effects: Parkinson's Law, Murphy's Law and student's syndrom – which cause delay of project completion. The power of this method is, that safety isn't built into tasks, but is put into special project and feedings buffers. So resources are better managed with help of Buffer Report.

Autor:

Ing. Jiří Dolejší

+420 248 148 45

dolejsi.jiri@skofin.cz

Recenzent:

Doc.RNDr.,Ing. Petr FIALA, MBA, CSc.

+420 224 095 447 (VŠE)

pfiala@vse.cz

Zvyšovanie výrobnnej kapacity ako nástroj stratégie obmedzovania vstupu na trh

Andrea Furková

Využívanie zvýšeného objemu výroby je súčasťou tzv. strategického správania sa, ktoré je možné definovať ako investovanie zdrojov za účelom obmedzovania možnosti konkurencie. Strategické správanie predstavuje konanie firmy, ktoré vyžaduje zväčša nákladné investície za účelom zabránenia prípadnému budúcemu vstupu inej firmy na trh. Medzi takéto stratégie možno zahrnúť okrem zvyšovania produkcie aj napríklad „dravú cenotvorbu“, rozširovanie značky, reklamnú činnosť, voľbu technológií, výskum a vývoj. Takéto stratégie firmy možno uplatňovať iba v prípade oligopolistickej trhovej štruktúry. Monopolista, ako jediný účastník na strane ponuky, nemá žiadnu konkurenciu, či už skutočnú alebo potencionálnu a preto nemusí zvažovať strategické správanie sa. Obdobne firma pôsobiaca v prostredí dokonalej konkurencie nemusí brať do úvahy správanie sa konkurentov, ale z iného dôvodu. Firma na konkurenčnom trhu je príjemcom ceny a jej konkurenti nemôžu firme znemožniť predávať všetko čo chce za trhovú cenu. Strategické správanie sa je v tomto prípade neopodstatnené nakoľko by z neho nebol žiadny prínos. V prípade oligopolu existuje dostatočne málo dodávateľov, takže zisk oligopolistu je ovplyvňovaný ostatnými účastníkmi na trhu, ktorí sú si vedomí tejto vzájomnej závislosti.

Zvyšovanie kapacity pri vstupe ďalšej firmy na trh

Moderná literatúra o strategickom využití zvýšeného objemu výroby začína u Spencea, ktorý rozširuje základný model simultánneho stanovenia množstva o dodatočnú rozhodovaciu premennú objem výroby ako hornú hranicu produkcie, ktorú konkurenti považujú za plné využitie kapacít v prípade ich vstupu na trh. Preskúmame Spenceov model, v ktorom firma už pôsobiaca na trhu dokáže určiť svoju kapacitu skôr, ako urobia potencionálne firmy rozhodnutie o vstupe na trh. Tieto firmy konajú za predpokladu, že ak vstúpia na trh, potom už existujúca firma začne využívať určitú kapacitu. Za týchto okolností Spence skúma podmienky, za ktorých existujúca firma znemožní vstup určením kapacity, ktorú využíva iba v prípade vstupu inej firmy na trh.

Uvažujme s lineárnou verziou Spenceovej nákladovej funkcie

$$C(q) = rk + cq + F \quad (1),$$

kde

r – jednotkové náklady na zabezpečenie kapitálových služieb,

k – kapacita,

c – jednotkové variabilné náklady,

q – objem produkcie,

F – fixné náklady.

Kapacita sa meria v rovnakých jednotkách ako produkcia, takže jedna jednotka kapacity dovoľuje výrobu jednej jednotky produkcie. Produkcia je ohraničená kapacitou, čo je vyjadrené podmienkou v tvare

$$q \leq k \quad (2).$$

Keďže existujúca firma určuje svoju kapacitu vopred, sú pre ňu náklady na kapacitu fixnými nákladmi. Marginálne náklady existujúcej firmy sú c na jednotku produkcie. Stanovme predpoklad, že nie je prípustné strategické správanie sa vstupujúcej firmy na trh. Takáto firma si určí svoju kapacitu dostatočnú pre množstvo svojej produkcie po vstupe na trh. Marginálne náklady potenciálnej firmy sú preto $c + r$ na jednotku.

Predpokladajme, že dopyt po výrobku je vyjadrený lineárnou cenovooodbytovou funkciou

$$p = a - b(q_1 + q_2) \quad (3),$$

kde

p – cena výrobku,

q_1 – objem produkcie firmy, ktorá už existuje na trhu,

q_2 – objem produkcie firmy, ktorá by potenciálne mohla vstúpiť na trh.

Preskúmame stratégiu firmy, ktorá sa snaží o vstup na trh a následne stratégiu firmy pôsobiacej na trhu. Označme Π_2 ako zisk potenciálnej vstupujúcej firmy a Π_1 ako zisk existujúcej firmy. Konečným cieľom každej firmy je maximalizácia zisku. Vieme, že

existujúca firma má kapacitu k a potenciálne vstupujúca firma predpokladá, že sa táto kapacita plne využije po jej vstupe na trh. Za týchto okolností potenciálne vstupujúca firma maximalizuje svoj zisk riešením optimalizačnej úlohy v tvare

$$\Pi_2(q_2) = [p - (c + r)]q_2 - F \rightarrow \max \quad (4).$$

Ak si uvedomíme, že $q_1 = k$, t. j. objem produkcie existujúcej firmy po vstupe druhej firmy na trh sa bude rovnať jej zvolenej kapacite a označíme $S_{c+r} = [a - (c + r)]/b$ (množstvo, ktoré by bolo predané ak by bola cena $c + r$), potom môžeme úlohu (4) preformulovať v tvare

$$\begin{aligned} \Pi_2(q_2) &= [a - b(q_1 + q_2) - (c + r)]q_2 - F \\ \Pi_2(q_2) &= \left[b \left(\frac{a - (c + r)}{b} \right) - q_1 - q_2 \right] q_2 - F \\ \Pi_2(q_2) &= b(S_{c+r} - k - q_2)q_2 - F \rightarrow \max \end{aligned} \quad (5).$$

Firma vstupuje na trh iba v prípade, že výsledný zisk je kladný.

Na základe podmienky existencie extrému ziskovej funkcie vstupujúcej firmy môžeme vyjadriť objem ponuky tejto firmy ako funkciu objemu ponuky existujúcej firmy, tzv. funkciu reakcie²

$$q_2 = \frac{1}{2}(S_{c+r} - k) \quad (6).$$

Zaujímavosťou tejto funkcie reakcie je, že sa v nej nevyskytuje objem ponuky existujúcej firmy (q_1), ale kapacita firmy k , pretože vstupujúca firma očakáva, že ak vstúpi na trh, existujúca firma rozšíri svoju produkciu až po svoju kapacitu. Pri existencii funkcie reakcie (6) a po jej dosadení do (5) možno očakávaný zisk vstupujúcej firmy po jej vstupe na trh zapísať ako

² bližšie pozri napr. [1]

$$\Pi_2(q_2) = b \left(\frac{S_{c+r} - k}{2} \right)^2 - F \quad (7).$$

Vstupujúca firma očakáva tým nižší zisk, čím väčšia je kapacita k existujúcej firmy. Zo vzťahu (7) vyjadrením k a stanovením Π_2 na nulovej úrovni získame výraz na určenie úrovne kapacity, pri ktorej je obmedzovaný vstup

$$\bar{k} = S_{c+r} - 2 \left(\frac{F}{b} \right)^{1/2} \quad (8).$$

Vráťme sa k stratégii existujúcej firmy. Firma realizuje svoj maximálny zisk pri dvoch ohraničujúcich podmienkach. Prvé ohraničenie je dané technológiou, to znamená, že produkované množstvo nemôže byť väčšie ako výrobná kapacita firmy. Druhé ohraničenie súvisí so strategickým správaním sa firmy. Stanovená kapacita musí byť dostatočná na to, aby sa zabránilo vstupu inej firmy na trh.

Formálne sa dá daný optimalizačný problém zapísať v tvare

$$\Pi_1(q_1, k) = (p - c)q_1 - rk - F \rightarrow \max \quad (9)$$

pri ohraničeniach

$$q_1 \leq k \quad (9a),$$

$$k \geq \bar{k} \quad (9b).$$

Naformulujme pre danú úlohu nelineárneho programovania Lagrangeovu funkciu³

$$L(q_1, k, \lambda, \mu) = b(S_c - q_1)q_1 - rk - F + \lambda(k - q_1) + \mu(k - \bar{k}) \quad (10),$$

kde

³ bližšie pozri [4]

$$S_c = \frac{a-c}{b}.$$

λ a μ sú tieňové náklady firmy v tom zmysle, že predstavujú statený zisk z obmedzovania vstupu. Optimálnu výrobnú stratégiu získame maximalizáciou príslušnej Lagrangeovej funkcie (10), čím dokážeme určiť vyrábané množstvo (q_1) a kapacitu (k).

Na základe Lagrangeovej funkcie môžeme formulovať nutné podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera nasledujúco

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q_1, k, \lambda, \mu)}{\partial q_1} = b(S_c - 2q_1) - \lambda = 0 & \quad \frac{\partial L(q_1, k, \lambda, \mu)}{\partial k} = -r + \lambda + \mu = 0 & \quad \frac{\partial L(q_1, k, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = k - q_1 \geq 0 & \quad \frac{\partial L(q_1, k, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = k - \bar{k} \geq 0 \\ \lambda(k - q_1) = 0 & & & \mu(k - \bar{k}) = 0 \\ \lambda \geq 0 & & & \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Záver

Získali sme výrobnú stratégiu existujúcej firmy charakterizovanú Kuhn-Tuckerovými podmienkami. Bod, ktorý vyhovuje podmienkam optimálnosti Kuhna – Thuckera je bod $x^0 = (q_1, k, \lambda, \mu)$. Avšak táto analýza môže byť ďalej rozvíjaná v zmysle veľkosti fixných nákladov, čo vedie k ďalším modelom strategického správania sa.

Summary

This paper deals with strategic behavior which may be defined as the investment of incumbent firm in order to deter future entry of other firm. We examined output expansion in Spence model extended with an additional decision variable – capacity, an upper limit on output that rivals believe will be fully utilized in the event of entry.

Literatúra

- [1] Martin, S.: Advanced Industrial Economics, Blackwell, Cambridge 1996
- [2] Webster, Thomas J.: Managerial Economics, Theory and Practice, Elsevier, New York 2003

[3] Fendek, M.: Kvantitatívna mikroekonómia, Iura edition, Bratislava 1999

[4] Fendek, M.: Nelineárne optimalizačné modely a metódy 1998

Autor

Ing. Andrea Furková, KOVE FHI EU v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava,
e-mail: andrea.furkova@euba.sk, tel.: 02/67295832

Recenzent

Prof. Ing. Michal Fendek, PhD., KOVE FHI EU v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35
Bratislava, e-mail: fendek@euba.sk, tel.: 02/67295833

Overenie kurzovej politiky v rámci Marshall-Lernerovej podmienky pre Slovenskú republiku

Michaela Chocholatá

Monetárna politika NBS bola zameraná predovšetkým na stláčanie hodnoty koruny voči zahraničným menám so zdôvodnením, že sa tým koriguje negatívny vývoj obchodnej bilancie. O splnení Marshall – Lernerovej podmienky, ktorá je podmienkou k tomu, aby znehodnotenie domácej meny viedlo k zlepšeniu obchodnej bilancie, sa preto často diskutovalo vo výskumných prácach. V prípade, že údaje za SR boli upravené o silné výkyvy spôsobené zásahmi vlády, dereguláciou cien, atď. možno konštatovať, že došlo k splneniu Marshall – Lernerovej podmienky. V prípade použitia neočistených štatistických údajov, bolo splnenie Marshall – Lernerovej podmienky problematické. Takáto analýza (hlavne v relácii slovenská koruna – SKK a česká koruna – CZK) bola uvedená napr. v práci [3], ale aj v iných prácach prognostického ústavu SAV. V našom príspevku sme sa zamerali na analýzu SKK a EUR.

Prvá časť príspevku je venovaná stručnej charakteristike obchodnej bilancie, nasleduje objasnenie a odvodenie Marshall – Lernerovej podmienky a posledná časť je zameraná na overenie platnosti tejto podmienky pre Slovenskú republiku.

1. Výmenný kurz a obchodná bilancia

Každá krajina obyčajne vedie obchodnú bilanciu v domácej mene, čo možno písať:

$$B = p_x x - \varepsilon p_m m \quad (1)$$

kde p_x sú ceny exportovaného tovaru v domácej mene, p_m sú ceny importovaného tovaru v zahraničnej mene, x a m predstavujú kvantitatívne množstvá exportu, resp. importu a ε je výmenný kurz (definovaný priamym spôsobom, t.j. ako množstvo jednotiek domácej meny potrebné na nákup jednej jednotky zahraničnej meny). Potom hodnota importu, t.j. $p_m m$ vyjadrená v zahraničnej mene, je po prenásobení kurzom ε transformovaná na domácu menu a hodnota exportu $p_x x$ je definovaná v domácej mene. Pre zjednodušenie analýzy budeme v ďalšom texte predpokladať, že ceny p_x a p_m sú pre skúmané obdobie konštantné.

Pri pohľade na vzťah (1) je zrejmé, že čím bude hodnota výmenného kurzu ε nižšia, za predpokladu nezmenených objemov exportu a importu, tým priaznivejší účinok to bude mať na obchodnú bilanciu. Naopak, zvyšovanie hodnoty výmenného kurzu ε , opäť za predpokladu nezmenených objemov exportu a importu, bude mať za následok zhoršovanie obchodnej bilancie. Prijatie takýchto záverov by bolo dosť povrchné, keďže veľkosť výmenného kurzu sa nevyhnutne prejaví aj na veľkostiach exportu a importu, ktoré sme v predchádzajúcej úvahe považovali za konštantné. Ak sa totiž domáca mena (slovenská koruna – SKK) zhodnocuje (*ceteris paribus*), zahraničné produkty sa stávajú lacnejšie pre Slovákov a súčasne sa naše výrobky stávajú drahšie vo svete. Z toho vyplýva, že zhodnotenie SKK povedie v konečnom dôsledku ku kvantitatívnemu znižovaniu exportu a zvyšovaniu importu, a teda k zhoršovaniu obchodnej bilancie. Opačný vplyv by malo znehodnotenie SKK. Pre SR by v tomto prípade bol zaujímavý export, menej zaujímavý by bol import (v dôsledku vysokej ceny), čo by malo za následok zrejme zlepšovanie obchodnej bilancie.

Pri vyššie uvedených úvahách sme dospeli k protikladným záverom, a nemožno teda tvrdiť, že vyrovnanie obchodnej bilancie je možné dosiahnuť len vhodnými zmenami výmenného kurzu, t.j. znehodnotením meny v prípade jej deficitu a zhodnotením v prípade prebytku. Problém je totiž v tom, že „obchodná bilancia je vyjadrovaná v peňažných jednotkách a preto nie je isté, že kvantitatívne zmeny exportu a importu v „správnom” smere sú zárukou, že ich hodnoty sa tiež zmenia v „správnom” smere.”[1]

Definujme kurzovú elasticitu expotu η_x a kurzovú elasticitu importu η_m ako cenovú elasticitu, ktorá je definovaná ako pomer medzi proporcionálnou zmenou množstva a proporcionálnou zmenou ceny (reprezentovanou výmenným kurzom). Ak x (m) je množstvo exportu (importu) a Δx (Δm) kvantitatívna zmena exportu (importu), potom pre η_x a η_m platia nasledovné vzťahy:

$$\eta_x = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}} \qquad \eta_m = - \frac{\frac{\Delta m}{m}}{\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}} \qquad (2)$$

znamienko “-“ pred druhým zlomkom slúži k získaniu kladnej hodnoty tohto zlomku a upravuje teda vzájomné opačné pôsobenie hodnôt Δm a $\Delta \varepsilon$.

2. Objasnenie a odvodenie Marshall – Lernerovej podmienky

Za účelom posúdenia efektov zmien výmenného kurzu, uvažujme s 1 %-ným znehodnotením domácej meny (prípád zhodnotenia je perfektne symetrický¹). Dôsledkom tohto znehodnotenia bude zvýšenie množstva exportu o $\eta_x\%$, čo možno matematicky na základe vo vzťahu (2) uvedenej definície η_x vyjadriť takto:

$$\eta_x \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta x}{x} \quad (3)$$

Ak predpokladáme, že cena p_x sa nemení, hodnota exportu v domácej mene sa zvyšuje percentuálne rovnako ako jeho množstvo, t.j. o $\eta_x\%$. Po aplikácii tohto percentuálneho zvýšenia na pôvodnú hodnotu exportu ($p_x \cdot x$) získame nominálne zvýšenie hodnoty exportu, ktoré predstavuje

$$\eta_x p_x x / 100 \quad (4)$$

Pokiaľ ide o import, jeho množstvo poklesne o $\eta_m\%$, t.j. na základe vzťahu (2) máme:

$$-\eta_m \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta m}{m} \quad (5)$$

Za predpokladu, že zahraničná cena p_m je konštantná, hodnota importu v zahraničnej mene poklesne o $\eta_m\%$. V závislosti od toho, či $\eta_m\%$ je väčšie alebo menšie ako 1% môžu nastať dve situácie:

- Ak $\eta_m\% > 1\%$ hodnota importu v zahraničnej mene klesá o väčšiu hodnotu ako sa zvyšuje cena zahraničnej meny, znamená to teda, že hodnota importu v domácej mene klesá. Táto skutočnosť v spojení s rastom hodnoty exportu, vyjadreným v domácej mene, vedie k zlepšeniu obchodnej bilancie.

- Za predpokladu, že $\eta_m\% < 1\%$ hodnota importu v zahraničnej mene klesá o menšiu hodnotu ako sa zvyšuje cena zahraničnej meny, znamená to teda, že hodnota importu v domácej mene rastie. Vo všeobecnosti sa hodnota importu v domácej mene mení približne o

¹ Gandolfo, G.: International Economics II. Berlin, Springer – Verlag 1987.

$(1-\eta_m) \%^2$. Po aplikácii tohto percenta na počiatočnú hodnotu importu ($\epsilon p_m m$), dostaneme nominálne zvýšenie hodnoty importu

$$(1-\eta_m) \epsilon p_m m / 100 \quad (6)$$

Podmienkou pre zlepšenie obchodnej bilancie je zrejme skutočnosť, aby zvýšenie hodnoty exportu bolo väčšie ako zvýšenie hodnoty importu, t.j. aby platil vzťah

$$\eta_x p_x x > (1-\eta_m) \epsilon p_m m, \quad (7)$$

odkiaľ po vydelení výrazom $\epsilon p_m m$ a následnej úprave dostaneme

$$\eta_x \frac{p_x x}{p_m m \epsilon} + \eta_m > 1 \quad (8)$$

Ak uvažujeme zjednodušujúci predpoklad, že obchodná bilancia je na začiatku skúmaného obdobia v rovnováhe, t.j. $p_x x = \epsilon p_m m$, nerovnicu (8) môžeme písať v tvare:

$$\eta_x + \eta_m > 1, \quad (9)$$

čo je podmienkou k tomu, aby znehodnotenie domácej meny viedlo k zlepšeniu obchodnej bilancie. Podmienka (9) sa v literatúre uvádza pod názvom Marshall-Lernerova podmienka.

Vo všeobecnosti je potrebné uvažovať s nerovnosťou (8), pričom je hneď zřejmé, že za predpokladu existencie počiatočného deficitu obchodnej bilancie, je požiadavka kladená na tvar vzťahu sumy elasticít, ktoré pôsobia na zlepšenie obchodnej bilancie, prísnejšia. Zlomok, ktorým sa vo vzťahu (8) násobí η_x je v skutočnosti v prípade deficitu menší ako 1 ($p_x x < \epsilon p_m m$), pričom platí, že čím je menší, tým väčší je deficit, z čoho vyplýva, že ak má byť splnený vzťah (8), hodnoty elasticít musia byť vyššie ako v prípade platnosti vzťahu (9). Vo všeobecnosti to teda znamená, že podmienka (8) nemusí byť splnená, aj keď podmienka (9) je splnená.

² Matematický dôkaz uvádza Gandolfo na strane II. 82. Vzťah platí „presne“ len pre infinitezimálne malé zmeny a s ich zvyšovaním jeho presnosť klesá (odtiaľ výraz „približne“).

3. Marshall – Lernerova podmienka a Slovenská republika

V tejto časti sa pokúsime overiť platnosť Marshall-Lernerovej podmienky pre Slovenskú republiku za roky 1999 – 2003, keďže práve od roku 1999 je referenčnou menou pre slovenskú korunu (SKK) mena euro (EUR). Tabuľka č.1 udáva veľkosť priemerných hodnôt ročných výmenných kurzov SKK/EUR (ozn. ϵ), ich absolútne a percentuálne medziročné zmeny. Z nižšie uvedenej tabuľky č.1 je zrejmé, že SKK sa medziročne voči EUR s výnimkou roka 2001 zhodnocovala, t.j. hodnoty výmenného kurzu klesali.

Tabuľka č.1

Rok	ϵ	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon / \epsilon \cdot 100 \%$
1999	44,115	-	-
2000	42,589	-1,526	-3,45914 %
2001	43,309	0,72	1,690577 %
2002	42,699	-0,61	-1,40848 %
2003	41,491	-1,208	-2,82911 %

Z tabuľky č.2, ktorá obsahuje údaje o ročných hodnotách (v mil. SKK) exportu a importu, ich absolútnych a percentuálnych medziročných zmenách a salde obchodnej bilancie, je zase zrejmy neustály nárast ročných hodnôt exportu i importu.

