

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

**Využitie cenovej hybnosti aktív v Black-Littermanovom modeli
výberu portfólia**

Dizertačná práca

Doktorand : Mgr. Vladimír Ravinger

Školiteľ : doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.

Vedný odbor : 62-49-09 Ekonometria a operačný výskum

Bratislava, December 2009

Pod'akovanie

Týmto by som sa chcel poďakovať svojmu školiťovi, doc. RNDr. Eduardovi Hozlárovi, CSc., za cenné rady a pripomienky pri spracovávaní predkladanej dizertačnej práce. Osobitne by som tiež chcel vyjadriť vďaku mojej rodine a kolegom zo spoločnosti ČSOB Asset Management za trpezlivosť a podporu pri mojom postgraduálnom štúdiu.

Obsah:

Úvod do problematiky	5
1 Súčasný stav riešenej problematiky a nové trendy.....	8
2 Výskumný problém a ciele dizertačnej práce.....	16
2.1 Výskumný problém	17
2.2 Ciele dizertačnej práce.....	20
2.3 Údajová základňa	21
2.4 Metódy a postupy praktického výskumu	23
3 Momentum z pohľadu teórie a praxe.....	24
3.1 Dôkaz cenovej hybnosti.....	25
3.2 Behaviorálne teórie	30
3.3 Iné typy hybnosti finančných údajov.....	33
3.4 Výpočty a alternatívne hodnotiace kritériá pre cenové momentum	37
3.5 Metodológia testovania úspešnosti momentových stratégií	40
4 Black-Littermanov model výberu portfólia.....	48
4.1 Markowitzov prístup a problémy praktickej aplikácie	48
4.2 Základné myšlienky Black-Littermanovho modelu	51
4.2.1 Základné predpoklady modelu.....	52
4.2.2 Reverzná optimalizácia.....	54
4.2.3 Očakávania investorov	56
4.3 Základné vzťahy modelu	59
4.4 Alternatívna špecifikácia Black-Littermanovho modelu.....	61
4.5 Dôsledky a kritika modelu.....	63
4.6 Vstupy do Black-Littermanovho modelu	64
5 Odhad variančno–kovariančnej matice	71
5.1 Výberová variančno-kovariančná matica	72
5.2 Exponenciálne vážená variančno-kovariančná matica	74
5.3 Redukovaný estimátor variančno-kovariančnej matice.....	76
5.4 Jednofaktorový model	79
5.5 Metodológia testovania odhadov variančno–kovariančnej matice.....	82

6	Výber optimálneho portfólia.....	92
6.1	Optimalizácia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko	92
6.2	Metodológia odhadu vstupných parametrov pre optimalizáciu portfólia.....	100
6.3	Metodológia optimalizácie portfólia a testovanie jeho výkonnosti.....	102
7	Aplikácia cenovej hybnosti v Black-Littermanovom modeli výberu portfólia.....	104
7.1	Výsledky testovania odhadov variančno-kovariančnej matice	104
7.2	Výsledky testovania úspešnosti momentových stratégií	116
7.3	Optimalizácia portfólia a testovanie výkonnosti optimálnych portfólií	130
7.4	Zhrnutie výsledkov a diskusia	137
	Záver	142
	Summary	144
	Použitá literatúra	146
	Zoznam publikovaných prác.....	156
	Zoznam obrázkov a tabuliek.....	157
	Zoznam príloh	158

Úvod do problematiky

Klasickou idealizovanou predstavou fungovaní finančných trhov je teória efektívnych trhov (*efficient market hypothesis*), ktorá vznikla v 60-tych rokoch 20. storočia. Jej koncept pôvodne predstavil Eugene Fama vo svojej dizertačnej práci z roku 1965. Teória vo všeobecnosti hovorí, že cena určitého aktíva stanovená trhom formou stretu ponuky a dopytu zodpovedá v danom okamihu jeho skutočnej hodnote, pretože zohľadňuje všetky známe informácie o danom aktíve a pravdepodobnosti budúceho vývoja. Pôsobenie vzájomne doplnujúcich sa síl dopytu a ponuky posunie cenu na správnu úroveň, teda trh sám určí správnu cenu aktíva tým, že sa prispôsobí aktuálnym informáciám. Akýkoľvek výnos, ktorý je vyšší ako priemerný výnos trhu a je dôsledkom využitia všeobecne dostupných informácií, je preto skôr náhodný a nie je možné ho dosahovať za rovnakých podmienok dlhodobo.

V skutočnom svete je povaha budúcich aj aktuálne dostupných informácií prinajmenšom sporná a viaceré premenné vstupujúce do procesu investičného rozhodovania sa dajú považovať za stochastické, z čoho vyplýva, že cena určená trhom je v skutočnosti len odhadom skutočnej ceny s otáznou presnosťou. V reálnej finančnej sfére pritom prevláda názor, že trhy sú často aspoň krátkodobo neefektívne a majú tendenciu prispôbovať sa trhovej rovnováhe postupne. V takomto prípade sa predpokladá, že s postupným šírením a prehodnocovaním informácií sa dopyt a ponuka postupne prispôbujú s cieľom priblížiť sa rovnováhe. Nerovnomerné šírenie informácií preto nepopiera teóriu efektívnych trhov, ale len spôsobuje dočasnú nerovnováhu, ktorá sa postupne vytráca s tým, ako sa novým informáciám priebežne prispôbujú trhové sily.

Práve tento proces prispôbovania sa trhovej rovnováhe je predmetom veľkého záujmu výskumníkov aj profesionálov vo finančnej oblasti, pretože je do istej miery predvídateľný. Z toho vyplýva, že aktíva môžu byť dočasne podhodnotené alebo nadhodnotené, a ak poznáme ich správnu hodnotu, môžeme dosiahnuť zisk s minimálnym rizikom, alebo bez rizika, čo sa označuje ako arbitráž.

Výskum v oblasti finančných trhov sa intenzívne sústreďuje na vyhľadávanie javov, ktoré naznačujú odklon od rovnovážneho stavu. Mnohé takto popísané charakteristické javy však čoskoro po ich publikovaní zmiznú a nie je možné naďalej z nich profitovať (Jegadeesh, Titman, 2001a). Tým sa v praxi potvrdzuje teória efektívnych trhov, v rámci ktorej je arbitráž dlhodobu nemožná. Na druhej strane existuje viacero empiricky pozorovaných fenoménov, ktoré sa vymykajú danej koncepcii, aj keď sú už dlho známe. Jedným z týchto fenoménov je aj momentum, alebo tiež cenová hybnosť finančných aktív. Ide o jav, ktorý bol popísaný už pred viac ako pätnástimi rokmi, ale doteraz sa v akademickej verejnosti nenašlo jeho plne uspokojivé, a predovšetkým jednoznačné vysvetlenie.

Predmetom skúmania v predkladanej práci je potenciálne využitie cenovej hybnosti ako zdroja informácií o budúcom vývoji finančných trhov. Informácie o cenovej hybnosti skúmaných aktív sú v práci použité ako subjektívne vstupné údaje do Black-Littermanovho modelu výberu portfólia (súboru investičných aktív). Ide o modernú metódu alokácie investičného portfólia umožňujúcu vyhľadávať optimálne portfóliá na základe skĺbenia objektívnych trhových informácií s individuálnymi poznatkami investora ohľadne jednotlivých aktív. Prítomnosť fenoménu cenovej hybnosti sa v práci preveruje na vzorke skutočných hodnôt sektorových sub-indexov amerického indexu Standard & Poor's 500 (skrátene S&P 500) od roku 1989 do roku 2009. Okrem toho je v práci pomerne rozsiahly priestor venovaný skúmaniu alternatívnych odhadov variančno-kovariančnej matice, ktoré taktiež slúžia ako vstupy do Black-Littermanovho modelu.

Pri optimalizácii portfólií na základe zmiešaných odhadov očakávaných výnosov a rizika získaných z Black-Littermanovho modelu bola v práci použitá nová metóda optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko (*tracking error*)¹. Spojením všetkých vyššie uvedených okruhov vzniká teoretický rámec pre aktívnu správu investičných portfólií pri dodržiavaní stanoveného referenčného indexu.

¹ Termín „aktívne riziko“ (z anglického *tracking error* alebo tiež *active risk*) sa v práci používa pre označenie miery rizika reprezentujúcej volatilitu relatívnych výnosov určitého aktíva (portfólia). Od absolútnych výnosov aktív (portfólií) sa tu odpočítavajú výnosy stanoveného referenčného indexu. Termín „referenčný index“ je prekladom anglického výrazu *benchmark*. Reprezentuje referenčný výnos, ktorý sa od vybraného aktíva alebo portfólia očakáva.

Hlavným cieľom dizertačnej práce je spojenie poznatkov získaných výskumom javu cenovej hybnosti s modernými metódami alokácie portfólia v praktickej aplikácii za účelom zvýšenia efektivity procesu investičného rozhodovania. Hoci kvalita vstupov je pri investičnom rozhodovaní veľmi dôležitá, nemenej kritický je aj výber konkrétnych metód a postupov vedúcich k stanoveniu optimálneho portfólia. Výskumný problém a ciele dizertačnej práce sú podrobnejšie predstavené v kapitole 2, zatiaľ čo kapitola 1 ponúka stručný prehľad problematiky vrátane najnovších trendov v jednotlivých oblastiach výskumu, ako aj množstvo odkazov na existujúcu literatúru.

Tretia kapitola je venovaná problematike cenovej hybnosti z pohľadu aktuálnych teoretických a praktických poznatkov. Jej súčasťou je aj popis praktického experimentu s cenovou hybnosťou sektorových akciových indexov. Kapitola 4 je zameraná na prehľad teoretických poznatkov o Black-Littermanovom modeli výberu portfólia, pričom osobitná pozornosť je kladená aj na často zanedbávané vstupné údaje do modelu.

Jedným z najdôležitejších vstupov do Black-Littermanovho modelu je variančno-kovariančná matica. Jej odhad nie je triviálnou záležitosťou, pričom kvalita odhadu môže mať významný vplyv na konečné výsledky. Z toho dôvodu je rôznym alternatívnym odhadom variančno-kovariančnej matice venovaná celá piata kapitola. Obsahuje aj popis praktického testu alternatívnych estimátorov variančno-kovariančnej matice.

Témou šiestej kapitoly je výber optimálneho portfólia za predpokladu existujúceho odhadu očakávaných výnosov a rizika. Kapitola sumarizuje najnovšie teoretické poznatky v oblasti optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko a ponúka tiež podrobnosti o metodológii využívanej v aplikačnej časti dizertačnej práce.

Aplikačná časť predkladanej dizertačnej práce sa okrem podrobnej analýzy vstupov zaoberá aj skúmaním účinnosti Black-Littermanovho modelu a optimalizačných metód v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko s využitím reálnych finančných údajov. Výsledky praktického výskumu sú spracované v kapitole 7.

1 Súčasný stav riešenej problematiky a nové trendy

V roku 1993 publikovali dvaja americkí autori, Narasimhan Jegadeesh a Sheridan Titman, zaujímavú empirickú štúdiu výnosov amerických akcií, v ktorej prezentovali jednoduchú, ale prekvapivo úspešnú investičnú stratégiu. Stratégia spočívala v tvorbe portfólií na základe výnosov v predchádzajúcich obdobiach. Jednotlivé akcie každý mesiac zoradili zostupne podľa absolútneho výnosu počas predchádzajúceho obdobia (3 až 12 mesiacov) a rozdelili do desiatich portfólií tak, že v prvom portfóliu bolo 10% akcií s najvyššou výkonnosťou, v druhom ďalších 10% akcií a podobne. V desiatom portfóliu bolo 10% akcií s najnižšou výkonnosťou za dané obdobie. Všetkým akciám bola v portfóliach priradená rovnaká váha.

