

sekunda EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/I/2019/36086129772675844

**MARKOV MODEL PREPÍNANIA REŽIMOV,
IMPLEMENTÁCIA V PROSTREDÍ EViews**

Diplomová práca

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

MARKOV MODEL PREPÍNANIA REŽIMOV,
IMPLEMENTÁCIA V PROSTREDÍ EVIEWS

Diplomová práca

Študijný program: Operačný výskum a ekonometria
Študijný odbor: Kvantitatívne metódy v ekonómii
Školiace pracovisko: Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Bratislava 2019

Bc. Kristína Oberlová



Ekonická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Kristína Oberlová
Študijný program: operačný výskum a ekonometria (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Typ záverečnej práce: Inžinierska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Markov model prepínania režimov, implementácia v prostredí EViews

Anotácia: Diplomová práca je orientovaná na modelovanie prepínania režimov s využitím Markovho modelu prepínania režimov. V diplomovej práci sa realizuje modelová analýza na finančných dátach v prostredí EViews s cieľom identifikovať rôzne režimy na finančných trhoch.

Vedúci: doc. Ing. Marian Reiff, PhD.
Katedra: KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci katedry: prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Dátum zadania: 23.10.2017

Dátum schválenia: 05.11.2017
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracovala samostatne a že som uviedla všetku použitú literatúru.

Dátum:

.....

PodĎakovanie

Chcela by som touto cestou vyjadriť veľké podĎakovanie hlavne vedúcemu práce doc. Ing. Marianovi Reiffovi, PhD. za odborné a vzácne rady, rôzne diskusie, vhodné nasmerovania, veľa trpezlivosti a v neposlednom rade za všetok čas, ktorý mi ochotne venoval pri riešení problémov s diplomovou prácou.

.....

ABSTRAKT

OBERLOVÁ, Kristína: *Markov model prepínania režimov, implementácia v prostredí EViews*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Marian Reiff PhD. – Bratislava: FHI EU, 2019, 52.

Markovove modely s prepínaním predpokladajú, že s každým režimom je spojený iný regresný model, čo môže predstavovať rôzne štrukturálne zmeny vo vzorkách. Cieľom diplomovej práce je zamerať sa na celkom mladý prístup k modelovaniu finančných časových radov, ich analyzovanie a v neposlednom rade rozhodnúť sa správne investovať do indexov. Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Obsahuje 4 tabuľky a 15 obrázkov. V prvej kapitole začíname prehľadom súčasného stavu doma a v zahraničí zameraného na využitie ako Markovových modelov, tak aj Markovových modelov s prepínaním režimov a uvádzame vybrané výskumy a články z týchto oblastí. Druhá kapitola obsahuje charakteristiku cieľa a úloh našej práce. V tretej kapitole vymedzíme metodiku práce, t. j. uvádzame čitateľa do problematiky Markovových modelov ako takých a následne sme objasníme teoretické východiská Markovových modelov s prepínaním režimov. Záverečná, štvrtá, kapitola obsahuje aplikáciu Markovových modelov s prepínaním režimov na finančných časových radoch dvoch burzových indexov. Túto aplikáciu vykonávame pomocou softvérového programu EViews, pričom našou snahou je tiež upriamenie pozornosti na prácu s prepínacou regresiou v programe EViews.

Kľúčové slová: Markovove reťazce, Markovove modely prepínania režimov, finančné časové rady, EViews

ABSTRACT

OBERLOVA, Kristina: *Markov Switching Model, Implementation EViews Environment*. – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics. Department of Operations Research and Econometrics. – The head of final thesis: doc. Ing. Marian Reiff, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2019, 52.

Markov Switching models assume, that a different regression model is associated with each regime, which may represent different structural changes in the samples. The aim of the thesis is to focus on a relatively young approach to financial times series modelling, analyzing them and then rightly decide to invest in indexes. The thesis is divided into four chapters. Contains four 4 tables and 15 images. In the first chapter we start with an overview of the state of the art situation at home and abroad focused on the use of Markov models and also Markov Switching models and we present selected research and articles from these areas. The second chapter contains the characteristics of the main and partial tasks of our thesis. The chapter number three contains definition of the methodology of the work, we introduce the reader to the problems of Markov chain theory and then we explain the theoretical basis of Markov Switching models. The final, fourth chapter contains the application of Markov Switching models on the financial time series of two stock indexes. We performed this application using the EViews software, and our effort is also to focus attention on working with switching regression in EViews.

Key words: Markov chain, Markov Switching model, financial time series, EViews

OBSAH

1	SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY DOMA A V ZAHRANIČÍ...	11
2	CIEĽ A ÚLOHY PRÁCE	16
3	METODIKA PRÁCE A METÓDY SPRACOVANIA	17
3.1	MARKOVOVE REŤAZCE.....	20
3.1.1	MARKOVOVE REŤAZCE S VEKTOROVOU AUTOREGRESIOU	21
3.2	CHAPMAN-KOLOMOGOROVA ROVNOSŤ	22
3.3	KLASIFIKÁCIA STAVOV V MARKOVOVÝCH REŤAZCOCH.....	24
3.4	MARKOVOV MODEL PREPÍNANIA REŽIMOV	29
4	VÝSLEDKY PRÁCE A DISKUSIA.....	33
4.1	ANALÝZA VSTUPNÝCH DÁT	33
4.2	ODHAD A INTEPRETÁCIA MODELOV	37
4.3	PROGNÓZA INDEXOV BUX A WIG	46
	ZÁVER	48
	ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV	50

ÚVOD

Každý deň sa stretávame so sledmi určitých udalostí, ktoré obsahujú prvky náhody a my sa zamýšľame nad ich výskytom alebo výsledkom a nevieme ich predpovedať. Tieto postupy udalostí matematika nazýva ako náhodné procesy. Teória náhodných procesov nám slúži na lepšie pochopenie a odolávanie tejto neistote. Nie raz sa zamýšľame nad tým, čo nás v budúcnosti čaká, napríklad, aké bude zajtra počasie, koľko ľudí bude v čakárni u lekára, ako sa budú vyvíjať trhy, či ktorý hráč vyhrá a iné. Markovove reťazce sú jedným zo širokej škály procesov na túto analýzu. Avšak na rozdiel od ostatných, tieto procesy nepotrebujú k predpovedaniu budúcnosti minulosť a teda budúcnosť závisí iba od prítomnosti. Markovove reťazce boli aplikované v rôznych oblastiach ako je marketing, zdravotnícke služby, financie, bankovníctvo, investovanie, vzdelávanie, výroba, účtovníctvo a mnoho ďalších. Cieľom tejto práce je objasniť túto tematiku a pri aplikácii sa zamerať na analyzovanie finančných časových radov.

Jedným z nástrojov ekonometrickej a štatistickej analýzy je lineárna regresia. Existuje však nemalé množstvo dôkazov, že nelineárne modelovanie je niekedy vhodnejšie, najmä, ak ide o analýzu makroekonomických vzťahov, ktoré podliehajú zmene režimu. Túto zmenu režimu môžeme označiť ako šoky, ktoré ekonomické systémy zažívajú a ktoré ich presúvajú zo súčasného stavu do iného stavu, napríklad národy sa dostanú do recesie, vládne režimy sa časom menia, finančné trhy vykazujú vzostupy a pády. Tieto stavy majú tendenciu byť stochastické a dynamické. Ak sa vyskytnú raz, pravdepodobne sa niekedy zopakujú. Na zachytenie takýchto pravdepodobnostných stavových prechodov v čase poskytujú Markovove prepínacie modely analytický rámec.

Pri modelovaní finančných trhov sa predpokladá, že parametre jedno-režimových modelov (napr. GARCH) sú stabilné v čase. Možno však pozorovať rozdiely vo výnosoch aktív podľa fázy ekonomického cyklu. Preto boli zavedené modely s prepínaním režimu, ktoré kombinujú modely ARCH s Markovovým prepínacím modelom Hamiltona (1989) a sa ukázali byť vhodnejšími na prispôbenie dát. Po čase dochádzalo k rôznym úpravám, keďže sa postupne objavovali aj nové požiadavky. (Fišerová 2011)

Modely volatility budú našim hlavným záujmom, pretože hodnotenie rizikovosti podkladového aktíva je rozhodujúce pre stanovenie ceny a rozhodovanie pre investora. Vo všeobecnosti je vyššia rizikovosť spojená s obdobiami vysokej volatility. Predpovedanie budúcej výkonnosti je jedným z dôvodov modelovania volatility a bežne sa používa vo

finančných činnostiach, ako je riadenie rizík, oceňovanie opcií, zabezpečenie alebo výber najvhodnejšieho portfólia a mnohé ďalšie. Pred našou analýzou musíme mať na pamäti, že historické výnosy nemusia nevyhnutne znamenať jeho budúce výsledky. Vývoj a zmeny vo finančných dátach ovplyvňuje mnoho ekonomických, finančných a bežných udalostí vo svete, ktoré môžu náhle zmeniť celý priebeh hodnôt.

Podľa niektorých štúdií, volatilita prejavuje blízko nestacionárny výkon, ktorý môže byť výsledkom štrukturálnych zmien v procese rozptylu (Bauwens et al. 2006). Fišerová (2011) dopĺňa, že štruktúra parametrov modelov GARCH je príliš nepružná na zachytenie takýchto zmien. Z tohto dôvodu boli navrhnuté modely prepínania režimu s cieľom zlepšiť vhodnosť a predpovedanie finančných výnosov. V týchto modeloch sa parametre riadia stochastickým procesom už spomínaním Markovovým reťazcom.

V našej práci popisujeme nástroje programu Eviews na modelovanie Markovových modelov prepínania režimov vyplývajúcich z diskretných zmien v režime. Uvažujeme o nezávislom a Markovovom prepínaní, kde nie je možné pozorovať rozdelenie vzorky do režimov. Diplomová práca pozostáva zo štyroch kapitol. Prvá kapitola s názvom Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí obsahuje využitie Markovových reťazcov v reálnom živote aj v rôznych odvetviach, vybrané aplikácie Markovových reťazcov v rôznorodých oblastiach a nakoniec Markovových modelov prepínania režimov ako v zahraničí, tak aj práce vykonávané na Slovensku. Nasleduje kapitola, v ktorej je charakterizovaný cieľ a úlohy práce. Tretia kapitola je venovaná metodike práce a tvorí základ pre aplikačnú časť. Začína problematikou Markovových reťazcov, na ktorú nadväzujú Markovove modely prepínania režimov. Posledná, štvrtá, kapitola zahŕňa aplikáciu Markovových modelov prepínania režimov v programe EViews na vybraných finančných dátach. Zvolili sme si dva burzové indexy (BUX, WIG – ich popis uvádzame v štvrtej kapitole) za obdobie 20-tich rokov od 16. 11. 1998 do 12. 03. 2018. Výsledkom je odhad matice pravdepodobností prechod, zotrvanie v režimoch, vyhladené pravdepodobnosti pomocou programu EViews a porovnanie režimov jednotlivých indexov.

1 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY DOMA A V ZAHRANIČÍ

V teórii pravdepodobnosti, teórii čísiel, analýze a podobných oboroch Markovov proces, ktorého zakladateľom je Andrej Andrejevič Markov (1845 – 1922), profesor, ruský matematik, ktorého kľúčové publikácie označujú počiatočnú fázu tohto rozsiahleho vývoja v stochastických procesoch, je stochastický proces, ktorý spĺňa Markovovu vlastnosť, t. j. budúci stav závisí len od súčasného stavu, nie od udalostí, ktoré mu predchádzali. Markov dokázal, že nezávislosť náhodných premenných nie je nevyhnutnou podmienkou pre platnosť slabého zákona veľkého počtu a centrálnej limitnej vety. Zaviedol novú sekvenciu závislej premennej, nazývanú reťazec, ako aj niekoľko základných pojmov reťazcov, ako sú pravdepodobnosti prechodu, ireducibilita a stacionárnosť. Jeho myšlienky boli prevzaté a ďalej rozvíjané vedcami z celého sveta a teória Markovových reťazcov je jednou z najmocnejších teórií na analýzu rôznych javov sveta. Markov študoval Markovove procesy na začiatku 20. storočia, pričom v roku 1907 publikoval na túto tému svoj prvý článok, v ktorom uvažoval reťazce s dvoma stavmi a uviedol všeobecný koncept reťazca. (Basharin et al. 2004)

Lee (2016) vo svojom článku predstavil užitočné využitie Markovových procesov v reálnom svete. Ako prvú spomenul možnosť predpovedania počasia. Predpoveď počasia predstavujú zložité systémy pre laikov, avšak tento odhad sa môže zjednodušiť pomocou odhadov pravdepodobností a na základe nich predpovedať nie len zajtrajšie počasie, ale aj počasie na ďalšie dni. Ďalej popisuje využitie pri rôznych generátoroch, konkrétne spomína generátor mien, ktorý funguje na tomto princípe. Markovov proces predstavuje ako základ toho, ako Google radí webové stránky a označuje algoritmus PageRank ako modifikovanú formu algoritmu Markovovho reťazca. Tento proces spomínaný autor popísal jednoducho. Na celom svete ako web je Markovov systém, kde každá webová stránka je stav a odkazy medzi webovými stránkami sú prechody s pravdepodobnosťami. Táto veta spĺňa Markovovu vlastnosť a hovorí, že bez ohľadu na to, na ktorej stránke začnete, vaša šanca na ukončenie na určitej webovej stránke je fixná a s určitou pravdepodobnosťou. Ako ďalšie využitie spomína prediktívne písanie slov na mobilných telefónoch, kde sa slová analyzujú a začlenia sa do pravdepodobnosti Markovovho reťazca aplikácie a podľa toho sa vytvorí poradie najpravdepodobnejších a najmenej pravdepodobných slov.

Markovove reťazce sú využívané a užitočné v širokej škále odborov, napríklad vo fyzike sa objavujú vo veľkej miere v termodynamike a štatistickej mechanike. Možno ich nájsť tiež v chémii, štatistike, tiež sú základom spracovania teórie obsluhy. Teória Markovových reťazcov je veľmi mocným nástrojom na analýzu stochastických systémov v čase a pravidelne sa používa na modelovanie rôznorodej škály praktických systémov, ako sú sekvenčné rady, reprodukčné systémy, internet, inventarizačné systémy, reverzná logistika, bioinformatika, DNA sekvencie, genetické siete a data-mining. (Ching a Ng 2006) Ich použitie v literatúre sociálnej simulácie je však stále dosť obmedzené. Izquierdo et al. (2009) v článku ukazujú, ako možno teóriu Markovových reťazcov užitočne aplikovať v oblasti výpočtovej sociálnej vedy.

Markovove modely prepínania režimov sú široko používané v sociálnych vedách. V ekonómii miera rastu hrubého domáceho produktu je modelovaná ako proces prepínania na zachytávanie asymetrických správaní pozorovaných počas expanzií a recesií (Hamilton 1989). Medzi ďalšie ekonomické príklady patrí modelovanie úrokových sadzieb Spojených štátov amerických, kde Garcia a Perron (1996) zvažujú 3 možné režimy ovplyvňujúce priemer a rozptyl, a výmenných kurzov (Engel a Hamilton 1990). V politickej vede Jones, Kim a Starz (2010) navrhli model demokratických a republikánskych partizánskych štátov v Spojených štátoch. Využitie možno nájsť aj v zdravotníckych vedách. Napríklad v psychológii Markovove modeli s prepínaním boli aplikované na denných údajoch o manických a depresívnych stavoch pre osoby s rýchlym výkyvom bipolárnej poruchy (Hamaker, Grasman a Kamphuis 2010). V epidemiológii Lu, Zeng a Chen (2010) a Martinez-Beneito et al. (2008) modelujú výskyt infekčných ochorení v roku 2008 epidemických a neepidemických stavov. Markovov prepínací regresný model bol pôvodne vyvinutý v Quandt (1972) a Goldfeld a Quandt (1973) a sú považované za jedny z najznámejších štúdií pre modelovanie prepínania režimov, známe pod menom Markovove modely prepínania režimov. Kim a Nelson (1999a) prezentujú v článku Bayesovské testy Markovovho modelu prepínania v rámci univariantných aj multivariačných rámcov. V univariantnom rámci navrhujú postup testovania pre Markovove prepínanie v sledovaných časových radoch. V multivaričnom rámci sa zaoberajú testovaním Markovovho prepínania v nepozorovanom časovom rade. Prišli k záveru, že výsledky testov sú otvorené pre subjektívnu interpretáciu, avšak porovnanie analyzovaných dvoch modelov im umožnil vyvodiť záver, ktorý je dostatočne objektívny a to, že dôkazy o Markovovom prepínaní alebo prepínaní režimu v obchodnom cykle, ak existujú, sú oveľa presvedčivejšie v multivariačných testoch.