Tabuľka č.2

Rok	export	$\Delta\text{exportu}$	$\%\Delta\text{exportu}$	Import	$\Delta\text{importu}$	$\%\Delta\text{importu}$	saldo
1999	518078	-	-	554821	-	-	-36743
2000	661511	143433	27,6856 %	684402	129581	23,3555 %	-22891
2001	741008	79497	12,01749 %	823451	139049	20,3169 %	-82443
2002	787349	46341	6,253779 %	865126	41675	5,061 %	-77777
2003	933235	145886	18,52876 %	951121	85995	9,9402 %	-17886

V tabuľke č.3 sú vypočítané hodnoty kurzovej elasticity expotu η_x , kurzovej elasticity importu η_m a súčty $\eta_x \frac{p_x x}{p_m m \epsilon} + \eta_m$ a $\eta_x + \eta_m$ slúžiace na posúdenie platnosti Marshall - Lernerovej podmienky.

Tabuľka č.3

Rok	η_x	η_m	$\eta_x \frac{p_x x}{p_m m \varepsilon} + \eta_m$	$\eta_x + \eta_m$
1999/2000	-8,00361	6,75181	-0,72176	-1,2518
2000/2001	7,108511	-12,0177	-5,14695	-4,90919
2001/2002	-4,44008	3,59324	-0,4023	-0,84684
2002/2003	-6,54933	3,513538	-2,44699	-3,0358

Ďalej popíšeme a zhodnotíme platnosť Marshall – Lernerovej podmienky v analyzovanom období. V roku 2000 sa oproti roku 1999 SKK voči EUR zhodnotila o 3,45914%, hodnota exportu sa zvýšila o 27,6856 % a hodnota importu o 23,3555 %. Kritické elasticity η_x a η_m sme vypočítali podľa vzťahov v (2) a zapísali sme ich do tabuľky č.3 Keďže obchodná bilancia bola v roku 1999 záporná –36743 mil. SKK, k tomu, aby zhodnotenie SKK viedlo k jej zhoršeniu, by na základe Marshall – Lernerovej podmienky muselo platiť (keďže ide o zhodnotenie), že ľavá strana vzťahu (8), resp. (9) by mala byť menšia ako 1. Z tabuľky č.3 vyplýva, že ľavé strany súčtov sú síce menšie ako 1, ale obchodná bilancia sa napriek tomu zlepšila o $\Delta \text{exportu} - \Delta \text{importu} = 13852 \text{ mil. SKK}$.

Iná situácia bola v roku 2001, keď sa SKK voči EUR vzhľadom na rok 2000 znehodnotila o 1,690577 %. Zvýšenie hodnôt exportu i importu je uvedené v tabuľke č.2 a zodpovedajúce kritické elasticity v tabuľke č.3. Obchodná bilancia vykazovala i v roku 2000 záporné saldo, a teda, ak by boli splnené podmienky (8), resp. (9), malo by znehodnotenie SKK spôsobiť zlepšenie obchodnej bilancie. Ako je zrejmé z tabuľky č.3, podmienka (8) ani (9) nie je splnená, a teda znehodnotenie SKK nevedlo k zlepšeniu, ale naopak k zhoršeniu obchodnej bilancie o $\Delta \text{exportu} - \Delta \text{importu} = -59552 \text{ mil. SKK}$.

Situácia v roku 2002 oproti 2001 a v roku 2003 oproti 2002 bola podobná, v oboch prípadoch sa SKK zhodnotila - o 1,40848%, resp. 2,82911%. V oboch prípadoch boli ľavé strany vzťahov (8) i (9) menšie ako 1, čo malo v súlade s Marshall – Lernerovou podmienkou viesť k zhoršeniu obchodnej bilancie. Obchodná bilancia sa však v oboch prípadoch nezhoršila, ale zlepšila o 4666 mil. SKK, resp. 59891 mil. SKK.

Možno teda konštatovať, že v podmienkach Slovenskej republiky bol vývoj výmenného kurzu vo vzťahu k obchodnej bilancii v súlade s tým, čo tvrdí Marshall – Lernerova podmienka len v roku 2001 v porovnaní s rokom 2000. V ostatných analyzovaných

obdobíach bola skutočná situácia v Slovenskej republike v protiklade s Marshall – Lernerovou podmienkou. Príčiny nesplnenia Marshall – Lernerovej podmienky vidíme:

- v náraste toku investícií na Slovensko, čo pôsobí negatívne na vývoj obchodnej bilancie; budúcnosť ukáže zmysluplnosť týchto tokov, ak nejde o špekulačný kapitál (rok 2000),
- cenová hladina v SR je stále v určitých komoditách prispôsobená domácej mzdovej politike, a tak nižšie ceny i napriek zhodnoteniu koruny nepresahujú ceny zahraničné,
- v rokoch 2002 a 2003 dochádza k vysokému vývozu (Volkswagen, US Steel – existovali dokonca tlaky EÚ na zníženie vývozných kvót), a teda ani zhodnotenie SKK nemalo vplyv na tvorbu, resp. rast deficitu.

Summary

This paper concentrates on the brief characteristic of the trade balance, explanation and derivation of the Marshall – Lerner condition and validity illustration of the Marshall – Lerner condition in case of the Slovak Republic. It was found out that the situation in the Slovak Republic was in accordance with the Marshall – Lerner condition only in 2001 in comparison with 2000.

Literatúra

1. Gandolfo, G.: International Economics II. Berlin, Springer – Verlag 1987.
2. Chocholatá, M.: Nominálny verzus reálny výmenný kurz SKK/EUR. Zborník zo IV. Medzinárodnej vedeckej konferencie doktorandov: Participácia doktorandov na vedeckovýskumnej činnosti, FHI EU Bratislava, 2004.
3. Ivaničová, Z.: Cointegration of the exchange rate and balance of trade. Ex post analyse for Slovak and Czech Republic. Ekonomika a informatika (vedecký časopis FHI EU), Bratislava, 2004 (v tlači).
4. Makroekonomické ukazovatele štvrťročných národných účtov a pridaná hodnota za 1. – 3. štvrťrok 2003 (revidované údaje). Publikácia Štatistického úradu SR, 2003.
5. www.statistics.sk, www.nbs.sk

Autor

Ing. Michaela Chocholatá, KOVE FHI EU Bratislava, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, email: chocholatam@yahoo.com, tel. 67295 832.

Recenzent

Prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., KOVE FHI EU Bratislava, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, email: ivanic@euba.sk, tel. 67295 830.

Globalizace světových akciových trhů

(za pomoci grafických modelů)

Vladislav Chýna

1 Úvod

V dnešní době se stále častěji mluví o globalizaci světových akciových trhů. Jakýkoli pohyb na jednom akciovém trhu se během velmi krátké doby projeví i na trzích ostatních. Snad nejlépe situaci vystihuje přísloví finančníků: „Když Amerika kýchne, Evropa dostane rýmu.“ V následujícím příspěvku se pokusíme na tuto situaci podívat poněkud podrobněji – popíšeme strukturu závislosti mezi několika americkými a několika evropskými akciovými indexy, a to jak v současnosti, tak v nedávné minulosti.

Pokusíme se rovněž odpovědět na otázku, zda je český akciový trh (reprezentovaný indexem PX50) ovlivňován zahraničními akciovými trhy (zahraničními akciovými indexy).

K popisu struktur podmíněných nezávislostí těchto finančních dat můžeme velmi dobře použít grafické modely. Jedním z hlavních problémů v grafických modelech je popsat rozdělení s danými marginály. V příspěvku se omezíme na modely založené na normálním rozdělení - tzv. Gaussovské grafické modely.

Nejprve několik základních pojmů:

2 Základní pojmy

Graf G sestává ze dvou množin, množiny vrcholů, V , a z množiny hran, E . Budeme psát $G = (V, E)$ a říkat, že vrcholy v_i a v_j jsou spojeny v grafu $G = (V, E)$, pokud mezi v_i a v_j existuje hrana. Tuto skutečnost zapíšeme $\{v_i, v_j\} \in E$.

K reprezentaci grafu v paměti počítače budeme používat matici sousednosti. Matice sousednosti $A_G = (a_{ij})$ grafu $G = (V, E)$ je čtvercová matice definovaná následujícím předpisem:

$$a_{ij} = 1 \text{ pokud } \{v_i, v_j\} \in E.$$

$$a_{ij} = 0 \text{ jinak.}$$

Velmi důležitým termínem v iterativních algoritmech je pojem kliky. Je to podmnožina vrcholů, která indukuje úplný graf (tj. graf, ve kterém je každý vrchol spojen hranou se všemi ostatními vrcholy), ale která po přidání dalšího vrcholu již indukuje graf, který úplný není (můžeme říci, že klika je maximální úplný podgraf).

Ke každému grafu můžeme najít tzv. komplementární graf. Graf CG je komplementární k grafu $G = (V, E)$, pokud má stejnou množinu vrcholů V a množinu hran

CE , která splňuje podmínku, že $\{v_i, v_j\} \in CE$ pokud $v_i \neq v_j$ a $\{v_i, v_j\} \notin E$. Kliky komplementárního grafu se nazývají antikliky.

Grafy můžeme s výhodou použít k popsání vztahů mezi proměnnými. Nezávislý graf (precizněji graf podmíněných nezávislostí) vektoru proměnných $X = (X_1, \dots, X_k)$ je neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, 2, \dots, k\}$ a (i, j) nepatří do množiny hran E , právě když $X_i \perp\!\!\!\perp X_j | X_{V \setminus \{i, j\}}$. Grafický model pro X je rodina pravděpodobnostních rozdělení pro X , která splňuje párové podmínky nezávislosti vzhledem k grafu G .

V případě mnohorozměrného normálního rozdělení pak mluvíme o tzv. Gaussovských grafických modelech.

Vztah mezi grafy a náhodnými veličinami je kvantifikován pomocí následující věty (tzv. separačního teorému):

Nechť $X = (X_a, X_b, X_c)$ a necht' v nezávislém grafu pro X každý vrchol v b je separován od každého vrcholu v c pomocí podmnožiny a (tj. každá cesta za b do c obsahuje aspoň jeden vrchol z a), pak platí

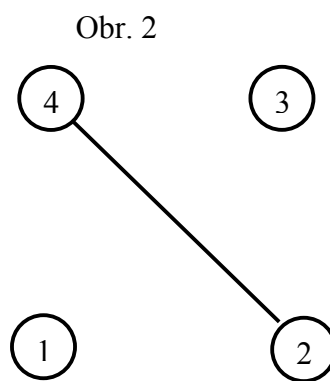
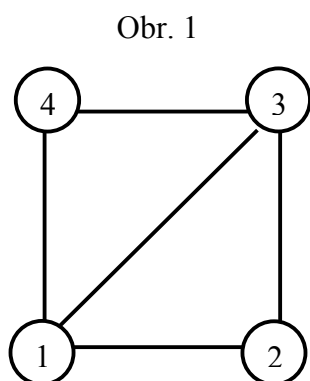
$$X_b \perp\!\!\!\perp X_c | X_a.$$

Příklad:

Graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$ a množinou hran $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ můžeme zakreslit tak, jak je uvedeno na Obrázku 1. Tento graf má kliky $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}$ a antikliky $\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}$. $\{3, 4\}$ separuje vrcholy 1 a 3, tedy $2 \perp\!\!\!\perp 4 | \{1, 3\}$. Matice sousednosti tohoto grafu má tvar:

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Komplementární graf je zakreslen na Obrázku 2.



3 Postupy výpočtu varianční matice

V této kapitole odpovíme na otázku: Jak najít „správnou“ (tj. dobře popisující data) varianční matici, když máme k dispozici reálná data a nezávislý graf? Můžeme použít metod založených na Bayesovské statistice (jako v [3] nebo [4]) nebo (což je náš případ) metod založených na maximálně věrohodných odhadech.

Věta: Maximálně věrohodné odhady pro Gaussovské grafické modely

Maximálně věrohodný odhad varianční matice K (a její inverzní varianční matice $D = K^{-1}$) v grafickém modelu s grafem G , založený na náhodném výběru z mnohorozměrného normálního rozdělení $N(0, K)$, splňuje věrohodnostní rovnice

$\hat{d}_{ij} = 0$, v případě, že vrcholy i a j nejsou spojeny v grafu G , a

$\hat{K}_{aa} = S_{aa}$, v případě, že podmnožina a vrcholů grafu G tvoří kliku (S značí výběrovou varianční matici).

Odhady parametrů $\hat{K}$ a $\hat{D}$ jsou svázány vztahem $\hat{D} = (\hat{K})^{-1}$ a jsou jedinečné s pravděpodobností jedna.

Věrohodnostní rovnice je možné řešit přímým výpočtem (jako v [4]), ale jednodušší je použít některý z iterativních algoritmů. V následujícím textu popisujeme jeden z nich.

4 Iterativní algoritmus

V této kapitole popíšeme 2 iterativní algoritmy pro výpočet varianční K . Oba jsou založeny na následující větě:

Věta:

Mějme dány pozitivně definitní A a B definované na vrcholech V grafu $G = (V, E)$. Pak existuje pozitivně definitní matice K tak, že

$K_{\alpha, \beta} = A_{\alpha, \beta}$ když $\{\alpha, \beta\} \in E$ nebo $\alpha = \beta$

$K^{-1}_{\alpha, \beta} = B_{\alpha, \beta}$ když $\{\alpha, \beta\} \notin E$ a $\alpha \neq \beta$.

Ekvivalentně

$K_{c, c} = A_{c, c}$, když c je kliku

$K^{-1}_{ac, ac} = B_{ac, ac}$, když ac je antiklicka.

Algoritmus:

Algoritmus běží v cyklu přes kliky c a STOP pravidlo testuje, zda $K_{c, c} = S_{c, c}$.

Označ kliky grafu G jako $c_1, \dots, c_m$

Generuj posloupnost $\{K_n\}$ následujícím postupem

$$K_0 = I$$

$$K^{n+1} = \begin{bmatrix} B_{a,a} & B_{a,a} (R_{a,a}^n)^{-1} R_{a,b}^n \\ R_{b,a}^n (R_{a,a}^n)^{-1} B_{a,a} & R_{b,b}^n - R_{b,a}^n (R_{a,a}^n)^{-1} (I - B_{a,a} (R_{a,a}^n)^{-1}) R_{a,b}^n \end{bmatrix},$$

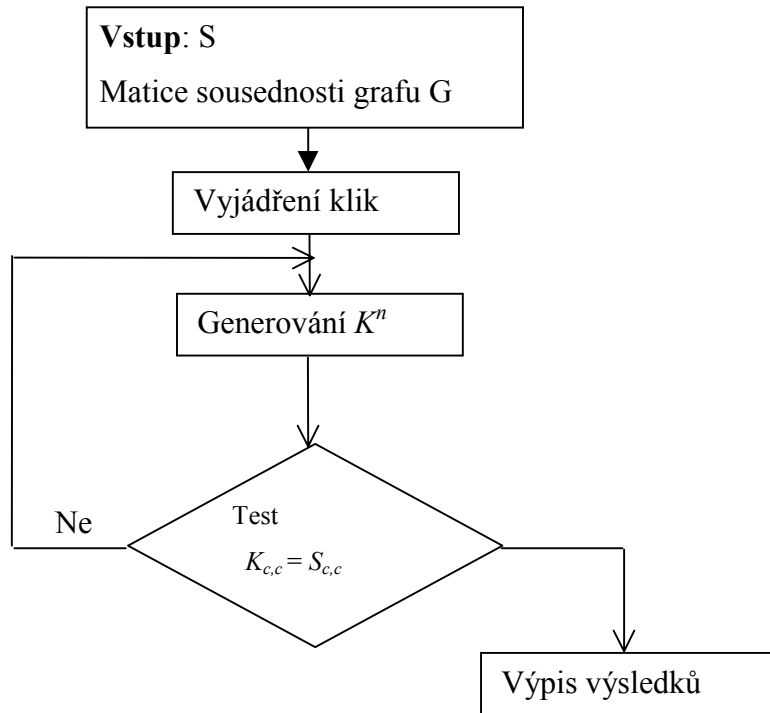
kde $R = K$, $B_{a,a} = S_{a,a}$, $a = c_1, \dots, c_m$, $b = V \setminus \{a\}$, $n = n' \bmod m$

Poznámka:

Vztah pro výpočet $\{K_n\}$ lze zjednodušit do tvaru:

$$K^{n+1} = \begin{bmatrix} S_{a,a} & S_{a,a} (K_{a,a}^n)^{-1} K_{a,b}^n \\ K_{b,a}^n (K_{a,a}^n)^{-1} S_{a,a} & K_{b,b}^n - K_{b,a}^n (K_{a,a}^n)^{-1} (I - S_{a,a} (K_{a,a}^n)^{-1}) K_{a,b}^n \end{bmatrix}$$

Dříve než použijeme tento algoritmus k popisu struktury závislostí mezi akciovými indexy, musíme ho implementovat do příslušného software. Zvolili jsme SW Mathematica, který je vhodný pro práci s maticemi. Pro určení grafického modelu, který dobře popisuje data, potřebujeme navíc globální proceduru, jejíž hlavní částí je příslušný maticový algoritmus. Podrobný popis této globální procedury lze nalézt např. v [1]. Běh maticového algoritmu znázorňuje následující vývojový diagram:



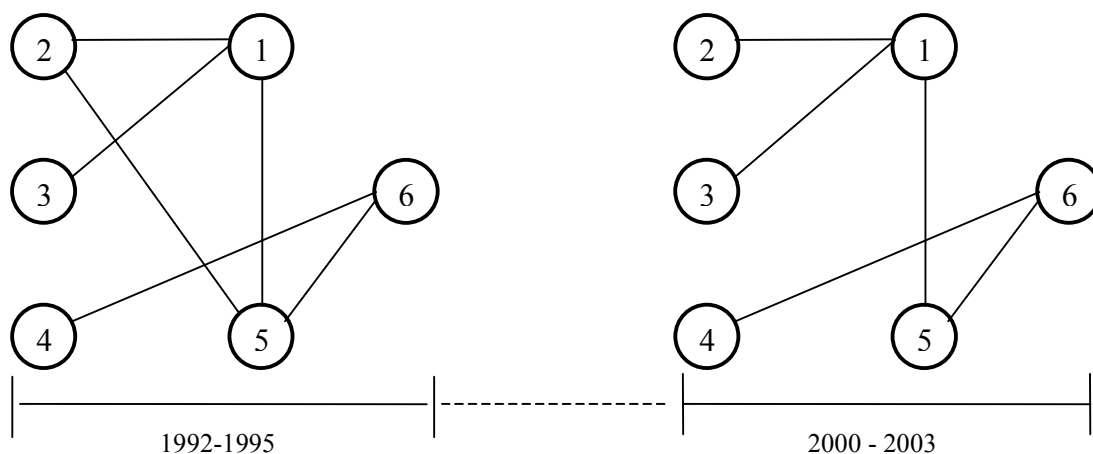
5 Vztahy mezi akciovými indexy

K popisu struktury vazeb mezi akciovými trhy jsme zvolili 3 americké a 3 evropské indexy v období dvou čtyřletých období (1992-1995 a 2000-2003):

Popisek	Index	Oblast	Poznámky k indexu
1	DJIA	Amerika - USA	Dow Jones Industrial Average, Dow Jones Transportation Average a Dow Jones Utility Average jsou známé americké indexy. Nejznámější z nich je DJIA (byl vytvořen Charlesem Dowem již v roce 1896) a je v současnosti nejstarším americkým akciovým indexem. Sestává z 30 amerických blue chips.
2	DJTA	Amerika - USA	
3	DJUA	Amerika - USA	
4	DAX	Evropa - Německo	DAX je index německé akciové burzy, který sestává z 30 blue chips (vybraných vzhledem k jejich tržní kapitalizaci)
5	FTSE100	Evropa – Velká Británie	Financial Times Stock Exchange sestává ze 100 společností s největší tržní kapitalizací z Velké Británie. Tyto společnosti tvoří kolem 70 % tržní kapitalizace celého akciového trhu Velké Británie.
6	CAC40	Evropa - Francie	CAC 40 je hlavním akciovým indexem pro Euronext Paris. Index sestává ze 40 akcií vybraných mezi 100 společnostmi s největší tržní kapitalizací.

U finančních dat (jimiž údaje o hodnotě akciových indexů bezesporu jsou) bývá často problém s nezávislostí a normalitou. V prvním kroku proto transformujeme měsíční uzavírací kurzy do logaritmických výnosů.

Test založený na znaménkách diferencí a Shapiro-Wilk test nezamítají nezávislost a normalitu na 5 % hladině významnosti (přesné hodnoty jsou uvedeny v dodatku). Algoritmus vygeneroval následující grafy:

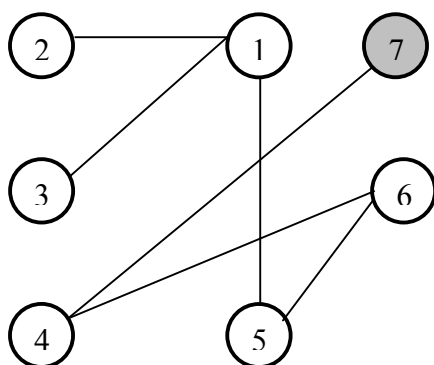


Jak je dobře patrné z obrázků, vztahy mezi indexy nejsou zdaleka tak těsné, jak by se dalo očekávat z přísloví uvedeného v úvodu příspěvku. V prvním grafu (který reprezentuje indexy v období let 1992 – 1995) je vynecháno 9 hran a ve druhém dokonce 10 hran. Zajímavá je absence hrany mezi 2 a 3, což znamená, že $DJTA \perp DJUA \mid DJIA$. Také evropské

indexy DAX FTSE100 jsou podmíněně nezávislé při pevných hodnotách indexu CAC40.

Jediná vazba mezi Amerikou a Evropou je přes indexy DJIA a FTSE100. Dle mého názoru lze důvod k menší provázanosti amerického a evropských akciových trhů hledat především v mezinárodních událostech, které mohly vést k nestabilitě finančních trhů. Jedná se zejména o válku v Iráku, teroristické útoky na USA a povodně v Evropě.