Autori skúmali výkonnosť takto vytvorených portfólií počas nasledujúceho časového úseku (opäť 3 až 12 mesiacov), pričom každý mesiac vytvorili nové portfóliá podľa predchádzajúcich výkonností a jednotlivé pozorovania sa prekrývali. Štúdia sa týkala amerického akciového trhu v rokoch 1965 až 1989, a odhalila, že v rozmedzí troch až dvanástich mesiacov od vytvorenia portfólií akcie z prvého portfólia v priemere rástli významne rýchlejšie ako zvyšok trhu, zatiaľ čo akcie z desiateho rástli výrazne pomalšie. Navyše, ak by investor pravidelne investoval do portfólia akcií z prvého portfólia a akcie z desiateho portfólia by predával nakrátko², jeho priemerný výnos pri šesťmesačnom investičnom horizonte na základe šesťmesačných minulých výnosov (stratégia 6/6) by dosiahol hodnotu približne 1,1% mesačne, t.j. približne 14% ročne. Skoro všetky pozorovania pritom boli štatisticky a ekonomicky významné.

Z uvedenej štúdie a aj z mnohých ďalších prác (napríklad Chan, Jegadeesh, Lakonishok, 1995; Rouwenhorst, 1998; Griffin, Ji, Martin, 2005; Chordia, Shivakumar, 2006; Chan, Hameed, Tong, 2000, Leippold, Lohre, 2009) vyplýva pozorovaný fakt, že akcie s najväčšou výkonnosťou v horizonte troch až dvanástich mesiacov rastú počas nasledujúcich troch až

² Predaj nakrátko, alebo tiež krátky predaj (z anglického *short sale*), je vo všeobecnosti obchodná transakcia, pri ktorej investor predáva cenné papiere, ktoré si predtým požičia. Pri následnom poklese (raste) cien daných cenných papierov si ich investor kúpi späť a vráti ich tomu, od koho si ich požičal, s príslušným ziskom (stratou). Krátky predaj je špekuláciou na pokles ceny.

dvanástich mesiacov v priemere výrazne rýchlejšie ako ich konkurencia s najnižšími zhodnoteniami. To znamená, že pri akciových výnosoch existuje určitá hybnosť – momentum. Nie je to však len záležitosť akciových trhov, ale aj iných aktív, ako dokumentujú napríklad Solnik (1993), Harloff (1998), Carhart (2003), Faber (2007), alebo Blitz a Vliet (2008). Väčšina autorov však skúma fenomén prostredníctvom akciových trhov.

Uvedená hybnosť výnosov (resp. cien) aktív sa začala v literatúre označovať ako „cenové momentum“ (*price momentum*). V tejto práci budeme ďalej tento jav označovať ako cenovú hybnosť alebo cenové momentum. Investičné stratégie, ktoré sa pokúšajú v praxi tento fenomén využiť, sa zväčša zameriavajú na nakupovanie najviac rastúcich akcií (vít'azov) a súčasný krátky predaj akcií s najväčšími poklesmi (porazených). Vo finančnej sfére sú tieto stratégie pomerne časté. Najväčším problémom v súvislosti s cenovou hybnosťou je však fakt, že aj napriek mnohým pokusom doposiaľ nebol tento jav uspokojivo vysvetlený z pohľadu všetkých jeho známych charakteristík.

Medzi dobre popísané vlastnosti cenovej hybnosti patrí zvýšenie výnosov v prípade vynechania určitého krátkeho časového intervalu medzi rozhodným obdobím a investičným obdobím. Eliminuje sa tým vplyv krátkodobých cenových výkyvov v súvislosti s cenovým rozpätím medzi nákupnou a predajnou cenou (*bid-ask spread*). Okrem toho sú stratégie založené na cenovej hybnosti menej účinné alebo neúčinné v januári a pri klesajúcich akciových trhoch. Cenové momentum je taktiež silnejšie pri akciách s nízkym pomerom účtovnej hodnoty k trhovej hodnote spoločnosti a pri akciách s vyšším objemom obchodov, čo súvisí s vyšším záujmom investorov o dané akcie (pozri napríklad: Jegadeesh, Titman, 2001a; Lee, Swaminathan, 2000; Griffin et al., 2005; Hou et al., 2008). Výnosy momentových stratégií sú aj napriek kritike niektorých autorov dostatočne ekonomicky významné aj po zohľadnení transakčných nákladov (viď: Korajczyk, Sadka, 2004; Brooks et al., 2007).

Od zverejnenia štúdie Jegadeesha a Titmana sa začal fenomén intenzívne skúmať a vzniklo veľké množstvo rôznych stratégií zameraných na jeho využitie, ale aj napriek tomu novšie štúdie stále potvrdzujú jeho prítomnosť. Na jednej strane to vyzerá ako vyvrátenie hypotézy efektívnych trhov, avšak z dlhodobého pohľadu tu existuje aj prvok návratu k rovnovážnemu stavu (*mean-reversion*). Pri pohľade zo strany správcu aktív cenové momentum umožňuje aspoň čiastočne predikovať budúci vývoj finančných trhov, pričom

jedným z očakávaných záverov dizertačnej práce je preukázanie významu podobných informácií pri rozhodovaní o taktickej alokácii aktív.

Akademický výskum v oblasti cenovej hybnosti môžeme v súčasnosti všeobecne rozdeliť do dvoch hlavných myšlienkových prúdov. Prevažná väčšina autorov sa snaží nájsť racionálne vysvetlenie fenoménu na základe modelov oceňovania aktív, avšak v rámci polemiky sa vyskytli aj viaceré práce zamerané na behaviorálne vysvetlenia. Osobitný význam majú práce s ťažiskom v empirickom výskume, ktoré podnecujú stále nové snahy o jednoznačné popísanie fenoménu (viď napríklad: Rouwenhorst, 1998; Nijman et al., 2004; Balwers, Wu, 2006; Figelman, 2007; Leippold, Lohre, 2009).

Autori patriaci k racionálnemu prúdu sa väčšinou snažia vysvetliť cenovú hybnosť na základe modelov vývoja cien akcií (a iných aktív), pričom cenová hybnosť je v nich definovaná ako prejav autokovariancie výnosov. Rozklad autokovariancie umožňuje identifikovať hlavné faktory ovplyvňujúce cenovú hybnosť, avšak veľkosť ich vplyvu je predmetom rozsiahlej akademickej diskusie, rovnako ako otázka, či sa jedná o anomáliu z pohľadu hypotézy efektívnych trhov a existujúcich modelov oceňovania aktív.

S detailnejším teoretickým rozborom cenovej hybnosti sa môžeme stretnúť napríklad v prácach Jegadeesha a Titmana (2001), či Chena a Honga (2002). Moskowitz a Grinblatt (1999) na experimente s reálnymi údajmi ukazujú, že cenová hybnosť individuálnych akcií sa neprejaví, ak sa pomocou hedžingu odstráni cenová hybnosť jednotlivých sektorov. Toto tvrdenie však bolo neskôr spochybnené viacerými autormi (Grundy, Martin, 2001; Nijman et al., 2002). Napríklad zo štúdie Grundyho a Martina (2001) vyplýva, že 95% rozptylu výnosov víťazných a porazených portfólií je možné vysvetliť pomocou klasických faktorových modelov oceňovania aktív, ako napríklad CAPM, alebo Fama-Frenchov 3-faktorový model. Zisky momentových stratégií však zostávajú nevysvetlené, pričom ani sektorové momentum, ani možné rozdielne očakávané výnosy pri víťazoch a porazených nie sú podľa autorov zodpovedné za hybnosť výnosov. Hlavnú úlohu nakoniec prisudzujú idiosynkratickému riziku. Arena, Haggard a Yan (2005) neskôr ukázali, že akcie s vyššou idiosynkratickou volatilitou vykazujú významnejšiu cenovú hybnosť, čo by mohlo byť obmedzujúcim faktorom pri reálnej arbitráži.

Medzi ďalšie pokusy o vysvetlenie fenoménu sa zaraďujú aj práce usilujúce sa vysvetliť momentum pomocou makroekonomických faktorov. Napríklad Chordia a Shivakumar (2002) sa pokúsili vysvetliť cenové momentum amerických akcií s pomocou makroekonomických indikátorov. V ďalších prácach, ako napríklad Griffin et al. (2003) a Cooper et al. (2004) však boli publikované výsledky podrobené kritike kvôli neschopnosti predikovať zisky momentových stratégií mimo pôvodne skúmanej časovej vzorky údajov. Najväčšiu predikčnú schopnosť zo všetkých faktorov pritom vykazovali samotné minulé výnosy, čo podporuje hypotézu, že cenové momentum má význam pre predikciu vývoja finančných aktív.

V inej štúdii Chordia a Shivakumar (2006) tvrdia, že cenové momentum je len špecifickým prejavom hybnosti vykazovanej na úrovni ziskov spoločností (ziskové momentum), a že výnosy vyplývajúce zo stratégie zameranej na využitie hybnosti ziskov majú zásadný vysvetľujúci vplyv na výnosy stratégie cenovej hybnosti, pričom zároveň majú schopnosť čiastočne predpovedať štandardné ekonomické premenné ako napríklad rast HDP, priemyselnú produkciu, spotrebu, či infláciu. Nadväzujú tým na ďalšie práce, ktoré tvrdia, že cenová hybnosť je vysvetliteľná nadpriemernými výnosmi spojenými s výskytom nových správ týkajúcich sa očakávanej ziskovosti, resp. rastu ziskov v budúcnosti. Napríklad Johnson (2002) tvrdí, že cenové momentum vôbec nie je iracionálne a netreba ho vysvetľovať pomocou behaviorálnych modelov, pretože stačí brať do úvahy meniace sa očakávania ohľadne budúceho toku dividend. Zisky vyplývajúce z cenového momenta sú podľa autora spôsobené najmä náhlymi zmenami (šokmi) v očakávaniach budúcich ziskov a zároveň aj zmenami očakávaného rizika konkrétnych spoločností. Racionálne vysvetlenie sa mu však nepodarilo podložiť kvalitným empirickým výskumom.

Liu, Warner a Zhang (2004) v empirickej štúdii potvrdili niektoré teoretické predpoklady Johnsona o stochastických zmenách v očakávaných mierach rastu dividend. Spoločnosti označené ako „vítazi“ mali vo všeobecnosti dočasne vyššie očakávané miery rastu dividend, investícií a tržieb ako „porazení“, a tento rozdiel v očakávaných výnosoch pretrvával približne po dobu 6-12 mesiacov, čo korešponduje s časovým intervalom typickým pre ziskovosť momentových stratégií. Problémom však podľa autorov aj naďalej zostáva nevysvetlená riziková prémie, keďže teoretické predpoklady o väčšej rizikivosti „vítazov“ sa na empirických údajoch nepotvrdili. Napriek tomu zistenia vyššie menovaných autorov podporujú argumenty zástancov racionálneho prístupu. Za zdroj cenovej hybnosti považujú

rozdielne očakávané výnosy a riziko jednotlivých akcií naprieč vzorkou, nie idiosynkratické riziko.

Argumentácia zástancov behaviorálneho prístupu, t.j. prístupu zohľadňujúceho psychológiu investorov, sa opiera o modely správania investorov v určitých hypotetických podmienkach, medzi ktoré patrí napríklad nerovnomerné šírenie informácií, rozdielny sklon k riziku pri rôznych typoch investorov, či rozdielne vnímanie stimulov z externého prostredia. Autori dokazujú, že spomínané javy a psychologické efekty vedú k vzniku cenovej hybnosti a následnému návratu k priemerným hodnotám (*mean reversion*). Za najznámejšie príspevky v oblasti behaviorálneho výskumu cenovej hybnosti sa považujú práce Honga a Steina (1997), Daniela et al. (1997) a Barberisa et al. (1998).