V historicky najdôležitejšom článku Hamilton (1989) rozšíril Markovov prepínací regresný model pre AR procesy a poskytol nelineárny algoritmus, ktorý odhaduje pravdepodobnosti, že diskretná premenná je v jednom z niekoľkých stavov. V článku navrhuje prístup modelovania zmien v režime a uvádza prehľad o tom, ako životný cyklus podniku využíva tieto modely s prepínaním autoregresného procesu. Parametre autoregresie považuje za výsledok diskretného stavu Markovovho procesu, napríklad, priemerné tempo rastu nestacionárneho radu môže byť predmetom príležitostných diskretných zmien. Predpokladá, že ekonometer nerešpektuje tieto zmeny priamo, ale namiesto toho musí vyvodiť pravdepodobnostné závery o tom, či a kedy sa môžu vyskytnúť na základe správania sa radov. Hamilton (1989) v článku rozpracoval algoritmus na zobrazenie takýchto pravdepodobnostných záverov vo forme nelineárneho iteračného filtra. Aplikuje túto techniku na reálny hrubý domáci produkt povojnových Spojených štátov amerických a naznačuje, že periodický posun z pozitívnej miery rastu k negatívnej miere rastu je opakujúcou sa charakteristikou obchodného cyklu Spojených štátov amerických. Prechod medzi pomalým a rýchlym rastom je riadený výsledkom Markovovho procesu.

Subagyo a Sugiarto (2016) vo svojej štúdii využili Markovov model prepínania režimov (AR) na odhadovanú premennú hrubého národného produktu krajiny Indonézie a nadviazali na model iniciovaný Hamiltonom (1989). Títo autori využívali na modelovanie analytický nástroj Eviews, ktorý tiež využívame vo svojej práci. Ich modelová špecifikácia rovnice sa skladá z dvoj-stavového Markovovho modelu s prepínaním s jedným regresorom a štyrmi autoregresiami. Predpokladajú, že odchýlka chýb je bežná počas celého režimu. Z tohto výskumu použitím premennej hrubého domáceho produktu Indonézie, vyvinuli Markovov model prepínania režimov, kde latentná (skrytá) premenná v krajine môže riadiť zmenu režimu stanoveného endogénne.

Hamilton (1994) poskytuje vynikajúci úvod do Markovových modelov prepínania režimov, z ktorého využijeme poznatky v metodologickej časti. Používajú sa pre časové rady, o ktorých sa predpokladá, že prechádzajú cez konečnú sériu nepozorovaných stavov, ktoré umožňujú, aby sa proces v každom stave rozvíjal inak. Prechody nastávajú podľa Markovovho procesu. Čas prechodu z jedného stavu do druhého a trvanie medzi zmenami v stave je náhodná veličina. Napríklad, tieto modely môžu byť použité na pochopenie procesu, ktorý upravuje čas, keď hospodársky rast prechádza medzi expanziou a recesiou a trvanie každého obdobia.

V slovenskej literatúre možno tiež nájsť rôzne práce na tému Markovových modelov. Uvedieme konkrétne zopár prác zaoberajúcich sa Markovovými modelmi prepínania

režimov. Krakovský (2016) simuloval pomocou Markovových modelov prepínania režimov spotové ceny elektrickej energie kvóтовané na slovenskom trhu. Spomína, že tieto modely sa bežne využívajú v zahraničí na modelovanie spotových cien a preto za jeho hlavný prínos práce považoval otvorenie tejto tematiky u nás. Pomocou modelovania získal modely, ktoré vytvárajú hodnotné simulácie scenárov budúcich cien bez uvažovania medziročného trendu. Petricková (2009) sa vo svojej diplomovej práci zaoberá triedou viacrežimových modelov, kde režimy sú určené nepozorovateľnými veličinami, teda Markovovými modelmi prepínania režimov a porovnáva ich s modelmi určenými pozorovateľnými veličinami a to so SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive), LSTAR (Logistic Smooth Transition Autoregressive) a ESTAR (Exponential Smooth Transition Autoregressive). Pri porovnávaní dospela k výsledkom, že najlepšie jej modely popisujú Markovove modely prepínania režimov (až 75 % modelov). Dospela k záveru, že autokorelačná funkcia nie je veľmi vhodná na popis závislostí rezíduí viacrežimových modelov a preto má za cieľ v tomto výskume v budúcnosti pokračovať. Kováč (2018) využil Markovove modely s prepínaním režimov na potvrdenie prítomnosti dvoch režimov v spojitom výnose burzového indexu FTSE 100 pred a po referende o vystúpení Spojené kráľovstva z Európskej únie. Skúmal previazanosť akciových trhov Spojeného kráľovstva a Českej republiky pri ohlásení výsledku referenda. Tieto informácie sú nevyhnutné pre rozumné rozhodnutie investorov o diverzifikácii rizika portfólia a možno odhaliť prenos medzi jednotlivými trhmi. Reiff (2018) modeloval index S&P Europe 350 pomocou skrytých Markovových modelov, pričom zisťoval počet skrytých režimov za účelom výberu vhodného modelu a následne prognózuje spomínané finančné dáta. Skrytý Markovov model a Markovov model prepínania režimov majú veľa spoločného, používajú sa rovnaké výpočtové postupy, avšak štatistická analýza je rozdielna. Fišerová (2011) analyzuje volatilitu štyroch akciových trhov pomocou Markovových modelov prepínania režimov, pretože využívajú nelineárnu dynamiku ovládanú nezistenými režimovými premennými a umožňujú štrukturálne zmeny. Cieľom práce je zistiť, či sú tieto modely vhodné na modelovanie volatility a identifikáciu kríz a prinášajú ďalšie dôkazy o štrukturálnych zmenách na analyzovaných trhoch. Použitím modelov potvrdila existenciu dvoch rôznych režimov volatility na trhoch, kde jeden režim je charakterizovaný nízkou volatilitou a nižšou odolnosťou voči šoku a druhý režim je charakterizovaný vysokou volatilitou a vyššou odolnosťou voči šokom. Odhadnuté pravdepodobnosti prechodu vyšli veľmi blízke jednej, čím poukázala na pretrvávajúcu vysokú šokovú odolnosť v každom z režimov, čo má za následok dlhé očakávané trvanie krízových období.

V našej práci sa zameriame na analyzovanie finančných časových radov. Nakoľko v posledných dvoch až troch desaťročiach je veľkým záujmom výskumníkov a odborníkov štúdium finančných časových radov, čo možno zdokumentovať veľkým množstvom publikácií týkajúcich sa tejto témy. Najväčšia pozornosť sa venuje finančným nástrojom ako sú výmenné kurzy, burzy, deriváty, akciové indexy a iné, ale tiež aj ich volatilita. Hoci je empirická analýza úzko spätá s analýzou, teoretické východiská sú nevyhnutnou súčasťou pre odvodenie minulosti a budúceho správania. Hoci sa navrhlo mnoho modelov na štúdium časových radov, nie všetky z nich vyhovujú všetkým charakteristikám finančných údajov a preto niektoré z nich neboli užitočné pri modelovaní uvedených radov a pri vytváraní primeraných záverov. Vlastnosti, ktoré sú všeobecne spoločné pre takéto časové rady, nástroje alebo trhy sú v literatúre označované ako „štylizované (empirické) fakty“. Fišerová (2011) uvádza tri najdôležitejšie:

- Rozdelenie finančných časových radov vykazuje priemernú hodnotu blízku nule, ostrý vrchol, miernu šikmosť a ťažké chvosty. Všeobecne platí, že rozdelenie pravdepodobnosti nie je normálne (nie je Gaussovo).
- Autokorelácia štvorcových logaritmov má tendenciu byť významná cez niekoľko oneskorení, zatiaľ čo autokorelácia logaritmov nie.
- Zmena volatility má tendenciu zoskupovať sa, t. j. veľké cenové (výnosové) variácie majú tendenciu nasledovať veľké variácie a malé zmeny nastávajú po malých zmenách bez ohľadu na označenie. Toto sa nazýva zhukovanie volatility.

Pomocou EViews-u môžeme uvažovať o troch rôznych druhov modelov s Markovovým prepínaním. Prvý predstavuje Markovov prepínací model s autoregresiou založený na princípe Hamiltona (1989), ktorý je špecifikovaný ako dvojstavový model pre hrubý národný produkt povojnových Spojených štátov amerických, kde priemerný rast HDP podlieha prepínaniu režimu a náhodné chyby nasledujú režimovo-invariantný autoregresný proces. Druhý model na základe Kim a Nelson (1999b), kde predstavuje Markovov prepínací model s časovo premenlivými pravdepodobnosťami prechodu. Využije sa tu pravdepodobnostný regresor oneskorenia, v niektorej literatúre možno tieto modely nájsť tiež pod názvom dynamické Markovove modely prepínania režimov. Posledný model na základe Kim a Nelson (1999b) predstavuje Markovov prepínací model režimu heteroskedasticity. Títo autori vytvorili trojstavový model akciových výnosov.

2 CIEĽ A ÚLOHY PRÁCE

Cieľom predkladanej diplomovej práce je predstaviť problematiku Markovových modelov prepínania režimov. Naším záujmom je spracovanie do jedného celku problematiku všeobecných Markovových reťazcov a následne popísať Markovove modely prepínania. Zobrazenie zmien v základnom ekonomickom mechanizme, opísanie pozorovaného správania a vyvedenie záverov o možnom vývoji do budúcnosti sú hlavným zámerom týchto modelov. Keďže Markovove modely prepínania sú doposiaľ stále jednou z mladých tém analýzy finančných časových radov, najmä v našej literatúre, pokúsime sa o rozpracovanie tejto tematiky. Konkrétne sa zameriame na analyzovanie dvoch indexov BUX a WIG za obdobie 20-tich rokov od 16. 11. 1998 do 12. 03. 2018 v programe EViews pomocou metódy odhadu prepínania regresie a pokúsime sa prísť k záveru či je toto modelovanie vhodné a dostačujúce pre finančné časové rady.

Ako úlohy práce sme si stanoviny sumarizáciu a zozbieranie informácií o Markovových modeloch a na nich sme nadviazali o Markovových prepínania režimov. Nie príliš veľká pozornosť sa kladie na tento druh Markovových modelov a preto je našim záujmom priniesť túto tematiku do našej literatúry. Markovove modely prepínania režimov umožňujú sledovať iné procesy v časových radoch v odlišných čiastkových vzorkách, spracovávajú nelinearitu, ktorá vzniká z dôvodu štrukturálnych zmien z rôznych dôvodov. Pri finančných časových radoch cena akcií raz stúpa a raz klesá, čo vytvára volatilitu a preto sa zameriame na jej modelovanie a určenie o aký trh v danom režime ide (býčí alebo medvedí trh), či sú trhy pokojné a rizikové. Našou úlohou je najskôr pomocou programu EViews analyzovať celú vzorku jednotlivých indexov, popísať vývoj, volatilitu, jednotlivé štatistické ukazovatele. Nasledujúcou úlohou je odvodenie vhodných Markovových modelov prepínania pre oba indexy a ich interpretácia. Pomocou týchto odhadov získať matice pravdepodobností prechodov medzi režimami, očakávané trvanie v jednotlivých režimoch, určenie, v akom režime sa kedy proces nachádza pomocou filtrovaných a vyhladených pravdepodobností. Zameriame sa tiež na porovnanie oboch indexov navzájom, či finančné ukazovatele vykazujú podobné alebo odlišné výsledky. Pomocou volatility v jednotlivých režimoch rozhodneme aká je nálada v režimoch (býčí a medvedí trh) a nakoniec bude našim cieľom zamerať sa na prognostickú schopnosť Markovových modelov prepínania režimov.

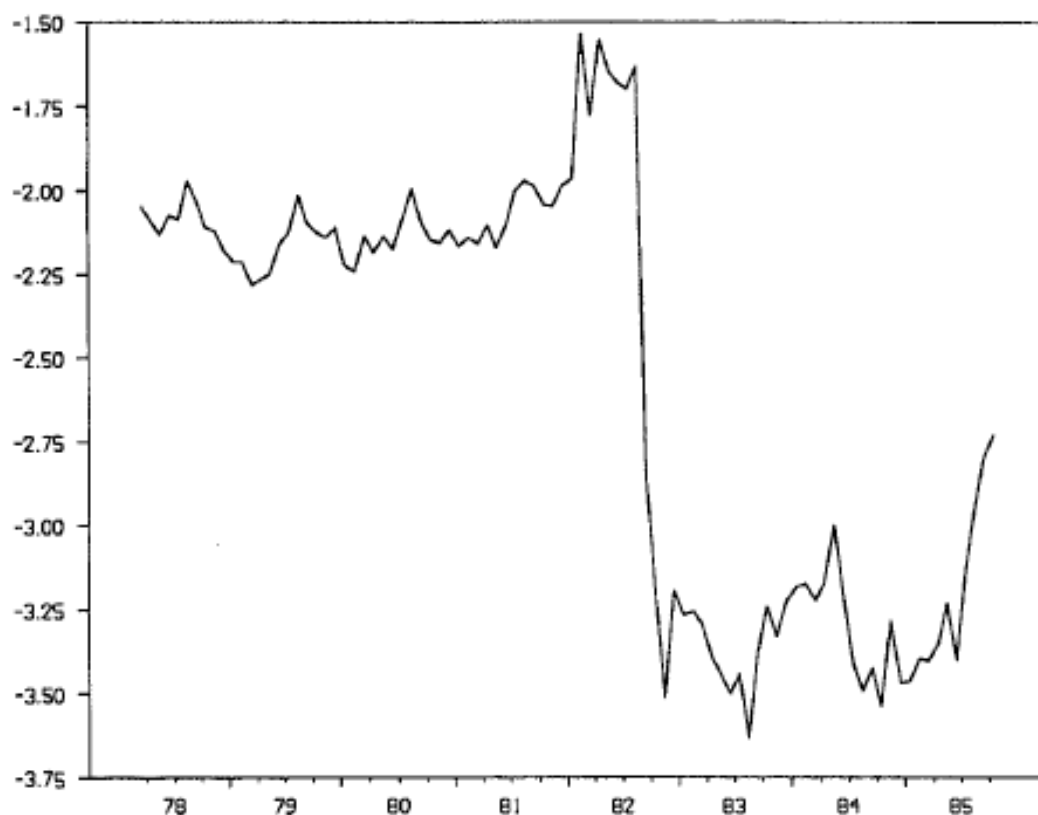
3 METODIKA PRÁCE A METÓDY SPRACOVANIA

Ako nástroj na opis náhodného javu slúži náhodná premenná, ktorá je vybavená štruktúrou pravdepodobnostného priestoru a charakterizovaná rozdelením pravdepodobnosti. Náhodný proces je definovaný ako množina náhodných premenných, závislých od konkrétneho parametra. Väčšinou sa vyskytujú náhodné premenné závislé od času. V tomto prípade náhodné procesy nazývame stochastickými náhodnými procesmi. Označme X_t ako náhodnú premennú, ktorá predstavuje stav procesu v čase $t \in T$. Stochastický proces tvorí množina náhodných premenných $\{X_t, t \in T\}$. Ak si pod množinou T predstavíme čas rozlišujeme dva druhy náhodných procesov. V prípade spočítateľnej množiny T , obsahujúcej prirodzené alebo celé čísla, hovoríme o náhodných procesoch s diskretným časom, v opačnom prípade, ak množina T je interval hovoríme o procesoch so spojitým časom. Stavy predstavujú hodnoty, ktoré nadobúdajú náhodné premenné $X_t, t \in T$, ich množinu označíme S . Stochastický proces môže obsahovať konečný alebo nekonečný počet stavov. Stochastickosť procesu znamená, že v istom okamihu sa jeden z možných stavov vyskytuje s určitou pravdepodobnosťou.