Jinou otázkou je, zda je český akciový trh (reprezentovaný indexem PX50) ovlivňován zahraničními akciovými trhy (zahraničními akciovými indexy). Odpověď na tuto otázku dává následující graf (použili jsme měsíční logaritmické výnosy za období 2000-2003 a PX50 je reprezentován vrcholem 7):



Z grafu je patrné, že PX50 je podmíněně nezávislý se všemi ostatními indexy při pevných hodnotách německého akciového indexu DAX. To lze zdůvodnit velmi úzkou provázaností české a německé ekonomiky.

6 Závěr

Analýza ukázala, že vztahy mezi akciovými indexy nejsou zdaleka tak těsné, jak se často tvrdí. Globalizace akciových trhů se oproti minulosti rovněž neprohloubila – spíše naopak. Tato situace může být připsána na vrub množství neočekávaných událostí v posledních letech.

Český akciový index PX50 je silně svázán pouze s německým akciovým trhem.

Dodatek – testy nezávislosti a normality

Index	Test založený na znaménkách diferencí (p-value)		Shapiro-Wilk test (p-value)	
	1992-1995	2000-2003	1992-1995	2000-2003
DJIA	0,80	0,80	0,23	0,49
DJTA	0,80	0,80	0,28	0,22
DJUA	0,46	0,46	0,09	0,41
DAX	0,80	0,46	0,48	0,20

FTSE100	0,46	0,46	0,54	0,58
CAC40	0,46	0,80	0,24	0,13
PX50	xxx	0,80	xxx	0,72

Summary:

Graphical models are suitable tools for statistical analysis. They allow studying the structures of the conditional independence in the sets of variables. They are commonly used in the sphere of finance.

One of the main problems in graphical models is describing the distributions with given marginals. In the contribution we restrict on Gaussian graphical models (which are characterised by zeros in the inverse of their covariance matrix). Describing Gaussian distributions with given marginals and solving the likelihood equations with covariance selection models both lead to the same problem. For this problem we present a iterative algorithms and apply it on logarithmic returns stock indices to describe the structure of their conditional independence.

Literatura:

Chýna, V., Graphical models for the analysis of continuous financial data – and application on the branch business indices (MME 2003)

Chýna, V., Grafické modely pro analýzu spojitých finančních dat, Diplomová práce, MFF, 2002

Giucici, P. Learning in graphical Gaussian models., Bagesian Statistics 5, 621-628

Lněnička, R.: Bayesovské metody pro zpracování finančních dat, Diplomová práce, MFF UK, 2001

Speed, T. P., Kiiveri H. T., Gaussian Markov distributions over finite graphs, The Annals of Statistics, Vol. 14, 138-150, 1986

Whittaker, J.: Graphical models in applied multivariate statistics. John Wiley, New York, 1990

Kontakt:

Autor: Ing. Vladislav Chýna, Hamerská 522, Veselí nad Lužnicí 391 81, chyna@vse.cz

Vliv vzdělání na výši příjmů

Jana Kalčevová

Úvod

Tradiční přístup analýzy vlivu vzdělávání na výši mezd je založen na tzv. Mincerově vyrovnávání příjmů [3]. Teoretická východiska jsou popsána v několika článcích, které publikovali společně Pedro Silva Martins a Pedro Telhado Pereira, zvláště [2] a [5]. Oba autoři, Martins a Pereira, vychází z Mincerova přístupu vylepšeného kvantilovou regresí zaměřenou do oblasti vzdělávání a mezd převážně v zemích Evropské Unie. Žádná ze studií ovšem neobsahuje údaje o České Republice, a tak je cílem této práce analyzovat vliv vzdělání na výši mezd v ČR a v další práci případné srovnání s ostatními zeměmi EU.

Také Evropská Unie pro své potřeby provádí mnoho výzkumných záměrů zaměřených do oblasti trhu práce a vzdělávání. Značná část jejích výsledků je publikována v [4].

Vzdělávání je bezesporu důležitým problémem nejen v zemích Evropské Unie ale i ve většině zemí světa. Tento problém stojí za analýzu nejen pro samotný fakt, že lidé získají nějaké vzdělání, ale hlavně proto, že léta strávená studiem na školách či následnými vzdělávacími kursy přinášejí mnoho dalších důsledků. Vzdělání jistě ovlivňuje výši výdělků, mezd a jiných peněžních zisků, ale také produktivitu, vyhlídky na další zaměstnání a kariéru, délku hledání zaměstnání i trvání tohoto zaměstnání a v důsledku toho také délku doby nezaměstnanosti, jistotu či nejistotu zaměstnání, profesní mobilitu a mnoho dalších faktorů. Tyto vlivy ovšem nemohou být připisovány samotnému vzdělávání a odborné přípravě, neboť jsou ovlivňovány i dalšími faktory, kterými jsou jednoznačně osobní charakteristiky (vlastnosti) – např. zručnost, spolehlivost, inteligence a mnoho různých schopností a dovedností. Cílem empirického výzkumu je, za použití ekonometrických metod, oddělit tyto přímé a nepřímé vlivy vzdělávání a analyzovat vliv vzdělání na některé ekonomické ukazatele, z nichž jedním je právě výše příjmů.

Cílem tohoto příspěvku je jen část výše uvedené problematiky, konkrétně prvotní analýza vzdělávání a důsledky, následně regresní analýza příjmů ze zaměstnání a porovnání výsledků s některými zeměmi EU. Analýza je zaměřena na celou pracující populaci (včetně krátkodobě pracujících), nicméně příjmy jsou analyzovány také odděleně podle pohlaví z důvodu následné srovnatelnosti s výsledky publikovanými v [2].

Popis dat

Záměrem této práce je nejen regresní analýza příjmů ze zaměstnání v České republice, ale hlavně porovnání vývoje těchto příjmů a souvisejících ukazatelů od roku 1996 do roku 2002. Tyto dva roky byly vybrány proto, že během nich provedl Český statistický úřad (ČSÚ) výběrové šetření nazvané Mikrocensus 1996 a Mikrocensus 2002 – příjmy hospodařících domácností. Navíc z dat z let kolem roku 1995 byly provedeny analýzy ve velké části zemí Evropské Unie, a tak není obtížné získané výsledky porovnávat. Prozatím jsou výpočty provedeny pouze na datech z Mikrocenzu 1999, ale údaje pro testování dat z Mikrocenzu 2002 jsou již připraveny a budou analyzovány později.

K regresní analýze je vhodné použít velký datový soubor, kterým údaje v Mikrocenzu 1996 rozhodně jsou. Soubor obsahuje data pro téměř 65 tisíc osob žijících v České republice ve zkoumaném roce, nicméně pro testování bylo použito jen přibližně 28 tisíc údajů, neboť pouze takový počet osob ve výběru měl hlavní zaměstnání a mohl tedy získávat mzdu z hlavní činnosti. Osobami, které v analyzovaném výběru nejsou zahrnuty jsou děti mladší 15 let, které v České republice pracovat nesmí a nemají tedy příjmy z hlavní činnosti, a pak také osoby výdělečně nečinné, např. studenti, nezaměstnaní (velká část), lidé v invalidním důchodu a nepracující osoby v důchodovém věku. Zde je třeba upozornit na skutečnost, že analýzy jsou dělány na základě údajů o hodnotách příjmů z hlavního zaměstnání a vedlejší zaměstnání není bráno v úvahu. V důsledku toho budou získané údaje pravděpodobně o něco nižší než oficiální údaje o mzdách publikované ČSÚ. Důležitými proměnnými pro tuto práci jsou např. rok narození, vzdělání, pohlaví, hrubé a čisté příjmy, počet měsíců, kdy byla osoba zaměstnaná, celkové příjmy za období, kdy osoba pracovala apod.

Transformace dat a regresní model

Data dostupná z Mikrocenzu 1996 obsahují mimo jiné následující proměnné: hrubé příjmy z hlavního zaměstnání, čisté příjmy z hlavního zaměstnání, celkové čisté příjmy (zde jsou zahrnuty příjmy z hlavní i vedlejší pracovní činnosti) a proměnnou, která ukazuje, kolik měsíců osoba v roce 1996 pracovala. Pomocí čistého a hrubého příjmu za rok nemůžeme analyzovat mzdy, ale po drobné transformaci, kterou bude vydělení příjmů počtem odpracovaných měsíců v daném roce obdržíme čistý a hrubý měsíční příjem, což jsou hodnoty, kterými lze příjmy dobře měřit a jsou porovnatelné pro všechny osoby ve výběru. Výše měsíčních příjmů bude ovlivňována mnoha faktory, jak bylo zmíněno již v úvodu, ale většina těchto faktorů je těžko měřitelná a nepublikovaná s daty Mikrocenzu. Vliv vzdělání na

výši příjmů je často vyjadřován pomocí Mincerovy rovnice [3], [1], [7] či [6] v následujícím tvaru:

$$y_i = \alpha + \beta S_i + \gamma Exp_i + \delta Exp_i^2 + \varepsilon A_i + u_i$$

Uvedený vztah má tvar lineární rovnice s neznámými parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a ε , které je možno odhadnout lineární regresí. Nutno ovšem podotknout, že proměnnou na levé straně rovnice y_i nejsou příjmy ale logaritmus příjmů. Patříčná data je tedy třeba před použitím logaritmovat. Ve všech případech index i označuje index pozorování.

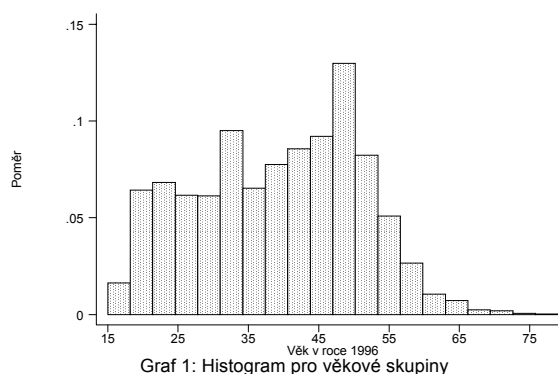
Proměnné zahrnuté do regresního modelu (počet let strávených studiem, zkušenosti, druhou mocninu zkušeností a schopnosti) však v datech Mikrocenzu nenajdeme. Není ovšem problém tyto proměnné aproximovat. Proměnná S_i označující počet let strávených studiem je zcela zřejmě funkcí dosaženého vzdělání; zkušenosti Exp_i mohou být velmi snadno nahrazeny tzv. potenciálními zkušenostmi (Mincerovy zkušenosti, [3]) – funkce počtu let strávených studiem a věku; druhá mocnina zkušeností bude v modelu nahrazena druhou mocninou potenciálních zkušeností. Problém ale nastává u proměnné A_i , která označuje individuální schopnosti dané osoby. Tyto schopnosti se velmi těžko měří a tento člen je často z regresního vyjádření vypuštěn. Jeho hodnota je pak zahrnuta v chybě, vyjádřené u_i .

Věk

Pro tuto práci potřebujeme pro každé pozorování hodnotu proměnné věk (*age*), která popisuje, kolik let bylo dané osobě v roce 1996, kdy byl prováděn Mikrocenzus. Soubor obsahuje proměnnou *rok narození* a pomocí ní můžeme dle následujícího vztahu snadno určit věk: $age = 1996 - rok\ narození$.

Studijní roky

Léta strávená studiem jsou první vysvětlující proměnnou v regresním modelu. Pro každé pozorování známe z dat úroveň dosaženého vzdělání. Z této informace s jedním drobným problémem můžeme spočítat, kolik let daná osoba ve škole strávila. Zmiňovaný problém nastává v době strávené na základní škole. Bylo totiž období, kdy žáci absolvovali školu v České republice za osm let, a pak období (které trvá doposud) s devítiletou základní školou. Vzhledem k tomu, že nemáme údaje o tom, kdy dané osoby studovaly, je nemožné počet studijních let spočítat přesně. Díky faktu, že devítiletá školní docházka se týká lidí,



kterým bylo v roce 1996 méně než 19 let, což je ve výběru poměrně menší část, nastavila jsem osmileté vzdělání na základní škole. Podobným způsobem, ale bez dalších komplikací můžeme stanovit i počet let potřebný pro studium ostatních škol a určit celkový součet let potřebných k dosažení jednotlivých úrovní vzdělání. Tím získáme velmi dobrý odhad počtu let strávených studiem. Průměrná doba strávená ve škole v České republice dle dat z Mikrocensu 1996 činí 11,6 roku. Muži strávili na škole v průměru 11,7 roku, čemuž odpovídá ukončené středoškolské vzdělání s maturitou. Ženy ve škole strávily průměrně 11,4 roku a dosáhly tak v průměru středoškolského vzdělání bez maturity. Můžeme si povšimnout, že průměrné dosažené vzdělání je u mužů nepatrně vyšší než u žen.

Potenciální zkušenosti

Reálné zkušenosti mohou být, např. dle [2] a [3], aproximovány zkušenostmi potenciálními. Ty jsou v podstatě časem, který daná osoba strávila v zaměstnání. Vzhledem k tomu, že pro jednotlivé osoby nemáme údaje o jejich nezaměstnanosti do roku 1996, budeme předpokládat, že každá osoba začala s prací (hlavní pracovní činnost) hned po ukončení studia. V tomto případě budou potenciální zkušenosti zaměstnanců v České republice dány věkem, sníženým o čas strávený na škole S_i a dalších 6 let, které jsou dány předškolním věkem. Výraz pro výpočet potenciálních zkušeností pak vypadá následovně:

$$exp = age - S_i - 6$$

a je běžně užíván při analýzách po celém světě. Tento vztah používali mimo jiné i Martins a Pereira ve svých pracích, a tak budou získané výsledky srovnatelné. Hodnota průměrných potenciálních zkušeností pro ČR je 21,5 roku (21,3 roku pro muže a 21,8 roku pro ženy).

Výsledky regrese

Uvažujeme-li lineární regresní model, který zahrnuje výše uvedené proměnné (bez schopností) získáme následující výsledky:

$$\ln_netwage = 2.9871 + 0.0866 S_i + 0.0292 Exp_i - 0.00061 Exp_i^2 + u_i$$

$$\ln_grosswage = 3.1328 + 0.0942 S_i + 0.0284 Exp_i - 0.00058 Exp_i^2 + u_i$$

kde *netwage* označuje čistou mzdu a *grosswage* označuje mzdu hrubou. Hodnoty koeficientů pro obě tyto proměnné jsou podobné a větší rozdíl je hlavně u konstanty. To vychází z definice hrubé a čisté mzdy (rozdíl je dán výší daní).

Ze všech regresí vidíme, že data se chovají racionálně. Mzdy jsou statisticky významně závislé na studijních letech (kladně), potenciálních zkušenostech (kladně) a druhé mocnině těchto zkušeností (záporně). V případech regresí podle pohlaví:

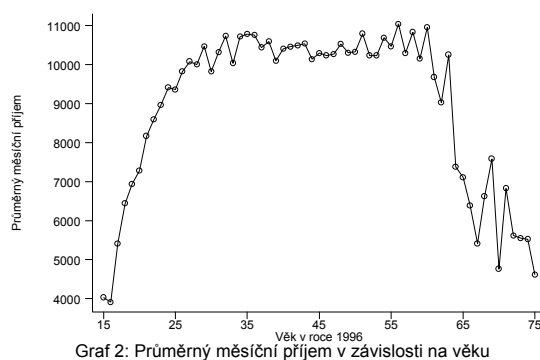
$$\ln_grosswage = 3.303 + .0878 S_i + .0369 Exp_i - .00078 Exp_i^2 + u_i \text{ pro muže}$$

$$\ln_grosswage = 3.000 + .0914 S_i + .0258 Exp_i - .00051 Exp_i^2 + u_i \text{ pro ženy}$$

Analýza věku

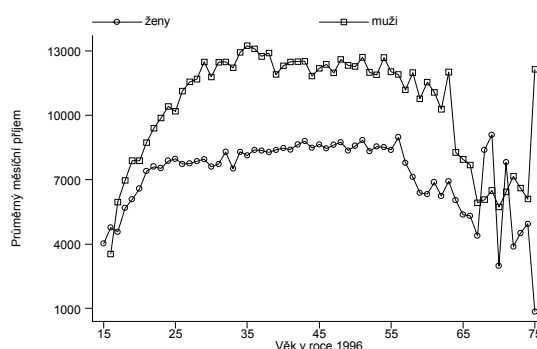
Nyní se pokusme analyzovat závislost výše mzdy na věku. V Grafech 2 a 3 je zobrazena právě tato závislost. Každá věková skupina je tvořena lidmi se stejným věkem a průměrný příjem je v grafech udáván v českých korunách.

Nebudeme-li uvažovat pohlaví osoby, můžeme z Grafu 2 vidět, že patnáctiletí mají průměrnou mzdu kolem 4000,- Kč. Výše mzdy pak rapidně roste během následujících 15 let. Kolem 30 let dosahuje průměrná mzda výše zhruba 10000,- Kč a ta je až do 60 let relativně stabilní. Pro osoby starší 60 let pak výše průměrné mzdy klesá. Všechny tyto vývoje jsou pochopitelné. Mezi 30 a 60 lety má člověk relativně stabilní zaměstnání a tak bohaté zkušenosti, že výše mzdy nemá důvod k drastické změně. Lidé po šedesátce jsou naopak již většinou v důchodu a jejich hlavní zaměstnání je pouze jakousi formou přivýdělku a tak je pochopitelné, že výše takové mzdy je ve srovnání s předchozími lety nižší.



Graf 2: Průměrný měsíční příjem v závislosti na věku

Trochu jiná situace je v případech diferencovaných podle pohlaví. V Grafu 3 jsou zobrazeny průměrné příjmy pro ženy (spojnice s kroužky) a pro muže (spojnice se čtverečky). Zaměřme se nejprve na příjmy mužů. Začátek grafu je podobný s výše uvedeným, ale průměrná mzda dosahuje svého maxima kolem 30 let a pak pomalu klesá. Výrazné skoky na konci grafu jsou dány malým množstvím pozorování v jednotlivých skupinách.



Graf 3: Průměrný měsíční příjem podle pohlaví

Druhá spojnice (pro ženy) ukazuje, že ženy zvyšují svou mzdu v době 15-25 let relativně rychle. Po této době narůstají jejich mzdy už jen zvolna, ale za to až do věku 55 let. Pak dochází k drastickému pádu výše mezd.

Z Grafu 3 můžeme tedy vidět, že historie mezd je různá pro muže i ženy. Pro muže mzdy rychle rostou a pak pomalu klesají, zatímco pro ženy mzdy nejprve rychle rostou, pak rostou pomalu a prakticky klesají až v důchodovém věku. Důležité je, že pro ženy je dosažená maximální úroveň výrazně nižší než pro muže. Porovnáme-li příjmy mužů a žen v Grafu 3, můžeme vidět, že v roce 1996 v České republice byla maximální hodnota průměrné mzdy žen pod hranicí 10000,- Kč. Tato hodnota ovšem odpovídá průměrné mzdě dvaadvacetiletého muže.

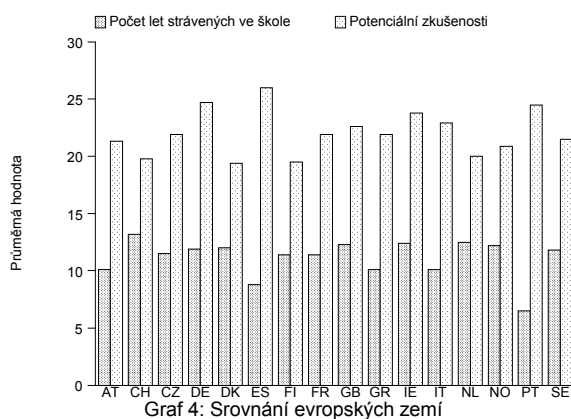
Závěr

Výsledky získané z regresních analýz a z grafů nám poskytují stejné závěry. Můžeme vidět, že konstanta pro ženy je nižší než pro muže. Snadno tedy můžeme uvažovat o čemsi jako je platová diskriminace žen v České republice v roce 1996. Pro ženy jsou mzdy rostoucí v průběhu času (až do 60 let) a pro muže rostou do 30 let. Také můžeme závěrem konstatovat, že výše příjmu je závislá na vzdělání (počtu studijních let) a věku (zkušenostech). Mzda jako funkce věku je konkávní funkcí, což můžeme vidět i z prezentovaných grafů.

Ukázali jsme, že vzdělání ovlivňuje výši mezd. Tomu nasvědčuje i skutečnost, že ženy měly v roce 1996 v ČR v průměru nižší vzdělání než muži a měly také nižší průměrný měsíční příjem.

Martins a Pereira v [2] srovnávají země mimo jiné právě podle průměrného počtu let strávených ve škole a podle potenciálních zkušeností (soubory, na kterých byly hodnoty počítány, obsahovaly údaje pouze o mužích pracujících na plný úvazek – min. 35 hodin týdně, jejichž věk je 15-65 let).

Graf 4 ukazuje srovnání hodnot České republiky (za stejných podmínek: léta strávená ve škole – 11,5 roku a potenciální zkušenosti – 21,9 roku) s ostatními analyzovanými zeměmi. Česká republika v evropské konkurenci nijak nezaostává. Občané většiny zemí tráví ve škole průměrně více než 10 let, nejvyšší průměr má Švýcarsko (13,2), nejnižší Portugalsko (6,5) a Španělsko (8,8). Česká republika v uvedeném seznamu zaujímá deváté místo hned za Švédskem. Průměrné potenciální zkušenosti (určené ve všech zemích v souladu s Mincerovými zkušenostmi) jsou obecně mezi 19 a 22 lety. Očekávány byly vysoké potenciální zkušenosti u Španělska (26,0) a hlavně Portugalska (24,5) vzhledem k nízké hodnotě průměrného počtu let strávených ve škole.



V další práci bude třeba provést plánované porovnání prezentovaných ukazatelů s rokem 2002, kdy proběhl další Mikrocensus. Dále bych se ráda soustředila na zahrnutí příjmů z vedlejšího zaměstnání do analýz a srovnání získaných údajů s hodnotami z ČSÚ. Vhodný by byl také výzkum dle skupin podle vzdělání a detailní srovnání výsledků se zeměmi Evropské Unie. Navíc jednoznačně nelze opominout analýzu předpokladů lineárních modelů, jako je například problém heteroskedasticity.