Z pohľadu najnovších poznatkov sa opäť do popredia dostávajú vysvetlenia cenovej hybnosti založené na racionálnych modeloch oceňovania aktív. Ukazuje sa, že nové prístupy využívajúce dynamické viacfaktorové modely a modely s podmienenými odhadmi majú potenciál dobre popísať tak riziko, ako aj očakávané výnosy momentových stratégií.

Yao (2008) vo svojej štúdii skúmal cenové momentum pomocou dynamického viacfaktorového modelu odhadnutého prostredníctvom dynamickej analýzy hlavných komponentov. Z jeho zistení vyplynulo, že nie viac ako päť latentných dynamických faktorov môže vysvetliť výnosy aj variabilitu momentových stratégií. Tieto faktory zároveň majú nepriamu súvislosť s meranými ekonomickými a finančnými premennými. Autor tiež poukazuje na fakt, že hlavným zdrojom cenovej hybnosti je v takto zostrojenom modeli reakcia na realizácie jednotlivých faktorov. Výnos plynúci z rozdielných očakávaných výnosov naprieč vzorkou je kladný ale ekonomicky nevýznamný, zatiaľ čo výnos vychádzajúci z idiosynkratickej zložky rizika je štatisticky nevýznamný. Medzi ďalšie podobné práce sa zaraďuje napríklad aj štúdia Zhanga (2004), ktorý ukazuje, že cenové momentum je možné replikovať pri použití dynamických β -faktorov (dynamický CAPM model), ktoré vyjadrujú zmenu systematického podnikateľského rizika na úrovni jednotlivých firiem. Takto vyjadrené cenové momentum má zároveň mnohé charakteristické vlastnosti pozorované empiricky, pričom model umožňuje popísať aj ďalšie fenomény ako napríklad sektorové momentum, či hybnosť ziskov.

Spomínaní autori poskytujú argumenty pre tvrdenie, že cenové momentum je teoreticky vysvetliteľné pomocou racionálnych modelov. Z pohľadu týchto modelov momentum prestáva byť rizikovou anomáliou, keďže riziková prémie „vítazov“ oproti „porazeným“ nie je v danom prípade záporná. To by sme mohli interpretovať ako hladké víťazstvo zástupcov racionálneho vysvetlenia, avšak spomínané modely uvažujú s dynamickými očakávanými výnosmi, ktoré sú s najväčšou pravdepodobnosťou v reálnom svete rovnako dôsledkom dynamických faktorov, ako aj ohraničene racionálneho alebo iracionálneho správania investorov, t.j. nedostatočnej reakcie na nové dáta alebo nadmernej reakcie pri známych informáciách.

Celá diskusia o cenovej hybnosti ako o anomálii potenciálne popierajúcej hypotézu efektívnych trhov sa vo svojich základoch opiera o empirický výskum na minulých finančných údajoch. Hoci najnovšie teoretické poznatky vyzerajú sľubne a čiastočne sa preukázala schopnosť predpovedať výskyt fenoménu aj mimo skúmanej vzorky, nepotvrďuje to neplatnosť hypotézy efektívnych trhov. Ak sa fenomén v budúcnosti vytratí, čo už niektoré štúdie naznačujú, schopnosť cenovej hybnosti čiastočne predpovedať budúci vývoj trhov sa môže priblížiť k nule a investori budú nútení vyhľadávať nové stratégie využívajúce krátkodobú neefektívnosť trhov. To, že sa v danom prípade nejedná o nereálnu úlohu, dokumentuje napríklad Figelman (2007).

Niektorí autori sa v ostatných rokoch začali viac zameriavať na cenovú hybnosť v širšom kontexte rozličných aktív, teda nielen na akciových trhoch. Zaujímavé poznatky v tomto smere prinášajú napríklad práce Harloffa (1998), Carharta (2003), Fabera (2007), Blitza a Vlieta (2008), či Goodfellowa et al. (2008). Ukazuje sa, že cenové momentum môže slúžiť ako dôležitý nástroj na skvalitnenie globálnej taktickej alokácie portfólia naprieč aktívami, najmä ak sa využije v súčinnosti s ďalšími známymi vlastnosťami finančných aktív. Aktuálne finančné údaje pritom dokazujú, že nejde iba o krátkodobý alebo zaniknutý fenomén. Náplňou praktickej časti tejto práce je práve vytvorenie modelu alokácie aktív, ktorého vstupmi budú okrem iného aj údaje o cenovej hybnosti jednotlivých aktív.

Druhou nosnou témou práce je problém alokácie aktív z pohľadu aktuálnych vedeckých znalostí a technických možností. V klasickom koncepte Harryho Markowitza sa jedná o optimalizačný problém, v ktorom figurujú ako vstupy vo všeobecnosti neznáme veličiny

očakávaných výnosov a rozptylu (Markowitz, 1952, 1991). Hoci je moderná teória portfólia v akademickej oblasti všeobecne uznávaná, v praxi sa skoro vôbec nevyužíva vo svojej pôvodnej podobe kvôli množstvu problémov s odhadom vstupných parametrov, nestabilitou riešení a neintuitívnymi výsledkami (viď napríklad: Michaud, 1989).

Black a Litterman v roku 1990 predstavili nový model alokácie portfólia založený na trhom implikovaných výnosoch a bayesovskej štatistike, v ktorom je možné kombinovať názory investorov s trhovo neutrálnym portfóliom (Black, Litterman, 1990, 1991, 1992). Model si získal priazeň investorskej verejnosti a akademickej obce vďaka svojej intuitívnosti a tiež vďaka mnohým pozitívnym vlastnostiam, ktoré umožňujú odstránenie viacerých problémov Markowitzovej optimalizácie v priestore očakávaný výnos – rozptyl. V predkladanej práci je použitá aplikácia Black-Littermanovho modelu s využitím niektorých novších poznatkov a úprav, ktoré rozširujú možnosti modelu a odstraňujú viaceré prvotné nedostatky pôvodného modelu.

Okrem vyššie uvedených problémov treba ešte podotknúť, že jedným z predpokladov Black-Littermanovho modelu je aj znalosť skutočnej variančno–kovariančnej matice výnosov aktív. Túto variančno–kovariančnú maticu však v skutočnosti nepoznáme, preto ju musíme odhadovať z výberových dát. Nakoľko v tejto súvislosti nie je výberová variančno–kovariančná matica vhodným estimátorom kvôli problémom s autokoreláciou a heteroskedasticitou, odporúča sa využitie metód umožňujúcich kvalitnejšie odhady kovariančnej matice (viď: Fabozzi et al., 2006; Meucci, 2005; Alexander, 2008b, De Santis et al., 2003). V dostupnej literatúre sa spomína napríklad využitie GARCH modelov, exponenciálnych klzavých priemerov, robustných estimátorov, redukovaných estimátorov (*shrinkage estimators*) alebo teórie náhodných matíc (*random matrix theory*). Kritike modelu a alternatívnym formuláciám sa viac venujú napríklad Ghezzi et al. (2006), Meucci (2006, 2008, 2008a), Palomba (2006), Beach a Orlov (2006), Bertocchi et al. (2005), Zhou (2008), DaSilva et al. (2009), Martellini a Ziemann (2007), Idzorek (2004), Mankert (2006) a ďalší.

Optimalizácia portfólia trochu paradoxne nie je kľúčovou zložkou Black-Littermanovho modelu, nakoľko hlavná pozornosť jeho autorov sa sústredila na získanie konzistentných odhadov očakávaných výnosov a rizika so zahrnutím subjektívnych očakávaní. Black a Litterman sa vo svojich prácach pri praktických experimentoch opierali najmä o klasický Markowitzov model výberu portfólia. V súvislosti s rastúcim počtom publikácií venovaných

rôznym verziám Black-Littermanovho modelu sa však aj napriek počiatočnej absencii diskusie začali objavovať návrhy na využitie iných modelov optimalizácie portfólia. Napríklad v práci Giacomettiho et al. (2005) sa autori zaoberajú optimalizáciou portfólia s využitím rôznych mier rizika, konkrétne rozptylu, Value at Risk (VaR) a Conditional Value at Risk (CVaR). Meucci (2006) uvádza alternatívny spôsob odhadu vstupných parametrov vychádzajúci z princípov Black-Littermanovho modelu, vhodný aj pre aktíva s výnosmi, ktorých výnosy nemajú normálne rozdelenie. Ako mieru rizika v danom prípade tiež navrhuje využívať CVaR. Martellini a Ziemann (2007) odporúčajú pri výbere optimálneho portfólia zloženého z hedžových fondov uvažovať s preferenciami investorov smerom k vyšším momentom rozdelenia výnosov (t.j. šikmosti a špicatosti) a navrhujú optimalizáciu v priestore očakávaný výnos – VaR (*Value-at-Risk*). V podmienkach domácej akademickej obce sa Black-Littermanov model využíva napríklad v práci Miťkovej a Mlynaroviča (2007) v súvislosti s optimalizáciou portfólií dôchodkových fondov. Z rámca vyššie uvedených prác sa mierne vymyká štúdia Palombu (2006), ktorý okrem odporúčaného využitia upravenej verzie GARCH modelu ako jeden z mála autorov uvažuje o optimalizácii v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko (*tracking error*). Je zaujímavé, že sa tomuto spôsobu optimalizácie portfólia venuje v literatúre menej pozornosti, hoci je vhodný najmä pre portfóliá do veľkej miery kopírujúce trhové portfólio alebo určitý explicitne stanovený finančný index, čo platí aj pre klasický Black-Littermanov model. Optimalizácia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko sa v praxi pomerne často využíva ako alternatíva Markowitzovho modelu. Skúmanie napojenia takejto optimalizácie na odhady získané z Black-Littermanovho modelu sa preto v danej súvislosti javí viac ako logické. Medzi dnes už klasické práce v tejto oblasti patrí najmä príspevok Rolla (1992). Novšie poznatky priniesli okrem iných aj neskôr podrobnejšie rozoberané práce Joriona (2003) a Bertranda (2008). Bertrandove teoretické závery sú pritom využité aj v praktickej časti predkladanej práce.

2 Výskumný problém a ciele dizertačnej práce

Dva hlavné tematické okruhy tejto práce, cenová hybnosť aktív a Black-Littermanov model výberu portfólia, na prvý pohľad nemajú veľa spoločného. Pri bližšom pohľade však nachádzame niekoľko zaujímavých prepojení. Predovšetkým cenová hybnosť aj Black-Littermanov model vychádzajú z teórie efektívnych trhov (resp. jej slabej verzie), z ktorej vyplýva, že trhy môžu byť krátkodobo neefektívne (napr. nediskontujú všetky známe informácie, resp. neplatí zákon jednej ceny), ale v dlhodobom horizonte sa sily dopytu a ponuky majú tendenciu vyrovnávať, vďaka čomu sa trh približuje rovnováhe.

Cenová hybnosť je fenoménom, ktorý by pri platnosti silnej verzie teórie efektívnych trhov neexistoval, pretože umožňuje dosahovať arbitrážne výnosy. Aj napriek tomu, že je táto vlastnosť finančných aktív známa minimálne od 1993, nedošlo k jej utlmeniu alebo vymiznutiu, ako sa to stalo pri iných populárnych fenoménoch, ako napríklad tzv. januárový efekt. Stále nové empirické štúdie potvrdzujú, že akcie s vyššou minulou výkonnosťou rastú v horizonte 3-12 mesiacov rýchlejšie ako ich konkurenti so slabšou minulou výkonnosťou, čo je pravdepodobne dôsledkom autokorelácie výnosov. Behaviorálne teórie tvrdia, že investori samotní sú zdrojom cenovej hybnosti, resp. ich nedostatočné a oneskorené reakcie na nové informácie. Cenová hybnosť je teda jednou z mála relatívne spoľahlivých možností, ako aspoň čiastočne predikovať budúci vývoj finančných aktív. To je však zároveň veľmi dôležité pre Black-Littermanov model, ktorý bez kvalitných vstupov nemá opodstatnenie.