„Klasická teória pravdepodobnosti skúma nezávislé identicky rozdelené náhodné premenné. Nie každá náhodná premenná vychádzajúca z náhodných premenných, je opäť nezávisle rozdelená náhodná premenná. Dokonca aj vo svete sa musia brať do úvahy niektoré javy závislosti. Ak chceme systematicky študovať závislé javy, máme dve možnosti. Jedným z nich je zabudnúť na všetky dôsledky nezávislosti a začať riešiť množstvo závislostí. Druhou možnosťou, určite nie nerozumnou, je postupovať krok za krokom z oblasti nezávisle identicky rozdelených náhodných premenných len tým, že začneme vyšetrovať ďalší v poradí nezávislý prvok. Táto akcia spadá pod Markovove procesy.“ (Jacobs 2012)

Hamilton (1994) vo svojej publikácii opisuje náhodné premenné prechádzajúce rôznymi epizódami, v ktorých sa zdá, že sa správanie série dramaticky mení. Opisuje príklad na obrázku 3.1, prevzatý z Rogersovej (1992) štúdie o objeme účtov v dolároch vedených v mexických bankách. Mexická vláda prijala v roku 1982 rôzne opatrenia, ktorými sa snažila odradiť od používania takýchto účtov a účinky sú dramatické a zobrazené na obrázku 3.1. Podobné dramatické zlomy sa prejavajú, ak sa na dostatočne dlhý čas bude sledovať takmer akýkoľvek makroekonomický alebo finančný časový rad. Takéto zjavné zmeny v procese

časových radov môžu byť výsledkom udalostí, ako sú vojky, finančné krízy alebo významné zmeny vládnych politík.



Obrázok 3.1 Logaritmické vyjadrenie pomeru peso hodnoty bankových účtov v dolároch v Mexiku k peso hodnote bankových účtov v mene peso v Mexiku, mesačne 1978-1985.

Zdroj: (Rogers 1992)

Charffedine (2015) prezentoval zlomy v rámci časových radov makroekonomických alebo finančných premenných podliehajúcim viacerým šokom. Zlomy v časových radoch vo všeobecnosti zodpovedajú niektorým ekonomickým, finančným a medzinárodným udalostiam, ako sú:

- hospodárska recesia, hospodárska expanzia, zmeny v hospodárskom cykle,
- finančné krízy, časovo premenlivá volatilita (nízka, stredná a vysoká),
- politické napätie, vojny a iné.

Modely štrukturálnych zmien majú výhodu datovania týchto bodov zlomu.

Hamilton (1994) uvažuje nad otázkou, ako by sa mala modelovať takáto zmena v procese nasledovaná konkrétnym časovým radom? Pre dáta na obrázku 3.1 by bolo jednou

možnosťou, že konštantný čas pre regresiu sa zmenil v roku 1982. Pre dáta pred rokom 1982 vy sme mohli použiť model napr.:

$$y_t - \mu_1 = \phi(y_{t-1} - \mu_1) + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

zatiaľ čo dáta po roku 1982 by mohli byť opísané nasledujúcim modelom:

$$y_t - \mu_2 = \phi(y_{t-1} - \mu_2) + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

kde $\mu_2 < \mu_1$.

Tieto špecifikácie sa môžu zdať hodnoverným opisom údajov na obrázku 3.1, ale nie je to celkom uspokojivé ako model časových radov. Hamilton (1994) sa ďalej zaoberá otázkou, ako predpovedať takýto časový rad opísaný v rovniciach (3.1) a (3.2)? Nastáva problém, že ak sa proces v minulosti zmenil, v budúcnosti by sa mohol opäť zmeniť a táto perspektíva by sa mala zohľadniť pri tvorbe prognózy. Okrem toho by sa zmena režimu určite nemala považovať za výsledok predvídateľnej, deterministickej udalosti. Zmena režimu je skôr náhodná premenná. Kompletný model by mal preto zahŕňať opis pravdepodobnostného rozdelenia upravujúceho zmenu z μ_1 na μ_2 . Tieto pozorovania naznačujú, že proces môžeme považovať za ovplyvnený nezistenou náhodnou premennou s_t^* , ktorá sa nazýva *stav* alebo *režim*, v ktorom sa proces nachádza v čase t . Ak $s_t^* = 1$, potom je proces v režime 1, zatiaľ čo $s_t^* = 2$ znamená, že proces je v režime 2. Rovnice (3.1) a (3.2) sa potom podľa Hamiltona (1994) zapisujú takto:

$$y_t - \mu_{s_t^*} = \phi(y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}^*}) + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

kde $\mu_{s_t^*}$ označuje μ_1 keď $s_t^* = 1$ a μ_2 keď $s_t^* = 2$.

Nasledovne potrebujeme popis procesu časových radov pre skrytú (latentnú) premennú s_t^* . s_t^* má len diskrétne hodnoty (v tomto prípade s_t^* je buď 1 alebo 2). Najjednoduchším modelom časových radov pre diskretnú náhodnú premennú je Markovov reťazec. V prípade spojitej náhodnej premennej hovoríme o Markovovom procese (Hamilton 1994). V nasledujúcej časti prinesieme stručný úvod do problematiky Markovových reťazcov. V prípade hlbšej analýzy a záujmu odporúčame preštudovať literatúru Hamilton (1994), Winston, Goldberg (2004), Ross (2010), Janková a kol. (2014).

3.1 MARKOVOVE REŤAZCE

Nech x_t je náhodná premenná, o ktorej sa predpokladá, že predstavuje iba celočíselnú hodnotu $\{1, 2, \dots, N\}$. Predpokladajme, že pravdepodobnosť, že x_t sa rovná konkrétnej hodnote j , závisí od minulosti len cez súčasnú hodnotu x_{t-1} (Hamilton 1994):

$$P\{x_t = j | x_{t-1} = i, x_{t-2} = k, \dots\} = P\{x_t = j | x_{t-1} = i\} = p_{ij}. \quad (3.4)$$

Takýto proces je opísaný ako N -stavový Markovov reťazec s pravdepodobnosťami prechodu $\{p_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,N}$. Pravdepodobnosť prechodu p_{ij} udáva pravdepodobnosť, že stav i bude nasledovať po stave j . Pre pravdepodobnosti p_{ij} platia nasledovné vzťahy:

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iN} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad (i, j) = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

O homogénnych Markovových reťazcoch hovoríme vtedy, keď je hodnota pravdepodobnosti prechodu p_{ij} stacionárna (v čase sa nemení), v prípade nehomogénnych reťazcoch je p_{ij} nestacionárna. Pokiaľ nebude povedané inak, budeme sa zaoberať iba homogénnymi Markovovými reťazcami. Najvhodnejšie zobrazenie pravdepodobností prechodov je vo forme maticového zápisu $\mathbf{P}$ s rozmerom $(N \times N)$, ktorú budeme nazývať ako matica prechodov (Hamilton 1994):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Riadok j , stĺpec i matice $\mathbf{P}$ je pravdepodobnosť prechodu p_{ij} , napríklad, riadok 2, prvok 1 udáva s akou pravdepodobnosťou bude za stavom 2 nasledovať stav 1.

Nech $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ predstavuje napozorovanú množinu náhodných premenných. Reiff (2018) vo svojej habilitačnej práci uvádza výpočet na maticu

pravdepodobností prechodov **P**. Ako prvé sa v konkrétnom časovom období vypočítajú početnosti f_{ij} (frekvencie) prechodov zo stavu i do j :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & f_{N3} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Na základe nasledujúcich vzťahov vypočítame jednotlivé pravdepodobnosti prechodov a odhadneme maticu pravdepodobností prechodov **P**:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{\sum_{j=1}^N f_{ij}}, & \text{ak } \sum_{j=1}^N f_{ij} > 0 \\ 0, & \text{ak } \sum_{j=1}^N f_{ij} = 0 \end{cases} \quad (i, j) = 1, 2, \dots, N \quad (3.9)$$

3.1.1 MARKOVOVE REŤAZCE S VEKTOROVOU AUTOREGRESIOU

Znázornenie Markovovho reťazca sa získa tak, že ξ_t označíme náhodný vektor ($N \times 1$), ktorého j -ty prvok sa rovná jednej, ak $x_t = j$ a ktorého j -ty prvok sa rovná nule v opačnom prípade. Teda, keď $x_t = 1$ vektor ξ_t sa rovná prvému stĺpcu $\mathbf{I}_N$ ($N \times N$), keď $x_t = 2$ vektor je druhý stĺpec $\mathbf{I}_N$ a tak ďalej (Hamilton 1994):

$$\xi_t = \begin{cases} (1, 0, 0, \dots, 0)' & \text{kde } x_t = 1 \\ (0, 1, 0, \dots, 0)' & \text{kde } x_t = 2 \\ \vdots & \vdots \\ (0, 0, 0, \dots, 1)' & \text{kde } x_t = N \end{cases} \quad (3.10)$$

Ak $x_t = i$, potom j -tým prvkom ξ_{t+1} je náhodná veličina, ktorá preberá hodnotu jedna s pravdepodobnosťou p_{ij} , v inom prípade nadobúda hodnotu nula. Takáto náhodná veličina má očakávania p_{ij} . Potom podmienené očakávania ξ_{t+1} dané $x_t = i$ sú nasledovné:

$$E(\xi_{t+1} | x_t = i) = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{iN} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Tento vektor predstavuje i -ty stĺpec matice $\mathbf{P}$. Okrem toho, keď $x_t = i$, vektor ξ_t zodpovedá i -temu stĺpcu matice $\mathbf{I}_N$, v tomto prípade vektor (3.1) môže byť opísaný ako $\mathbf{P}\xi_t$. Potom výraz (3.11) implikuje, že:

$$E(\xi_{t+1} | \xi_t) = \mathbf{P}\xi_t,$$

a z Markovovej vlastnosti ďalej vyplýva:

$$E(\xi_{t+1} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots) = \mathbf{P}\xi_t. \quad (3.12)$$

Výsledok znamená, že je možné vyjadriť Markovov reťazec vo forme:

$$\xi_{t+1} = \mathbf{P}\xi_t + \nu_{t+1} \quad (3.13)$$

kde

$$\nu_{t+1} = \xi_{t+1} - E(\xi_{t+1} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots). \quad (3.14)$$

Vyjadrenie (3.13) má podobu vektorovej autoregresie prvého rádu s vedomím, že (3.14) naznačuje, že inováciou ν_t je marginálna rozdielová sekvencia. Hoci vektor ν_t môže mať len konečnú množinu hodnôt, v priemere ν_t je nula. Navyše, hodnotu ν_t nie je možné predpovedať na základe prechádzajúcich stavov.

3.2 CHAPMAN-KOLOMOGOROVA ROVNOSŤ

Nech $\{X_t\}_{t \geq 0}$ je Markovov reťazec. Pravdepodobnostné rozdelenie $p(0) = \{p_j(0)\}_{j \in S}$ také, že $P(X_0 = j) = p_j(0)$, pre $j \in S$, budeme nazývať počiatočným rozdelením Markovovho reťazca $\{X_t\}_{t \geq 0}$. Počiatočné rozdelenie, pravdepodobnosti existencie jednotlivých stavov v danom okamihu, a prechodové matice $\mathbf{P}$ jednoznačne určujú každý Markovov reťazec. (Janková a kol. 2014) Na základe týchto poznatkov môžeme pomocou Markovovho reťazca popísať pravdepodobnosti existencie stavov

v každej ďalšej fáze. Využijeme na to nasledovný vzťah vektora pravdepodobností stavov v čase $n \in N$:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P}, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

Zo vzťahu (3.11) vypočítame absolútne pravdepodobnosti $p(n) = \{p_j(n)\}$, že po $n > 0$ prechodoch sa systém bude nachádzať v stave j :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(1) &= \mathbf{p}(0)\mathbf{P}, \\ \mathbf{p}(2) &= \mathbf{p}(1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2, \\ \mathbf{p}(3) &= \mathbf{p}(2)\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3. \end{aligned}$$

Z predchádzajúcich rovníc dostaneme vzťah:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n, n = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

Maticu $\mathbf{P}^n$ nazývame ako maticu prechodov pravdepodobností pre n časových okamihov. Z predchádzajúcich vzťahov vieme odvodiť Chapmanovu-Kolmogorovovu rovnosť pre prípad diskrétného času:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-k}\mathbf{P}^k, 0 < k < n \quad (3.17)$$

Pomocou vzťahov pre Chapman-Kolmogorovu rovnosť sa vyvírajú predikcie pre Markovove modely. Hamilton (1994) uvádza zápis pre model s autoregresiou:

$$\xi_{t+n} = \nu_{t+n} + \mathbf{P}\nu_{t+n-1} + \mathbf{P}^2\nu_{t+n-2} + \dots + \mathbf{P}^{n-1}\nu_{t+1} + \mathbf{P}^n\xi_t \quad (3.18)$$

kde $\mathbf{P}^n$ predstavuje prechodovú maticu vynásobenú samou sebou n -krát. Z toho vyplýva, že predpovede pre Markovov model môžu byť vypočítané podľa:

$$E(\xi_{t+n} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots) \mathbf{P}^n \xi_t. \quad (3.19)$$

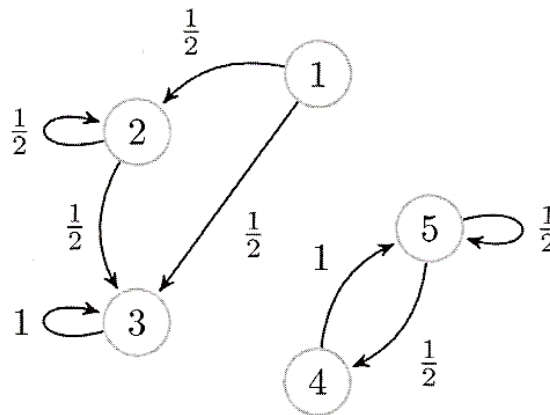
Opäť platí, že j -ty prvok vektora ξ_{t+n} bude jeden, ak $x_{t+n} = j$ a nula v opačnom prípade. Spomínaný j -ty prvok $(N \times 1)$ rozmerového vektora $E(\xi_{t+n} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots)$ znamená pravdepodobnosť, že x_{t+n} preberá hodnotu j podmienenú stavom systému k času t . Napríklad, ak je proces v stave i v čase t , potom (3.16) tvrdí:

$$\begin{bmatrix} P\{x_{t+n}=1|x_t=i\} \\ P\{x_{t+n}=2|x_t=i\} \\ \vdots \\ P\{x_{t+n}=N|x_t=i\} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{e}_i \quad (3.20)$$

kde $\mathbf{e}_i$ označuje i ty stĺpec matice $\mathbf{I}_N$. Tento výraz vyjadruje, že pravdepodobnosti prechodu pre Markovov reťazec pre n -periódu možno vypočítať vynásobením matice $\mathbf{P}$ samou sebou n -krát. Konkrétne, pravdepodobnosť, že pozorovanie i bude nasledovať po n periód neskôr z pozorovania j . $P\{x_{t+n}=j|x_t=i\}$ je daná riadkom j a stĺpcom i prvkami matice $\mathbf{P}^n$.

3.3 KLASIFIKÁCIA STAVOV V MARKOVOVÝCH REŤAZCOCH

Markovov reťazec s diskretným časom si môžeme graficky predstaviť ako orientovaný graf (obrázok 3.2), ktorého vrcholy predstavujú stavy a z vrcholu i vedie orientovaná hrana ohodnotená hodnotou p_{ij} do vrcholu j , ak je $p_{ij} > 0$ (Janková a kol. 2014).