Recenzi provedla Doc. RNDr. Václava Pánková, CSc.

Literatura:

- [1] Becker, G.: Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, with Special Reference to Education. University of Chicago Press, Chicago, 1975
- [2] Martins, P.S., Pereira, P.T.: Does education reduce wage inequality? Quantile regression evidence from 16 countries. Labour Economics 11, p.355-371, 2004.
- [3] Mincer, J.: Schooling, experience and earnings. NBER, New York, 1974.
- [4] Descy, P., Tessaring, M.: Training and learning for competence. Second report on current vocational training research in Europe: synthesis report 2000. Luxembourg, Office for Official Publications of the European Communities, 2001.
- [5] Pereira, P.T., Martins, P.S.: Is there a return-risk link in education? Economics Letters 75, p. 31–37, 2002.
- [6] Polachek, S., Siebert, S.: The Economics of Earnings. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [7] Willis, R.: „Wage Determinants: A Survey and Reinterpretation of Human Capital Earnings Functions,” in Ashenfelter, O. and Layard, R.: Handbook of Labor Economics. Amsterdam: North-Holland, 1986.

Summary

This paper is focused on education and its impact on the wages in the Czech Republic in 1996. We showed that the level of education and average experiences (which correspond to Mincer experiences) positively influence wages. The values of these two factors, education and experiences, are in the Czech Republic comparable to other European countries. In the wage regression we analyzed dependency of wages on schooling (a function of education), experiences (a function of age and education) and experiences squared. In the case separated by gender we can conclude the wages for males are higher than for females supposing the same education level and experiences.

Autor:

Mgr. Jana Kalčevová, University of Economics, W. Churchill Sq. 4, 130 67, Prague 3, tel.: +420 224 095 445, e-mail: kalcevov@vse.cz

Recenzent:

Doc. RNDr. Václava Pánková, CSc., University of Economics, W. Churchill Sq. 4, 130 67, Prague 3, tel.: +420 224 095 450, e-mail: pankova@vse.cz

Kontakt v češtině: Vysoká škola ekonomická, Náměstí W. Chirchilla 4, 130 67, Praha 3

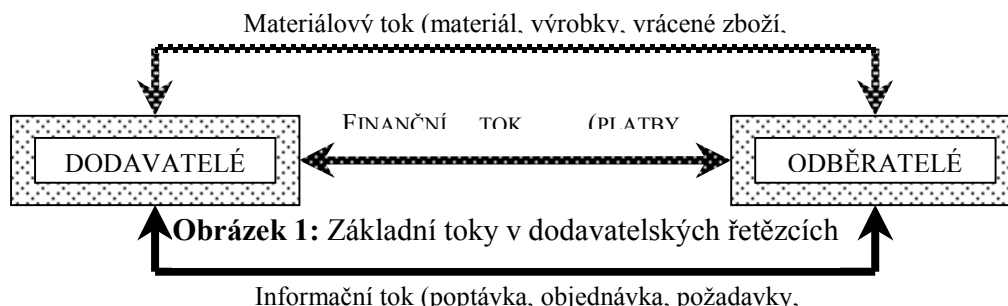
Modely zásob a jejich použitelnost v dodavatelských řetězcích

Martina Kuncová

1. Charakteristika dodavatelských řetězců

Dodavatelské řetězce a jejich řízení patří v současné době k oblastem, o něž je velký zájem mezi odborníky. Po mnoho let stačilo výrobcům využívat systémy pro plánování spotřeby materiálu (Material Requirements Planning – MRP) či podnikové řídicí systémy (Enterprise Resource Planning – ERP), které jim pomáhaly odpovědět na základní otázky typu co vyrábět, jak nejlépe vyrábět, jaký materiál, kolik a kdy je potřeba, či jaké zdroje a kapacity jsou nezbytné a kdy. Nyní je však nutné znát mnohem více informací, neboť požadavky zákazníků stále stoupají.

Termínem **dodavatelský řetězec** (v originálu **Supply Chain**) byl označen řetězec (či lépe řečeno síť) firem, které se podílejí na dodávce výrobků a služeb, a to od získávání surovin až po uspokojení konečného zákazníka. Jedná se tedy o celý systém složený z výrobců či zpracovatelů, distributorů, prodejců (velkoobchodníků i maloobchodníků) a zákazníků, který zahrnuje činnosti jako je např. návrh výrobku, obstarání a řízení materiálu a zásob, vlastní výrobu, marketing, logistiku, vyřizování objednávek, zákaznický servis, atd. Všechny subjekty v dodavatelském řetězci jsou propojené především tokem zboží či materiálu, informací a kapitálu, a to jak ve směru k zákazníkům či odběratelům (downstream), tak ve směru k dodavatelům (upstream) (viz Obrázek 1).



Dodavatelem tedy může být jak subjekt, který získává prvotní suroviny, tak výrobce polotovarů či hotových výrobků, firma, která slouží jako distributor surovin, materiálů, výrobků, dále také zprostředkovatel služeb souvisejících s výrobky či surovinami, a v neposlední řadě velkoobchodní či maloobchodní prodejce, který distribuuje zboží konečným spotřebitelům. Zákazníkem pak lze rozumět jakýkoliv z uvedených subjektů snad kromě prvotního zpracovatele surovin (ovšem i ten většinou bývá závislý na dalších dodavatelích – např. strojů a zařízení). Z tohoto pohledu je tedy zřejmé, že specifikovat jeden

konkrétní řetězec je komplikované, neboť ve skutečnosti jde o velmi spleťitou a rozvětvenou síť.

Řídit síť dodavatelů a odběratelů je velmi složité a mnohdy téměř nemožné. Síťová struktura bývá proto mírně opomíjena a řízení se týká pouze části této struktury, a to určitým stylem vymezených řetězců. Přístup, který je známý pod zkratkou SCM – **Supply Chain Management** – zahrnuje mnoho postupů, metod a technik, které lze využít pro řízení a optimalizaci procesů v daném dodavatelském řetězci. SCM dává určitou odpověď na otázku, jak skloubit dva základní, přitom však protichůdné, požadavky na podnikání: soustavné snižování nákladů a stoupající nároky na dosažení spokojenosti zákazníků.

2. Zásoby

2.1 Základní charakteristika

Zásobami chápeme tu část užitných hodnot, které byly vyrobeny a ještě nebyly spotřebovány. Nejedná se pouze o hotové výrobky, ale jde také o zásoby surovin, základních a pomocných materiálů, paliva, polotovarů, náradí, náhradních dílů, obalů a rozpracované výroby. Zásoby řeší především časový, místní, kapacitní či sortimentní nesoulad mezi výrobou a spotřebou a kryjí předvídané i nepředvídané výkyvy a poruchy. Negativní vliv spočívá v tom, že váží kapitál, spotřebovávají další práci a prostředky a nesou s sebou i riziko znehodnocení, nepoužitelnosti či neprodejnosti.

Velikost zásob by měla být na jedné straně co nejmenší, zejména kvůli co nejnižšímu objemu peněz, který je v nich vázán, ale třeba také v souvislosti s kapacitou a počtem skladů a pracovníků v nich. Na druhé straně je ovšem vhodné mít k dispozici co možná nejvíce zboží pro dostatečnou pohotovost dodávek, neboli pro co největší úroveň služeb a uspokojení zákazníků. Jelikož se jedná o protichůdné požadavky, musí vedení podniku či zodpovědní manažeři volit vhodný kompromis. Investování do zásob představuje mnohdy jednu z největších finančních položek našich podniků, proto by mu měla být věnována náležitá pozornost

2.2 Klasické modely zásob

Základní modely zásob (či modely řízení zásob) se dělí dle charakteru poptávky na modely **deterministické**, kde je poptávka během časového období pevně dána, a na modely **stochastické**, kde je poptávka neurčitá. Ve všech modelech je snahou určit velikost

objednávky a časový interval mezi vystavením objednávek, a to tak, aby byly minimalizovány náklady spojené se zásobováním a skladováním. Mezi tyto náklady patří především skladovací náklady c_1 (někdy i včetně zahrnutí alternativní možnosti využití peněz, které jsou vázány v zásobách), pořizovací (fixní) náklady c_2 spojené s každou jednotlivou objednávkou a případně náklady z nedostatku zásob c_3 .

Jelikož je teorie zásob dosti známá (zejména mezi odborníky), uvedu pouze základní vzorce, ze kterých vycházím v pozdějších výpočtech. Pro určení optimální velikosti objednávky se nejčastěji používá přístup minimalizace celkových nákladů spojených s objednávkou a skladováním zboží, jehož výsledkem je vzorec známý pod zkratkou EOQ (Economic Order Quantity):

$$q^* = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}}$$

kde: q^* = optimální velikost objednávky při minimalizaci nákladů (EOQ)

Q = konstantní poptávka za časovou jednotku

c_1 = skladovací náklady

c_2 = pořizovací náklady

Interval, který má uplynout mezi vystavením dvou objednávek t^* lze pak vypočítat takto:

$$t^* = \sqrt{\frac{2c_2}{Qc_1}}$$

Pro stochastické modely, kde se připouštějí určité výkyvy v poptávce a to takové, aby bylo možné aproximovat poptávané množství normálním rozdělením s daným průměrem (μ_Q) a směrodatnou odchylkou (σ_Q), lze také využít výše uvedené vzorce. Pouze je nutné nahradit pevně stanovenou výši poptávky jejím průměrem. Jelikož však aktuální poptávka není známá, je nutné počítat s určitou pojistnou zásobou (w), kterou je nutno držet k překonání výkyvů v poptávce. Její velikost je dána také požadovanou úrovní obsluhy α = pravděpodobnost, že nedojde k nedostatku zásoby. Dle funkce normovaného normálního rozdělení lze v závislosti na dané úrovni obsluhy určit konstantu z , a v případě, že známe dodací lhůtu L (o které předpokládáme, že je konstantní), můžeme vypočítat velikost pojistné zásoby w a bod znovuobjednávky s (bod znovuobjednávky signalizuje minimální množství zboží na skladě či

v zásobách, při kterém je již nutné vystavit objednávku). Popsané vzorce jsou následující :

$$w = z * \sigma_Q * \sqrt{L}$$

$$s = L * \mu_Q + w$$

3. Zásoby a dodavatelské řetězce

V dodavatelských řetězcích je samozřejmě možné použít pro určení optimální zásoby výše uvedené vzorce, a to zejména na konci řetězce, tedy na úrovni konečných prodejců. Ti znají údaje o poptávce a mohou jí přizpůsobit své objednávky. Dodavatel však údaje znát nemusí a v jeho zorném poli se tak objevují pouze poptávky od prodejců (tedy jejich objednávky). Ty ale nelze označit ani za konstantní ani za normálně rozdělené. Většinou se jedná o objednávky, které přicházejí jednou za několik týdnů a jejichž výše je rovna několikátýdenní poptávce. Pro dodavatele to znamená jediné – držet větší pojistnou zásobu. S tím jsou samozřejmě spojené větší skladovací náklady, které však ve svém důsledku mohou být nižší, než náklady vynakládané maloobchodníky či prodejci.

3.1 Ilustrační příklad – možnosti chování dodavatele v závislosti na informacích o konečné poptávce a objednávkách odběratelů

Předpokládejme pouze krátký dodavatelský řetězec sestávající z dvou prodejců stejného typu zboží a jejich jediného dodavatele.

Prodejce č.1 očekává týdně průměrnou poptávku ve výši 5 kusů, ročně tedy jde o 260 kusů s odchylkou 52 kusů. Jeho náklady na objednávku činí 120 korun a roční náklady na skladování 1 kusu zboží jsou zhruba 26 korun. Ze vzorců vypočteme, že optimální výše objednávky je 49 kusů a při očekávané 99% úrovni uspokojení zákazníků a 1 týdenní dodací lhůtě je pojistná zásoba, neboli množství zboží, které musí mít na skladě 17 kusů.

Prodejce č.2 čelí poněkud vyšší poptávce, jejíž průměrná roční velikost je 416 kusů s odchylkou 52 kusů. Náklady předpokládejme stejné jako u prodejce č.1. V tomto případě je optimální velikost objednávky 62 kusů, pojistná zásoba zůstává stejná, a to na 17 kusech, pouze by mělo docházet k častějším objednávkám.

Na základě těchto údajů lze vytvořit jakýsi hrubý simulační model v prostředí MS Excel. Pro oba prodejce generujeme poptávku na základě udaných průměrů a odchylek pomocí

funkcí generování hodnot normálního rozdělení¹. Při předpokladu, že 1.týden v roce je na skladě minimální (pojistná) zásoba, určujeme, kdy daný subjekt objednává (výše objednávky vychází z předchozích výpočtů). Jednu ze simulací ukazuje následující zkrácená tabulka:

Tabulka 1 – Vývoj poptávky, objednávek, zásob a nákladů u dvou prodejců

1.prodejce						2.prodejce					
týden	μ_0	zásoba	q^*	Fixní náklady	Variab. náklady	μ_0	zásoba	q^*	Fixní náklady	Variab. náklady	
1	5	17	49	120	0	9	17	62	120	0	
2	6	60	0	0	21.5	7	72	0	0	27.5	
3	5	55	0	0	19	8	64	0	0	23.5	
4	2	53	0	0	18	8	56	0	0	19.5	
5	5	48	0	0	15.5	8	48	0	0	15.5	
6	3	45	0	0	14	7	41	0	0	12	
7	5	40	0	0	11.5	8	33	0	0	8	
8	5	35	0	0	9	8	25	0	0	4	
9	5	30	0	0	6.5	9	16	62	120	0	
10	5	25	0	0	4	8	70	0	0	26.5	
11	5	20	49	120	1.5	7	63	0	0	23	
...	..	...	..	...	...	..	...	..	...	...	
49	3	56	0	0	19.5	9	28	0	0	5.5	
50	4	52	0	0	17.5	7	21	62	120	2	
51	3	49	0	0	16	8	75	0	0	29	
52	4	45	0	0	14	6	69	0	0	26	
celkem				600	666.5					840	720.5
+ náklady na w				442						442	
Celkové náklady					1708.5						2002.5

Jelikož používá uvedený simulační model na generování poptávky náhodná čísla a protože známe poptávané množství „pouze“ za 52 týdnů, neplatí zde vždy tvrzení, že průměrná výše roční poptávky je 260 resp. 416 kusů. Na základě toho nejsou ani náklady vypočtené z těchto dat shodné s náklady vypočtené z modelu, nicméně pohybují se v okolí modelového průměru (v tabulce jsou tedy uvedeny skutečné náklady, které by v daném případě vznikly, ne matematicky vypočtené celkové průměrné náklady, které jsou u prodejce č.1 1715 korun a u prodejce č.2 2053 korun). Náklady na povinné držení pojistné zásoby jsou připočteny až na konci celého roku.

Situace dodavatele již není tak jednoduchá. Předpokládejme, že zná velikosti objednávek svých dvou odběratelů a ví, že jsou tyto objednávky vždy fixní. Zkusme tedy naformulovat 3 možné strategie:

Strategie A:

¹ funkce vypadá např. takto =CELÁ.ČÁST(NORMINV(NÁHČÍSLO();5;1))

Pokud se oba prodejci sejdou ve své objednávce ve stejném týdnu, musí mít dodavatel k dispozici množství rovné součtu jejich objednávek – tedy 111 kusů. Definujme jeho optimální výši objednávky a bod znovuobjednávky :

$$q_D = q^*_1 + q^*_2 = 49 + 62 = 111$$

$$s_D = q_D = 111$$

Jde o strategii označovanou jako (Q,s) , tedy dodavatel objednává vždy stejné množství tehdy, pokud výše zásoby klesne pod úroveň s .

Strategie B:

Dodavatel ví, že maximální objednávka obou odběratelů může být nejvýše součtem jejich objednávek, tj. v našem případě 111 kusů. Nemá tedy pro něj smysl držet větší množství zboží na skladě. Objednává tedy dle strategie (s,S) , kdy výše objednávky je dána vzorcem:

$$q_D = S - I$$

$$S = q^*_1 + q^*_2$$

kde I je aktuální výše zásob na skladě a S je maximální velikost zásoby

$$s = S$$

Znamená to tedy, že objednávka je vystavena vždy, když zásoba klesne pod úroveň s a její velikost je taková, aby po doplnění byla maximální zásoba rovna S .

Strategie C:

Dodavatel předpokládá, že k souběhu obou objednávek od odběratelů nebude téměř docházet, a tedy že s určitou výchozí zásobou postačí, když bude objednávat pouze na úrovni vyšší poptávky od odběratele, tedy také dle strategie $(Q;s)$, ale tentokrát:

$$q_D = \max(q^*_1, q^*_2)$$

$$s = q_D$$

Výsledky použití uvedených strategií jsou následující tabulce. Je zřejmé, že v případě A drží dodavatel příliš vysokou zásobu a jeho náklady pak převyšují součet nákladů odběratelů. U strategie B a C naopak dochází k držení nižší úrovně zásob, což se projevuje poklesem nákladů – v případě B na úroveň obou odběratelů a v případě C dokonce pod tuto úroveň. Z hlediska dodavatele samotného dochází při zavedení strategie B ke snížení nákladů zhruba o 10%, u strategie C o 15% (vzhledem ke strategii A).

Tabulka 2 – Srovnání jednotlivých strategií objednávek dodavatele

			Strategie A				Strategie B				Strategie C			
týd	q* ₁	q* ₂	zásoba	obj. Dodav.	Fixní náklady	Variab. Náklady	zásoba	obj. Dodav.	Fixní náklady	Variab. Náklady	zásoba	obj. Dodav.	Fixní náklady	Variab. Náklady
1	49	62	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5
2	0	0	0	111	120	0	0	111	120	0	0	62	120	0
3	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
4	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
5	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
6	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
7	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
8	0	0	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
9	0	62	111	0	0	55.5	111	0	0	55.5	62	0	0	31
10	0	0	49	111	120	24.5	49	62	120	24.5	0	62	120	0
11	49	0	160	0	0	80	111	0	0	55.5	62	0	0	31
48	0	0	160	0	0	80	111	0	0	55.5	114	0	0	57
49	0	0	160	0	0	80	111	0	0	55.5	114	0	0	57
50	0	62	160	0	0	80	111	0	0	55.5	114	0	0	57
51	0	0	98	111	120	49	49	62	120	24.5	52	62	120	26
52	0	0	209	0	0	104.5	111	0	0	55.5	114	0	0	57
Náklady					840	3477.5			1320	2522			1320	1888.5
Celkové roční náklady						4317.5				3842				3208.5

4. Shrnutí

V dodavatelských řetězcích dochází k propojování jednotlivých firem a k závislosti jejich chování na chování ostatních subjektů. Sdílení informací o poptávce, objednavce a zásobách je nezbytnou součástí správného chodu celého řetězce. V situaci, kdy koneční prodejci odvíjejí své objednávky od předpokládaného vývoje poptávky a kalkulují jejich výši na základě EOQ modelů, má dodavatel více možností, jak se zachovat. Jelikož přicházejí objednávky v měnících se intervalech, ale ve stejné velikosti, může využít těchto znalostí a nastavit své objednávky a výši držených zásob tak, že jeho náklady jsou na úrovni souhrnných nákladů odběratelů, resp. jsou i nižší. Stále však platí, že dodavatel drží větší zásobu, než jeho odběratelé. Vyhnout se tomuto lze snad jen využitím tzv. systému vendor-managed inventory, kdy sám dodavatel řídí velikost zásob na skladě odběratele a určuje četnost a velikost objednávky.

Summary:

Supply chain management is the latest concept in the attempt to optimize the entire process of manufacturing the product, right down to the point of its consumption, and all the stages in-between. Inventory is an important supply chain driver because changing inventory policies

can dramatically alter the supply chain's efficiency and responsiveness. Strategy of fixed ordering following the EOQ formula is possible to use at the retailer's level, but the supplier has to choose another one. Here 3 possible strategies are shown and it is clear that according to them, supplier can lower its inventory cost, but still it must have more inventory than the retailers. A strategy of vendor managed inventory is one of the possibilities to avoid the ineffective situation. It means that a supplier is responsible for all decisions regarding product inventories at the retailer, so the control of the replenishment decision moves to the supplier.

Literatura

- [1] Chopra, S., Meindl, P.: Supply Chain Management: Strategy, Planning and Operation. Prentice Hall Inc., New Jersey 2001
- [2] Donovan, R.M.: Inventory Efficiency in the Supply Chain. <http://www.rmdonovan.com/pdf/perfor3.pdf>
- [3] Donovan, R.M.: Reduce Inventories and Improve Business Performance. http://www.rmdonovan.com/pdf/perform_97_7.pdf
- [4] Fiala, P.: Modelování a analýza produkčních systémů. Professional Publishing, Praha 2002
- [5] Hausman W.H.: *Information Distortion and Collaboration: The Bullwhip Effect*, <http://www.supplychain.com/>
- [6] Jablonský, J.: Operační výzkum. Professional Publishing, Praha 2002
- [7] Lee H.L., Padmanabhan V., Whang S.: *The Bullwhip Effect in Supply Chains*. Pennsylvania State University 2001, <http://smeal.psu.edu/cscr/bullwhip.html>
- [8] Simchi-Levi D., Kaminsky P., Simchi-Levi E.: *Designing and Managing the Supply Chain*. USA, McGraw-Hill 2000
- [9] Ter-Manuelianc, A.: Matematické modely řízení zásob (Mathematical Models of Inventory Control – in Czech). Institut řízení, Prague 1980
- [10] Waller, D.L.: Operations Management: A Supply Chain Approach. International Thomson Business Press, London, UK, 1999

autor.