Black-Littermanov model nie je len vylepšenou verziou Markowitzovho modelu výberu portfólia, ide skôr o nadstavbu, ktorá poskytuje silný teoretický rámec pre získanie kvalitnejších odhadov očakávaných výnosov a rizika. Autori v Black-Littermanovom modeli obišli alebo minimalizovali hlavné problémy Markowitzovej optimalizácie spojené s odhadom vstupov, stabilitou riešenia a neintuitívnosťou výsledkov. Model vychádza z očakávaných výnosov generovaných váhami trhového portfólia (resp. jeho aproximácie), ktoré umožňuje šikovne kombinovať s názormi investora na podmnožinu aktív trhového portfólia. Výsledné vstupy do klasickej optimalizačnej úlohy sú prirodzene konzistentné a umožňujú výrazne redukovať počet odhadov. Markowitzov model totiž nehovorí nič o tom, ako sa majú určiť vstupy, hoci napríklad vyžaduje odhadnúť očakávané výnosy pre všetky

aktíva. Ak investor nemá žiadne vlastné odhady, Black-Littermanov model v kombinácii s Markowitzovou optimalizáciou generuje trhové portfólio, z čoho vyplýva, že práve očakávania investora sú tým najcennejším prínosom pre relatívnu ziskovosť portfólia generovaného modelom voči trhovému portfóliu, resp. referenčnému indexu. Prirodzene sa tu preto otvára možnosť využiť výhody, ktoré ponúka cenová hybnosť. Na základe znalosti tohto fenoménu môžeme identifikovať aktíva, ktoré majú vysoký predpoklad dosiahnuť aspoň v určitom krátkom časovom horizonte vyššie zhodnotenie ako ostatné aktíva.

Hlavným cieľom dizertačnej práce je spojiť tieto dve rozsiahle témy v praktickej aplikácii, ktorú by bolo možné reálne využívať, a ktorá by obsahovala najnovšie poznatky z oboch tém. Pri cenovej hybnosti sa jedná najmä o využitie alternatívnych hodnotiacich kritérií pre lepšie zachytenie fenoménu. V rámci Black-Littermanovho modelu a následnej optimalizácie sa predpokladá testovanie a aplikácia viacerých moderných metód pre odhad vstupných parametrov a konštrukciu výsledného optimálneho portfólia.

2.1 Výskumný problém

Rozvoj modernej teórie portfólia v teórii aj v praxi sa z historického pohľadu začal približne v päťdesiatych a šesťdesiatych rokoch dvadsiateho storočia v USA v súvislosti s významným teoretickým prínosom autorov ako boli Harry Markowitz, William Sharpe, James Tobin, John Lintner a ďalší. V akademickej obci, ako aj v popredných svetových finančných inštitúciách, sa výskum začal uberať smerom k teórii výberu optimálneho portfólia a do popredia sa začali dostávať otázky strategickej a taktickej alokácie aktív. Ďalšiu revolúciu vo finančnej sfére v sedemdesiatych rokoch dvadsiateho storočia spôsobil Sharpeho CAPM model a hypotéza efektívnych trhov. Vďaka záverom z uvedených teórií vzniklo dokonca celé nové finančné odvetvie – indexové podielové fondy. Hoci modely oceňovania aktív sa v ďalších desaťročiach veľmi intenzívne a prudko vyvíjali, na poli optimalizácie portfólia sa výskum posúval dopredu pomalšie. Do popredia sa začali postupne dostávať metódy založené na rôznych alternatívnych mierach rizika, ako napríklad semivariancia, aktívne riziko, VaR, CVaR a podobne. Zároveň sa dosiahli významné pokroky v snahách o skvalitnenie odhadov očakávaných výnosov a rizika. Sem patria napríklad metódy využívajúce bayesovskú štatistiku, GARCH modely, alebo tiež robustné

odhady a redukované odhady. Aj napriek významnému pokroku v teoretickej oblasti však až do deväťdesiatych rokov neexistoval jednoznačný teoretický rámec pre prepojenie spomínaných metód pri jedinej celostnej úlohe výberu portfólia. Jednotliví správcovia sa väčšinou spoliehali na rôznom spôsobom poprepájané čiastkové postupy, často založené viac na empirických pravidlách, ako na skutočnom optimalizačnom modeli. Metódy spomínané vyššie sa síce uplatňovali, ale nie vždy cielene a úspešne. Black-Littermanov model v tomto smere priniesol veľký prelom, pretože poskytol relatívne jednoduchý a intuitívny teoretický rámec spájajúci viaceré oblasti výskumu v jednej aplikácii.

Správca portfólia finančných aktív by si mal v praktickej situácii vždy položiť a zodpovedať nasledovné otázky:

- Aké portfólio spravujem a aké aktíva pritom používam?
- Ako je stanovený investičný cieľ a aké sú preferencie investora?
- Ako sledujem vývoj portfólia a aké výnosovo-rizikové charakteristiky portfólia ma zaujímajú?
- Ako odhadnem očakávaný vývoj? Aké metódy pritom použijem?
- Aký model výberu portfólia použijem a ako ho aplikujem?

Náplňou predkladanej práce je okrem teoretického výskumu aj praktická aplikácia, ktorá hľadá odpovede na všetky spomínané otázky, a aj na niektoré ďalšie. Získané odpovede nemusia predstavovať jediné možné a správne riešenie, avšak môžu poskytnúť návod na riešenie širokého okruhu problémov v praktickej správe portfólií. Nastolené otázky sú predmetom intenzívneho skúmania mnohých smerov v štatistike, ekonometrii, operačnom výskume a ďalších vedných odboroch.

Cieľom správcu finančných aktív je vybrať optimálne portfólio, t.j. také portfólio, ktoré maximalizuje očakávanú užitočnosť bohatstva na konci investičného obdobia. Nie vždy je v

záujme manažéra dosiahnuť maximálny zisk; môže sa napríklad snažiť o minimalizovanie rizika, zachovanie počiatočnej hodnoty kapitálu, či kopírovanie zvoleného referenčného indexu. Investičný cieľ by mal závisieť od preferencií investora a investičného horizontu. Iný cieľ má človek investujúci peniaze s cieľom kúpiť za tieto peniaze nehnuteľnosť o jeden až dva roky, a úplne iný cieľ má napríklad správca portfólia aktív v komerčnej poisťovni, ktorý má zvyčajne za úlohu zladiť duráciu aktív a pasív.

Správa portfólia investičných aktív je prirodzene kvantitatívny proces, z čoho vyplýva potreba sledovať vývoj portfólia v čase a jeho charakteristiky. Očakávaný výnos môže byť vyjadrený ako percento z investovanej sumy, ale môže byť stanovený aj v absolútnom vyjadrení, alebo v relatívnom vyjadrení v porovnaní s referenčným indexom. Rovnako aj rizikové charakteristiky portfólia je možné vyjadriť množstvom rôznych ukazovateľov, z čoho vyplýva potreba stanoviť rizikovo-výnosové charakteristiky, ktoré sa budú brať do úvahy pri optimalizácii portfólia. Využitie jednotlivých ukazovateľov do značnej miery závisí aj od charakteru skúmaných údajov, resp. skúmaného typu aktív.

Modelov pre výber optimálneho portfólia je veľké množstvo, avšak manažér sa musí pre niektorý rozhodnúť a akceptovať portfólio vygenerované týmto modelom ako skutočne optimálne. Úloha výberu portfólia by v tomto svetle nebola až taká komplikovaná, ak by sme poznali očakávané výnosy a riziko. V praktických aplikáciách je však kameňom úrazu práve problém, že skutočné budúce výnosy nepoznáme, a nevieme ani s istotou povedať, aké bude budúce riziko portfólia. Tu sa k slovu dostávajú rôzne moderné štatistické metódy, avšak výber metód opäť závisí od rozhodnutia investičného manažéra.

Zdroje informácií využívaných na odhadovanie budúcich výnosov a rizík môžeme vo všeobecnosti rozdeliť na objektívne, t.j. všeobecne používané a dostupné širokej verejnosti, a subjektívne, založené na osobných skúsenostiach a poznatkoch z daného odvetvia. Pri výbere optimálneho portfólia sa však prirodzene vynára otázka, či je vhodné zahrnúť do investičného rozhodovania objektívne aj subjektívne informačné zdroje. Ak sú informácie z rôznych zdrojov rozporuplné, v akom pomere a s pomocou akej schémy by mali byť zohľadnené?

2.2 Ciele dizertačnej práce

Hlavným cieľom dizertačnej práce je implementácia poznatkov získaných pri skúmaní javu cenovej hybnosti do moderných metód výberu portfólia (Black-Littermanov model, Bertrandov model) za účelom skvalitnenia procesu investičného rozhodovania v praktickej aplikácii. Kvalita vstupov je však pri rozhodovaní o alokácii investícií len jedným z faktorov, rovnako dôležitý je výber modelu alebo postupu pre stanovenie optimálneho portfólia. Preto je výskumná časť práce zameraná aj na preverenie využiteľnosti zvolených metód a modelov v praktických aplikáciách.

V súvislosti s hlavným cieľom práce boli zároveň stanové nasledovné čiastkové ciele:

1. Otestovanie viacerých metód odhadu variančno-kovariančnej matice na zvolenej údajovej základni a výber vhodnej metódy poskytujúcej najlepšie odhady.
2. Otestovanie viacerých alternatívnych kritérií cenovej hybnosti na zvolenej údajovej základni a výber stratégie vhodnej pre použitie v modeli založenom na metodológii a myšlienkach Blacka a Littermana.
3. Kalibrácia a konštrukcia modelu kombinujúceho očakávané výnosy implikované trhom so subjektívne určenými očakávanými výnosmi vychádzajúcimi zo stratégie cenovej hybnosti.
4. Otestovanie Betrandovej metódy optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko pre rôzne vstupné parametre na údajoch získaných pomocou aplikácie všetkých predchádzajúcich krokov.
5. Preverenie aplikovateľnosti Black-Littermanovho modelu v praxi s využitím subjektívnych očakávaní založených na výsledkoch skúmania momentových stratégií.

Splnenie každého z čiastkových cieľov ako aj hlavného cieľa predkladanej dizertačnej práce umožní aplikáciu metód v praxi pri aktívnej správe investičných portfólií. Metódy používané v práci sú uplatniteľné nielen na skúmanej vzorke údajov, ale aj vo všeobecnosti na širokej škále rôznych investičných nástrojov. To je veľmi prospešné pre spoločnosti spravujúce finančné aktíva, pre ktoré je proces výberu portfólia bezpochyby jedným z kľúčových procesov pre vytváranie zisku. V súvislosti s tým je snahou týchto spoločností

podporovať výskum v oblasti optimalizácie portfólia a zavádzanie nových metód a postupov. Vedľajším cieľom tejto práce je preto vytvorenie uceleného metodologického rámca a ekonomicko-matematických nástrojov využiteľných napríklad aj v slovenských správcochských spoločnostiach pri aktívnej správe finančných aktív.

Splnenie vytýčených cieľov je nevyhnutne spojené s dôkladným naštudovaním širokého spektra dostupnej literatúry prevažne v anglickom jazyku a predpokladá taktiež aplikáciu moderných informačných technológií. Predovšetkým si však vyžaduje vyriešenie všetkých problémových otázok načrtnutých v kapitole 2.1.