Obrázok 3.2 Grafické zobrazenie Markovovho reťazca. Zdroj: (Janková a kol. 2014)

Na základe vyššie uvedeného môžeme poznamenať, že klasifikácia Markovových reťazcov nastáva na základe pravdepodobností prechodu p_{ij} v matici prechodov $\mathbf{P}$. Reiff (2018) a Winston, Goldberg (2004) uvádzajú stručnú a jednoduchú klasifikáciu, ktorú popíšeme v nasledujúcom texte:

- Absorpčný stav i nazývame, ak sa systém v stave i pri jednom prechode s určitou pravdepodobnosťou vráti do stavu i , $p_{ii}=1, i=j$.
- Tranzientný (prechodný) stav i nazývame, ak zo stavu i je možné prejsť do stavu j , ale nie je možné sa vrátiť zo stavu j do stavu i .

- Rekurentný stav i nazývame, ak systém bol raz v stave i a určite sa do stavu i zo stavu j niekedy vráti späť. Stav i môže byť rekurentný, iba ak nie je prechodný.
- Periodický stav i s periódou $t > 1$ nazývame, t. j. všetky cesty vedúce zo stavu i idú späť do stavu i a majú dĺžku, ktorá je násobkom k . Z toho vyplýva $p_{ij} = 0, i = j$ vždy, keď n nie je deliteľné t . Ak rekurentný stav nie je periodický, označuje sa ako aperiodický.
- Ergodický stav i nazývame, ak do stavu i je možné sa vrátiť kedykoľvek. Ergodický stav i je len vtedy, ak je rekurentný a zároveň nie je periodický (aperiodický).
- Dosiahnuteľný stav j zo stavu i je vtedy, ak platí $p_{ij}(n) > 0$, t. j. existujú kladné pravdepodobnosti rôzne od nuly zo stavu i do stavu j po n časových okamihoch, ak toto neplatí stav j zo stavu i je nedosiahnuteľný.

Hovoríme, že stavy i a j komunikujú, ak stav j je dosiahnuteľný zo stavu i a stav i je dosiahnuteľný zo stavu j . V prípade, ak žiadny stav nie je nedosiahnuteľný z akéhokoľvek stavu hovoríme, že stavy patria do jednej triedy a skupina navzájom komunikujúcich stavov sa nazýva uzatvorená množina. Nerozložiteľný Markovov reťazec nazývame vtedy, ak všetky stavy navzájom komunikujú, t. j. patria do jednej uzatvorenej triedy. Pre ilustráciu na obrázku 3.2 sa nachádzajú dva nerozložiteľné Markovove reťazce, ktoré spolu tvoria jeden rozložiteľný. Ak je reťazec rozložiteľný, potom v matici pravdepodobností prechodov vytvoríme nulové submatice súčasným prečíslovaním stavov. Dostaneme tak napríklad

maticu typu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$ alebo $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 & 0 \end{pmatrix}$, kde 0 predstavujú štvorcové nulové matice.

Systém bude teraz oscilovať medzi dvomi množinami stavov a matica $\mathbf{P}$ popisuje periodický reťazec. Rovnako ako sme definovali stavy môžeme definovať aj reťazce, t. j. ak matica $\mathbf{P}$ je nerozložiteľná, ide o ergodický reťazec a všetky stavy reťazca tvoria uzatvorený celok (triedu). Markovov reťazec, ktorý je uzatvorený sa nazýva ergodický reťazec, ak všetky stavy sú aperiodické a rekurentné.

V nasledujúcom texte detailnejšie popíšeme redukovateľné, ergodické a periodické Markovove reťazce, ako to vo svojej knihe uvádza Hamilton (1994):

Redukovateľné Markovove reťazce

Pre dvojstavový Markovov reťazec matica prechodu vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Predpokladajme, že $p_{11} = 1$, takže matica $\mathbf{P}$ je hornu-trojuholníková. Potom, akonáhle proces vstúpi do stavu 1, neexistuje žiadna možnosť návratu do stavu 2. V takom prípade môžeme povedať, že stav 1 je absorbujúci stav a že Markovov reťazec je redukovateľný. Všeobecne povedané, N -stavový Markovov reťazec sa považuje za redukovateľný, ak existuje spôsob označenia stavov (to znamená spôsob, ako vybrať stav, ktorý vyvoláva stav 1, ktorý vyvoláva stav 2, atď.) tak, že matica prechodu môže byť zapísaná vo forme:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

kde $\mathbf{B}$ predstavuje $(K \times K)$ maticu pre $1 \leq K < N$. Ak $\mathbf{P}$ je hornu-trojuholníková, potom je tiež $\mathbf{P}^m$ pre akékoľvek m . Preto, keď takýto proces vstúpi do stavu j tak, že $j \leq K$, neexistuje žiadna možnosť, že by sa niekedy vrátil do jedného zo stavov $K+1, K+2, \dots, N$.

Markovov reťazec, ktorý nie je redukovateľný, sa považuje za neredukovateľný. Napríklad dvojstavový reťazec je neredukovateľný, ak $p_{11} < 1$ a $p_{22} < 1$.

Ergodické Markovove reťazce

Rovnica (3.5) vyžaduje, aby sa každý riadok $\mathbf{P}$ rovnal jednej, alebo

$$\mathbf{P}'\mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{3.22}$$

kde $\mathbf{1}$ predstavuje jednotkový vektor rozmeru $(N \times 1)$. Výraz (3.16) znamená, že jednotka je vlastná hodnota matice $\mathbf{P}'$ a že $\mathbf{1}$ je priradený vlastný vektor. Keďže matica a jej transpozícia majú rovnaké vlastné hodnoty, z toho vyplýva, že jednotka je vlastná hodnota matice prechodu $\mathbf{P}$ pre akýkoľvek Markovov reťazec.

Uvažujeme N -stavový neredukovateľný Markovov reťazec s prechodovou maticou $\mathbf{P}$. Predpokladajme, že jedna z hodnôt matice $\mathbf{P}$ je rovná jednej a že všetky ostatné hodnoty prechodovej matice $\mathbf{P}$ sú v jednotkovom kruhu. Potom hovoríme, že Markovov reťazec je ergodický. Vektor ergodických pravdepodobností rozmeru $(N \times 1)$ pre ergodický reťazec je označený π . Tento vektor π je definovaný ako vlastný vektor $\mathbf{P}$ spojený s vlastnou hodnotou jednotky, to znamená, že vektor ergodických pravdepodobností π vyhovuje

$$\mathbf{P}\pi = \pi. \tag{3.23}$$

Vlastný vektor π je normalizovaný tak, že jeho súčet prvkov je jedna ($\mathbf{1}'\pi = 1$). Je možné ukázať, že ak $\mathbf{P}$ je prechodová matica pre ergodický Markovov reťazec, potom

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}^m = \pi \cdot \mathbf{1}' . \quad (3.24)$$

Určíme (3.18) pre prípad, keď sú všetky vlastné hodnoty $\mathbf{P}$ odlišné. V prípade odlišných vlastných čísel Hamilton (1994) odvolil, že $\mathbf{P}$ môže byť vždy vo forme

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (3.25)$$

kde $\mathbf{T}$ je $(N \times N)$ matica, ktorej stĺpce sú vlastné vektory $\mathbf{P}$, zatiaľ čo $\mathbf{\Lambda}$ je diagonálna matica, ktorej uhlopriečka obsahuje zodpovedajúce vlastné hodnoty $\mathbf{P}$. Z toho vyplýva, že

$$\mathbf{P}^m = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^m \mathbf{T}^{-1} . \quad (3.26)$$

Keďže prvok $(1, 1)$ matice $\mathbf{\Lambda}$ je jeden a všetky ostatné prvky $\mathbf{\Lambda}$ sú v jednotkovom kruhu, $\mathbf{\Lambda}^m$ sa približuje k matici s jednotou v pozícii $(1, 1)$ a inak nuly. Z toho dôvodu

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}^m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}' \quad (3.27)$$

kde $\mathbf{x}$ je prvý stĺpec $\mathbf{T}$ a $\mathbf{y}'$ je prvý riadok $\mathbf{T}^{-1}$.

Prvý stĺpec $\mathbf{T}$ je vlastným vektorom $\mathbf{P}$, ktorý zodpovedá číslu jeden, pričom vlastný vektor bol označený π v (3.17):

$$\mathbf{x} = \pi . \quad (3.28)$$

Okrem toho, prvý rad $\mathbf{T}^{-1}$, keď je vyjadrený ako stĺpcový vektor, zodpovedá vlastnému vektoru $\mathbf{P}'$ asociovanému s jednotkovou vlastnou hodnotou, ktorá bola považovaná za proporcionálnu vektoru $\mathbf{1}$ v (3.16):

$$\mathbf{y} = \alpha \cdot \mathbf{1} . \quad (3.29)$$

Na overenie (3.23), poznamenávame z (3.19), že matica vlastných vektorov $\mathbf{T}$ matice $\mathbf{P}$ je charakterizovaná

$$\mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} . \quad (3.30)$$

Transponovaním (3.19) a po prenasobení $(\mathbf{T}^{-1})'$ dostávame

$$\mathbf{P}' (\mathbf{T}^{-1})' = (\mathbf{T}^{-1})' \mathbf{\Lambda} . \quad (3.31)$$

Porovnanie (3.24) s (3.25) potvrdzuje, že stĺpce $(\mathbf{T}^{-1})'$ zodpovedajú vektorom $\mathbf{P}'$. Najmä prvý stĺpec $(\mathbf{T}^{-1})'$ je úmerný vlastnému vektoru $\mathbf{P}'$ spojeného s hodnotou jednotky, ktorej vlastný vektor bol považovaný za daný $\mathbf{1}$ v rovnici (3.16). Keďže $\mathbf{y}$ bol definovaný ako prvý stĺpec $(\mathbf{T}^{-1})'$ toto potvrdzuje tvrdenie uvereňné v rovnici (3.23).

Dosadením (3.22) a (3.23) do (3.21) vyplýva, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}^m = \pi \cdot \alpha \mathbf{1}'.$$

Keďže $\mathbf{P}^m$ možno interpretovať ako maticu pravdepodobností prechodu, každý stĺpec sa musí rovnať jednej. Pretože vektor ergodických pravdepodobností π bol normalizovaný podmienkou, že $\mathbf{1}'\pi = 1$, z toho vyplýva, že normalizačná konštanta α musí byť jeden, ktorá stanovuje tvrdenie uvedené v (3.18).

Výsledok (3.18) znamená, že dlhodobá prognóza ergodického Markovovho reťazca je nezávislá od súčasného stavu, z $E(\xi_{t+m} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots) = \mathbf{P}^m \xi_t$

$$E(\xi_{t+m} | \xi_t, \xi_{t-1}, \dots) = \mathbf{P}^m \xi_t \xrightarrow{p} \pi \cdot \mathbf{1}' \xi_t = \pi,$$

kde konečná rovnosť vyplýva z pozorovania, že $\mathbf{1}'\xi_t = 1$ bez ohľadu na hodnotu ξ_t . Dlhodobá prognóza ξ_{t+m} je daná vektorom ergodických pravdepodobností π bez ohľadu na aktuálnu hodnotu ξ_t . Vektor ergodických pravdepodobností možno tiež považovať za ukazovateľ bezpodmienečnej pravdepodobnosti každého z N rôznych stavov. Aby sme to videli, predpokladajme, že sme použili symbol π_j na označenie bezpodmienečnej pravdepodobnosti $P\{x_t = j\}$. Potom vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)'$ môže byť opísaný ako bezpodmienečné očakávanie ξ_t

$$\pi = E(\xi_t). \tag{3.32}$$

Na základe tejto rovnice $E(\xi_{t+1}) = \mathbf{P} \cdot E(\xi_t)$, za predpokladu stacionárnosti a využitia rovnice (3.26) dostávame:

$$\pi = \mathbf{P} \cdot \pi,$$

ktorá je totožná s rovnicou (3.17) charakterizujúcou π ako vlastný vektor $\mathbf{P}$ spojený s vlastnou hodnotou jednotky. Pre ergodický Markovov reťazec je tento vlastný vektor jedinečný, takže vektor ergodických pravdepodobností π možno interpretovať ako vektor bezpodmienečných pravdepodobností.

Periodické Markovove reťazce

Ak je Markovov reťazec neredukovateľný, potom existuje jedna a jediná vlastná hodnota rovná jednotke. Na jednotkovom kruhu však môže byť viac ako jedna vlastná hodnota, čo znamená, že nie všetky neredukovateľné Markovove reťazce sú ergodické. Uvažujme dvoj-stavový Markovov reťazec, v ktorom $p_{11} = p_{22} = 0$ (Hamilton 1994):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vlastné hodnoty tejto matice prechodu sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$, pričom obe sú na jednotkovej kružnici. Matica $\mathbf{P}^m$ teda nie je v tomto prípade konvergovaná k žiadnemu pevnému limitu tvaru $\pi \cdot \mathbf{1}'$. Namiesto toho, ak je proces v stave 1 v čase t , potom je isté, že tam bude opäť v časoch $t+2, t+4, t+6, \dots$, bez tendencie konvergovať a s $m \rightarrow \infty$. Hovorí sa, že takýto Markovov reťazec je periodický v druhej perióde.

Vo všeobecnosti je možné ukázať, že pre každý neredukovateľný N -stavový Markovov reťazec budú všetky vlastné hodnoty prechodovej matice na jednotkovom kruhu alebo vnútri neho. Ak sú K vlastné hodnoty striktne na jednotkovom kruhu s $K > 1$, potom sa reťaz označuje ako periodický s periódou K . Takéto reťazce majú tú vlastnosť, že stavy môžu byť klasifikované do K odlišných tried tak, že ak stav k času t je z triedy α , potom stav v čase $t+1$ je z triedy $\alpha+1$ (kde trieda $\alpha+1$ pre $\alpha = K$ je interpretovaná ako trieda 1). Existuje teda nulová pravdepodobnosť návratu k pôvodnému stavu s_t a skutočne nulová pravdepodobnosť návratu k akémukoľvek členovi pôvodnej triedy α , s výnimkou horizontov, ktoré sú celočíselnými násobkami periódy (napríklad časy $t+K, t+2K, t+3K$ a tak ďalej).

3.4 MARKOVOV MODEL PREPÍNANIA REŽIMOV

V tejto podkapitole priblížime časové rady, v ktorých nastáva zmena v režime, na teoretickom základe, ktorý uvádza Hamilton (1994). Vrátime sa k cieľu vytvorenia modelu,

ktorý umožňuje danej premennej sledovať iný proces časových radov v rôznych čiastkových vzorkách. Na umožnenie štrukturálnych zmien, ktoré vytvárajú čiastočné vzorky, modely prepínania režimov spracovávajú nelinearitu v dátach. Každá z týchto čiastkových vzoriek sa charakterizuje mierne rozličným súborom parametrov, ktoré sú určené stochastickým procesom. Cieľom týchto modelov je zobrazit' zmeny v základnom ekonomickom mechanizme, opísať sledované správanie a odvodiť záver o jeho možnom vývoji do budúcnosti. Ako ilustráciu je potrebné zvážiť autoregresiu prvého rádu, v ktorej by sa konštantný aj autoregresný koeficient mohli líšiť pre rôzne čiastkové vzorky:

$$y_t = c_{st} + \phi_{st} y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.33)$$

kde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Budeme modelovať režim s_t ako výsledok nepozorovaného N -stavového Markovovho reťazca s s_t , nezávislým od ε_t pre každé t a τ .

Hamilton (1994) uvažuje nad otázkou „Prečo by mohol byť Markovov reťazec užitočným opisom procesu vytvárania zmien v režime?“ Prvou myšlienkou by mohlo byť, že zmena režimu, ako je to na obrázku 3.1, je stálou udalosťou. Takáto permanentná zmena režimu by sa mohla modelovať s dvoj-stavovým Markovovým reťazcom, v ktorom je stav 2 absorbujúci stav. Výhodou použitia Markovovho reťazca nad deterministickou špecifikáciou pre takýto proces je, že umožňuje generovať zmysluplné predpovede pred zmenou, ktoré zohľadňujú možnosť zmeny z režimu 1 na režim 2.