Ing. Martina Kuncová
tel. +420 224 095 449

kuncovam@vse.cz

recenzent

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc.
tel. +420 224 095 447

Katedra ekonometrie
Vysoká škola ekonomická
nám.W.Churchilla 4
130 67 Praha 3

pfiala@vse.cz

Analýza stacionarity vybraných ekonomických indikátorov Slovenska v absolútnych hodnotách a po logaritmickej transformácii

Martin Lukáčik

Základným predpokladom pri tvorbe všeobecných jednorovnicových lineárnych modelov (analogicky aj ostatných zložitejších foriem) sú Gauss – Markovove predpoklady o vektore náhodných porúch. Na základe platnosti týchto predpokladov je v klasickej ekonometrii postavená relevantnosť použitia konštruovaných štatistík pre overovanie hypotéz, vhodnosti použitých premenných a tvaru modelu.

Postupným vývojom vstúpili do popredia zložitejšie nelineárne a najmä dynamické formulácie modelov, ktoré priniesli nové problémy a s nimi aj požiadavky na údaje, s ktorými sa pracuje. Hlavnou požiadavkou pri skúmaní časových radov napozorovaných hodnôt sa stala ich stacionarita (stabilita). Pre prípad nestacionarity nasleduje skúmanie kointegrácie nestacionárnych premenných a umožňuje tvorbu chybu korigujúcich modelov.

Stacionarita autoregresných modelov

Autoregresný model rádu p (AR(p)) so strednou hodnotou y_t rovnou μ má tvar

$$y_t - \mu = \phi_1 (y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p (y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t,$$

pričom náhodná zložka ε_t spĺňa známe Gauss – Markovove predpoklady. Pomocou operátora oneskorenia $B^n y_t = y_{t-n}$ sa dá autoregresný model zapísať v tvare

$$\Phi(B)(y_t - \mu) = \varepsilon_t, \text{ kde } \Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p.$$

Potom nutnou a postačujúcou podmienkou stacionarity modelu AR(p) podľa [4] je podmienka, aby všetky korene polynómu $\Phi(B) = \prod_{j=1}^p (1 - G_j B) = 0$ ležali mimo kruhu s jednotkovým polomerom, teda ich absolútna hodnota musí byť väčšia ako 1.

Z tejto podmienky pre najjednoduchší autoregresný model rádu 1 vyplýva nasledovný vzťah $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B = 0$, pre ktorého koreň $|B| = |1/\phi_1| > 1$. Teda musí platiť vzťah $|\phi_1| < 1$. Podobné podmienky sa dajú odvodiť aj pre zložitejšie modely s rozloženým oneskorením.

Integrované časové rady a test jednotkového koreňa

Časový rad označujeme ako integrovaný rádu k , ak nespĺňa podmienky stability, ale pomocou k – násobného diferencovania je ho možné previesť na stacionárny rad.

(Poznámka: Integrovaný rad rádu k sa označuje $I(k)$ a diferencia znakom Δ .)

Testovanie rádu integrácie premennej y_t autoregresného modelu je testovaním hypotéz o parametri ϕ_1 , či sa rovná alebo je menší ako 1. Preto sa test integrácie nazýva testom jednotkového koreňa. Prípado $\phi_1 > 1$ je explozívny rast y_t a neskúma sa.

Dickey a Fuller [1] navrhli upraviť autoregresný model do tvaru (ADF test)

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t,$$

v ktorom sa testuje hypotéza $H_0: \gamma = (\phi_1 - 1) = 0$ oproti hypotéze $H_1: \gamma < 0$. Testujúca štatistika sa vypočíta ako podiel odhadnutej hodnoty parametra γ a jeho štandardnej odchýlky a porovnáva sa s tabuľkovými hodnotami Dickey – Fullerovho rozdelenia tabelovanými pomocou simulačných techník. Zamietnutie hypotézy H_0 znamená stacionaritu radu. Prijatie hypotézy H_0 znamená, že rovnica obsahuje jednotkový koreň a teda rad je integrovaný. Rád integrácie sa určí ako poradie predposlednej iterácie testovacieho postupu, v ktorom po každom prijatí H_0 opakovane zvyšujeme diferenciu všetkých premenných odvodených z y_t .

Postup testovacej procedúry jednotkového koreňa

Testovacia procedúra podľa [2] začína najvšeobecnejším modelom, ktorý obsahuje aj deterministický trend a stochastický posun, teda modelom v tvare

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Prijatie hypotézy o nulovom parametri γ neznamená automaticky prítomnosť jednotkového koreňa, ale musí nasledovať test prítomnosti trendu a následne posunu. Vynechaním člena s trendom (predpoklad o nulovom parametri α_1) a následne posunu (predpoklad o nulovom α_0) sa opakuje test o nulovom parametri γ . Podľa jednotlivých výsledkov sa určí tvar modelu a prípadná prítomnosť jednotkového koreňa.

Členy s parametrami β_i reprezentujú prípadnú autokoreláciu náhodných zložiek ε_t . Pri splnení podmienok o koreňoch polynómu oneskorenia kľzavých priemerov náhodných zložiek (ak ležia mimo kruhu s jednotkovým polomerom) sa totiž kľzavé priemery dajú

invertovať na autoregresnú schému. Jej stupeň sa stanoví pomocou DW štatistiky a nebýva vysoký.

Alternatívne prístupy k testovaniu jednotkového koreňa

Alternatívnym prístupom k testovaniu stacionarity navrhnutého Dickey – Fullerom je Phillips – Perronov test, ktorý sa na rozdiel od zameriavania pozornosti na dodatočné členy v najvšeobecnejšom tvare Dickey – Fullerovho modelu zaoberá korekciou testovacej t -štatistiky (viac pozri [3]).

Za alternatívu môžeme tiež považovať procedúru opísanú v práci [5], kde sa využíva spôsob, pri ktorom sa časový rad rozdelí na dve zložky stacionárnu a nestacionárnu a testuje sa, či rozptyl nestacionárneho komponentu je nulový.

Použitý ekonometrický softvér EViews 4.1 ponúka testovanie pomocou všetkých týchto spôsobov.

Testovanie stacionarity vybraných ukazovateľov slovenskej ekonomiky

Pre testovanie stacionarity bolo vybraných 22 základných ukazovateľov [7], ktoré sa využívajú pri tvorbe makroekonomických modelov. Odvedených z nich bolo 22 radov zlogaritmovaných ukazovateľov, pretože logaritmický tvar sa uvažuje pri tvorbe modelov EC. Výsledky analýzy stacionarity sú zobrazené v nasledovnej tabuľke. Časové rady mali 46 napozorovaných hodnôt za obdobie od prvého štvrťroka 1993 po druhý štvrťrok 2004. Kritické hodnoty boli pre vybraný typ modelu prevzaté z [6] a na hladine významnosti 1 % je $-4,206$ a pre 5 % je $-3,527$. Nižšie hodnoty štatistík znamenajú stacionaritu.

	Absolútne hodnoty			Zlogaritmované hodnoty		
Ukazovateľ	t	stacionarita	I(k)	t	stacionarita	I(k)
HDP	-2.18318	nie	2	-2.71323	nie	2
C	-1.89587	nie	1	-1.22431	nie	1
G	-2.26705	nie	1	-2.33056	nie	1
I	-1.73766	nie	1	-1.78151	nie	1
Vyvoz	-1.07219	nie	2	-3.43347	nie	1
Dovoz	-2.49299	nie	1	-2.32397	nie	1
Obyv	-1.98483	nie	1	-4.38018*	áno	0
Nezam	-2.96865	nie	1	-3.12795	nie	1

	Absolútne hodnoty			Zlogaritmované hodnoty		
Ukazovateľ	t	stacionarita	I(k)	t	stacionarita	I(k)
Zam	-2.37472	nie	1	-2.57641	nie	1
Mzda	-1.24015	nie	2	-2.28286	nie	2
CPI	-1.56767	nie	1	-3.40923	nie	1
PPI	-3.56414	áno	0	-3.85736	áno	0
Zahrdlh	-1.54775	nie	1	-2.79399	nie	1
SkEuro	-1.88244	nie	1	-1.96955	nie	1
SkUSD	-2.49075	nie	1	-1.94074	nie	1
Prijsr	-4.95864	áno	0	-3.78547*	áno	0
Vydsr	-2.69642	nie	1	-4.54835	áno	0
M2	-4.70591	áno	0	-1.93421*	nie	2
M1	-1.83254	nie	2	-1.57508*	nie	1
BRIBOR	-3.93740	áno	0	-2.00262	nie	1
vkldR	-2.35049	nie	1	-1.21356*	nie	1
uverR	-2.23736	nie	1	-1.98761	nie	1

* t -štatistika je prevzatá z najvhodnejšieho typu modelu pre parameter γ (iné kritické hodnoty)

Záver

Podľa Dickey – Fullerovej analýzy je väčšina základných ukazovateľov ekonomiky Slovenska nestacionárna a integrovaná rádu 1. Iba príjmy štátneho rozpočtu, PPI, peňažná masa M2 a BRIBOR sú stacionárne časové rady. Na rozdiel od nich sú HDP, vývoz, priemerná mzda a peňažná masa M1 integrované rádu 2. Keďže tieto ukazovatele sa pri modelovaní často používajú v transformovanej podobe, boli preskúmané aj logaritmické tvary týchto premenných. Výsledky analýzy zlogaritmovaných ukazovateľov potvrdzujú závery ukázané pre absolútne hodnoty, pričom rozdiel vykazuje obyvateľstvo a výdavky št. rozpočtu, kde je logaritmický tvar stacionárny. Oproti tomu pre BRIBOR a peňažnú masu M2 logaritmický tvar na rozdiel od absolútneho ukázal integráciu rádu 1 alebo dokonca 2.

Summary:

Complicated dynamic structures in econometric models require testing for unit roots of the time series. The most applied tests for stationarity are Dickey – Fuller tests for unit

roots. Alternatives to ADF tests are Phillips-Peron test or Kwiatkowski – Phillips procedure. This analysis together with an analysis of cointegration can help to the creation of Error Correction Models in modeling of Slovak economic indexes.

Literatúra:

- [1] Dickey, D. A. – Fuller, W.A.: Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, 1979, str. 427-431.
- [2] Enders, W.: Applied Econometric Time Series. John Wiley, New York, 1995.
- [3] Harris, R. I. D.: Using Cointegration Analysis in Econometric Modelling. Pearson Education Limited, Prentice Hall, 1995.
- [4] Mackinnon, J. – Davidson, R.: Econometric Theory and Methods. Oxford University Press, New York, 2004.
- [5] Kwiatkowski, D. – Phillips, P. – Schmidt, P. – Shin, Y.: Testing the Null of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root. Journal of Econometrics, Vol 54, 1992, str. 159-178.
- [6] MacKinnon, J. G.: Critical Values for Cointegration Tests. V: Engle, R. F. – Granger, C. W. J.: Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration, OUP, Oxford, 1991.
- [7] Internetové stránky ŠÚ SR a MF SR.

Autor:

Ing. Martin Lukáčik

Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

tel.: 02 / 672 95 822, e-mail: lukacik@euba.sk

Řešení úlohy obchodního cestujícího pomocí řezů

Stanislav Mělníček

1. Formulace úlohy obchodního cestujícího

Úloha obchodního cestujícího (TSP) je dobře známou úlohou celočíselného programování. Rozšířením úlohy TSP pro více okružních cest je rozvozní úloha (VRP). Tyto úlohy jsou často v různých variantách využívány v praxi, např. v logistice nebo při rozvrhování výrobních linek. Z výpočetního hlediska představuje řešení těchto úloh značný problém, neboť tyto úlohy patří do třídy úloh NP-obtížných.

Úloha obchodního cestujícího je úloha hledání nejkratší Hamiltonovy cesty na úplném grafu. K řešení využíváme matematické formulace s využitím binárních proměnných a tyto modely řešíme metodou větvení a hranic. Pro nesymetrickou úlohu TSP jsou užívány například formulace Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) a Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ). Obě formulace obsahují binární proměnné x_{ij} , pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (n je počet uzlů grafu). Proměnná x_{ij} je rovna 1, leží-li hrana (i, j) na Hamiltonově grafu, v opačném případě je x_{ij} rovna nule.

(MTZ):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j$$
$$u_1 = 0 \quad (4)$$

(DFJ):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n-1 \quad (5)$$

V dalším textu budeme uvažovat symetrickou úlohu TSP, ve které jsou vzdálenosti mezi každou dvojicí uzlů stejné v obou směrech. Nerozlišujeme tedy orientaci hran a můžeme proto pracovat pouze s horní trojúhelníkovou maticí vzdáleností c_{ij} a binárních proměnných x_{ij} , tedy $c_{ij}, i, j=1, 2, \dots, n; i < j$ a $x_{ij}, i, j=1, 2, \dots, n; i < j$. Místo omezení (2) a (3) použijeme omezení (7) mající stejný účinek a dostaneme následující formulaci symetrické úlohy TSP:

(SDFJ):

$$\sum_{\substack{i, j \\ i < j}} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n x_{ij} + \sum_{\substack{i=1 \\ j < i}}^n x_{ji} = 2, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n - 1 \quad (8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad i < j \quad (9)$$

Při pohledu na uvedené formulace TSP je zřejmé, že s růstem počtu uzlů sítě n prudce roste počet binárních proměnných obsažených v modelu (ve formulaci (SDFJ) je počet binárních proměnných roven $n(n-1)/2$). Protože běžné úlohy z praxe obsahují 100 i více uzlů, příslušný model představuje značně rozsáhlý optimalizační problém, který většinou není v akceptovatelném výpočetním čase řešitelný. Z toho důvodu se v těchto případech využívají spíše heuristické metody, pro které sice rozsah úlohy není problémem, nicméně kvalita řešení získaného těmito metodami není zaručena.

Pokrok v metodách řešení celočíselných úloh postupně posunuje hranici řešitelnosti těchto úloh tak, že již existuje řada logistických problémů z praxe, které lze řešit do optima. Velmi dobrých výsledků bylo v poslední době dosaženo pomocí přidávání dodatečných platných nerovností (tzv. řezů) do původních formulací modelů.

2. Použití řezů v celočíselném programování

Označme S množinu přípustných řešení úlohy celočíselného programování ve tvaru $S = \{x; Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ celé}\}$.

Předpokládejme, že množina S je konečná. Dále označme P množinu přípustných řešení úlohy celočíselného programování po odstranění podmínek celočíselnosti. Zřejmě platí $S \subset \text{conv}(S) \subset P$.

Obtížnost řešení úlohy celočíselného programování a zároveň značné časové nároky na výpočetní čas u metody větvení a hranic souvisí s postupným dělením množiny P na podmnožiny a užitím simplexové metody pro řešení dané úlohy na těchto podmnožinách. Dělení množiny P na podmnožiny nastává v metodě větvení a hranic v případě, že optimální řešení na P není celočíselné, což nastává ve většině případů. Naproti tomu všechny vrcholy $\text{conv}(S)$ jsou celočíselné a je tedy mezi nimi i optimální řešení původní celočíselné úlohy. Využití řezů tedy směřuje k tomu odstranit z množiny P oblasti neobsahující celočíselná řešení tak, aby optimální řešení nalezené na takto redukované množině již bylo celočíselné. Další efektem použití řezů je možnost získání přesnějších odhadů optimální hodnoty účelové funkce celočíselné úlohy.

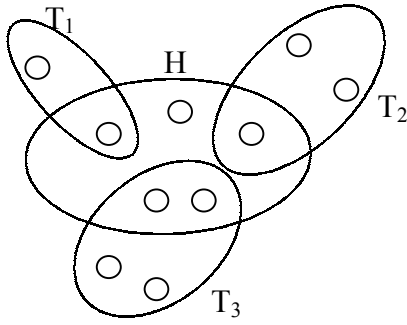
Řezem, neboli platnou nerovností rozumíme nerovnost ve tvaru $\alpha x \geq \beta$ takovou, že všechna řešení z S tuto nerovnost splňují. Je pochopitelně žádoucí užít platné nerovnosti co nejsilnější, nejlépe takové, kterou splňuje nějaké celočíselné řešení jako rovnici. Takové řezy se označují jako stěny (angl. *face*), resp. fazety (*facet*) v případě, pokud prochází stěnou $\text{conv}(S)$ nejvyšší dimenze.

3. Řezy užívané pro úlohu obchodního cestujícího

Bylo ukázáno, že omezení (4) eliminující parciální okruhy ve formulaci (MTZ) nejsou příliš silná (netvoří stěny množiny $\text{conv}(S)$). Naopak omezení (5) ve formulaci (DFJ), resp. omezení (8) ve formulaci (SFDJ) jsou mnohem silnější. Konkrétně platí, že tato omezení odstraňující parciální cykly představují stěnu množiny $\text{conv}(S)$ úlohy TSP a lze je použít jako řezy. Nevýhodou je, že počet těchto omezení roste exponenciálně s velikostí problému, což znemožňuje použití všech těchto omezení při řešení velkých úloh.

Soubor podmnožin uzlů $\{H, T_1, T_2, \dots, T_k\}$, $k \geq 3$, liché označujeme jako hřeben, pokud jsou splněny následující podmínky (viz Obr. 1):

- $|H \cap T_s| \geq 1$, $s = 1, 2, \dots, k$,
- $|T_s - H| \geq 1$, $s = 1, 2, \dots, k$,
- $|T_r \cap T_s| = \emptyset$, $1 \leq r < s \leq k$.



Obr. 1 – Ukázka hřebene

Pak **hřebenový řez** (*comb inequality*) je ve tvaru (důkaz viz [3]):

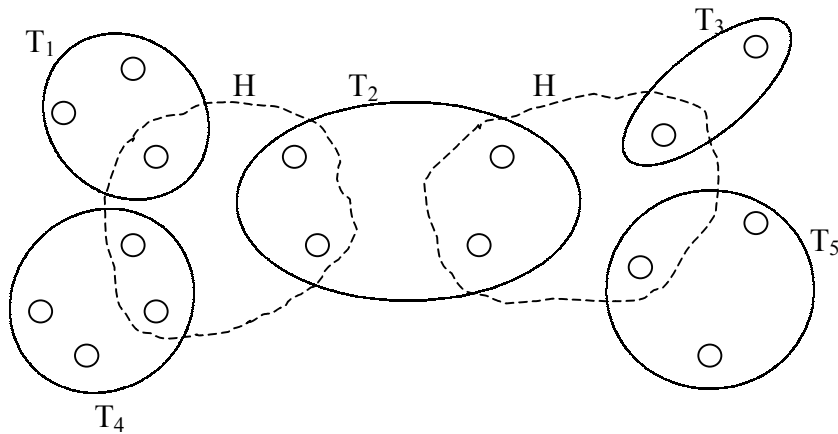
$$\sum_{i,j \in H} x_{ij} + \sum_{s=1}^k \sum_{i,j \in T_s} x_{ij} \leq |H| + \sum_{s=1}^k (|T_s| - 1) - \frac{k+1}{2}. \quad (10)$$

Dalším užívaným řezem je klikový řez, který je zobecněním hřebenového řezu. Je vytvořen pomocí podmnožin uzlů $\{H_1, H_2, \dots, H_s, T_1, T_2, \dots, T_r\}$, které splňují (viz Obr. 2):

- $|T_i \cap T_j| = \emptyset, 1 \leq i < j \leq r,$
- $|H_i \cap H_j| = \emptyset, 1 \leq i < j \leq s,$

a další podmínky (viz [3]).

Obr. 2 – Ukázka kliky



Klikový řez (*clique tree inequality*) rozumíme nerovnost:

$$\sum_{k=1}^s \sum_{i,j \in H_k} x_{ij} + \sum_{k=1}^r \sum_{i,j \in T_k} x_{ij} \leq \sum_{k=1}^s |H_k| + \sum_{k=1}^r (|T_k| - t_k) - \frac{r+1}{2}, \quad (11)$$

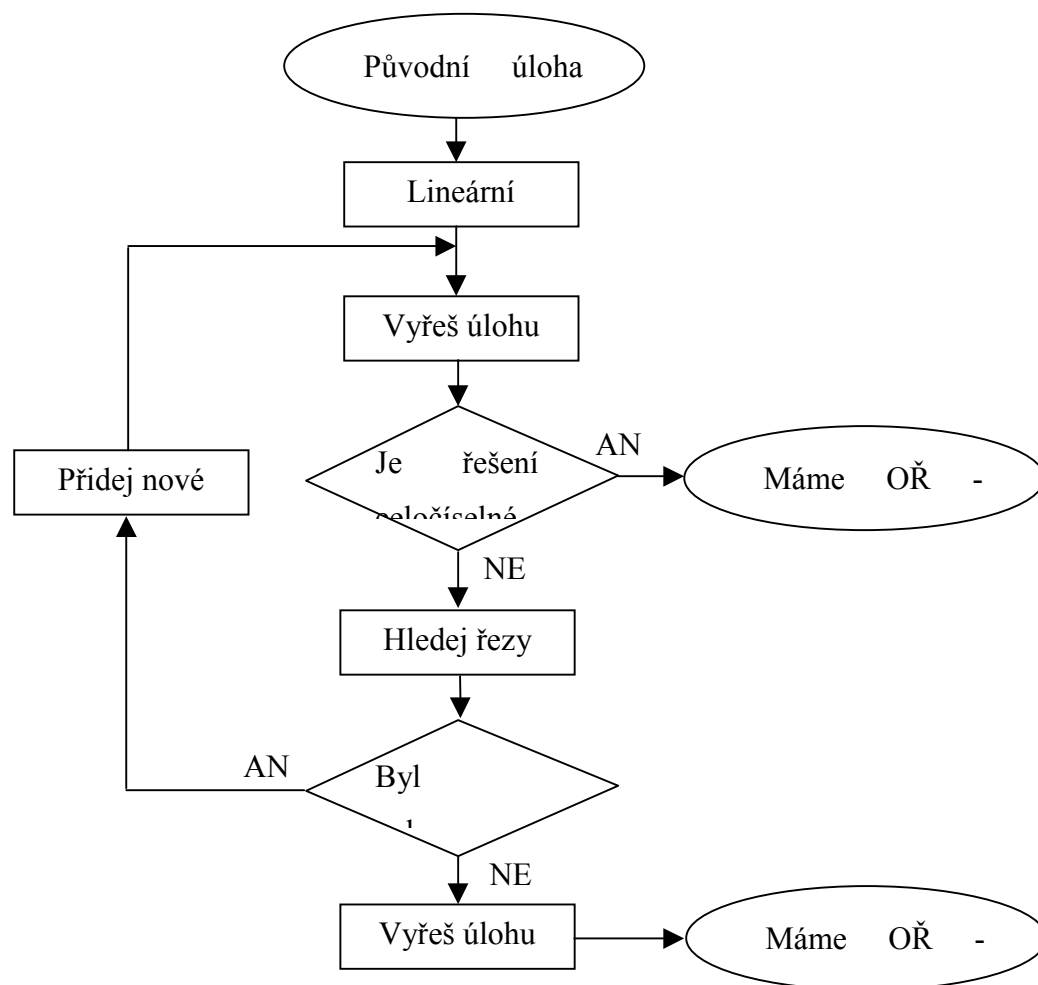
kde t_k je počet množin H_i s neprázdným průnikem s T_k .