2.3 Údajová základňa

V praktickej časti tejto práce budeme pracovať s časovými radmi údajov o cenách a výnosoch sektorových akciových indexov, ktoré spoločne tvoria známy americký akciový index S&P 500, ktorý sa často označuje za barometer vývoja amerického akciového trhu. K 13. aprílu 2009 mal index trhovú kapitalizáciu 7,867 bilióna dolárov a pozostával z 500 akcií vybraných komisiou spoločnosti Standard & Poor's na základe viacerých kritérií reprezentatívnosti³. Celkovo index reprezentuje približne 75% celej trhovej kapitalizácie amerického akciového trhu.

S&P 500 má desať sub-indexov reprezentujúcich jednotlivé sektory americkej ekonomiky. Údajovú základňu uskutočneného praktického výskumu tvoria oficiálne vyhlásené hodnoty sektorových indexov a im prislúchajúce hodnoty trhovej kapitalizácie v časovom intervale od 15.9.1989 do 9.1.2009. Údaje majú týždennú frekvenciu, čo predstavuje 1009×10 pozorovaní hodnôt, resp. 1008×10 pozorovaní výnosov (týždenných zmien hodnôt). Zdrojom údajov je informačný systém spoločnosti ČSOB Asset Management. V Tabuľke 1 sú pre názornosť uvedené hodnoty jednotlivých sledovaných indexov a ich trhové kapitalizácie k 31.12.2008.

³ Pre podrobnejšie informácie o indexoch spoločnosti Standard & Poor's, ich tvorbe, zložení a aktuálnych hodnotách odporúčame stránku <http://www.standardpoors.com>.

Tabuľka 1 - Prehľad sektorových sub-indexov akciového indexu S&P 500

Názov indexu	Popis	Počet spoločností	Trhová kapitalizácia v mil. USD	Podiel v %	Hodnota indexu
S&P 500 Index	500 najvýznamnejších amerických akcií	500	7866544	100%	903.25
S&P 500 Energy Index	Energetika	39	1047160	13%	386.35
S&P 500 Materials Index	Ťažba a spracovanie surovín	29	234853	3%	137.58
S&P 500 Industrials Index	Priemyselná výroba	58	869885	11%	207.2
S&P 500 Consumer Discretionary Index	Tovary dlhodobej spotreby	80	659182	8%	169.4
S&P 500 Consumer Staples Index	Tovary bežnej spotreby	41	1010995	13%	246.66
S&P 500 Health Care Index	Zdravotníctvo a farmaceutický priemysel	54	1161430	15%	309.41
S&P 500 Financials Index	Finančné služby	81	1045420	13%	168.79
S&P 500 Information Technology Index	Informačné technológie	75	1203432	15%	231.8
S&P 500 Telecommunications Services Index	Telekomunikačné služby	9	301046	4%	111.69
S&P 500 Utilities Index	Podniky verejných služieb	34	333141	4%	147.93

Zdroj: www.standardandpoors.com, Bloomberg, údaje k 31.12.2008

Skúmané časové rady pokrývajú obdobie 20-tich rokov, ktoré v sebe zahŕňa prakticky všetky bežné fázy vývoja akciového trhu a ekonomiky (stagnácia, oživenie, rozmach, spomalenie, recesia) ako aj extrémny vývoj spojený so vznikom cenových bublín (internetová bublina, trh nehnuteľností, finančná kríza, atď.) a negatívnych cenových šokov (útok na WTC v New Yorku, krach Lehman Brothers, atď.). Údaje z uvedeného dôvodu môžeme považovať za dostatočne reprezentatívne.

Akcie, resp. akciové indexy boli vybrané zámerne, pretože sa jedná o triedu aktív s dobre dostupnými historickými údajmi a cenová hybnosť je tu dostatočne preskúmaná a zdokumentovaná. Postup odhadu vstupných parametrov a výberu portfólia využitý v tejto práci sa však neviaže priamo na konkrétne aktíva a je možné ho použiť univerzálne pre rôzne typy aktív a ich kombinácie. Výnimku tvoria aktíva s nelineárnym profilom výplaty výnosu (napr. deriváty a štruktúrované nástroje), pre ktoré by bolo potrebné zdefinovať rizikové faktory v zmysle špecifikácie Black-Littermanovho modelu uvedenej napríklad v prácach Meucciho (2005, 2008), alebo Ghezziho et al. (2006).

Najdôležitejším dôvodom pre výber sektorových indexov je snaha o vytvorenie aktívnej investičnej stratégie, ktorú by bolo možné relatívne jednoducho a nenákladným spôsobom uviesť do praxe pri riadení určitého investičného portfólia. Zvolené indexy sa dajú pomerne ľahko replikovať pomocou indexových fondov, alebo takzvaných ETF (*exchange traded funds*) – fondov obchodovaných na burze. Transakčné náklady a ďalšie náklady spojené s riadením portfólia sú vďaka tomuto prístupu rádovo nižšie ako v prípade replikácie indexov cez individuálne akciové pozície. Zároveň tento prístup poskytuje oveľa vyššiu flexibilitu pri prehodnocovaní portfólia z dôvodu zmien v investičnej alokácii. Okrem toho výhoda výberu

sektorových indexov spočíva aj v relatívne malom počte aktív, čo významne znižuje výpočtovú a technologickú náročnosť realizovaného výskumu⁴.

Ďalšou významnou motiváciou pre výber portfólia indexov je možnosť preskúmať využitie rôznych metód odhadu a výberu portfólia v podmienkach silno korelovaného systému. Sledované údaje skutočne vykazujú vysoký stupeň vzájomnej závislosti, čo sa prejavuje praktickými problémami so stabilitou riešení a interpretovateľnosťou výsledkov. V praxi sa s takýmito systémami stretávame úplne bežne, takže skúsenosti získané v tejto práci môžu poslúžiť aj pri ďalšom výskume a reálnej správe investičných portfólií.

2.4 Metódy a postupy praktického výskumu

Praktický výskum, ktorého výsledky sú zhrnuté v siedmej kapitole tejto dizertačnej práce, môžeme z hľadiska zamerania, metodológie a postupov rozdeliť na štyri samostatné celky. Všetky tieto celky sú následne spojené v jednej spoločnej praktickej aplikácii. Prvou nosnou témou je cenová hybnosť. Historické údaje o vývoji sektorových akciových indexov sú podrobené skúmaniu na prítomnosť fenoménu cenovej hybnosti s pomocou viacerých štandardných aj modifikovaných kritérií pre zoradovanie aktív. Druhý celok sa zaoberá skúmaním aplikácie rôznych metód konštrukcie variančno-kovariančnej matice na reálnych finančných údajoch, ako aj empirickým porovnávaním kvality jednotlivých odhadov. Tretím významným okruhom je aplikácia Black-Littermanovho modelu v špecifikácii Meucciho (BLM model) zahŕňajúca kalibráciu modelu, odhad implikovaných trhových výnosov, formulovanie subjektívnych očakávaní a následné získanie výsledných zmiešaných odhadov. Štvrtý a posledný okruh praktického výskumu sa zaoberá optimalizáciou portfólia na základe odhadov získaných z BLM modelu. V praxi sa testuje najnovšia metodológia optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko.

⁴ Práca s veľkým počtom aktív implikuje použitie veľkého množstva rozsiahlych a náročných maticových operácií, ktoré si vyžadujú zvýšené nároky na softvér aj hardvér. Okrem toho je nutnou podmienkou aj dostupnosť kvalitných historických údajov. Alternatívnou možnosťou je využitie modelov a metód redukujúcich dimenziu problému (PCA, faktorové modely).

3 Momentum z pohľadu teórie a praxe

Keď Narasimhan Jegadeesh a Sheridan Titman v roku 1993 uverejnili svoj článok o hybnosti výnosov finančných aktív (Jegadeesh, Titman, 1993), dostal sa do väčšej pozornosti finančnej verejnosti fenomén, o ktorého existencii sa intuitívne vedelo už dávnejšie. Podľa uvedenej štúdie akcie s vysokými (nizkými) troj- až dvanásťmesačnými minulými výnosmi si v priemere udržuujú vysoké (nizké) výnosy počas nasledujúcich troch až dvanástich mesiacov. Tento jav sa začal v literatúre označovať ako „cenové momentum“⁵. Investičné stratégie, ktoré sa pokúšajú tento fenomén využiť, sa zväčša zameriavajú na nakupovanie akcií s relatívne vyššou minulou výkonnosťou (vítazov) financované z krátko predaja akcií s najväčšími minulými poklesmi (porazených). V bankovom a finančnom odvetví sú tieto stratégie pomerne rozšírené. Okrem cenovej hybnosti bol podobný efekt pozorovaný aj na úrovni ziskov spoločností. Fenomén sa nazýva „ziskové momentum“ a jeho súvislosť s cenovou hybnosťou je taktiež otvoreným predmetom akademickej diskusie. Napriek mnohým pokusom sa zatiaľ nepodarilo nájsť pre spomínané fenomény plne uspokojivé teoretické vysvetlenie.

Cenové momentum nezapadá do tradičných modelov oceňovania aktív na základe rizika, pretože napríklad Jegadeesh a Titman (2001) poukazujú na fakt, že portfólio víťazov nie je rizikovejšie ako portfólio porazených aj napriek vyššiemu výnosu. Chýba tu teda teoreticky riziková prémie spojená s dodatočným výnosom. Autori navyše uvádzajú príklad virtuálnej stratégie s nulovými nákladmi, pri ktorej sa nákup akcií zo skupiny víťazov financuje z krátko predaja akcií zo skupiny porazených, pričom táto stratégia je zisková v každom päťročnom období od roku 1940 do roku 2001. Ak by bol fenomén len dôsledkom krátkodobej neefektívnosti trhov, alebo manipulácie s údajmi, pravdepodobne by sa rýchlo vytratil po zverejnení, avšak novšie štúdie zväčša nanovo potvrdzujú jeho existenciu.

⁵ Ak sa v práci vyskytuje označenie momentum, alebo hybnosť, myslí sa tým cenové momentum, resp. cenová hybnosť, ak nie je uvedené inak. Ide o preklad z anglického termínu *price momentum*, ale v skutočnosti sa však častejšie vzťahuje k výnosom ako k cenám finančných aktív. Okrem cenovej hybnosti rozoznávame aj ziskové momentum, resp. hybnosť ziskov, z anglického *earnings momentum*. Ak sa momentum vzťahuje k sektorom alebo finančným indexom, jedná sa taktiež o cenové momentum.

Pôvodný výskum bol síce zameraný len na americké akcie, avšak ďalší autori ako napríklad Rouwenhorst (1998), Chan et al. (1999), Griffin et al. (2005), alebo Leippold a Lohre (2009) potvrdili výskyt hybnosti aj na iných akciových trhoch po celom svete. Nasledujúca časť práce je venovaná najmä aktuálnemu stavu teoretického bádania v danej oblasti, detailnému popisu pôvodného experimentu Jegadeesha a Titmana, ako aj novším poznatkom a teóriám popisujúcim cenovú hybnosť z pohľadu rizika a psychológie investorov. Osobitná kapitola je venovaná alternatívnym spôsobom reprezentácie a výpočtu cenovej hybnosti, a taktiež popisu praktického experimentu zameraného na preukázanie prítomnosti cenovej hybnosti v reálnych finančných údajoch.