Mohli by sme tiež chcieť, aby model časových radov zmien režimu zohľadňoval nezvyčajné krátkodobé udalosti, ako napríklad druhá svetová vojna. Opäť je možné zvoliť parametre pre Markovov reťazec tak, že vzhľadom na 100 ročné dáta je dosť pravdepodobné, že by sme pozorovali jednu epizódu režimu 2 trvajúcu približne 5 rokov. Špecifikácia Markovovho reťazca, samozrejme, znamená, že vzhľadom na ďalších 100 rokov by sme mohli dobre vidieť ďalšiu takúto udalosť. Dalo by sa argumentovať, že toto je rozumný predpoklad pre tvorbu modelu. Podstatou vedeckej metódy je predpoklad, že budúcnosť bude v istom zmysle ako minulosť. Kým Markovov reťazec môže opísať takéto príklady zmien v režime, ďalšou výhodou je jeho flexibilita. Zdá sa, že určitá hodnota závisí v špecifikovaní pravdepodobnostného rozdelenia a ktoré je v súlade so širokou škálou rôznych výsledkov a výberov konkrétnych parametrov v rámci tejto triedy na základe samotných údajov. (Hamilton 1994)

Všeobecný model skúmaný v tejto časti podľa Hamiltona (1994) je nasledovný. Nech y_t je vektor ($N \times 1$) pozorovaných endogénnych premenných a x_t vektor ($k \times 1$) pozorovaných

exogénnych premenných. Nech $\mathbf{y}'' = (\mathbf{y}'_t, \mathbf{y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{y}'_{t-m}, \mathbf{x}'_t, \mathbf{x}'_{t-1}, \dots, \mathbf{x}'_{t-m})'$ je vektor obsahujúci všetky pozorovania získané v časoch t . Ak sa proces riadi režimom $s_t = j$ v čase t , potom sa predpokladá, že podmienená hustota y_t je daná

$$f(y_t | s_t = j, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}''_{t-1}; \alpha) \quad (3.34)$$

kde α je vektor parametrov charakterizujúcich podmienenú hustotu. Ak existuje N rôznych režimov, potom existuje N rôznych hustôt reprezentovaných (3.28) pre $j = 1, 2, \dots, N$. Tieto hustoty zobrazujeme v $(N \times 1)$ rozmerovom vektore označenom η_t . Napríklad (3.27), y_t je skalárna veličina ($n = 1$), exogénne premenné pozostávajú len z konštantného výrazu ($x_t = 1$) a neznáme parametre v α sa skladajú z $c_1, \dots, c_N, \phi_1, \dots, \phi_N$ a σ^2 . S $N = 2$ režimami dvoch hustôt reprezentujúcimi (3.28) je

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f(y_t | s_t = 1, y_{t-1}; \alpha) \\ f(y_t | s_t = 2, y_{t-1}; \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(y_t - c_1 - \phi_1 y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(y_t - c_2 - \phi_2 y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \end{bmatrix}$$

V (3.28) sa predpokladá, že podmienená hustota závisí len od súčasného režimu s_t a nie od minulých režimov:

$$f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{y}''_{t-1}, s_t = j; \alpha) = f(y_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{y}''_{t-1}, s_t = j, s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots; \alpha) \quad (3.35)$$

to však nie je reštriktívne. Uvažujme napríklad o špecifikácii v (3.3), kde podmienená hustota y_t závisí od oboch s_t^* a s_{t-1}^* a kde s_t^* je opísaný dvojstavovým Markovovým modelom. Môžeme definovať novú premennú s_t , ktorá charakterizuje režim pre čas t spôsobom, ktorý je v súlade s (3.28) takto:

$$\begin{aligned} s_t = 1 & \quad \text{ak } s_t^* = 1 \text{ a } s_{t-1}^* = 1 \\ s_t = 2 & \quad \text{ak } s_t^* = 2 \text{ a } s_{t-1}^* = 1 \\ s_t = 3 & \quad \text{ak } s_t^* = 1 \text{ a } s_{t-1}^* = 2 \\ s_t = 4 & \quad \text{ak } s_t^* = 2 \text{ a } s_{t-1}^* = 2 \end{aligned}$$

Ak p_{ij}^* označuje $P\{s_t^* = j | s_{t-1}^* = i\}$ potom s_t predstavuje štvorstavový Markovov model s prechodovou maticou

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11}^* & 0 & p_{11}^* & 0 \\ p_{12}^* & 0 & p_{12}^* & 0 \\ 0 & p_{21}^* & 0 & p_{21}^* \\ 0 & p_{22}^* & 0 & p_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Z tohto dôvodu (3.3) by mohol byť reprezentovaný ako špeciálny prípad tohto rámca s $N = 4$, $\alpha = (\mu_1, \mu_2, \phi, \sigma^2)'$ a s (3.28) reprezentujúcimi štyri hustoty

$$\begin{aligned} f(y_t | y_{t-1}, s_t = 1; \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ \frac{-[(y_t - \mu_1) - \phi(y_{t-1} - \mu_1)]^2}{2\sigma^2} \right\} \\ f(y_t | y_{t-1}, s_t = 2; \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ \frac{-[(y_t - \mu_2) - \phi(y_{t-1} - \mu_1)]^2}{2\sigma^2} \right\} \\ f(y_t | y_{t-1}, s_t = 3; \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ \frac{-[(y_t - \mu_1) - \phi(y_{t-1} - \mu_2)]^2}{2\sigma^2} \right\} \\ f(y_t | y_{t-1}, s_t = 4; \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ \frac{-[(y_t - \mu_2) - \phi(y_{t-1} - \mu_2)]^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}.$$

Predpokladá sa, že s_t sa vyvíja podľa Markovovho reťazca, ktorý je nezávislý od minulých pozorovaní y_t alebo aktuálnych, či minulých x_t :

$$P\{s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{t-1}''\} = P\{s_t = j | s_{t-1} = i\} = p_{ij}. \quad (3.36)$$

4 VÝSLEDKY PRÁCE A DISKUSIA

Cieľom diplomovej práce je popísať, ako môžu byť Markovove modely prepínania režimov, vysvetlené v teoretickej časti práce, využité v praxi na modelovanie indexov akciových trhov. V tejto časti prezentujeme algoritmy a metódy na modelovanie finančných časových radov pomocou softvéru EViews. Naším cieľom je odhadnutie matice pravdepodobnosti prechodov medzi režimami, očakávané trvanie v jednotlivých režimoch a zistenie, v akom režime sa nachádzajú a na základe vypočítaných hodnôt sa správne rozhodnúť pri investovaní a pomocou metodiky Markovových reťazcov vykonať prognózu. V práci sme sa zamerali na tieto dva druhy indexov búr:

1. Budapest Stock Exchange Index (BUX)
2. Warsaw Stock Exchange Poland Index (WIG).

Na analýzu správania sa indexov využívame ukazovateľ „zatvárací kurz“. Časové rady predstavujú denné údaje za obdobie 20-tich rokov od 16. 11. 1998 do 12. 03. 2018. Údaje sme získali z profesionálnej finančnej platformy Eikon, ktorá je používaná odborníkmi v praxi (Eikon). Umožňuje prístup k aktuálnym dátam z finančných trhov vrátane akcií, dlhopisov, komodít, termínových kontraktov takmer zo všetkých svetových búr a štátov v reálnom čase. Na obrázku 4.1 sú zobrazené denné vývoje jednotlivých zatváracích kurzov. Môžeme si všimnúť podobné tendencie vo vývoji vybraných indexov.

4.1 ANALÝZA VSTUPNÝCH DÁT

Predmetom záujmu analytikov zvyčajne nie sú finančné časové rady úrovne, ale časové rady výnosov, ktorých charakterizuje v čase premenná volatilita. Výnosy aktíva pre investorov znamenajú kompletnú informáciu o investičných možnostiach. Navyše, práca s časovými radmi cien aktív je zložitejšia ako s ich výnosmi. Preto v našej práci využívame na analyzovanie diferenciu logaritmov zatváracích cien kurzov burzových indexov, označenú ako výnosy, ktoré môžeme vypočítat ako rozdiel logaritmov zatváracích kurzov:

$$R_t = \ln close_t - \ln close_{t-1},$$

kde $close_t$ predstavuje zatvárací kurz v čase t a $close_{t-1}$ predstavuje zatvárací kurz v čase $t-1$. Parameter zmeny zatváracieho kurzu je znázornený na obrázku 4.2. Z ukazovateľa môžeme pozorovať volatilitu, ktorá bola najvyššia v sledovaných indexoch okolo roku 2008. V tomto

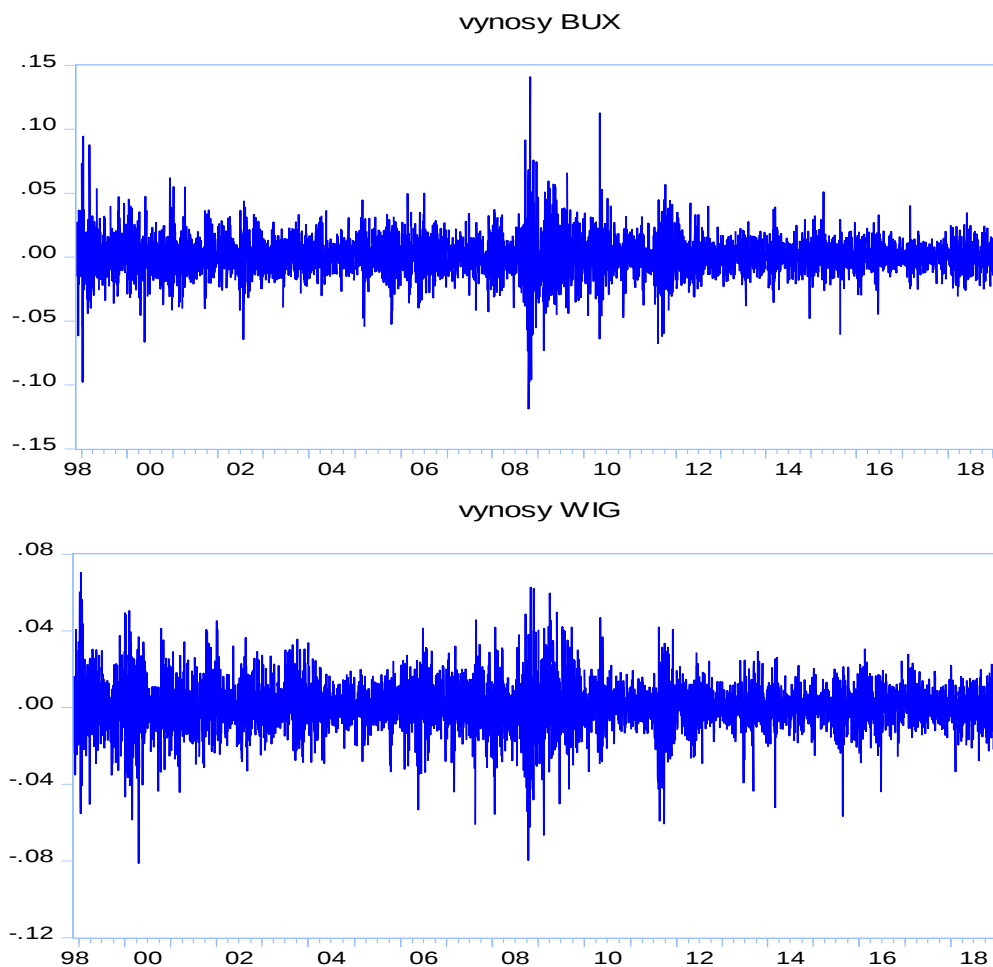
roku môžeme vidieť pokles cien každého indexu, čo naznačuje globálny charakter finančnej krízy, v ktorej burzy zaznamenali hlboký prepád.



Obrázok 4.1 Vývoj zatváracieho kurzu BUX (hore) a WIG (dole). Zdroj: vlastné spracovanie.

V tabuľke 4.1 sú uvedené vybrané popisné štatistiky výnosov zatváracieho kurzu bez uvažovania režimov pre každý index. Sumarizuje informácie o priemernej hodnote, minimálnej a maximálnej hodnote, štandardnej odchýlke, šikmosti a špicatosti, test normality podľa Jarque-Bera, ARCH test a počet pozorovaní. Denné priemerné výnosy indexu BUX sú 0,05 % a indexu WIG 0,038%. Ďalej môžeme pozorovať maximálne alebo minimálne denné výnosy. Môžeme si všimnúť väčšie rozpätie pri indexe BUX ako WIG. Volatilita vo výške 1,52 % pri meraní štandardnou odchýlkou je vyššia pre index BUX ako pre index WIG, ktorého hodnota dosahuje 1,267 %. Celkovo hodnoty volatility ukazujú, že tieto trhy nie sú príliš volatilné, čo môže spôsobovať aj fakt, že analyzujeme denné hodnoty a väčšinou nenastáva náhla veľká zmeny zo dňa na deň. Informáciu o volatilita možno považovať tiež za informáciu o vývoji rizika pri investovaní, keďže volatilita nie je vysoká,

môžeme tieto trhy považovať za pokojnejšie s nie príliš vysokými a častými zmenami cien akcií. Rozdelenia časových radov vykazujú miernu šikmost' a hodnoty špicatosti a Jarque-Bera test nevykazujú normalitu.



Obrázok 4.2 Zmeny zatváracieho kurzu BUX (hore) a WIG (dole). Zdroj: vlastné spracovanie.

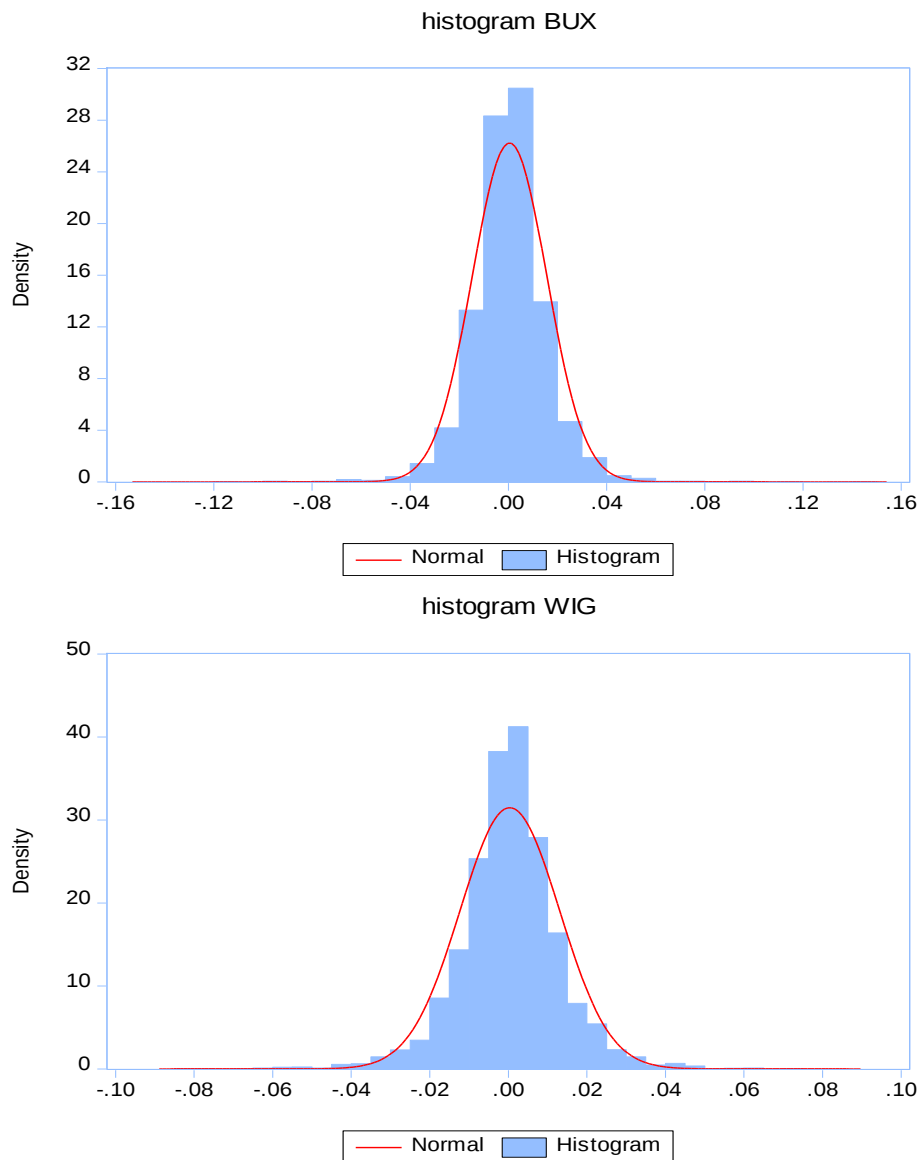
Rozdelenia časových radov vykazujú miernu šikmost' a hodnoty špicatosti a Jarque-Bera test nevykazujú normalitu čo možno vidieť v tabuľke 4.1. Kritická hodnota pre Jarque-Bera test normality pri hladine významnosti 5% s 2 stupňami voľnosťami sa rovná 5,991, čo je menšie ako J-B štatistika všetkých pozorovaných indexov. Pri finančných radoch je charakteristické špicatejšie rozdelenie a väčšinou nespĺňajú predpoklad normálneho rozdelenia, čo nám potvrdili aj naše štatistiky. Prítomnosť heteroskedasticity je testovaná ARCH testom. Kritická hodnota pre testovanie heteroskedasticity ARCH testom je na 5 % hladine významnosti s jedným stupňom voľnosti 3,841, čo je menšia hodnota ako ARCH štatistiky indexov. Pri analýze Markovových reťazcov prepínania režimov sa považuje

heteroskedasticita za bežnú, nakoľko pri existencii viacerých režimov nemožno očakávať konštantný rozptyl. Rozdelenie pravdepodobnosti analyzovaných časových radov spojitely premennej zobrazuje histogram na obrázku 4.4, ktorý sa porovnáva s teoretickým priebehom normálneho rozdelenia a tiež vyvracajú normálne rozdelenie výnosov. Histogramy nám potvrdzujú vlastnosti popísané v 1. kapitole, t. j. naznačujú pravdepodobnostnú symetriu a vysoký vrchol.