4. Použití řezů při řešení úlohy obchodního cestujícího

Základní principy použití řezů v celočíselných úlohách byly uvedeny v oddíle 2. V této části popíšeme algoritmus efektivně využívající výše popsané řezy při řešení úlohy TSP. Je známou skutečností, že zatímco nalezení optimálního řešení úlohy obsahující celočíselné proměnné (MIP) může již v případě středně velké úlohy vyžadovat relativně dlouhou dobu, vyřešení stejně rozsáhlé úlohy lineárního programování (například lineární relaxace původní úlohy (MIP)) nepředstavuje pro dnes běžně používané solvery téměř žádný problém. Abychom využili tohoto faktu, převedeme řešení původní úlohy (MIP) na posloupnost řešení velkého množství dílčích úloh (LP). Hledáme-li řešení úlohy (6)-(9), pak na počátku vypustíme omezení (8), bivalentní omezení (9) nahradíme lineárními omezeními ve tvaru $0 \leq x_{ij} \leq 1, i, j = 1, \dots, n; i < j$ (12) a řešíme vzniklou úlohu (LP). Není-li získané optimální řešení celočíselné bez smyček, hledáme platné nerovnosti (řezy), které nejsou v nalezeném řešení splněny. Tyto řezy pak přidáme do modelu a řešíme rozšířenou úlohu (LP). Tento postup opakujeme, dokud není získané optimální řešení současně optimálním řešením původní úlohy, případně používané algoritmy již nenaleznou žádný další řez. V takovém případě musíme omezení (12) nahradit původními omezeními (9) a vzniklou celočíselnou úlohu předáme solveru k nalezení optimálního celčíselného řešení. Díky přidaným řezům je formulace modelu silnější, prostor k hledání optimálního řešení zúžený a optimální řešení je nalezeno v kratším čase. Schematicky je celý postup zachycen na Obr. 3.

5. Výpočetní experiment

Popsaný algoritmus jsme použili k řešení symetrické úlohy TSP obsahující 17 uzlů. V každém kroku výpočtu jsme identifikovali platné řezy a s jejich pomocí jsme zesílili formulaci úlohy. K lineární relaxaci původní úlohy jsme museli před nalezením optimálního řešení úlohy přidat celkem 10 protismyčkových řezů tvaru (8) a 9 hřebenových řezů tvaru (10). Kromě lineární relaxace původní úlohy bylo třeba vyřešit dalších 7 lineárních úloh. Naproti tomu systém Lingo 8.0 potřeboval k nalezení optimálního řešení této malé úlohy 345 vteřin. Lze tedy předpokládat, že využití řezů uvedených v tomto textu podstatně urychlí řešení úloh obchodního cestujícího. Korektní srovnání obou postupů není zatím možné, protože platné řezy byly identifikovány pouze vizuálně, nikoliv automaticky pomocí počítače. Naprogramování efektivního algoritmu pro tento účel bude předmětem další práce autora.



Obr. 3 – Schéma algoritmu

Literatura

- [1] H. D. Sherali, P. J. Driscoll: On Tightening the Relaxations of Miller-Tucker-Zemlin Formulations for Asymmetric Traveling Salesman Problems. *Operations Research*, Vol. 50, No. 4 (2002)
- [2] J. F. Bard, G. Kontoravdis, G. Yu: A Branch-and-Cut Procedure for the Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Transportation Science*, Vol. 36, No. 2 (2002)
- [3] W. R. Pulleyblank: Polyhedral Combinatorics. In: G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan, M. J. Todd (editors): *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 1: Optimization (1989)

Summary

The traveling salesman problem (TSP) represents one of the best known optimization problems with many real world applications. From computational point of view TSP is NP-

hard and we often have to use heuristics to solve TSPs of larger size. Recent work in the field has brought some new techniques to facilitate and speed up the solution process. Very good results have been achieved by strengthening the formulations of mathematical models and by adding new valid inequalities (so called cuts). The paper describes several cuts used for solving TSP, namely subtour elimination constraints, comb inequality and clique tree inequality. A general algorithm and a small example are presented to give closer idea of the proposed approach.

Autor

Ing. Stanislav Mělníček, e-mail: melnicek@vse.cz

Katedra ekonometrie, Vysoká škola ekonomická v Praze

Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Recenzent

Prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., e-mail: pelikan@vse.cz

Katedra ekonometrie, Vysoká škola ekonomická v Praze

Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Model LTL 3PL prepravcu.

Marian Reiff

Model LTL (Less than TruckLoad) použijeme v prípade, ak požadované prepravné množstvo je značne menšie ako prepravná kapacita prepravcu a súčasne prepravca poskytuje zľavu na základe prepravovaného množstva (obr. 1) .

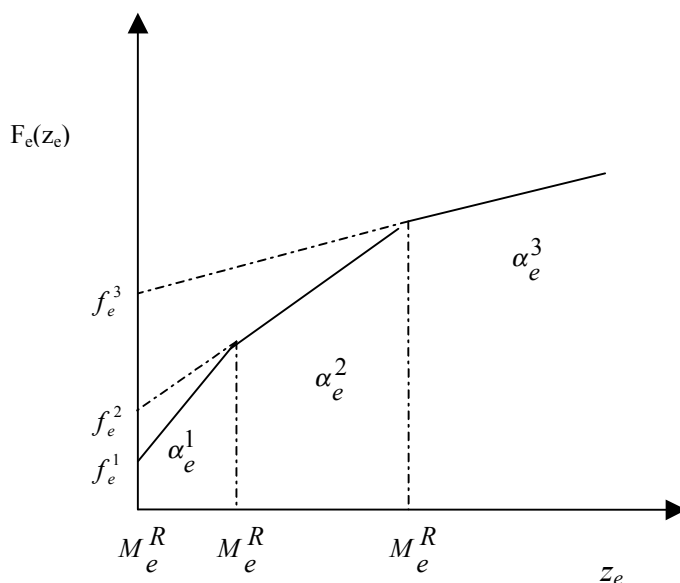
Majme bežnú dopravnú sieť $G = (N, A)$ s N uzlami a A hranami, pričom uzol predstavuje jednotlivého dodávateľa, sklad alebo odberateľa. Dopyt zákazníkov na nasledujúcich T období má deterministický charakter. Každú objednávku zákazníka budeme brať ako rôznu komoditu. Informácia o dopyte obsahuje miesto, odkiaľ a kam má byť daný produkt prepravený, v akom množstve a v ktorom časovom období je daný produkt požadovaný zákazníkom. Úlohou je naplánovať produkciu a dodávku tovaru v čase tak, aby bol uspokojený dopyt pri minimálnych celkových výrobných, prepravných, skladovacích nákladoch a nákladoch spôsobených oneskorením.

Možnou technikou ako efektívne zahrnúť časovú dimenziu do modelu je zostrojenie rozšírenej siete [2]. Nech $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_T$ sú časové úseky plánovaného obdobia. Pôvodnú sieť G rozšírime pre každý jeden uzol o ďalšie uzly $i_1, i_2, \dots, i_T$. Potom budeme spájať uzol i_u s uzlom j_v iba ak $\tau_v - \tau_u$ je čas, ktorý je potrebný na prepravu tovaru z uzla i do uzla j , a týmto spôsobom vytvoríme prepravné hrany. Nakoniec pridáme tzv. zásobovacie hrany (i_l, i_{l+1}) pre $l = 1, 2, \dots, T-1$.

Všimnime si, že prepravný problém sa môže formulovať ako problém multikomoditného toku v sieti s konkrétnou nákladovou funkciou. Na popísanie nášho modelového prístupu zavedieme nasledujúce premenné: nech $K = (1, 2, \dots, K)$ predstavuje index pre všetky komodity (alebo jednotlivé objednávky zákazníka), ktoré musia byť prepravené z daného skladu k danému zákazníkovi a nech w_k ($k = 1, 2, \dots, K$) predstavuje ich množstvo. Napríklad na komoditu $k = 1$ môže byť daná požiadavka $w_1 = 100$ jednotiek. Následne prepravca musí prepraviť 100 jednotiek komodity $k = 1$ z daného skladu k danému zákazníkovi a musí ich doručiť v danom čase, inak bude dodávka penalizovaná. Nech množina všetkých možných ciest pre komoditu k je P_k a c_{pk} predstavuje náklady, ak komodita k je prepravovaná trasou $p \in P_k$. Treba poznamenať, že prepravné náklady určitou trasou budú závisieť aj od celkového prepravovaného množstva všetkých komodít a z tohto dôvodu musíme pre každú prepravnú hranu náklady prepočítať, pričom zohľadníme celkové

prepravované množstvá, a to pre každú hranu osobitne. Nech množina všetkých prepravných hrán je SE a pre každú hranu $e \in SE$ a nech z_e predstavuje celkové množstvo komodít prepravovaných po tejto hrane.

Predpokladáme, že nákladová funkcia $F_e(z_e)$ všetkých prepravných hrán e , $e \in SE$, rozšírenej siete $G_T(V, E)$ je konkávna, po častiach lineárna nákladová funkcia (obr. 1). Tento tvar nákladovej funkcie nám umožňuje formulovať prepravný problém ako úlohu zmiešaného celočíselného lineárneho programovania [1]. Na základe charakteru tejto funkcie nech R predstavuje počet smerníc jednotlivých lineárnych častí nákladovej funkcie. Nech M_e^{r-1} , M_e^r , $r = 1, 2, \dots, R$ označuje dolnú a hornú hranicu prepravovaného množstva zodpovedajúcu r -tému gradientu nákladovej funkcie prislúchajúcej e -tej hrane. Predpokladajme, že $M_e^0 = 0$ a M_e^R predstavuje maximálne množstvo, ktoré môže byť prepravené hranou e . Ku každému intervalu r máme priradenú premennú α_e^r , ktorá predstavuje variabilné náklady a rovná sa gradientu danej lineárnej časti funkcie a fixné náklady f_e^r , definované ako priesečník predĺženej lineárnej časti nákladovej funkcie s osou y . Potom $F_e(z_e) = f_e^r + \alpha_e^r z_e$, ak $z_e \in \langle M_e^{r-1}, M_e^r \rangle$



Obr. 1

Formulujme úlohu zmiešaného lineárneho programovania [3]. Nech premenná z_e predstavuje celkové množstvo komodít prepravené na hrane e a nech z_{ek} predstavuje

množstvo komodity k prepravenej na hrane e . Pre všetky $e \in SE$ a $r = 1, 2, \dots, R$ definujeme premenné:

$$x_e^r = \begin{cases} 1, & \text{ak } z_e \in \langle M_e^{r-1}, M_e^r \rangle \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

a pre $k, k \in K$

$$z_{ek}^r = \begin{cases} z_{ek}, & \text{ak } z_e \in \langle M_e^{r-1}, M_e^r \rangle \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Za účelom spájania jednotlivých tokov na hranách definujeme pre $e \in SE$ a $p \in \bigcup_{k=1}^K P_k$,

$$\delta_p^e = \begin{cases} 1, & \text{ak prepravná hrana } e \text{ je súčasťou } p, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

A nakoniec nech premenná

$$y_{pk} = \begin{cases} 1, & \text{ak komodita } k \text{ je prepravovaná trasou } p \text{ v optimálnom riešení,} \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

pre $k \in K$ a $p \in P_k$.

$$\text{Úloha P : Min } \sum_{k=1}^K \sum_{p \in P_k} y_{pk} c_{pk} + \sum_{e \in SE} \sum_{r=1}^R \left[f_e^r x_e^r + \alpha_e^r \left(\sum_{k=1}^K z_{ek}^r \right) \right]$$

$$\sum_{p \in P_k} y_{pk} = 1 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (1.1)$$

$$\sum_{p \in P_k} \delta_p^e y_{pk} w_k = \sum_{r=1}^R z_{ek}^r \quad e \in SE, k = 1, 2, \dots, K \quad (1.2)$$

$$z_{ek}^r \leq w_k x_e^r \quad e, r, k \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^K z_{ek}^r \leq M_e^r x_e^r \quad e \in SE, r = 1, 2, \dots, R \quad (1.4)$$

$$\sum_{k=1}^K z_{ek}^r \geq M_e^{r-1} x_e^r \quad e \in SE, r = 1, 2, \dots, R \quad (1.5)$$

$$\sum_{r=1}^R x_e^r \leq 1 \quad e \in SE \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
y_{pk} &\in \{0, 1\} & k = 1, 2, \dots, K, \text{ a } p \in P_k \\
x_e^r &\in \{0, 1\} & e \in SE, \text{ a } r = 1, 2, \dots, R \\
z_{ek}^r &\geq 0 & e \in SE, \forall k = 1, 2, \dots, K \\
&& r = 1, 2, \dots, R
\end{aligned}$$

Ohraničenie (1.1) zabezpečuje, že iba jedna trasa bude vybraná pre každú jednu komoditu a ohraničenie (1.2) určuje, že celkový tok na hrane e je rovný sume tokov všetkých komodít ktoré používajú túto hranu. Ohraničenia (1.3) - (1.5) popisujú po častiach lineárnu nákladovú funkciu. Ohraničenie (1.3) vymedzuje, že ak komodita k je prepravovaná hranou e pri príslušnom nákladovom indexe r , premenná x_e^r sa rovná 1 a ohraničenia (1.4) - (1.5) zabezpečujú, že ak index r je používaný na hrane e , potom celkový tok na tejto hrane musí patriť do príslušného intervalu $\langle M_e^{r-1}, M_e^r \rangle$. A nakoniec ohraničenie (1.6) ukazuje, že pre danú hranu e môže byť pridelené maximálne jedno r .

Nech Z^* je optimálnym riešením úlohy P. Nech sú Z_{R_x} a Z_{R_y} optimálne riešenie zjednodušených úloh P, kde sú vynechané podmienky celočíselnosti premennej x_e^r a y_{pk} . Potom $Z^* = Z_{R_x} = Z_{R_y}$ za splnenia predpokladov:

1. $\alpha_e^1 > \alpha_e^2 > \dots > \alpha_e^R \geq 0$,
2. $0 \leq f_e^1 < f_e^2 < \dots < f_e^R$,
3. $F_e(z_e) = \min_{r=1,2,\dots,R} \{f_e^r + \alpha_e^r z_e\}$.

Ohraničenie (1.3) nie je úplne potrebné pre správnu formuláciu zmiešanej celočíselnej úlohy, ale je ponechané vo formulácii, pretože výrazne uľahčuje zjednodušenie pôvodnej úlohy P. Potom ohraničenia (1.4) – (1.6) sú nadbytočné a môžeme ich vynechať, pri splnení vyššie uvedených predpokladov.

Následne jednotlivými zjednodušeniami dostaneme úlohu lineárneho programovania:

$$\text{Úloha } P_{LP}^R : \text{Min} \sum_{k=1}^K \sum_{p \in P_k} y_{pk} c_{pk} + \sum_{e \in SE} \sum_{r=1}^R \left[f_e^r x_e^r + \alpha_e^r \left(\sum_{k=1}^K z_{ek}^r \right) \right]$$

$$\sum_{p \in P_k} y_{pk} = 1 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (1.1)$$

$$\sum_{p \in P_k} \delta_p^e y_{pk} w_k = \sum_{r=1}^R z_{ek}^r \quad e \in SE, k = 1, 2, \dots, K \quad (1.2)$$

$$z_{ek}^r \leq w_k x_e^r \quad e, r, k \quad (1.3)$$

$$y_{pk} \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K, \text{ a } p \in P_k$$

$$x_e^r \geq 0 \quad e \in SE, \text{ a } r = 1, 2, \dots, R$$

$$z_{ek}^r \geq 0 \quad e \in SE, \text{ a } k = 1, 2, \dots, K \\ r = 1, 2, \dots, R$$

Nech vektor $y = (y_{pk})$ predstavuje prípustné riešenie úlohy P_{LP}^R . Ak poznáme vektor y (množstvo jednotlivých komodít prepravovaných po jednotlivých hranách), úlohu P_{LP}^R rozložíme na viaceré podúlohy pre jednotlivé hrany e . Riešením každej jednej úlohy určíme náklady na prepravu komodít danou hranou e . Nech podiel komodity k prepravenej danou hranou e predstavuje $\gamma_{ek} = \sum_{p \in P_k} \delta_p^e y_{pk}$. Úpravou rovnice (1.2) získame rovnosť

$\sum_{r=1}^R z_{ek}^r = w_k \gamma_{ek}$. To znamená, že suma všetkých tokov komodity k na rôznych intervaloch nákladovej funkcie pre daná hranu e sa musí rovnať množstvu $w_k \gamma_{ek}$ komodity k prepravenej danou hranou e .

Celkové prepravné náklady a premenné z_{ek}^r a x_e^r (pre každú jednu hranu e) prislúchajúce k vektoru y v úlohe P_{LP}^R získame riešením jednotlivých podúloh FF_y^e :

$$\text{Úloha } FF_y^e : \text{Min} \sum_{r=1}^R \left[f_e^r x_e^r + \alpha_e^r \sum_{k=1}^K z_{ek}^r \right]$$

$$z_{ek}^r \leq w_k x_e^r \quad \forall k = 1, 2, \dots, K, \text{ a } r = 1, 2, \dots, R \quad (1.7)$$

$$\sum_{r=1}^R z_{ek}^r = w_k \gamma_{ek} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K \quad (1.8)$$

$$z_{ek}^r \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K, \text{ a } r = 1, 2, \dots, R$$

$$x_e^r \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

Nech $C_e^*(y) \equiv C_e^*(\gamma_{e1}, \gamma_{e2}, \dots, \gamma_{eK})$ je optimálnym riešením podúlohy na hrane e pre daný vektor y . [3] Nech pre ľubovoľnú hranu $e \in SE$ je fixne daný podiel γ_{ek} komodity k prepravenej hranou e , pre $k = 1, 2, \dots, K$ a nech sú jednotlivé komodity usporiadané podľa γ_{ek} v neklesajúcom poradí $\gamma_{e1} \leq \gamma_{e2} \leq \dots \leq \gamma_{eK}$. Potom optimálne riešenie podúlohy na danej hrane e sa rovná:

$$C_e^*(\gamma_{e1}, \gamma_{e2}, \dots, \gamma_{eK}) = \sum_{k=1}^K F_e \left(\sum_{i=k}^K w_i \right) [\gamma_{ek} - \gamma_{ek-1}] \quad (1.9)$$

pričom $\gamma_{e0} = 0$. To znamená jednotlivé množstvá komodít sú zlučované, aby boli prepravené pri čo možno najnižších nákladoch na jednotkové množstvo. Na začiatku poznáme jednotlivé γ_{e1} pre všetky komodity $k = 1, 2, \dots, K$.

Zhrnutie riešenia úlohy:

- 1) Položme $k = 1$ a riešime úlohu lineárneho programovania P_{LP}^R .
- 2) Ak $k = K+1$ ukončíme riešenie, inak pre každú hranu vypočítame marginálne náklady (rovnica 1.9), o ktoré sa zvýši hodnota účelovej funkcie podúlohy pri zvýšení toku o jednu jednotku komoditou k .
- 3) Určíme trasu pre komoditu k (trasa s najmenšími nákladmi v rozšírenej sieti, ocenenia hrán sú rovné marginálnym nákladom).
- 4) Prepočítame toky a náklady na jednotlivých hranách.
- 5) Potom $k = k+1$ a vrátime sa ku kroku 2 - 5.

Summary

In this article we focus on the Shipper Problem under piecewise linear and concave production and transportation costs, and use properties resulting from the concavity of the cost function to devise an efficient algorithm.

Literatúra

- [1] Balakrishnan, A., Graves, S.: A composite algorithm for concave-cost network flow problem. Networks 19 1989
- [2] Farwolden, J., Powell, W. B., Lustig, I. L.: A primal partitioning solution for multi-commodity network flow problem. Operation Research 41 1993

- [3] Muriel, A., Munshi, F.: Capacitated Multicommodity Network Flow with Piecewise Linear Concave Costs. Working paper University of Massachusetts, Amherst 2002
- [4] Muriel, A., Sichmi-Levi, D.: Supply Chain Design and Planning –Application of Optimization Techniques for Strategic and Tactical Model. Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation 2003

Autor

Ing. Marian Reiff, EU FHI KOVE Bratislava, reiff@dec.euba.sk

Recenzent

doc. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU FHI KOVE Bratislava, brezina@dec.euba.sk

Modelovanie indexu spotrebiteľských cien Box- Jenkinsovou metodológiou

Kvetoslava Surmanová, Zuzana Čičková

Jednotlivé smery ekonomickej vedy hľadajú a zdôvodňujú príčiny inflačného vývoja. Ukazuje sa, že súčasná inflácia prebieha ako proces vzájomného pôsobenia viacerých činiteľov, ktoré sa navzájom prelínajú a ovplyvňujú, v určitých obdobiach či krajinách niektoré silnejú, iné slabnú. Podstatnou a novou črtou inflačného vývoja v posledných dvoch desaťročiach je skutočnosť, že jej zdroj nespočíva len v nadmernom dopyte, ale aj v cenovej tvorbe na strane ponuky, čo závisí od vývoja výrobných nákladov. Problém inflácie je veľmi náročný problém na vysvetlenie a objasnenie príčin vzniku. Môžeme teda aj napriek tomu prognózovať infláciu? A aké problémy sú s modelovaním inflácie spojené? Na tieto ale aj ďalšie otázky sa pokúsime nájsť odpovede v nasledujúcom texte.