3.1 Dôkaz cenovej hybnosti

Jegadeesh a Titman (1993) skúmali výnosy J/K-mesačných investičných stratégií, pri ktorých sa obdobie minulého zhodnotenia (rozhodné obdobie) a investičný horizont (investičné obdobie) pohybovali v rozmedzí od troch do dvanástich mesiacov. V rámci konkrétnej stratégie boli akcie zoradené do decilov podľa výnosov za J mesiacov rozhodného obdobia a následne sa vytvorili decilové portfóliá, v ktorých mali všetky akcie rovnakú váhu. Portfólio s najvyšším minulým výnosom sa označilo ako W (vítazi) a portfólio s najnižším minulým výnosom ako L (porazení). Pre tieto portfóliá sa potom zaznamenával výnos za K nasledujúcich mesiacov investičného obdobia. Autori testovali výkonnosti stratégií typu „kupovať W“, „predávať L“ a stratégie s nulovými nákladmi W-L, pri ktorých sa prostriedky z predaja L používajú na nákup W, pričom všetky sledované stratégie vykázali pozitívne zhodnotenie. Ako príklad je možné uviesť W-L stratégiu 12/3, ktorá vykázala priemerný výnos na úrovni 1,3% mesačne, avšak aj iné stratégie vykázali kladné a štatisticky významné výsledky. V prípade šesťmesačného rozhodného obdobia ($J=6$) sa výnos pohyboval v priemere okolo 1% mesačne nezávisle od investičného horizontu ($K=3, \dots, 12$). Dostupná literatúra o cenovej hybnosti uvádza zväčša výnosy v rozpätí od 0,5% do 2% mesačne pre väčšinu vyspelých a rozvíjajúcich sa akciových trhov.

O vysvetlenie fenoménu sa pokúšali viaceré teórie, avšak doposiaľ všetky pokusy popísať momentum na základe klasických modelov oceňovania kapitálových aktív viac-menej zlyhali. Jegadeesh a Titman (1993) pôvodne označili efekt cenovej hybnosti za dôsledok

nedostatočnej reakcie investorov (*under - reaction*) na zverejnenie špecifickej informácie dôležitej pre danú spoločnosť, t.j. kognitívne skreslenie (*cognitive bias*). Znamená to, že investori môžu úplne, alebo čiastočne ignorovať dôležité informácie a ich dlhodobý názor na konkrétnu akcie sa bude len postupne meniť v čase s určitou hybnosťou.

Zástancovia racionálnych modelov väčšinou tvrdia, že momentové stratégie môžu byť ziskové kvôli rozdielom v priemerných výnosoch v rámci danej skupiny sledovaných akcií, a nie kvôli predvídateľným pohybom cien akcií (Conrad, Kaul, 1998). Z toho vyplýva, že akcie s vysokým (nízkym) očakávaným výnosom v jednom období by mali dosiahnuť vysoký (nízky) výnos aj v nasledujúcom období. To je však v rozpore s ďalšou pozorovanou charakteristickou vlastnosťou momentových stratégií, v rámci ktorej momentové portfóliá (s nulovými nákladmi, t.j. portfóliá W-L) dosahujú záporné výnosy pri investičnom horizonte 13 až 60 mesiacov (Jegadeesh, Titman, 2001; Cooper et al., 2004). Výnosy akcií sa teda v čase menia a zhodnotenie momentových stratégií sa pre dlhé investičné obdobia v priemere približuje nule (*mean reversion*), čo je zrejmý výsledok v prípade efektívnych trhov. Znamená to však tiež, že tradičné modely založené na rizikovej prémii nemôžu vysvetliť momentum.

Jegadeesh a Titman (2001) uvažovali s nasledovným jednofaktorovým modelom výnosu cenného papiera:

$$r_{i,t} = \mu_i + b_i f_t + e_{i,t}, \quad (1)$$

$$E(f)_t = 0, \quad E(e_{i,t}) = 0, \quad (2)$$

$$Cov(e_{i,t}, f_t) = 0, \quad Cov(e_{i,t}, e_{i,t-1}) = 0, \quad (3)$$

kde

$r_{i,t}$ je výnos i -teho cenného papiera za obdobie t ,

μ_i je nepodmienený očakávaný výnos cenného papiera i ,

f_t je nepodmienený očakávaný výnos faktorového portfólia za obdobie t ,

$e_{i,t}$ je idiosynkratická zložka výnosu i -teho cenného papiera za obdobie t ,

b_i je faktorová senzitivita i -teho cenného papiera

Zo ziskovosti momentových stratégií vyplýva, že po nadpriemerných (podpriemerných) výnosoch pre dané akcie v jednom období musia nasledovať nadpriemerné (podpriemerné) výnosy pre tie isté akcie v nasledujúcom období. Kovariancia relatívnych výnosov v rôznych obdobiach sa pritom rovná očakávanému výnosu stratégie „váženej relatívnej sily“ (WRSS), ktorá je úzko spätá s klasickým prístupom k meraniu cenovej hybnosti (zaradenie do decilov podľa minulých výnosov), ale umožňuje hlbšie teoretické skúmanie. Princípom WRSS stratégie je rovnako ako pri prístupe Jegadeesha a Titmana nákup a predaj akcií na základe ich predchádzajúcej výkonnosti v rozhodnom období. Jej autormi sú Lo a McKinlay (1990), pričom váhy $w_{i,t}$ jednotlivých akcií v investičnom portfóliu sa vytvárajú nasledovným spôsobom:

$$w_{i,t} = \frac{1}{N} (r_{i,t} - \bar{r}_t) , \quad (4)$$

kde

N je počet akcií v portfóliu

$\bar{r}_t$ je priemerný výnos portfólia za obdobie t ,

Zisk z takto definovanej stratégie môžeme potom zapísať nasledovne:

$$\Pi_{t_1} = \sum_{i=1}^N w_{i,t_0} (r_{i,t_1} - \bar{r}_{t_1}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (r_{i,t_0} - \bar{r}_{t_0}) (r_{i,t_1} - \bar{r}_{t_1}) , \quad (5)$$

kde

t_1 označuje investičné obdobie (obdobie, počas ktorého je portfólio zainvestované),

t_0 označuje rozhodné obdobie (obdobie, za ktoré sa meria zhodnotenie).

WRSS stratégia sa líši od štandardnej momentovej stratégie tým, že priradzuje veľkú váhu akciám s veľkou relatívnou odchýlkou a malú nenulovú váhu akciám s malou odchýlkou od priemerného výnosu. Avšak za predpokladu, že nás zaujímajú nadpriemerné (resp. podpriemerné) výnosy v dvoch po sebe nasledujúcich obdobiach, potom je výnos stratégie WRSS presne to, čo potrebujeme na ďalšiu analýzu ziskov momentových stratégií.

Očakávaný zisk pre konkrétny cenný papier i v rámci momentovej stratégie teda môžeme zapísať aj nasledovným spôsobom:

$$E\{(r_{i,t_0} - \bar{r}_{t_0})(r_{i,t_1} - \bar{r}_{t_1})\} > 0 \quad (6)$$

Ak teraz do výrazu (6) dosadíme výnos cenného papiera zo vzťahu (1) a výsledok prevedieme na očakávaný výnos, na základe ďalších predpokladov zo vzťahov (2) a (3) dostaneme rozklad očakávaného výnosu i -teho cenného papiera z momentovej stratégie:

$$E\{(r_{i,t_0} - \bar{r}_{t_0})(r_{i,t_1} - \bar{r}_{t_1})\} = \sigma_{\mu_i}^2 + \sigma_{b_i}^2 \text{Cov}(f_{t_0}, f_{t_1}) + \text{Cov}(e_{i,t_1}, e_{i,t_0}), \quad (7)$$

kde

$\bar{r}_{t_0}$ a $\bar{r}_{t_1}$ označujú priemerné výnosy za rozhodné obdobie t_0 a investičné obdobie t_1 ,

$\sigma_{\mu_i}^2$ a $\sigma_{b_i}^2$ sú rozptyly očakávaného výnosu μ_i a faktorovej senzitivity b_i pre i -te aktívum.

Uvedená dekompozícia zisku momentovej stratégie naznačuje, že existujú tri potenciálne zdroje hybnosti výnosov; rozptyl očakávaných výnosov naprieč vzorkou, rozptyl pozitívne autokorelovaných výnosov faktorového portfólia a autokovariancia idiosynkratických výnosov. Jegadeesh a Titman (2001) vo svojej práci tvrdia, že rozdielne očakávané výnosy pri jednotlivých akciách v portfóliu (prvý zdroj) nemôžu vysvetliť momentum, pretože portfólio víťazov vykazuje dokonca menšie riziko ako portfólio porazených. Problém navyše predstavujú aj nevysvetlené straty momentových stratégií pri dlhšom investičnom horizonte (13 až 60 mesiacov). Grundy a Martin (2001) navyše tiež uvádzajú stratégiu, pri ktorej sa za pomoci hedžingu odstraňuje riziko spojené s faktormi. Táto stratégia pritom vykazuje vyššie zisky a nižšie riziko ako štandardný prístup. Zdrojom hybnosti výnosov by teda mohla byť pozitívna kovariancia faktorových výnosov (druhý člen rozkladu), aj keď napríklad Lewellen (2002) argumentuje, že vzájomná závislosť má záporné znamienko. Jegadeesh a Titman (2001) tiež poskytujú dôkaz vyvracajúci tento predpoklad.

Uvažujme teraz s pozitívnou kovarianciou faktorových výnosov ako s možným zdrojom momentových ziskov. V danom prípade je zdrojom hybnosti autokorelácia jednotlivých faktorov. Lewellen (2002) túto hypotézu kritizuje, nakoľko podľa jeho empirických zistení

vykazujú sledované portfóliá zoradené podľa odvetví, trhovej kapitalizácie a pomeru vlastného imania k trhovej kapitalizácii zápornú autokoreláciu a krížovú kovarianciu. Z toho usudzuje, že zdrojom cenovej hybnosti nie je oneskorená reakcia investorov na zverejnené informácie, ktorá implikuje pozitívny vzťah, ale nadmerná reakcia akcií na minulú realizáciu určitého faktora. Pri nadmernej reakcii investori preceňujú hodnotu už známych informácií.

Chen a Hong (2002) s využitím modelu podľa vzťahu (1) argumentujú, že z tvrdení Lewellena sa nedajú vyvodiť jednoznačné závery a poukazujú na fakt, že Lo - MacKinlayho dekompozícia nie je vo všeobecnosti dostatočne informatívna. Autori zároveň prezentujú alternatívny model založený na nadmernej reakcii investorov (*over-reaction*) na už známe údaje, na ktorom demonštrujú, že Lewellenove poznatky sú konzistentné s teóriou nedostatočnej reakcie investorov (*under-reaction*) na nové informácie, na ktorej sú postavené viaceré behaviorálne hypotézy týkajúce sa hybnosti výnosov. Model vychádza z faktorovej štruktúry Jegadeesha a Titmana (1995):

$$r_{i,t_1} = \mu_i + b_{i,1}f_{t_1} + b_{i,0}f_{t_0} + e_{i,t_1} \quad (8)$$

kde

r_{i,t_1} je výnos i -teho cenného papiera za obdobie t_1 ,

μ_i je nepodmienенý očakávaný výnos i -teho cenného papiera,

f_{t_1} je očakávaný výnos faktorového portfólia za obdobie t_1 ,

f_{t_0} je realizovaný výnos faktorového portfólia za obdobie t_0 ,

e_{i,t_1} je idiosynkratická zložka výnosu

$(b_{i,1}, b_{i,0})$ sú časovo-invariantné faktorové senzitivity i -teho cenného papiera na súčasnú a oneskorenú realizáciu faktora.

Takýto viacfaktorový model umožňuje uvažovať aj s reakciami na oneskorené realizácie faktorov. Jegadeesh a Titman (1995) ďalej odvodzujú všeobecný očakávaný výnos

momentovej stratégie⁶, pričom výslednú dekompozíciu môžeme symbolicky zapísať nasledovne:

$$E(\pi_t) = \sigma_u^2 + \Omega + \delta \sigma_f^2 \quad (9)$$

kde

$E(\pi_t)$ je očakávaný výnos momentovej stratégie za obdobie t ,

σ_u^2 označuje rozptyl nepodmienených očakávaných výnosov pre jednotlivé aktíva,

Ω je priemerná autokovariancia idiosynkratických komponentov výnosov,

σ_f^2 je rozptyl realizácií faktorov,

δ je príspevok prameniari z časovo rozdielných reakcií na výnosy faktorov.