Tabuľka 4.1 Popisné štatistiky výnosov zatváracích kurzov všetkých analyzovaných krajín.

Zdroj: vlastné spracovanie.

	BUX	WIG
priemer	0,000502	0,000377
maximum	0,140854	0,070407
minimum	-0,118817	-0,081192
štandardná odchýlka	0,015205	0,012673
šikmosť	0,121106	-0,195925
špicatost'	9,409947	6,233819
J-B test	8693,8270	2249,1180
ARCH test	411,526000	92,605040
počet pozorovaní	5071	5087



Obrázok 4.4 Histogramy početností výnosov BUX (hore) a WIG (dole). Zdroj: vlastné spracovanie.

4.2 ODHAD A INTEPRETÁCIA MODELOV

V predchádzajúcom texte sme stručne priblížili a popísali správanie sa dát pomocou programu EViews na celej vzorke dát, teda bez režimov. Na nasledujúcich stranách sa pokúsime o odhad Markovových modelov prepínania režimov na jednotlivých indexoch, ktorý nám program Eviews poskytuje. Venujeme sa tu matici prechodových pravdepodobností medzi režimami, zotrvaníu v jednotlivých režimoch, pozrieme sa na grafy vyhladených pravdepodobností a potom analyzujeme jednotlivé indexy v režimoch.

Ako prvé sme sa pokúsili odhadnúť rôzne Markovove modely prepínania režimov pre každý časový rad. Modely sme začali odhadovať podľa EViews 11 User's Guide II. (2019), ktorý uvádza tri druhy modelov. Ako prvý uvádza Markovove prepínací model s AR podľa Hamiltona (1989). Tieto modely nám nevychádzali vhodné na modelovanie finančných časových radov, nakoľko Hamilton (1989) ich využíval na modelovanie hrubého domáceho produktu. Ďalším typom modelu je model s časovo premenlivými prechodmi, kedy sa do modelu pridávajú oneskorené premenné. My sme sa v našej práci zamerali na model s režimom heteroskedasticity, ktorý využíva pri svojej analýze výnosov aj Kim a Nelson (1999b). Pokúsili sme sa o odhady modelov v dvoch aj v troch režimoch, no ukázalo sa, že tri režimy pri našich indexoch nenastávajú a ani sa nám ich nepodarilo odhadnúť. Pri odhadovaní modelu s heteroskedasticitou nám vychádzala prítomná autokorelácia, preto sme do odhadu pridali autokorelačné členy, ktoré odstránili autokoreláciu. Výsledné odhadnuté modely sú zobrazené na obrázkoch 4.5 – 4.8. Na obrázkoch 4.5 a 4.7 je základný model bez autokorelačných členov pre režim heteroskedasticity. Na obrázkoch 4.6 a 4.8 sa nachádzajú modely, ktoré obsahujú pridané autokorelačné členy. Nie len odstránenie autokorelácie bolo dôvodom na výber vhodného modelu. Hodnotili sme štatistickú významnosť jednotlivých koeficientov a pozreli sme sa na hodnoty Akaikeho informačného kritéria, ktoré sú pri oboch indexoch menšie pri modeli s autokorelačnými členmi. Na výstupe z Eviews sú výsledky odhadov štandardných odchýlok v logaritmoch v 2 režimoch, t. j. nízkej a vysokej volatility, teda $S \in \{1, 2\}$. V hornej časti výstupu je ďalej opísaný typ prepínacieho modelu, t. j. Markovov a iné základné informácie o vzorke a metóde odhadu. V ďalšej časti sú popísané koeficienty, autokorelačné členy a ich hodnoty. Spodná časť zobrazuje štandardné popisné štatistiky pre odhad. Nakoľko výstupy obsahujú štandardné odchýlky v logaritmoch pre oba režimy ich vieme jednotlivo dopočítať nasledovným spôsobom:

$$\sigma_1 = e^{c(1)}$$

$$\sigma_2 = e^{c(2)}$$

Dopočítané absolútne odchýlky s odchýlkami v logaritmoch sa nachádzajú v tabuľke 4.2. Tieto nami vypočítané štandardné odchýlky predstavujú volatilitu v režimoch.

Dependent Variable: VYNOSY_BUX
Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
Sample (adjusted): 11/17/1998 3/12/2019
Included observations: 5071 after adjustments
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Standard errors & covariance computed using observed Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=840129737)
Convergence achieved after 8 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
C	-0.000402	0.000810	-0.496011	0.6199
LOG(SIGMA)	-3.675031	0.031958	-114.9944	0.0000
Regime 2				
C	0.000753	0.000183	4.124225	0.0000
LOG(SIGMA)	-4.529746	0.016952	-267.2128	0.0000
Transition Matrix Parameters				
P11-C	2.920638	0.200986	14.53157	0.0000
P21-C	-4.238871	0.191578	-22.12607	0.0000
Mean dependent var	0.000502	S.D. dependent var	0.015205	
S.E. of regression	0.015220	Sum squared resid	1.173812	
Durbin-Watson stat	1.902296	Log likelihood	14612.07	
Akaike info criterion	-5.760628	Schwarz criterion	-5.752900	
Hannan-Quinn criter.	-5.757922			

Obrázok 4.5 Odhad 2-režimového modelu pre režim heteroskedasticity indexu BUX.

Zdroj: vlastné spracovanie.

Dependent Variable: VYNOSY_BUX
Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
Sample (adjusted): 11/19/1998 3/12/2019
Included observations: 5069 after adjustments
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Standard errors & covariance computed using observed Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=906172342)
Convergence achieved after 6 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
C	0.000748	0.000180	4.149557	0.0000
LOG(SIGMA)	-4.530084	0.016902	-268.0240	0.0000
Regime 2				
C	-0.000366	0.000789	-0.464315	0.6424
LOG(SIGMA)	-3.678650	0.031699	-116.0489	0.0000
Common				
AR(1)	0.028901	0.014610	1.978224	0.0479
AR(2)	-0.043992	0.014344	-3.066984	0.0022
Transition Matrix Parameters				
P11-C	4.241443	0.191616	22.13514	0.0000
P21-C	-2.932513	0.201297	-14.56813	0.0000
Mean dependent var	0.000501	S.D. dependent var	0.015208	
S.E. of regression	0.015191	Sum squared resid	1.168299	
Durbin-Watson stat	1.958128	Log likelihood	14612.22	
Akaike info criterion	-5.762172	Schwarz criterion	-5.751865	
Hannan-Quinn criter.	-5.758562			

Obrázok 4.6 Odhad 2-režimového modelu pre režim heteroskedasticity s autokorelačnými členmi indexu BUX. Zdroj: vlastné spracovanie.

Dependent Variable: VYNOSY_WIG
Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
Sample (adjusted): 11/17/1998 3/12/2019
Included observations: 5087 after adjustments
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Standard errors & covariance computed using observed Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=468727204)
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
C	-0.000218	0.000437	-0.498724	0.6180
LOG(SIGMA)	-4.019755	0.022173	-181.2909	0.0000
Regime 2				
C	0.000701	0.000160	4.369712	0.0000
LOG(SIGMA)	-4.766682	0.017864	-266.8347	0.0000
Transition Matrix Parameters				
P11-C	3.908430	0.231690	16.86923	0.0000
P21-C	-4.521868	0.221325	-20.43088	0.0000
Mean dependent var	0.000377	S.D. dependent var	0.012673	
S.E. of regression	0.012684	Sum squared resid	0.817733	
Durbin-Watson stat	1.842818	Log likelihood	15532.66	
Akaike info criterion	-6.104448	Schwarz criterion	-6.096741	
Hannan-Quinn criter.	-6.101749			

Obrázok 4.7 Odhad 2-režimového modelu pre režim heteroskedasticity indexu WIG.

Zdroj: vlastné spracovanie.

Dependent Variable: VYNOSY_WIG
Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
Sample (adjusted): 11/19/1998 3/12/2019
Included observations: 5085 after adjustments
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Standard errors & covariance computed using observed Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=1294500108)
Convergence achieved after 8 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
C	0.000701	0.000165	4.240166	0.0000
LOG(SIGMA)	-4.768809	0.018191	-262.1576	0.0000
Regime 2				
C	-0.000205	0.000450	-0.456427	0.6481
LOG(SIGMA)	-4.024750	0.022525	-178.6759	0.0000
Common				
AR(1)	0.069647	0.014331	4.859687	0.0000
AR(2)	-0.037548	0.014440	-2.600304	0.0093
Transition Matrix Parameters				
P11-C	4.526392	0.221210	20.46195	0.0000
P21-C	-3.917612	0.232396	-16.85745	0.0000
Mean dependent var	0.000382	S.D. dependent var	0.012674	
S.E. of regression	0.012639	Sum squared resid	0.811332	
Durbin-Watson stat	1.975143	Log likelihood	15541.10	
Akaike info criterion	-6.109381	Schwarz criterion	-6.099101	
Hannan-Quinn criter.	-6.105781			

Obrázok 4.8 Odhad 2-režimového modelu pre režim heteroskedasticity s autokorelačnými členmi indexu BUX. Zdroj: vlastné spracovanie.

Tabuľka 4.2 Prepočty logaritmov štandardných odchýlok. Zdroj: vlastné spracovanie.

	režim 1		režim 2	
	$\log(\sigma)$	σ	$\log(\sigma)$	σ
BUX	-4,530084	0,010780	-3,678650	0,025257
WIG	-4,768809	0,008490	-4,024750	0,017868

Po odhade rovníc Eviews ponúka rôzne pohľady na preskúmanie našich výsledkov. Väčšina s týchto procesov sú známe nástroje na prácu s odhadnutou rovnicou. Napríklad môžeme preskúmať grafy reziduálov, kovariančné matice, diagnostiky koeficientov, diagnostiky reziduálov, rôzne testy a iné. Nakoľko testujeme prítomnosť viacerých režimov zameriame sa na možnosti s týmto súvisiace. Na všetku ďalšiu analýzu využívame druhé modely pre režim heteroskedasticity s autokorelačnými členmi. Zápisy výsledných modelov sú nasledovné:

pre index BUX:

$$\hat{y}_t = \begin{cases} 0,000748 + 0,028901y_{t-1} + 0,04399y_{t-2} \\ -0,000366 + 0,02890y_{t-1} + 0,04399y_{t-2} \end{cases}$$

a pre index WIG:

$$\hat{y}_t = \begin{cases} 0,000701 + 0,069647y_{t-1} - 0,037548y_{t-2} \\ -0,000205 + 0,069647y_{t-1} - 0,037548y_{t-2} \end{cases}.$$

Jedným z našich hlavných záujmov je preskúmanie výsledkov prechodu medzi režimami, teda odhad prechodovej matice pravdepodobností, ako aj očakávané zotrvanie v režime. Obrázok 4.6 zobrazuje matice pravdepodobností prechodov medzi režimami a očakávané zotrvanie v režimoch. Ak sa index BUX nachádza v režime 1, tak približne s 98,58 % pravdepodobnosťou v tomto režime zotrúva, naopak s 1,4 % pravdepodobnosťou prejde do režimu 2. Na druhej strane, ak sa nachádza v režime 2 s 94,94 % pravdepodobnosťou zotrúva v režime 2 a s 5,06 % pravdepodobnosťou sa vráti do režimu 1. Rovnako môžeme interpretovať maticu pravdepodobností prechodov pre index WIG, ak sa nachádza v režime 1 s 98,93 % pravdepodobnosťou v tomto režime zostane a s 1,07 % pravdepodobnosťou prejde do režimu 2. A podobná situácia nastáva v prípade, ak sa nachádza v režime 2 s 98,05 % pravdepodobnosťou tu zotrúva a s 1,95 % pravdepodobnosťou sa vráti do režimu 1. Tieto hodnoty prechodovej matice nám ukazujú značnú závislosť stavu