V klasických makroekonomických analýzach sa predpokladá, že náhodné zložky sú nekorelované veličiny, s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom. Realita je však obvykle celkom iná. Často nebýva splnená podmienka nekorelovateľnosti náhodných zložiek časových radov. Jednotlivé pozorovania časových radov, ako aj ich náhodné zložky môžu byť medzi sebou lineárne závislé. S týmto problémom (autokoreláciou) sa stretávame aj v prípade napozorovaných mesačných údajov indexu spotrebiteľských cien (CPI) Slovenskej republiky za obdobie rokov 1992 až 2003 o čom sa môžeme presvedčiť v nasledujúcom lineárnom modeli:

$$CPI_t = 14.372339 - 0.063133791 \cdot T$$

$$R^2 = 0.2282, \text{ Durbin-Watson} = 0.13552$$

Tieto vlastnosti časových radov vyplývajú z ekonomickej podstaty trhu a prostredia a tiež zo správania ekonomických subjektov, či už vlády, firiem, alebo konečného spotrebiteľa. Preto sú častokrát časové rady zachytené nielen lineárnymi modelmi, ale aj nelineárnymi.

V časových radoch sa veľmi často stretávame s nestacionárnosťou, ktorá môže byť spôsobená zmenou strednej hodnoty v čase, ale aj meniacim sa rozptylom. Preto sme sa na modelovanie indexu spotrebiteľských cien rozhodli aplikovať Box-Jenkinsovú metodológiu¹.

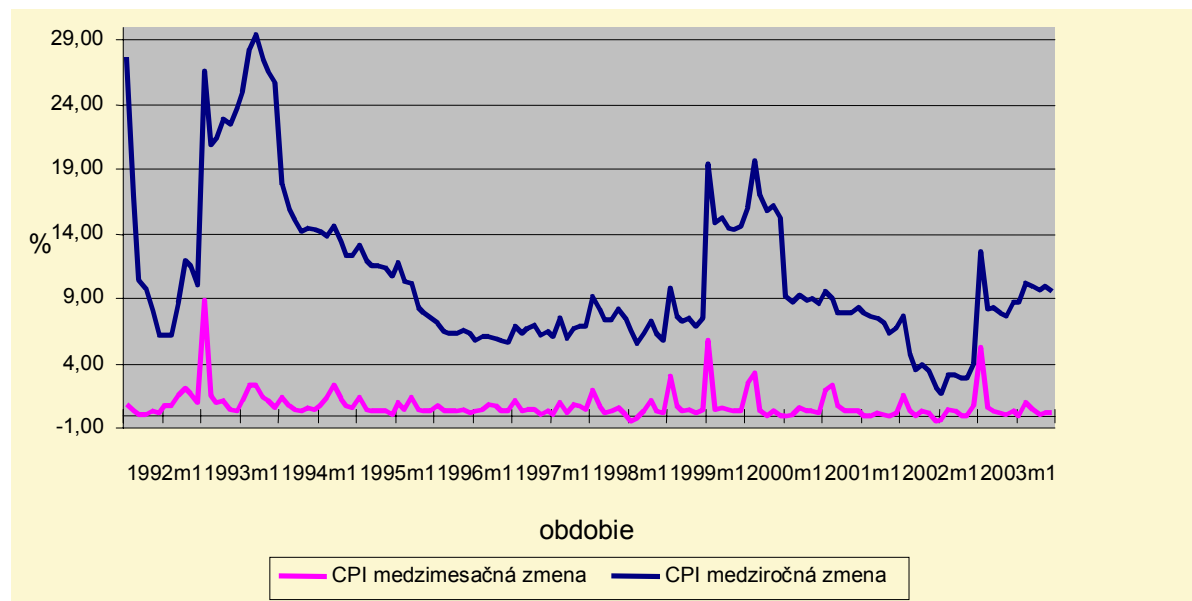
V našej analýze boli použité mesačné údaje medzироčnej zmeny CPI namerané za časové obdobie január 1992 až december 2003. Pri celkovej dĺžke pozorovaného časového radu (144 pozorovaní) sme splnili podmienku aplikovateľnosti Box-Jenkinsovej metodológie².

¹ Konceptia Box-Jenkinsovej metodológie je východiskom pri modelovaní nestacionárnych časových radov.

² Pre vybudovanie spoľahlivého modelu podľa tejto metodológie je nutné mať k dispozícii časový rad s dĺžkou minimálne 50 pozorovaní.

Už pri pohľade na grafický priebeh CPI (graf č.1) je zjavné, že ide o nestacionárny časový rad a že nie je možné priebeh inflácie (medziročnej zmeny, ani medzimesačnej zmeny CPI)³ jednoducho popísať žiadnou matematickou krivkou.

Graf č.1: Priebeh CPI v čase



Pri modelovaní CPI uvažujeme autoregresný integrovaný proces kľzavých priemerov rádu p , d , q , ktorý sa označuje $ARIMA(p, d, q)$. Modely $ARIMA$ umožňujú popísať procesy, v ktorých dochádza nielen ku zmenám úrovne, ale tieto zmeny majú aj nesystematický náhodný charakter, ako je to bežné pre väčšinu časových radov. Pri konštrukcii modelov $ARIMA$ nie je potrebná stacionárnosť časového radu, ako to je potrebné pri modeloch $ARMA$. Pri konštrukcii modelu $ARIMA$ sa vychádza priamo z analyzovaného časového radu s podmienkou, že časový rad musí byť prevoditeľný na stacionárny prevodom na prvú alebo vyššiu diferenciu d .

Identifikácia modelu

Autokorelačnú vlastnosť možno vyjadriť pomocou autokorelačnej funkcie (ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF). Na základe podobnosti výberovej ACF a PACF s teoretickými ACF a PACF⁴ možno identifikovať modely $AR(p)$ a $MA(q)$ ⁵ (nájdienie p a q). Pri skutočných časových radoch sa nestretneme so skutočnou ACF a PACF funkciou, ale môžeme získať len ich výberové funkcie.

Pre odhad autokorelačnej funkcie platí vzťah

³ ďalších analýzach a úvahách sa budeme zaoberať len medziročnou zmenou CPI.

⁴ bližšie pozri [1]

⁵ $AR(p)$ sa nazýva autoregresný proces p -teho rádu a $MA(q)$ označujeme proces kľzavých priemerov rádu q .

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \text{ pre } k=0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

kde c_k pre $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ je odhad autokovariančnej funkcie, ktorého hodnoty sme získali na základe vzťahu

$$c_k = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{n} \text{ pre } k=0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2)$$

Procedúra ACF funkcie vypočíta autokorelačné koeficienty medzi hodnotami skúmaného časového radu a časovo posunutými hodnotami toho istého časového radu a posunom (lagom) $k=12$ hodnôt.

Durbin na výpočet odhadov výberovej parciálnej autokovariančnej funkcie navrhol rekurzívny vzťah [1]

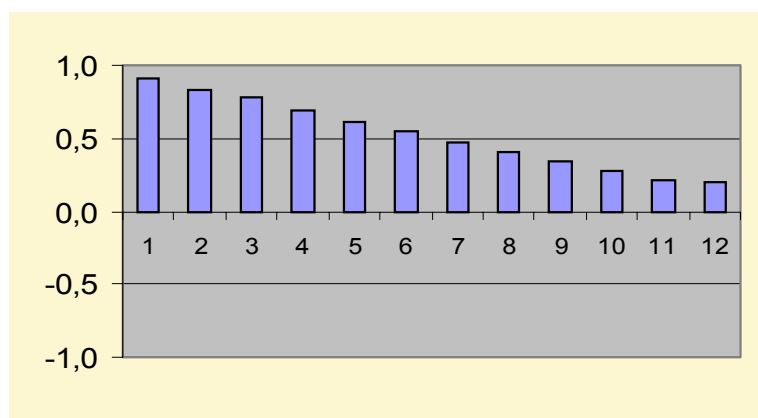
$$r_{11} = r_1 \quad (3)$$

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} \text{ pre } k > 1, \quad (4)$$

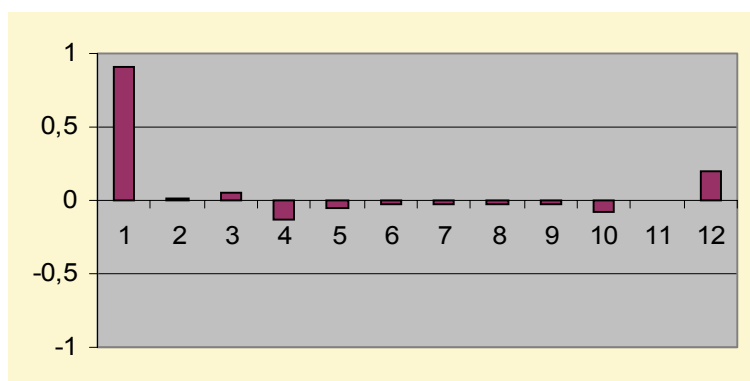
$$\text{kde } r_k = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-j} \text{ pre } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (5)$$

Korelogram výberovej ACF (graf č.2) a výberovej PACF (graf č.3) nediferencovaného časového radu CPI potvrdil predpokladanú nestacionárnosť.

Graf č. 2.: Výberová ACF



Graf č. 3.: Výberová PACF



Hodnoty výberovej ACF klesajú pomaly a prvé hodnoty výberovej ACF a tiež výberovej PACF sú blízke jednej.

V ďalšej analýze sme v Statgraphicsu pomocou Box-Jenkinsovej metodológie identifikovali ako najlepší model ARIMA typu (1, 0, 0). Výsledky z programového produktu Statgraphics sú nasledovné:

Forecast Summary

Forecast model selected: ARIMA(1,0,0) with constant

Number of forecasts generated: 12

Number of periods withheld for validation: 0

Estimation Validation		
Statistic	Period	Period
MSE(mean squared error)		3,0287
MAE(mean absolute error)		0,848209
MAPE(mean absolute percentage error)		8,90994
ME(mean error)		-0,0400643
MPE (mean percentage error)		-2,66582

ARIMA Model Summary

	Parameter	Estimate	Std. Error	t	P-value
AR(1)	0,941654	0,0223938	42,0497	0,000000	
Mean	8,63922	2,44116	3,53899	0,000543	
Constant	0,504067				

Backforecasting: yes

Estimated white noise variance = 3,05513 with 142 degrees of freedom

Estimated white noise standard deviation = 1,74789

Number of iterations: 3

Tests for Randomness of residuals

Box-Pierce Test

Test based on first 12 autocorrelations

Large sample test statistic = 49,1205

P-value = 9,00253E-7

Po porovnaní hodnôt P-value všetkých parametrov (konštanta $\delta = 0,00000$ a $AR(1) = 0,000543$) s hladinou významnosti $\alpha = 0,05$ je zrejmé, že oba parametre sú nenulové (t.j. štatisticky významné) a model s odhadnutými parametrami má tvar

$$(1 - 0,941654B)CPI_t = 0,504067 + a_t,$$

alebo

$$CPI_t = 0,504067 + 0,941654CPI_{t-1} + a_t.$$

O vhodnosti použitia hore uvedeného modelu napovedajú tiež nízke hodnoty priemerných chýb (MSE, MAE, MAPE)⁶.

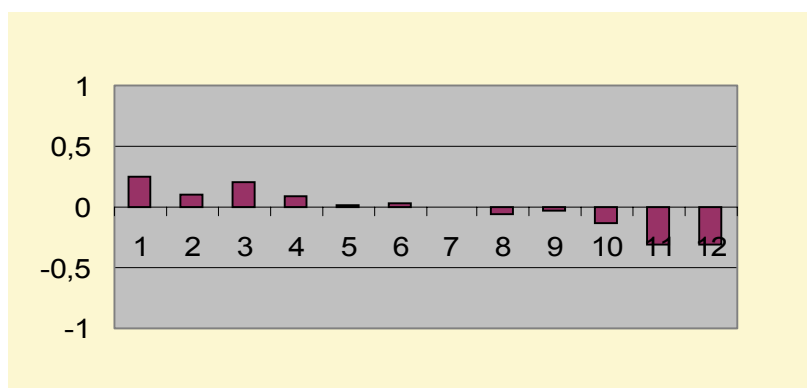
Ale hodnoty reziduálnej ACF a PACF (pozri graf č.4 a č.5) napovedajú, že nesystematická zložka (a_t) je korelovaná (nie je blízka nule), o čom nás presvedčil aj Portmanteau test (Box a Pierce). V časti test reziduí je hodnota P-value blízka nule (P-value = 9,00253E-7), čo potvrdzuje korelovanosť nesystematickej zložky a_t ⁷. Túto pretrvávajúcu závislosť nesystematických zložiek môžeme pripísať vplyvu cyklickej zložky (rok 1993 a obdobie júl 1999 – jún 2000)⁸

⁶ Čím sú hodnoty priemernej štvorcovej chyby (MSE), priemernej absolútnej chyby (MAE) a priemernej absolútnej percentuálnej chyby (MAPE) menšie, tým je model vhodnejší a má väčšiu vypovedaciu schopnosť.

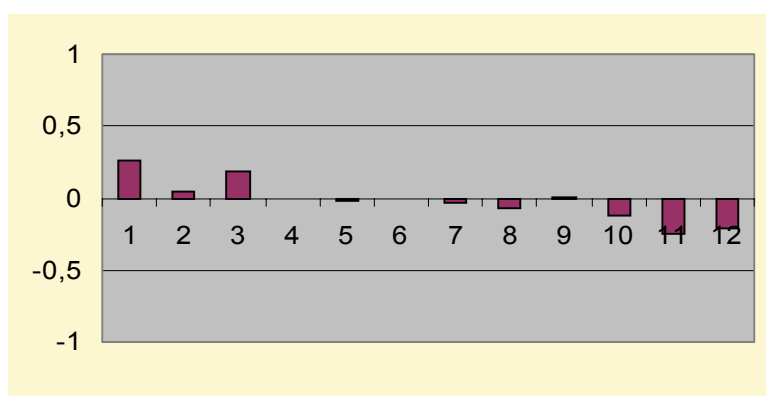
⁷ a_t je proces bieleho šumu (white noise), nesystematická zložka. V stacionárnych procesoch sa môžeme stretnúť s pojmom náhodná zložka.

⁸ pozri graf č.1

Graf č.4: Reziduálna ACF



Graf č.5: Reziduálna PACF



Aj napriek pretrvávajúcej korelovanej náhodnej zložke sme vyššie uvedený odhadnutý model použili na predikciu indexu spotrebiteľských cien na ďalších 6 období (prvý polrok 2004). Výsledky bodovej prognózy spolu s intervalovými predpoveďami s 95 %-nou pravdepodobnosťou sú nasledovné:

Forecast Table for CPI

Model: ARIMA(1,0,0) with constant

Period	Forecast	Lower 95,0%	Upper 95,0%
		Limit	Limit
M1.04	9,26145	5,80619	12,7167
M2.04	9,22514	4,47908	13,9712
M3.04	9,19095	3,54188	14,84
M4.04	9,15876	2,81561	15,5019
M5.04	9,12845	2,228	16,0289
M6.04	9,0999	1,74051	16,4593

Veľký rozptyl intervalov prognóz naznačuje, ako je dôležité, aby nesystematická zložka a_t spĺňala podmienky nekorelovateľnosti. Preto by v ďalších analýzach bolo vhodné na časový rad CPI aplikovať niektorý z ďalších modelov Box-Jenkinsovej metolológie, ktorým by sa odstránila cyklická zložka.

Summary

Paper deals with modeling of inflation in Slovakia defined by monthly consumer price index during the period from January 1992 till December 2003. The choosen model is ARIMA(1,0,0), with its estimation and evaluation of forecasts on the whole estimated period. The great deal of gross forecast limit was due cyclic factor (in year 1993 and in a period from July 1999 till June 2000).

Literatúra

1. Artl, J., Artlová M., Finanční časové řady, Grada Publishing a.s., Praha 2003
2. Cipra, T., Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii, SNTL/ALFA, Praha 1986
3. Rubliková, E., Artl J., Artlová M., Libíčová L., Analýza časových radov, Ekonóm, Bratislava 2003
4. www.etrend.sk

Autor

Ing. Surmanová Kvetoslava

Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

tel. č.: 02/67 295 832

e-mail: surman@euba.sk

Ing. Čičková Zuzana

Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

tel. č.: 02/67 295 826

e-mail: cickova@hotmail.com

Recenzent

prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD.

Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

tel. č.: 02/67 295 830

e-mail: ivanicova@euba.sk

Konzistencia monetárnej politiky v ekonomike SR

Karol Szomolányi

Úvod

V článku sa pokúsime odpovedať na otázku či je politika udržiavania nominálnych úrokových mier na danej úrovni časovo konzistentná. S problémom časovej konzistencie sa prví zaoberali Kydland a Prescott v roku 1977 [12], keď uviedli problém a ukázali ako sa vláda vďaka inkonzistencii politiky dostať do pasce vysokej inflácie. Časovou konzistenciou monetárnej politiky sa zaoberal v roku 1978 Calvo [4]. Calvo dospel k záveru, že trajektória ponuky peňazí definovaná ekonomickými autoritami¹ pomocou Friedmanovho pravidla udržiavania nulových nominálnych úrokových mier v 1969 [8] nie je časovo konzistentná. Je rozdiel, či monetárna autorita definuje trajektóriu ponuky peňazí a teda svoju dlhodobú politiku vzhľadom na Friedmanovo pravidlo v období t , alebo v období $t+s$. Calvo svoju štúdiu uzatvára konštatovaním, že pre ekonomické authority je užitočné stanoviť pravidlo budúceho definovania masy peňazí využitím Friedmanovej koncepcie nulových nominálnych úrokových mier raz a navždy a toto pravidlo už nikdy v budúcnosti nemeniť napriek tomu, že v budúcnosti sa bude javiť optimálne v tej dobe aktuálne iné pravidlo definovania masy peňazí podľa tej istej koncepcie a nebude sa zhodovať s už definovaným. Lucas, Stokey v roku 1983 [13] ukázali, že optimálna monetárna politika môže byť dodržaná, ak ekonomické authority majú a využívajú vplyv na trajektóriu vývoja nominálnych cien. V súčasnosti sa problematikou zaoberajú Albanesi [1], ktorá v roku 2002 skúmala konzistenciu monetárnej politiky za predpokladu heterogénosti účastníkov ekonomiky, Alvarez, Kehoe a Neumeyer [2] došli v tom istom roku k záveru, že monetárna politika je časovo konzistentná vtedy a len vtedy ak Friedmanovo pravidlo nominálnych úrokových mier je optimálne.

V tejto práci uvidíme diskrétny² IS-ALM model³, na modeli si ukážeme problémy inkonzistencie monetárnej politiky, model upravíme o adaptívne očakávania a budeme diskutovať podmienky konzistencie politiky centrálnej banky. Na záver si ukážeme, že na základe uvedeného a na základe nášho ekonometrického odhadu IS-ALM modelu je možné predpokladať problém konzistencie politiky v ekonomike SR.

¹ vláda + centrálna banka

² Parametre diskrétného dynamického modelu je možné ekonometricky odhadnúť niektorou metódou najmenších štvorcov.

³ Vid' napr. [3], 8. kapitola

1. IS-LM a IS-ALM modely

V nasledujúcom príklade [3] bude pomocou IS-ALM modelu ukázané, ako môže nastať inkonzistencia monetárnej politiky.

Uvažujme IS-ALM model uzavretej ekonomiky popísaný lineárnymi vzťahmi:

Rovnováha na trhu produktov, IS:

$$\begin{aligned}Y &\equiv C + I + G, \\C &= a + bYD, \\YD &\equiv Y - D, \\D &= \tau Y, \\I &= e - fR.,\end{aligned}\tag{1}$$

kde Y predstavuje celkovú produkciu v ekonomike, C výdavky obyvateľstva na spotrebu, I investície, G vládne nákupy, YD disponibilný príjem, D čisté daňové platby, ktoré charakterizuje proporcionálna daň τ (v ekonomike nie je paušálna daň); a , b , e a f sú parametre IS modelu, R je úroková miera, podľa ktorej sa rozhodujú investori, teda reálna úroková miera z dlhodobých úverov, dlhopisov.

Rovnováha na peňažnom trhu je popísaná:

$$M = l_0 + l_1 Y - l_2 R^N.\tag{2}$$

Ľavá strana predstavuje ponuku reálnej masy peňazí (M) a pravá je dopyt po nej. l_0 , l_1 a l_2 sú parametre dopytu po mase peňazí. Úroková miera, podľa ktorej sa rozhodujú účastníci peňažného trhu, teda nominálna úroková miera z krátkodobých úverov je R^N . Všetky parametre modelu sú nezáporné; b , $\tau < 1$. Všetky veličiny sú v stálých cenách.