Chen a Hong (2002) na skutočných finančných údajoch demonštrujú, že druhý člen dekompozície má najväčší vplyv na výsledný profit, zatiaľ čo príspevok tretieho člena je zanedbateľný. To opäť podporuje teóriu nedostatočnej (oneskorenej) reakcie, pri ktorej investori nereagujú na nové informácie dostatočne rýchlo.

3.2 Behaviorálne teórie

Keďže racionálne modely doposiaľ nedokázali dostatočne uspokojivo popísať fenomén cenovej hybnosti finančných aktív, viacerí autori zvolili behaviorálny prístup k problému. Behaviorálne teórie vychádzajú z predpokladu, že cenová hybnosť je dôsledkom iracionálneho, alebo ohraničene racionálneho správania investorov, ktoré spôsobuje oneskorenú a nedostatočnú reakciu na nové informácie (na rozdiel od teórií nadmernej reakcie na určitý rizikový faktor).

Daniel et al. (1997) navrhuje model, ktorý sa snaží simulovať správanie reprezentatívneho investora. Bežný investor si je často príliš istý svojimi dostupnými

⁶ Autori v skutočnosti odvodzujú výnos presne opačnej stratégie, ale ich výsledok sa líši od ďalej uvedeného tvaru len opačným znamienkom pri všetkých členoch dekompozície.

informáciami, a preto do veľkej miery ignoruje nové fakty. Zároveň má taký investor tendenciu pripisovať svoje investičné úspechy svojim schopnostiam a vylučuje šťastnú náhodu. Tieto dve psychologické tendencie, t.j. nadmerná sebaistota a prisudzovanie úspechov svojim schopnostiam, vytvárajú spolu hybnosť výnosov, ktorú je možné z krátkodobého hľadiska využiť na arbitráž. Čím viac prichádza informácií potvrdzujúcich názor investora, tým viac jeho sebaistota rastie a tým dlhšie trvá prispôsobenie sa novým fundamentálnym skutočnostiam. Inými slovami, oneskorená reakcia investora na novo publikované informácie kvôli pripisovaniu nadmernej váhy svojim schopnostiam spôsobuje krátkodobé momentum, zatiaľ čo prílišná sebaistota ohľadne predvídania budúceho vývoja (potom, ako sú všetky nové informácie vyhodnotené správne) spôsobuje neskoršie záporné výnosy momentových stratégií, t.j. návrat k priemeru.

Vyššie uvedený model rozlišuje dva typy investorov, rizikovo-neutrálnych informovaných obchodníkov (využívajúcich súkromné informácie) a rizikovo-averzných neinformovaných (racionálnych) obchodníkov. Každý typ investorov pritom reaguje inak na novo prichádzajúce verejné a súkromné informácie, na základe čoho vzniká cenové momentum. Autori konštatujú, že nadmerne sebaistí investori preceňujú hodnotu súkromných informácií a podceňujú hodnotu informácií dostupných pre všetkých účastníkov trhu.

Barberis et al. (1998) uvádza podobný model nálady investorov, pričom v zhode s predchádzajúcimi autormi predpokladajú, že nové informácie sa do cien premietajú postupne (oneskorená reakcia). Ceny aktív na základe tohto predpokladu vykazujú autokoreláciu, a teda výnosy sú do určitej miery predikovateľné. Autori tiež tvrdia, že investori sa často nespoliehajú na zákony pravdepodobnosti, ale na reprezentatívnu heuristiku. Reprezentatívna heuristika sa uplatňuje v prípade, keď investor pri posudzovaní pravdepodobnosti výskytu nejakej udalosti berie do úvahy známe vlastnosti podobných udalostí z minulosti, alebo charakteristiky základného súboru. Investori napríklad často vidia vzory aj v skutočne náhodných sekvenciách cien alebo čísel (poriadok v chaose). Druhým psychologickým fenoménom obsiahnutým v modeli je tzv. konzervativizmus. Konzervativizmus predpokladá, že investori menia svoje názory na základe nových informácií príliš pomaly, čo je v súlade s teóriou oneskorenej reakcie. Ak sú napríklad novo publikované finančné výsledky určitej spoločnosti neočakávane zlé, investori ich môžu

považovať za dočasný výkyv, čím znížia skutočnú hodnotu informácie. Ak by aj ďalšie výsledky boli zlé, investori by začali postupne upravovať svoje názory.

Uvažovaný model zahŕňa jedného reprezentatívneho rizikovo-neutrálneho investora reprezentujúceho konsenzus názorov a jedno reprezentatívne aktívum ocenené diskontovanou sumou budúcich platieb. Autori na modeli demonštrujú tvrdenie, že tak krátkodobá oneskorená reakcia ako aj dlhodobá prehnaná reakcia (a teda aj čiastočná predvídateľnosť výnosov finančných aktív) je dôsledkom toho, že si investor buduje svoje vlastné očakávania na nesprávnych predpokladoch.

Hong a Stein (1997) prezentujú behaviorálny model, ktorý je založený na interakcii dvoch nezávislých skupín ohraničene racionálnych investorov. Prvou skupinou sú investori sledujúci správy, druhou skupinou sú obchodníci zameraní na cenové momentum. Obe skupiny pritom pracujú len s podmnožinou všetkých dostupných informácií. Model je rovnako ako v predchádzajúcich príkladoch založený na počiatočnej oneskorenej reakcii a neskoršej nadmernej reakcii s predpokladom postupného vstrebávania nových informácií. Investori sledujúci správy sa v modeli spoliehajú len na informácie, ktoré považujú za súkromné, zatiaľ čo momentoví obchodníci investujú čisto na základe vyhodnotenia minulých výnosov. Počiatočná oneskorená reakcia prvej skupiny investorov pritom spôsobí autokoreláciu výnosov, ktorá následne pritiahne pozornosť druhej skupiny investorov a vyústi do oneskorenej reakcie. Autori ďalej argumentujú, že momentum nadobúda na sile s klesajúcou averziou voči riziku a po dlhšom období pozitívnych minulých výnosov, pričom existuje priama súvislosť medzi dobou, počas ktorej sa prejavuje autokorelácia, a investičným horizontom momentových obchodníkov.

Všetky vyššie uvedené teórie majú spoločné nasledovné dôležité črty:

- Prezentujú teoretické prostredie, v rámci ktorého je možné do veľkej miery vysvetliť charakteristické správanie cien akcií, predovšetkým krátkodobé cenové momentum a návrat k priemerným hodnotám výnosov v dlhšom období (*long-term price reversal*)
- Za zdroj krátkodobej pozitívnej autokorelácie výnosov (cenovej hybnosti) považujú oneskorenú reakciu investorov na zverejňované nové informácie.

- Nakoľko sa jedná o behaviorálne modely, nie je možné ich dokonale otestovať v reálnych podmienkach, a teda ani priamo použiť na predikciu budúcich ziskov investičných stratégií založených na cenovej hybnosti.
- Nedávajú priamu odpoveď na otázku dĺžky trvania fenoménu, t.j. nevysvetľujú, prečo je momentum zvyčajne najvýraznejšie pozorovateľné pri šesťmesačnom rozhodnom období a šesťmesačnom investičnom horizonte, a prečo sa obvykle takmer vytráca pri investičných obdobiach s dĺžkou viac ako dvanásť mesiacov.

3.3 Iné typy hybnosti finančných údajov

Okrem klasickej cenovej hybnosti aktív literatúra vo finančnej oblasti rozoznáva aj iné typy hybnosti. Početné štúdie zdokumentovali charakteristiky podobné cenovej hybnosti pri ziskoch spoločností, regionálne zameraných akciových indexoch, či jednotlivých sektoroch. Cenové momentum však zostáva najsilnejším a najznámejším z týchto javov.

Hybnosti ziskov sa vo svojich prácach venovali napríklad Chordia a Shivakumar (2006), Leippold a Lohre (2009) alebo Chan, Jegadeesh a Lakonishok (1995). Ziskové momentum sa prejavuje, keď akcie spoločností s neočakávané lepšími hospodárskymi výsledkami v nasledujúcom období prekonávajú výnosom akcie spoločností s neočakávané horšími hospodárskymi výsledkami. Lepšia výkonnosť pritom bežne pretrváva až šesť mesiacov od oznámenia konkrétnych hospodárskych výsledkov. Podobne ako cenové momentum, aj hybnosť ziskov umožňuje čiastočne predikovať budúce akciové výnosy, avšak vzájomná súvislosť medzi oboma javmi nie je jednoznačná. V porovnaní s využitím minulých výnosov pre zostrojenie hodnotiaceho kritéria pri cenovej hybnosti je zostrojenie hodnotiaceho kritéria pri hybnosti ziskov zložitejšie. Zvyčajne sa využíva jeden z nasledujúcich konceptov navrhnutých v práci, ktorej autorom je Chan et al. (1995):

- Štandardizovaný neočakávaný zisk (SUE) je definovaný ako rozdiel aktuálneho známeho štvrťročného zisku na akciu a štvrťročného zisku spred štyroch kvartálov

vydelený štandardnou odchýlkou rozdielov uvedených kvartálnych ziskov na akciu za uplynulých osem kvartálov.

$$SUE_{i,t} = \frac{EPS_{i,q(t)} - EPS_{i,q(t)-4}}{\sigma_{i,t}}, \quad (10)$$

kde

$SUE_{i,t}$ je štandardizovaný neočakávaný zisk akcie i v čase t ,

$EPS_{i,q(t)}$ je aktuálny kvartálny zisk na akciu i , ktorý je známy v čase t ,

$EPS_{i,q(t)-4}$ zisk na akciu i spred 4 kvartálov, ktorý je známy v čase t ,

$\sigma_{i,t}$ je štandardná odchýlka rozdielov kvartálnych ziskov $EPS_{i,q(t)}$ a $EPS_{i,q(t)-4}$ za osem kvartálov predchádzajúcich času t .

- Kumulatívny abnormálny výnos (ABR) akcie v období zverejnenia informácie o zisku spoločnosti je definovaný ako suma relatívnych kladných alebo záporných výnosov v porovnaní s trhovým indexom v období od dvoch dní pred zverejnením výsledkov do jedného dňa po zverejnení výsledkov spoločnosti.

$$ABR_{i,t} = \sum_{j=-2}^{+1} (r_{i,d(t)+j} - r_{m,d(t)+j}), \quad (11)$$

kde

$ABR_{i,t}$ je kumulatívny abnormálny výnos akcie i skúmaný v čase t ,

$r_{i,d(t)+j}$ je zhodnotenie i -tej akcie za deň d skúmané v čase t ,

$r_{m,d(t)+j}$ je zhodnotenie relevantného referenčného indexu za deň d skúmané v čase t .

$d(t)$ je dátum zverejnenia najnovších výsledkov spoločnosti známy v čase t ,

- Šesťmesačný kľzavý priemer zmien v očakávaniach analytikov (REV6) má za úlohu zaznamenať reakcie analytikov na nové výsledky. Počíta sa ako súčet rozdielov v mesačných konsenzuálnych odhadoch ziskov za obdobie predchádzajúcich šiestich mesiacov vydelený trhovou cenou z predchádzajúceho mesiaca.

$$REV6_{i,t} = \sum_{j=0}^6 \frac{f_{i,t-j} - f_{i,t-j-1}}{p_{i,t-j-1}}, \quad (12)$$

kde

$REV6_{i,t}$ je šesťmesačný kĺzavý priemer zmien očakávaných ziskov spoločnosti i v mesiaci t ,

$f_{i,t}$ je (analytikmi) očakávaný zisk na akciu spoločnosti i v mesiaci t ,

$p_{i,t}$ je cena akcie i v mesiaci t .