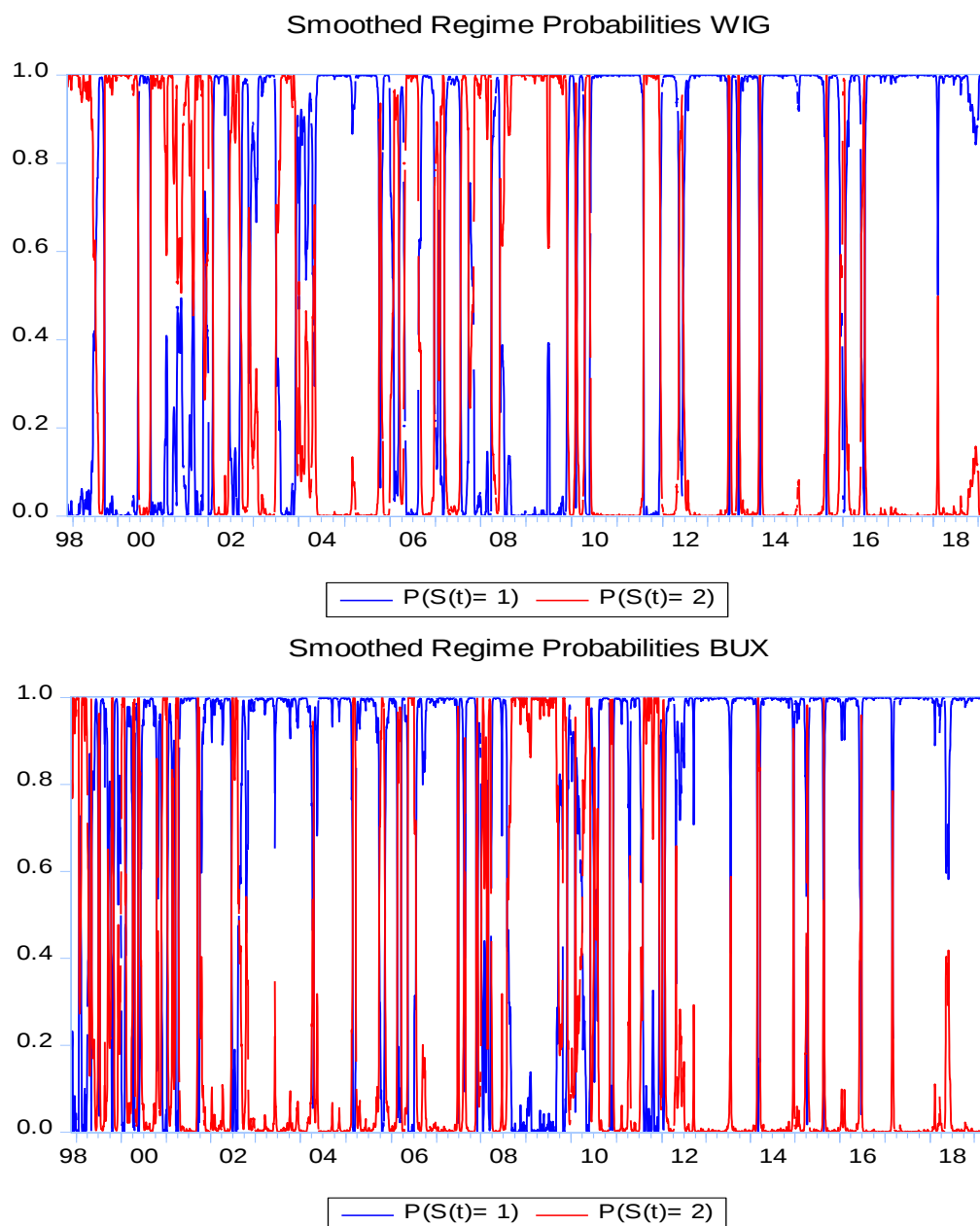
s relatívne vyššou pravdepodobnosťou zotrvania v režime pôvodu. Zobrazujú nám to jednotlivé koeficienty matice p_{11} a p_{22} , ktoré sú blízke 1, čo znamená, že ak sa proces nachádza v jednom z režimov s vysokou pravdepodobnosťou v tomto režime zotrvá. Na obrázku 4.6 môžeme vidieť tiež očakávané trvanie v jednotlivých režimoch, čo znamená, že ak je systém v režime 1, tak sa očakáva, že v tomto režime zotrvá istý čas. Napríklad, ak je index BUX v režime 1, tak sa očakáva, že v ňom zotrvá v priemere 70 dní a rovnako, ak je v režime 2, tak v ňom priemere strávi 20 dní. Index WIG strávi v režime 1 priemerne 93 dní a v režime 2 51 dní.

BUX		
Constant transition probabilities: $P(i, k) = P(s(t) = k \mid s(t-1) = i)$ (row = i / column = j)		
	1	2
1	0.985817	0.014183
2	0.050570	0.949430
Constant expected durations:		
	1	2
	70.50805	19.77475

WIG		
Constant transition probabilities: $P(i, k) = P(s(t) = k \mid s(t-1) = i)$ (row = i / column = j)		
	1	2
1	0.989296	0.010704
2	0.019501	0.980499
Constant expected durations:		
	1	2
	93.42447	51.28021

Obrázok 4.6 Matice pravdepodobností prechodu a očakávané doby trvania pre indexy BUX (hore) a WIG (dole). Zdroj: vlastné spracovanie.

Ďalším nástrojom je zobrazenie odhadnutých pravdepodobností, kde si môžeme zvoliť hodnotové alebo grafické zobrazenie. My sa zameriame na grafické zobrazenie vyhladených pravdepodobností pre režim 1 a 2, ktoré sa nachádzajú na obrázku 4.7. Tieto nám pomáhajú datovať prepínanie z jedného režimu do druhého, pretože odrážajú pravdepodobnosť, že odchýlka je v čase t v režime s_t . Je zrejmé, že prepínanie je zjavné a dá sa ľahko datovať. Tiež je možnosť v EViews zobrazenie jednokrokovej prognózy pravdepodobností alebo filtrovaných pravdepodobností, pre lepšiu prehľadnosť nám prišlo najvhodnejšie zobrazenie vyhladených pravdepodobností v režimoch.



Obrázok 4.7 Vyhladené pravdepodobnosti pre indexy BUX (hore) a WIG (dole). Zdroj: vlastné spracovanie.

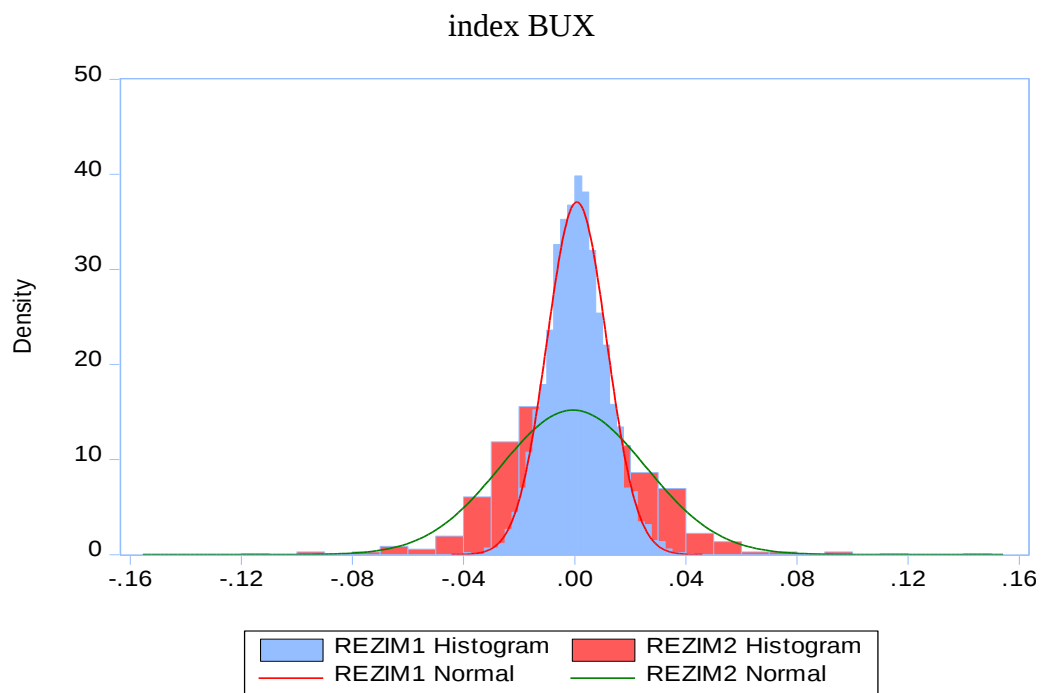
Ďalším cieľom nášho záujmu je pozrieť sa na volatilitu v jednotlivých režimoch pre oba indexy. Tabuľka 4.3 obsahuje popisné štatistiky pre príslušné režimy s_1 a s_2 . Popisné štatistiky uvádzajú priemernú zmenu v absolútnom aj relatívnom vyjadrení, t. j. zmenu výnosov, ale aj zmenu v prírastkoch, resp. úbytkoch zatváracej ceny. Ďalej obsahuje priemernú zatváraciu cenu v režimoch a štandardnú odchýlku, ktorá znamená volatilitu v režimoch.

Tabuľka 4.3 Popisné štatistiky indexov BUX a WIG Markovovho modelu prepínania pre dva režimy. Zdroj: vlastné spracovanie.

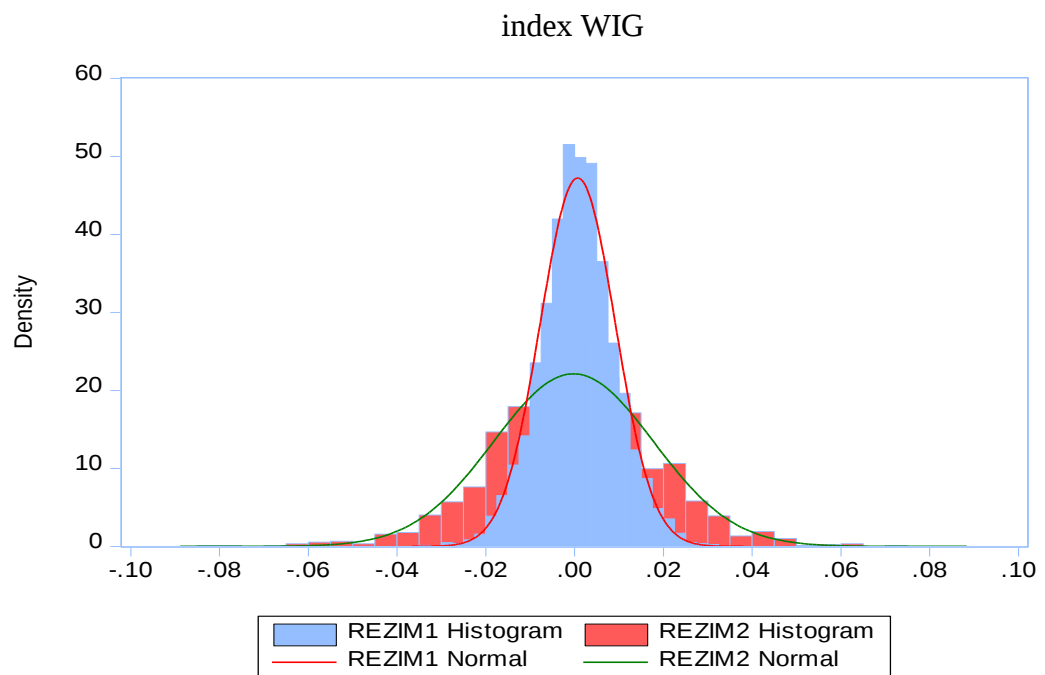
		štandardná odchýlka (σ)	priemerná zmena % ($\bar{x}$)	priemerná cena zatváracieho kurzu	priemerná zmena €
BUX	režim 1	0,01076	0,07791	19664,423	13,84664
	režim 2	0,02624	-0,05997	15287,174	-20,75026
WIG	režim 1	0,00845	0,07162	42831,360	28,80991
	režim 2	0,01803	-0,02363	28868,792	-27,03024

Výsledky Markovovho modelu prepínania režimov z prechádzajúcich prezentovaných tabuliek a obrázkov nám dávajú dostatočné množstvo informácií o oboch indexoch, ktoré môžeme využiť na rôznu analýzu správania sa indexov. Pri pohľade na základné informácie z tabuľky 4.3 môžeme konštatovať, že priemerný denný výnos pre index BUX aj WIG je v prvom režime kladný a v druhom režime je negatívny. Ak by sme sa pozreli na volatilitu meranú štandardnou odchýlkou pri oboch indexoch je v režime 1 nižšia ako v režime 2. Tieto ukazovatele môžeme využiť na to, aby sme režim 1 označili ako býci trh (Bull market), ktorý nastáva, keď situácia na trhu je pokojnejšia a nenastávajú výrazné zmeny. Zároveň režim 2 môžeme označiť ako medvedí trh (Bear market), ktorý nastáva pri vyššej volatilita a na trhu vzniká panika s vyššou meniacou sa cenou. So situáciou v jednotlivých režimoch súvisí aj priemerná cena, ktorá je vyššia keď je situácia na trhu pokojná a teda cena stúpa, taktiež možno pozorovať, že v režime 1 sú priemerné hodnoty kladné, čo znamená, že ceny v režime 1 rastú a v režime 2 klesajú. Rovnaký záver o režimoch na jednotlivých trhoch nám poskytuje obrázok 4.8, ktorý obsahuje histogramy v jednotlivých režimoch a tiež teoretický priebeh normálneho rozdelenia pre dané režimy. Z týchto histogramov môžeme opäť pozorovať, že režim 1 je špicatejší a pokojnejší, nakoľko sa viac hodnôt sústreďuje na stred, teda je menej volatilnejší oproti režimu 2, ktorý pri porovnaní medzi režimami je menej špicatejší, ale stále je špicatejší ako normálne

rozdelenie. Tieto grafy nám teda opäť potvrdzujú naše závery, že režim 1 je býčí trh a režim 2 je medvedí trh pre oba indexy.



Obrázok 4.8 Histogram indexu BUX pre režimy 1 a 2 jednotlivo. Zdroj: vlastné spracovanie.



Obrázok 4.9 Histogram indexu WIG pre režimy 1 a 2 jednotlivo. Zdroj: vlastné spracovanie.

4.3 PROGNOZA INDEXOV BUX A WIG

Prognózu jednotlivých indexov sme vykonali na ukazovateli očakávanej zmeny záverečných kurzov podľa nasledujúcich krokov. Najskôr sme pomocou odhadnutej matice podmienených prechodov medzi režimami a pravdepodobnosti skončenia v jednotlivých režimoch vypočítali s akou pravdepodobnosťou bude systém v danom stave v čase t a následne sme vypočítaný vektor pre násobili priemernou zmenou kurzov, čím sme dostali priemernú vypočítanú priemernú zmenu podľa pravdepodobností. Na zobrazenie vývoja kurzov sme túto zmenu pripočítali k prechádzajúcej cene kurzu. Opísaný výpočet prebiehal podľa vzorca:

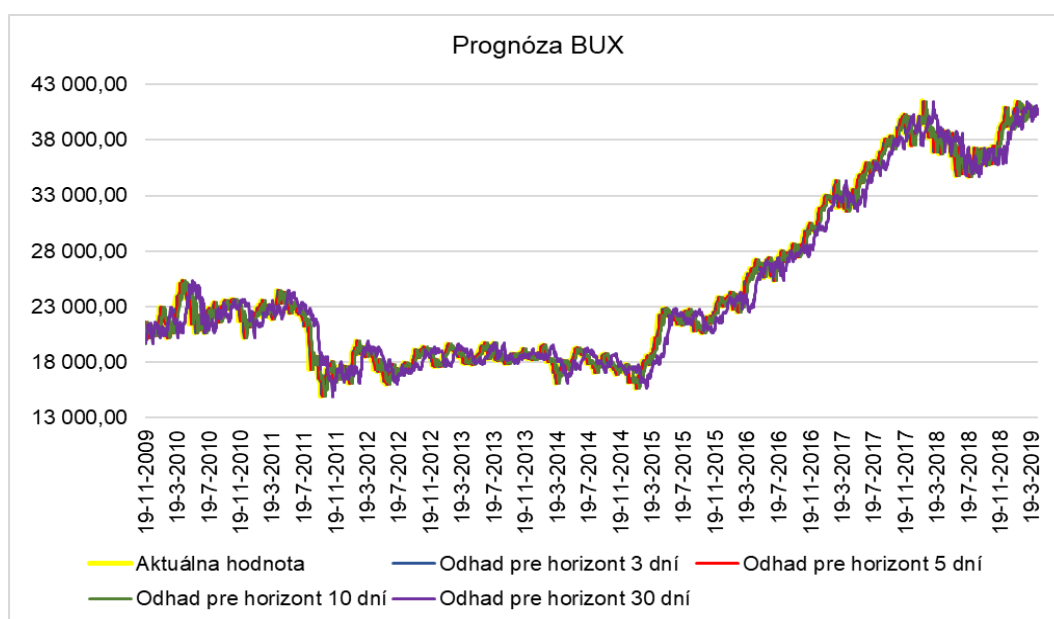
$$prognóza_t = \sum_{t=1}^T \text{skalárny súčin vektorov}(\mathbf{A}\mathbf{p}_t, r_t) \quad (4.1)$$

kde $\mathbf{A}$ zobrazuje maticu podmienených prechodov, teda pravdepodobnosti prechodov medzi režimami umocnená na počet prechodov rovnajúci sa prognózovanému obdobiu, $\mathbf{p}$ zobrazuje pravdepodobnostný vektor v režimoch a r_t znamená očakávanú zmenu hodnoty záverečných kurzov.