Pre úplnosť modelu je potrebné nájsť vzťah medzi peňažným trhom, popisujúcim LM a trhom dlhopisov a teda medzi R , R^N . Nominálna úroková miera z krátkodobých úverov je vyššia o očakávanú infláciu a reálna dlhodobá o prémie zo splatnosti, ktorá v sebe zahŕňa očakávania, prémie likvidity a rizikovú prémie.

$$R = R^N + MP - \pi^e,\tag{3}$$

kde MP je prémie zo splatnosti a π^e očakávaná inflácia. Výraz $MP - \pi^e$ sa nazýva úroková medzera a teda reálnu úrokovú mieru z dlhodobých úverov je možné získať, ak sa nominálna úroková miera upraví o úrokovú medzeru. Práve úrokovou medzerou sa líši IS-ALM od IS-LM. Zohľadnením (3) v LM modeli (2) dostávame ALM model. Rovnovážne dvojice Y a R sú dané riešením sústavy (1)-(3):

$$\begin{aligned} Y &= \frac{l_2(a+e+G) - f[l_2(MP - \pi^e) + l_0 - M]}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \\ R &= \frac{l_1(a+e+G) + [1-b(1-\tau)][l_2(MP - \pi^e) + l_0 - M]}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \end{aligned} \quad (4)$$

Nominálna úroková miera sa potom vypočíta pomocou (3), (4):

$$R^N = \frac{l_1(a+e+G) + [1-b(1-\tau)][l_2(MP - \pi^e) + l_0 - M]}{l_2[1-b(1-\tau)] - fl_1} + \pi^e - MP, \quad (5)$$

po úprave

$$R^N = \frac{l_1[a+e+G + f(\pi^e - MP)] + [1-b(1-\tau)](l_0 - M)}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1}. \quad (6)$$

Predpokladajme, že sa v ekonomike zvýši cenová hladina, ale očakávaná inflácia ostane nezmenená. Vzhľadom na to, že sa nemení úroková medzera ekonomika zareaguje rovnako podľa IS-LM modelu, ako aj podľa IS-ALM modelu, zvýši sa R aj R^N a poklesne Y . Ak monetárne inštitúcie sledujú politiku udržania nominálnych úrokových mier, zvyšujú nominálnu masu peňazí. V prípade, že sa nezmení úroková medzera je efekt monetárneho zásahu rovnaký v IS-LM, aj IS-ALM ponímaní ekonomiky:

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \frac{f}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \Delta M \\ \Delta R &= \Delta R^N = \frac{-[1-b(1-\tau)]}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \Delta M\end{aligned}; \quad (7)$$

teda po správnej voľbe ΔM centrálnou bankou sa nominálna a reálna úroková miera aj produkcia ekonomiky vrátia na pôvodné hodnoty.

Môže však nastať situácia, že sa obyvateľstvu ak zistí, že centrálna banka zvyšuje masu peňazí, zvýšia inflačné očakávania. Uvedený predpoklad vyjadríme

$$\frac{\partial \pi^e}{\partial M} = g, \quad (8)$$

kde $g \geq 0$ je parameter vyjadrujúci zmenu v inflačných očakávaniach, v prípade zmeny masy peňazí. Ak za takýchto podmienok národná banka sleduje politiku udržania nominálnej úrokovej miery, je jej efekt vyjadrený multiplikátormi monetárnej politiky:

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \frac{f(1+l_2g)}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \Delta M, \\ \Delta R &= \frac{-[1-b(1-\tau)](1+l_2g)}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \Delta M, \\ \Delta R^N &= \frac{-[1-b(1-\tau)] + l_1fg}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \Delta M.\end{aligned} \quad (9)$$

Z (9) je zrejmé, že produkcia sa zvýši a reálna úroková miera sa zníži v ešte väčšej miere. Ale nie je isté, či sa zníži nominálna úroková miera. Naopak sa dokonca môže zvýšiť. Záleží práve na parametri g . Navyše vzhľadom na vyššie súčasné inflačné očakávania sa v ďalšom období znova zvýši cenová hladina, čo bude mať za následok znova pokles produkcie, a rast reálnej aj nominálnej úrokovej miery.

Ak centrálna banka pokračuje vo svojej politike, celý proces sa zopakuje. Efektom politiky národnej banky nie je zníženie nominálnych úrokových mier, ale jej zvýšenie a inflácia.

Politika je inkonzistentná. Príčinou sú inflačné očakávania, zahrnuté vo funkcii dopytu po peniazoch a práve inflácia je sprievodným javom nekonzistentnej politiky.

Jednou z podstatných úloh centrálnej banky je udržiavať infláciu na žiadanej úrovni. Je to rovnako v záujme tvorcov politiky aj súkromných účastníkov ekonomiky. Súkromní účastníci reagujú na expanzívnu monetárnu politiku vyššími inflačnými očakávaniami. Toto správanie nie je racionálne z hľadiska „vyššieho princípu“, čo znamená blaho pre každého účastníka ekonomiky. Takéto správanie nie je zahrnuté v mnohých optimalizačných modeloch – ani v IS-LM. Efekt politiky by sa dosiahol za predpokladu $g = 0$. Ak by sa tvorcom politiky podarilo pri svojej politike presvedčiť obyvateľov, že svojou politikou dlhodobo sleduje ich vlastné blaho (aj nízku infláciu), zvýšil by sa jej efekt. Z tohto hľadiska parameter g charakterizuje, ako populácia dlhodobo dôveruje centrálnej banke v jej úsilí o ich blaho. Problém konzistencie je problémom dôvery.

Horeuvedený príklad odhaľuje príčinu nekonzistentnej politiky, ale aj nedostatky IS-LM modelu, nezohľadňujúceho očakávania a prémii zo splatnosti. Charakteristický znak je, že problémy v politike nastanú, ak súkromní účastníci ekonomiky majú možnosť reagovať na rozhodnutie autority a využiť ho vo svoj prospech.

V Ďalšom texte budeme hlbšie analyzovať IS-ALM model ekonomiky využívajúc teóriu adaptívnych očakávaní investorov.

2. Adaptívne očakávania.

Ako bolo uvedené vyššie IS-ALM model sa líši tým, že účastníci peňažného trhu sa riadia nominálnymi úrokovými mierami z krátkodobých úverov, kým investori na trhu výrobkov a služieb zvažujú svoje investičné rozhodnutia podľa reálnych úrokových mier z dlhodobých úverov. Rozdiel medzi oboma definuje vzťah (3), ktorý dopĺňa model. Ukázali sme si, že je nesprávne uvažovať o inflačných očakávaniach, ako o exogénnej premennej. Problém sa pokúsime vyriešiť zavedením predpokladu o adaptívnych očakávaniach investorov. Predpokladajme, že investori očakávajú zvýšenie cien podľa vzťahu:

$$\pi_{t+x}^e - \pi_t^e = \gamma (\pi_{t+x} - \pi_t^e), \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (10)$$

kde t indikuje obdobie, x je doba splatnosti úverov, ktoré si investori berú za účelom realizácie svojich investícií, π_{t+x} je skutočný percentuálny nárast cenovej hladiny o x období, vypočítaný podelením cenových indexov v čase $t+x$ a t . Parameter γ vyjadruje presnosť

odhadov investorov v náraste cien. Ak $\gamma = 0$, investori v každom období predpokladajú konštantný nárast cien, ak $\gamma = 1$, investori majú dokonalé očakávania o vývoji cien na každých x období. Rovnica (10) vnáša dynamiku do modelu (1)-(3), ktorý môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned}
 Y_t &\equiv C_t + I_t + G_t, \\
 C_t &= a + bYD_t \\
 YD_t &\equiv Y_t - D_t, \\
 D_t &= \tau Y_t, \\
 I_t &= e - f(R_t^N + MP_t - \pi_t^e), \\
 \pi_{t+x}^e - \pi_t^e &= \gamma(\pi_{t+x} - \pi_t^e), \\
 M_t &= l_0 + l_1 Y_t - l_2 R_t^N.
 \end{aligned} \tag{11}$$

O vládnych nákupoch, o mase peňazí a o prémii zo splatnosti budeme predpokladať, že sú exogénne, $G_t = G$, $M_t = M$, $MP_t = MP$. Tri prípady môžu nastať podľa parametra γ .

1. $\gamma = 0$. V prípade, že investori nemajú dobré informácie, predpokladajú, že cenová hladina jednoducho konštantne rastie $\pi_{t+x}^e = \pi_t^e \forall t$, a teda inflačné očakávania môžeme pokladať za exogénne, t.j. $\pi_t^e = \pi^e$. V takom prípade správanie ekonomiky predurčuje IS-LM model, po zmene masy peňazí platia multiplikátory (7) a politika znižovania nominálnych úrokových mier zvyšovaním masy peňazí je konzistentná.

2. $0 < \gamma < 1$. Investori čiastočne dokážu predvídať budúce cenové zmeny a presnosť týchto predpokladov je daný parametrom γ . Čím je parameter číslo bližšie 1, tým sú predpovede investorov presnejšie.

Pre nájdenie rovnovážneho riešenia je potrebné riešiť rovnicu (9). Ide o diferenčnú rovnicu prvého rádu. Jej riešenie môžeme nájsť pomocou operačnej metódy hľadania partikulárneho riešenia⁴:

$$\pi_{x(n+1)}^e = A(1-\gamma)^{n+1} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^{ix} \pi_{x(n-i)}, \tag{12}$$

kde $nx = t$, A je ľubovoľná (arbitrárna) konštanta. Druhý člen pravej strany výrazu (12) je vážený priemer (s geometricky klesajúcimi váhami) všetkých minulých mier inflácií. Prvý člen je odklon od tohoto priemeru, ktorý rastom n (času) konverguje k nule, keďže $0 < \gamma < 1$. Konštantu A je možné z (12) vyjadriť, ak je známa konkrétna hodnota očakávanej inflácie a konkrétna hodnota váženého priemeru predchádzajúcich mier inflácií.

Teda ak je systém stabilný, inflačné očakávania sa nemenia, alebo len veľmi málo a ich miera sa rovná váženému priemeru predchádzajúcich mier inflácií. Inflačné očakávania sa môžu od tohto priemeru nejakým exogénnym šokom odchýliť, táto odchýlka je vyjadrená výrazom $A(1-\gamma)^{n+1}$. Konvergencia je tým rýchlejšia, čím menší je parameter γ . Ak investori majú nízke informácie o budúcej cenovej hladine, rýchlejšie sa ich inflačné očakávania stabilizujú. Naopak, ak disponujú lepšími informáciami, očakávania investorov sú istú dobu variabilné a až po nejakom čase sa stabilizujú do vázenej priemernej miery inflácie.

Po dosadení (12) do rovnovážneho riešenia (4), (5)

$$\begin{aligned}
 Y_{nx} &= \frac{l_2(a+e+G) - f \left[l_2 \left(MP - A(1-\gamma)^{n+1} - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^{ix} \pi_{x(n-i)} \right) + l_0 - M \right]}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \\
 R_{nx} &= \frac{l_1(a+e+G) + [1-b(1-\tau)] \left[l_2 \left(MP - A(1-\gamma)^{n+1} - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^{ix} \pi_{x(n-i)} \right) + l_0 - M \right]}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1} \\
 R_{nx}^N &= \frac{l_1 \left[a+e+G + f \left(A(1-\gamma)^{n+1} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)^{ix} \pi_{x(n-i)} - MP \right) \right] + [1-b(1-\tau)](l_0 - M)}{l_2[1-b(1-\tau)] + fl_1}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Ak povedzme v čase $t=0$, $n=0$ zvýši centrálna banka za účelom sledovania politiky zníženia nominálnych úrokových mier ponuku peňazí, systém sa vychýli od rovnováhy, miera očakávanej inflácie sa vychýli od váženého priemeru predchádzajúcich mier inflácií o $A(1-\gamma)$. Z uvedeného vyplýva, že konštanta A je kladná, ak bol systém pred zmenou masy peňazí v rovnováhe. Pokles nominálnej úrokovej miery nie je po prvých x obdobiach dostatočne vysoký (dokonca, môže narásť), zvýšené inflačné očakávania spôsobia zvýšenie

⁴ Hľadanie riešenia diferenčných rovníc prvého rádu je podrobne spracované v [9] v časti 2, 3.

cien v prvých x obdobiach (z (10) platí $\partial\pi_{t+x}/\pi_{t+x}^e = \gamma$) je nutné ďalšie zvýšenie M , aby reálna masa peňazí neklesla. Ak v ďalších x obdobiach ostanú všetky exogénne premenné nezmenené $n=2$, zníži sa odchýlka očakávanej miery inflácie od priemernej na $A(1-\gamma)^2$, nominálne úrokové miery poklesnú. S nárastom n (časom) sa miera očakávanej inflácie vráti do priemeru predchádzajúcich mier inflácií, čo bude mať za následok konvergenciu nominálnej úrokovej miery k želanej úrovni.

Z uvedeného vyplýva, že zásah centrálnej banky v uvedenom modeli je z dlhodobého hľadiska konzistentný, ale okrem zníženia nominálnych úrokových mier má za následok zvýšenie cenovej hladiny. Doba, za ktorú monetárne inštitúcie dosiahnu želaný výsledok závisí od veľkosti parametra γ – čím lepšie očakávania, tým dlhšie musia čakať na efekt politiky, o to väčšie je aj finálne zvýšenie cien – a od doby splatnosti investičných úverov x – dlhodobé investičné zámery predlžujú túto dobu. Poznamenávame, že je zrejmé, že tento záver rovnako platí aj pre prípad fiškálneho zásahu.

3. $\gamma=1$. Ide o prípad dokonalých očakávaní, teda investori presne vedia, aká inflácia bude v nasledujúcom období a teda $\pi_{t+x}^e = \pi_{t+x}$.

Ak predpoklad dokonalých očakávaní dosadíme do (4), (6), rovnováha závisí od budúceho zvýšenia cien, ktoré v žiadnom prípade nemôžu byť exogénne. Ak si uvedomíme, že vzťah (2) pre násobený cenovou hladinou je rovnováha na trhu po nominálnych peniazoch, dôjdeme k záveru, že nárast ponuky nominálnych peňazí nemusí zapríčiniť len zníženie nominálnej úrokovej miery, ale aj rast cenovej hladiny.

Calvo vo svojom modeli predpokladal dokonalé predvídanie cien účastníkmi ekonomiky. Jeden z ďalších jeho predpoklad spočíval v tom, že dlh v ekonomike je iba v peňažnej forme. Kombinácia týchto dvoch predpokladov viedla k jednoznačnému dôkazu inkonzistencie monetárnej politiky. V štúdiách Fischera [7] v 1980, Chariho a Kehoeho [5] (1990), Kotlikoffa, Perssona a Svenssona (1988) [11] sú analyzované modely, v ktorých peňažný dlh nahrádza kapitál. Za istých okolností v uvedenom ekonomickom prostredí nie je prítomný problém časovej inkonzistencie, aj za predpokladu dokonalých očakávaní účastníkov ekonomiky. Popri dvoch horeuvedených sa ako ďalší faktor, ktorý môže spôsobiť inkonzistenciu politiky javí heterogénnosť účastníkov ekonomiky. Z tohto hľadiska sú zaujímavé práce Chariho, Kehoeho a Prescotta [6] z 1988 a najnovšie Albanesi [1] v 2002. štúdiom uvedených faktorov v podmienkach ekonomiky SR sa bude autor zaoberať v ďalších publikáciach.

Záver je, že ak investori majú nulové schopnosti predvídať budúce zvyšovanie cien, politika centrálnej banky znižovania nominálnych úrokových mier je konzistentná, ak investori sú čiastočne schopní predvídať infláciu, je taká politika konzistentná, ale s oneskoreným efektom. V prípade dokonalých očakávaní investorov nemôžeme apriori takúto politiku považovať za konzistentnú, naopak vzhľadom na povahu trhu peňazí je namiesto želaného efektu zníženia nominálnej úrokovej miery možné nadmierne zvýšenie cien. Uvedený záver je možné rozšíriť aj na IS-ALM model otvorenej ekonomiky.

3. Model ekonomiky SR.

Uvedieme IS-ALM model ekonomiky SR, za predpokladu adaptívnych inflačných očakávaní investorov. Uvažujeme o uzavretej ekonomike bez vlády (národný dôchodok je menší o saldo zahraničného obchodu a vládne nákupy).

Štvrťročné údaje časových radov v stálych cenách čerpáme z www.statistics.sk a www.nbs.sk za obdobie 1995 – 2002 a boli upravené procedúrou X11 v programovom balíku SAS pre očistenie časových radov od sezónnosti, trendu a iregulárnych faktorov⁵. Vzhľadom na to, že v štatistických ročenkách existujú údaje priemerných ročných nominálnych úrokových mier vkladov s rôznou dobou splatnosti, pracujeme s časovými radmi nominálnych mier z dlhodobých vkladov RVx a krátkodobých (1 rok) RVR . Potom RVR je ekvivalent nominálnej úrokovej miery z krátkodobých úverov R^N a rozdiel medzi RVR a RVx je ekvivalent priemernej ročnej prémie zo splatnosti. Za ekvivalent dopytu po peniazoch peňažnú zásobu M2 podelenú indexom spoterbitel'ských cien.

Model (10) je potrebné prepísať do takého tvaru, aby vyhovoval uvedeným predpokladom a aby všetky parametre bolo možné odhadnúť ekonometrickými metódami. Ide o rovnicu inflačných očakávaní. Dosadením (12) do investičnej funkcie v (11) a RVx za R^N , využijúc vlastnosti časových radov dostaneme investičnú funkciu v diferenčnom tvare⁶

$$I_t = \gamma e - f\gamma\pi_t - fRVx_t - f(1-\gamma)RVx_{t-x} + (1-\gamma)I_{t-x}. \quad (14)$$

Model (10) zapíšeme v ekonometrickej forme:

⁵ Pozri [14], 20. kapitola

⁶ Pozri napr. [10], str. 262-4.

$$\begin{aligned}
Y_t &\equiv C_t + I_t, \\
C_t &= a + bY_t + u_{1,t} \\
I_t &= \gamma e - f\gamma\pi_t - fRVx_t - f(1-\gamma)RVx_{t-x} + (1-\gamma)I_{t-x} + u_{2,t}, \\
M_t &= l_0 + l_1Y_t - l_2RVR_t + u_{3,t},
\end{aligned}
\tag{15}$$

kde $u_{i,t}$ je i -tá náhodná porucha. Dostávame tak simultánný ekonometrický model simultánných rovníc s jednou identitou a troma stochastickými rovnicami. Parametre modelu sú $a, b, e, f, \gamma, l_0, l_1$. Dobu splatnosti dlhodobých investičných úverov sme stanovili na 5 rokov, čo je 20 štvrt'ročných období⁷. Parametre sme odhadli s využitím programového balíka SAS jednoduchou metódou najmenších štvorcov⁸ a ich hodnoty sú uvedené v tab. 1.

parameter	odhad	parameter	odhad
a	19,91156	l_0	176,5619
b	0,49057	l_1	1,7506
e	54,88582	l_2	3,23406
f	0,16208		
γ	1,03267		

Z hľadiska horeuvedených úvah nás zaujíma parameter γ . Z tab. 1 $\gamma = 1,03267$, na hladine $\alpha = 0,05$ nezamietame hypotézu, že $\gamma = 1$. Na základe záverov uvedených v časti 2, konštantujeme, že na základe IS-ALM modelu ekonomiky SR nie je vylúčené, že problém časovej inkonzistencie politiky Národnej banky Slovenska nie je prítomný. Zo záverov uvedených v druhej časti vyplýva, že ďalšia štúdia problematiky časovej konzistencie v ekonomike SR by sa mala zaoberať analýzou formy dlhu a homogenitou účastníkov ekonomiky SR.

Použitá literatúra

[1] Albanesi S.: „The Time Consistency of Optimal Monetary Policy with Heterogenous Agents“, Bocconi University, IGIER and CEPR, 2002

⁷ Túto dobu sme získali empiricky.

⁸ Ekonometrické metódy určené pre odhad parametrov viacrovnicového modelu nevyhovovali štatistickej verifikácii, čo mohlo byť zapríčinené aj tým, že asymptotické prednosti týchto metód sa oproti jednoduchej metóde najmenších štvorcov eliminujú, keďže v modeli je prítomná oneskorená premenná o 20 období, čím strácame rovnaký počet pozorovaní.

- [2] Alvarez, F., Kehoe, P. J., Neumeyer P.: „The Time Consistency of Fiscal and Monetary Policies“, Research Department Staff Report, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 2002
- [3] Bailey, M. N., Friedman, P.: „Macroeconomics, Financial Markets, and the International Sector“, IRWIN, Boston, 1991
- [4] Calvo, G. A.: „On the Time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economics“, *Econometrica*, 46 (1978), 1411-1428.
- [5] Chari, V. V., Kehoe, P. J.: „Sustainable Plans“, *Journal of Political Economy*, vol. 98 (1990), no. 4
- [6] Chari, V. V., Kehoe, P. J., Prescott E., C.: „Time Consistency and Policy“, Federal Reserve Bank of Minneapolis – Research Department Staff, 1988⁹
- [7] Fischer, S.: „Dynamic Inconsistency, Cooperation, and Benevolent Disassembling Government“, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2 (1980): 93-107
- [8] Friedman, M.: *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*, ALDINE DE GRUYTER, New York, 1969
- [9] Gandolfo, G.: „Economic Dynamics“, Springer, Berlin 1996
- [10] Hatrák, M.: „Ekonometrické metódy I.“, Ekonomická univerzita, Bratislava, 1996
- [11] Kotlikoff, L. J., Persson, T., Svensson, L. E. O.: „Social Contracts as Assets: A Possible Solution to the Time Consistency Problem“, *American Economic Review* 78 (1988): 662-677
- [12] Kydland, F., Prescott, E.: „Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans“, *Journal of Political Economy*, vol. 85, 1977
- [13] Lucas, R. E., Stokey, N. L.: „Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital“, *Journal of Monetary Economics* 12 (1983): 55-94
- [14] SAS/ETS[®] User's Guide, Version 6 First Edition, SAS Institute Inc., USA, 1988

Summary

In paper we discuss the time consistency of monetary policy of change of mass of money by economic authorities. We use IS-ALM model with adaptive price expectations of investors to show that there is not time consistency problem if investors do not have perfect price foresights. On the other side there is not any proof that time consistency problem is not present in the case of perfect foresights of investors. If in economy with perfect expectations of agents is time consistency problem or not depends on the form of debt and heterogeneity of agents. These problems we will discuss in some our future papers. At the end of paper we make econometric estimation of IS-ALM model of Slovak economy with adaptive price expectations of investors whose conclusion is that in economy of SR investors have perfect foresights.

⁹ Práca je uvedená v knihe *Modern Business Cycle Theory*, editovaná Robertom J. Barrom a publikovaná v Harvard University Press