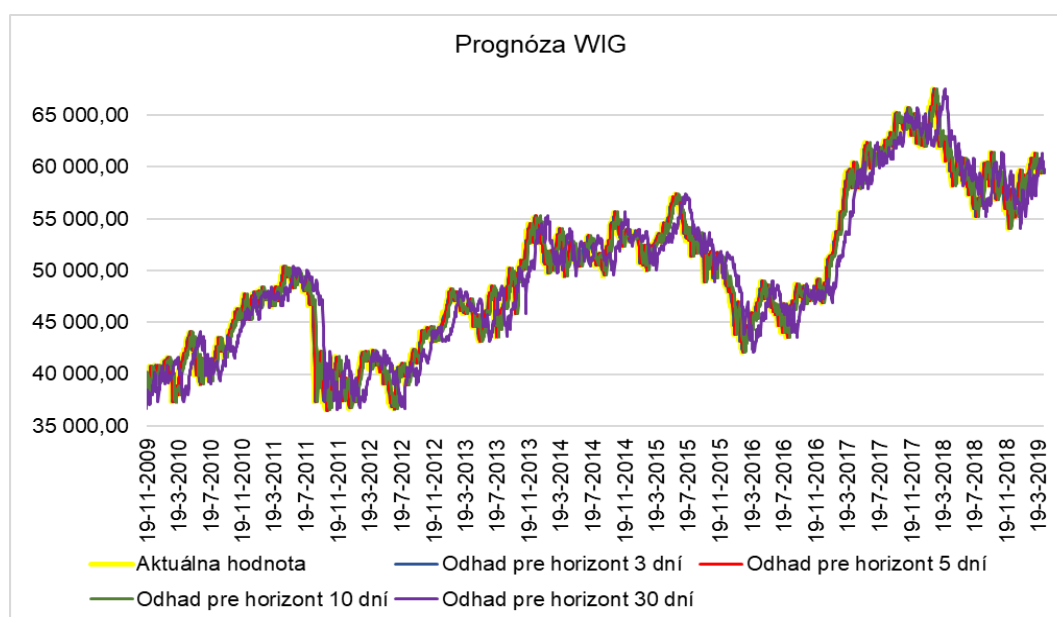
Hodnoty matice pravdepodobnosti prechodov sú uvedené na obrázku 4.6. Umocnením tejto matice na 3, 5, 10 a 30 sme získali matice podmienených prechodov $\mathbf{A}$ pre jednotlivé časové horizonty prognózovania. Priemerné zmeny výnosov v jednotlivých režimoch pre oba indexy sa nachádzajú v tabuľke 4.3 a z obrázku 4.7 vyhladených pravdepodobností môžeme pozorovať pravdepodobnosti skončenia systému v príslušnom režime v konkrétnom čase t . V našej práci sme vykonali prognózu hodnôt zatváracieho kurzu v jednotlivom režime pre časový horizont 3, 5, 10 a 30 dní. Vypočítaná prognóza pre index BUX je zobrazená na obrázku 4.10 a podobne pre index WIG je na obrázku 4.11. Z dôvodu väčšieho množstva dát a lepšieho predstavenia zobrazujeme pre oba indexy hodnoty za posledných 10 rokov. Z obrázkov môžeme pozorovať, že vypočítané matice prechodov a pravdepodobnosti skončenia v jednotlivých režimoch, ktoré nám EViews vypočítal pomocou Markovovho modelu prepínania režimov, celkom dobre opisujú reálne hodnoty zatváracích kurzov. Vo všeobecnosti Markovove modely s prepínaním režimov trpia veľkou príľnavosťou vo vzorke, ale zlou predikciou mimo vzorky (Fišerová 2011). Štatistickú presnosť prognózy sme overili priemernou absolútnou relatívnou chybou (MAPE), ktorá je vypočítaná pre každý index a časový horizont v tabuľke 4.4.

Tabuľka 4.4 Priemerná absolútna relatívna chyba prognózy. Zdroj: vlastné spracovanie.

Horizont	chyby prognózy	
	BUX	WIG
3 dni	1,9158%	1,6748%
5 dní	2,4687%	2,1976%
10 dní	3,4813%	3,1511%
30 dní	6,4192%	5,7420%



Obrázok 4.10 Zobrazenie prognostickej schopnosti Markovovho modelu s prepínaním režimov pre index BUX. Zdroj: vlastné spracovanie.



Obrázok 4.11 Zobrazenie prognostickej schopnosti Markovovho modelu s prepínaním režimov pre index WIG. Zdroj: vlastné spracovanie.

ZÁVER

Markovove prepínacie modely sa stali široko používané v súlade s rastúcim dôkazom nelinearity v ekonomických časových radoch. V tejto práci sme si dali za cieľ analyzovať Markovov model prepínania režimov na finančných časových radoch, spracovať poznatky väčšinou zo zahraničnej literatúry a nadobudnuté poznatky a informácie aplikovať pri spracovaní získaných dát pomocou softvéru EViews. Analyzovať tieto dáta, uviesť čitateľa do problematiky aplikácie Markovových modelov prepínania v EViews a vyvodit' závery o režimoch v analyzovaných indexoch a na základe získaných výsledkov rozhodnúť sa o investovaní do správnych indexov a vykonať prognózu.

Našu prácu sme rozdelili na štyri kapitoly. V prvej kapitole uvádzame súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí. V úvode tejto časti sme spomenuli zakladateľa Andreja Andrejeviča Markova a jeho začiatky, neskôr sme sa zamerali na využitie Markovových reťazcov ako takých, nie len v ekonomickej sfére, ale uviedli sme príklady a využitie v rôznych oblastiach života. Premostili sme na nami sledované Markovove modely prepínania režimov, kde sme sa zamerali na rôzne výskumy a články od najdôležitejšieho článku Hamiltona (1989), v ktorom rozšíril Markovov model prepínania pre AR procesy, až po rôzne aplikácie v slovenskej literatúre. Druhá kapitola stručne charakterizuje cieľ a zámer našej práce. V tretej kapitole sme rozpracovali metodológiu Markovových reťazcov, ktoré tvoria základ pre Markovove modely prepínania režimov a sú im veľmi podobné. Na tomto základe sme potom teoreticky spracovali Markovove modely prepínania režimov, pri ktorých sa predpokladá, že každý režim obsahuje iný regresný model. Tieto režimy môžu predstavovať rôzne štrukturálne zmeny v dátach, ktoré môžu byť vyvolané rôznymi udalosťami. V záverečnej, štvrtej kapitole pomocou Markovovho modelu prepínania analyzujeme dva časové rady – burzový index BUX a WIG. Pri analýze využívame denné hodnoty časového radu zatváracieho kurzu získaného za obdobie 20-tich rokov od 16. 11. 1998 do 12. 03. 2018. Túto kapitolu sme rozdelili do troch menších podkapitol. V prvej podkapitole sa zameriavame na analyzovanie celkových vstupných dát indexov bez režimov. Nakoľko sme analyzovali denné výnosy indexov v našich dátach sa nenachádza silná volatilita a bez režimov je WIG menej rizikový, t. j. má nižšiu volatilitu. Pre finančné rady je známe, že nespĺňajú predpoklad normálneho rozdelenie, ich rozdelenie je špicatejšie s ťažkými koncami, čo sa nám pri našich dátach tiež potvrdilo. Z grafického vývoja zatváracieho kurzu a tiež výnosov sme prišli k záveru, že najvyššia volatilita bola

okolo roku 2008, čo naznačilo globálny charakter finančnej krízy, v ktorej nastal hlboký prepád na burzách. Druhá podkapitola sa zameriava na odhad Markovovho modelu prepínania režimov v programe EViews. Najskôr sme popísali tri druhy základných modelov, ktoré je možné v programe odhadnúť. Na základe získaných poznatkov sme sa rozhodli využiť odhad modelu pre režim heteroskedasticity, ktorá sa v týchto modeloch považuje za bežnú nakoľko pri existencii viacerých režimov nemožno očakávať konštantný rozptyl. Hodnotením štatistickej významnosti a porovnaním Akaikeho informačného kritéria sme prišli k najvhodnejšiemu modelu a to je model pre režim heteroskedasticity s dvomi autokorelačnými členmi, v ktorom nám vyšli prítomné dva režimy. Tento model nám vyšiel ako najvhodnejší pri oboch indexoch. Odhadnuté modely nám dávajú rôzne pohľady, ako je prechodová matica pre režimy, očakávané zotrvanie v režimoch a tiež pravdepodobnosti skončenia v jednotlivých režimoch. S veľkou pravdepodobnosťou vieme povedať, že ak sa proces nachádza v jednom z možných režimov, tak v tomto režime zotrva, t. j. prechodová matica nám zobrazila značnú závislosť režimov, čo sa pri finančných dátach mohlo očakávať, pretože až radikálne zmeny trhového prostredia vyvolávajú iný vývoj burzových indexov. Pri porovnávaní jednotlivých režimov medzi indexami navzájom sme pre oba indexy prvý režim označili ako býčí trh a druhý ako medvedí trh, keďže v prvom režime pri oboch indexoch je volatilita nižšia ako v druhom režime, môžeme označiť, že ak sa proces nachádza v prvom režime je situácia na trhu pokojnejšia a nenastávajú veľké zmeny cien. Poslednú kapitolu sme uzavreli treťou časťou, v ktorej sme skúmali prognostickú schopnosť nami odhadnutého Markovovho modelu prepínania režimov. Keď sa pozrieme na všetky analyzované údaje pre oba indexy, môžeme vyvodiť záver, že skúmané finančné časové rady sú si veľmi podobné a obdobne sa vyvíja aj dianie na trhu. Z tohto dôvodu rozhodovanie o vhodnom investovaní do jedného z nich je subjektívne a ovplyvňuje ho ešte viacero faktorov, ktoré sme v našej práci nespomínali.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

1. BASHARIN, G. P. et al., 2004. *The Life and Work of A. A. Markov*. Linear Algebra and its Applications, s. 3 – 26.
2. BAUWENS, L. et al., 2006. *Regime Switching GARCH Models*. Discussion Papers (ECON – Department des Sciences Economiques). Vol. 06. In: FIŠEROVÁ, T. 2011 *Regime-Switching Models and Their Application in the Financial Markets: bakalárska práca*. Školiteľ: Prof. Ing. Miloslav Vošvrda CSc. Praha. 53 s.
3. CHARFEDDINE, Dr. L., 2015. *The Markov Switching Models (Hamilton, 1989)*. Workshop in Advanced Econometrics using Eviews.
4. CHING, W.-K. – NG, M., 2006. *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. New York, Springer. In: IZGUIERDO, L. R. et al., 2009. *Techniques to Understand Computer Simulations: Markov Chain Analysis*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation. Vol. 12, No. 16.
5. Eikon. [online]. [cit. 14. 04. 2019]. Dostupné na: <https://www.refinitiv.com/en/products/eikon-trading-software>
6. ENGEL, C – HAMILTON, J. D., 1990. *Long swings in the dollar: Are they in the data and do markets know it?* American Economic Review. 1990. Vol. 80, s. 689 - 713. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
7. EViews 11 User's Guide II. [online]. © 2019 [cit. 13. 04. 2019] Dostupné na: http://www.eviews.com/help/helpintro.html#page/content%2Fswitching-Switching_Regression.html%23
8. FIŠEROVÁ, T., 2011. *Regime-Switching Models and Their Application in the Financial Markets: bakalárska práca*. Školiteľ: Prof. Ing. Miloslav Vošvrda CSc. Praha. 53 s.
9. GARCIA, R. – PERRON, P., 1996. *An analysis of the real interest rate under regime shifts*. The Review of Economics and Statistics. Vol. 78, No. 1, s. 111 – 125.
10. GOLDFELD, S. M. – QUANDT, R. E., 1973. *A Markov model for the switching regressions*. Journal of Econometrics. 1973. Vol. , s. 3 – 15. In: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
11. HAMAKER, E. L. – GRASMAN, R. P. P. P. – KAMPHUIS, J. H., 2010. *Regime-switching models to study psychological processes*. In: Individual Pathways of Change: Statistical Models for Analyzing Learning and Development, ed. P. C. Molenaar and K.

- M. Newell, 155–168. Washington, DC: American Psychological Association. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
12. HAMILTON, J. D., 1994. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press. 816 s. ISBN 0-691-04289-6.
 13. HAMILTON, J. D., 1989. *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*. *Econometrica*. Vol. 57, No. 2, s. 357 – 384.
 14. IZGUIERDO, L. R. et al., 2009. *Techniques to Understand Computer Simulations: Markov Chain Analysis*. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*. Vol. 12, No. 16.
 15. JACOBS, K., 1992. *Discrete Stochastics*. Berlin: Birkhäuser Basel, 293 s. ISBN 978-3-0348-8645-1.
 16. JANKOVÁ, K. a kol., 2014. *Markovove reťazce a ich aplikácie*. Bratislava: Epos. 208 s. ISBN 978-80-56-0075-9.
 17. JONES, B. D. – KIM, C. J. – STARTZ, R., 2010. *Does congress realign or smoothly adjust? A discrete switching model of congressional partisan regimes*. *Statistical Methodology*. Vol. 7, s. 254 – 276. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
 18. KIM, CH.-J. – NELSON, CH. R., 1999a *A Bayesian Approach to Testing for Markov Switching in Univariate and Dynamic Factor Models*.
 19. KIM, CH.-J. – NELSON, CH. R., 1999b. *State-Space Models With Regime Switching*. Cambridge: The MIT Press. Dostupné na: <http://www.eviews.com/help/helpintro.html#page/content%2Fswitching-Examples.html%23>.
 20. KOVÁČ, S., 2018. *Previazanosť akciových trhov pred a po ohlásení makroekonomickej zmeny*. In: *Medzinárodný vedecký seminár: Nové trendy v ekonometrii a operačnom výskumu*. Bratislava: EKONÓM, 223 s. ISBN: 978-80-225-4563-1.
 21. KRAKOVSKÝ, Š., 2016 *Modely spotových cien elektrickej energie s prepínaním režimov: diplomová práca*. Školiteľ: Mgr. Martin Harcek, PhD. Bratislava, 2016. 52 s.
 22. LEE, J., 2016. *What Are Markov Chains? 5 Nifty Real World Uses*. Dostupné na: <https://www.makeuseof.com/tag/markov-chains-5-nifty-real-world-uses/>.
 23. LU, H. M. – ZENG, D. – CHEN, H., 2010. *Prospective infectious disease outbreak detection using Markov switching models*. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. Vol. 22, s. 565 – 577. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.

24. MARTINEZ-BENEITO, M. A. et al., 2008. *Bayesian Markov switching models for the early detection of influenza epidemics*. Statistics in Medicine. Vol. 27, s. 4455 – 4468. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
25. PETRIČKOVÁ, A., 2009. *Modely časových radov s premenlivými režimami: diplomová práca*. Školiteľ: RNDr. Magda Komorníková, CSc. Bratislava. 74 s.
26. QUANDT, R. E. *A new approach to estimating switching regressions*. Journal of the American Statistical Association. 1972. Vol. 67, s. 306 – 310. In: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>.
27. REIFF, M., 2018. *Analýza parametrov skrytého Markovovho modelu: habilitačná práca*. Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta Hospodárskej Informatiky EU BA, Bratislava. 110 s.
28. ROGERS, J. H., 1992. *The Currency Substitution Hypothesis and Relative Money Demand in Mexico and Canada*. Journal of Money, Credit and Banking. Vol. 24, s. 300-318, In: HAMILTON, J. D., 1994. *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton university press Princeton, 816 s. ISBN 0-691-04289-6.
29. ROSS, S. M., 2010. *Instrodution to Probability Models*. United Stated of America: Academic Press. ISBN: 978-0-12-375686-2.
30. Stata User's Guide. [online]. © 1985 – 2017 [cit. 13. 04. 2019]. Dostupné na: <https://www.stata.com/manuals14/tsmswitch.pdf>
31. SUBAGYO, A. – SUGIARTO, T., 2016. *Application Markov Switching Regression (AR)*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 12, No. 3, s. 2411 – 2421. ISSN 0973-1768.
32. WINSTON, W. L. – GOLDBERG, J. B., 2004. *Operations Research: Application and Algorithms*. Belmont, CA: Thomson/Brooks/Cole.