Každé z uvedených kritérií má určité výhody a zároveň aj nevýhody. Napríklad ABR zachytáva len krátke časové obdobie okolo zverejnenia výsledkov, zatiaľ čo napríklad SUE sleduje vývoj za dlhšie obdobie. Na druhej strane, zisky na akciu sa počítajú na základe publikovaných finančných údajov, ktoré nemusia vždy presne zodpovedať skutočnému vývoju ziskovosti danej spoločnosti. Kritérium REV6 sa viac zameriava na analytické predikcie budúcich ziskov, vďaka čomu sa viac hodí na predpovedanie budúceho vývoja. Je však zároveň známou pravdou, že za revíziami očakávaných ziskov zo strany analytikov môžu byť skryté aj iné motívy, ako napríklad snaha o generovanie vyššej obchodnej aktivity, a teda aj väčšieho objemu provízií. Odhliadnuc od spomínaných výhod a nevýhod, autori vo vyššie uvedenej štúdii na vzorke amerických akcií s históriou cien od roku 1977 do roku 1993 dokazujú, že všetky tri spomínané kritériá majú schopnosť čiastočne predpovedať budúce výnosy akcií.

Arbitrážne portfólio založené na kritériu SUE (dlhá pozícia vo víťaznom portfóliu a krátka pozícia v portfóliu porazených) zarobilo v priemere 6,8% počas šiestich mesiacov nasledujúcich po rozhodnom období. V ročnom investičnom horizonte však portfólio zarobilo v priemere iba 7,5% a pri dlhších horizontoch výnos začal klesať, čo naznačuje, že ziskové momentum slabne rýchlejšie ako cenové momentum. Veľmi podobné výsledky boli dosiahnuté aj s použitím kritérií ABR a REV6, z čoho jednoznačne vyplýva existencia oneskorenej reakcie investorov na nové informácie, v danom prípade hospodárske výsledky. Autori zároveň konštatujú, že hybnosť ziskov nesúvisí s cenovou hybnosťou a je vo všeobecnosti slabšia, t.j. zisky arbitrážnych stratégií sú nižšie.

Iní autori sa vo svojich štúdiách zamerali na skúmanie sektorovej hybnosti. Pri stratégii využívajúcej sektorovú hybnosť sa nakupujú akcie sektorov, ktoré mali v minulom období najväčšie zhodnotenie a predávajú akcie sektorov s najnižším minulým zhodnotením. Hlavná myšlienka pritom vychádza zo známeho fenoménu „zhlukovania“ (*herding*), t.j. silnej korelácie medzi akciami v určitom odvetví. Hoci existencia sektorovej hybnosti bola potvrdená, vysvetlenia zostávajú nejednoznačné. Napríklad Moskowitz a Grinblatt (1999) na základe štúdie amerických akcií vyslovili hypotézu, že sektorové momentum je vlastne príčinou klasickej cenovej hybnosti, avšak Grundy a Martin (2001) ich závery označujú za predčasné a považujú sektorové momentum za samostatný jav. Scowcroft a Sefton (2005) v novšej štúdii potvrdzujú, že zdrojom cenovej hybnosti je primárne sektorová hybnosť, avšak len pri akciách s vysokou trhovou kapitalizáciou. V prípade stratégií s rovnakými váhami pri všetkých akciách (t.j. pri nadvážení akcií s nižšou trhovou kapitalizáciou) vysvetľuje špecifická hybnosť jednotlivých akcií až 65% celkovej cenovej hybnosti.

Nijman, Swinkels a Verbeek (2002) dokumentujú prítomnosť sektorovej hybnosti (ako aj cenovej hybnosti celého trhu) aj na medzinárodných akciových trhoch, predovšetkým v Európe. Podiel jednotlivých typov hybnosti, t.j. individuálnej hybnosti konkrétnej akcie, sektorovej hybnosti a cenovej hybnosti trhov na celkovej cenovej hybnosti (výnose arbitrážnych stratégií) na základe dostupných údajov odhadujú na 60%, 30% a 10%, čo je v súlade so štúdiou Scowcrofta a Seftona. Babameto a Harris (2008) uvádzajú príklad funkčnej stratégie globálnej taktickej alokácie využívajúcej sektorové momentum v kombinácii s hodnotovým (*value*) efektom, pričom pre zostrojenie portfólia využívajú Black-Littermanov model. Stratégia prináša dodatočný ročný výnos 0,7% oproti referenčnému indexu pri plnom zainvestovaní a zahrnutí dodatočných investičných nákladov, pričom zahŕňa 177 globálnych sektorových indexov v období od roku 1995 do roku 2004.

Existenciu cenovej hybnosti pri indexoch jednotlivých regionálnych trhov dokumentuje napríklad Chan et al. (2000). Indexy jednotlivých trhov v globálnom portfóliu vykazujú štatisticky aj ekonomicky významné cenové momentum, pričom toto momentum je výraznejšie pri trhoch s vyšším objemom obchodov v predchádzajúcom období. Výnosy momentových stratégií zostávajú významné aj po započítaní poplatkov. Na druhej strane sa štúdia týka pomerne krátkeho časového obdobia od roku 1980 do roku 1995, čo v súčasnosti znižuje jej hodnotu. Pretrvávajúce cenovej hybnosti pri indexoch jednotlivých krajín však

potvrdila aj novšia práca Balwersa a Wua (2006), ktorá pracuje s údajmi od roku 1969 do roku 1999. Autori v uvedenej práci poskytujú príklad úspešnej stratégie zameranej na súbežné využitie cenovej hybnosti a vlastnosti návratu k priemerným hodnotám v horizonte 3-5 rokov (*mean-reversion*).

3.4 Výpočty a alternatívne hodnotiace kritériá pre cenové momentum

Nasledujúca podkapitola je zameraná na praktické problémy spojené s aplikáciou momentových stratégií na skutočných údajoch, ako aj na výpočty s tým spojené. Zväčša ide o heuristické techniky, ktoré majú napomôcť identifikovať cenovú hybnosť a využiť ju na dosiahnutie arbitrážnych ziskov, alebo predikciu budúcich výnosov. Podobnú motiváciu mal aj pôvodný empirický výskum fenoménu.

Jegadeesh a Titman (1993) popísali efekt cenovej hybnosti veľmi jednoducho a priamočiaro. Vstupom do hodnotiaceho kritéria boli len absolútne výnosy jednotlivých akcií za hodnotiace obdobie. Zoradené výnosy ďalej následne poslúžili ako základ pre konštrukciu decilových portfólií. Hodnotiace kritérium $R_{t,j}$ je teda intuitívne, ide o absolútny výnos akcie za dané obdobie:

$$R_{t,j} = \frac{P_t - P_{t-j}}{P_{t-j}} \quad (13)$$

kde

P_t označuje cenu akcie v čase t ,

j reprezentuje dĺžku rozhodného obdobia.

Pri práci s uvedeným kritériom je potrebné počítať s rôznymi firemnými udalosťami, ako napríklad zlučovanie firiem, delenie akcií, výmena akcií a podobne. Tieto udalosti ovplyvňujú ceny akcií, kvôli čomu môže dochádzať k skresleniu výnosov.

V literatúre aj v praxi sa môžeme stretnúť s mnohými alternatívnymi hodnotiacimi kritériami. Medzi často využívané patria napríklad Sharpeho pomer, či Treynorov koeficient. Argumentom pre použitie alternatívnych kritérií je snaha o lepšie zachytenie cenovej hybnosti. Výber kritéria však prirodzene ovplyvňuje zloženie výsledného investičného portfólia (stratégie), ktoré potom dosahuje odlišné výnosy a vykazuje odlišnú mieru rizika.

Fabozzi et al. (2006) tvrdí, že momentum umožňuje čiastočne predpovedať budúci vývoj akciových trhov a uvádza zaujímavý príklad alternatívnej momentovej stratégie. Hodnotiace kritérium $R_{t,j}^F$ je v nej navrhnuté nasledovným spôsobom:

$$R_{t,j}^F = \frac{P_t - P_{t-j}}{P_{t-j} \sigma_{t,j}} = \frac{R_{t,j}}{\sigma_{t,j}} \quad (14)$$

kde $\sigma_{t,j}$ označuje volatilitu zmien ceny daného aktíva v čase t vypočítanú na základe j minulých hodnôt (rozhodné obdobie dĺžky j).

Z uvedeného vzťahu vyplýva, že výnosy aktív sú normalizované ich volatilitou⁷. Toto kritérium sa používa na vytvorenie portfólia, pričom výhodou oproti klasickému prístupu je fakt, že normalizácia implicitne zabraňuje priradovaniu vysokých váh silne rizikovým akciám s abnormálnymi výnosmi. Po zoradení akcií podľa normalizovaného výnosu sú jednotlivým akciám i priradené kladné a záporné váhy w_i so znamienkom vyplývajúcim z ich umiestnenia v hornej, resp. dolnej polovici vzorky:

$$w_i = +(-) \frac{1}{\sigma_i \kappa}, \quad (15)$$

pričom κ je voliteľný parameter umožňujúci nastavenie vopred zvolenej celkovej ročnej volatility portfólia a ovplyvňujúci celkový súčet váh. Váha aktíva je v danej stratégii funkciou jeho volatility, čo je analógia WRSS stratégie autorov Loa a MacKinlayho (1990).

⁷ Ide o spomínaný Sharpeho pomer pri predpoklade nulového výnosu bezrizikového aktíva.

Fabozzi ďalej uvádza výsledky empirického experimentu, v ktorom vyššie definovaná stratégia vykazuje štatisticky významný výnos na úrovni približne 1% mesačne.

Biglova et al. (2004) uvádza príklady alternatívnych hodnotiacich kritérií pre konštrukciu momentových portfólií, pri ktorých sa využívajú alternatívne ukazovatele rizika, ako napríklad podmienená hodnota v riziku (*Conditional Value at Risk*, alebo tiež CVaR), STARR Ratio a R-Ratio. Autori tiež prezentujú výsledky výskumu na konkrétnych údajoch, z ktorých vyplýva, že stratégie založené na uvedených alternatívnych hodnotiacich kritériách lepšie zachytávajú momentum ako klasické stratégie a stratégie využívajúce Sharpeho kritérium. Podľa autorov je to dôsledkom toho, že dané ukazovatele pri výnosoch akcií uvažujú s rozdelením pravdepodobnosti s častejším výskytom extrémnych hodnôt (*fat-tailed distribution*).

Vo finančnej praxi sa ešte okrem spomínaných kritérií na zachytenie cenovej hybnosti využívajú aj ďalšie ukazovatele ako napríklad lineárne regresné koeficienty vypočítané z časových radov cien akcií za určité obdobie, alebo tzv. kritérium relatívnej sily predstavujúce rôzne kombinácie štandardných kritérií za rozličné časové obdobia. Okrem toho napríklad George a Hwang (2004) vo svojej práci skúmali 52-týždenné cenové maximum ako zaujímavé hodnotiace kritérium cenovej hybnosti, pričom na empirických údajoch preukázali pri takto definovanom kritériu výskytu vyšších výnosov ako pri klasickom hodnotení podľa minulej výkonnosti. Viaceré z vyššie uvedených kritérií sú v rôznych modifikáciách využité v praktickej časti predkladanej dizertačnej práce pri skúmaní úspešnosti momentových stratégií.

Cieľom autorovho dlhodobého výskumu v oblasti cenovej hybnosti je uplatnenie dostupných poznatkov o charakteristických vlastnostiach cenovej hybnosti na reálnych finančných údajoch, ako aj potvrdenie alebo vyvrátenie jej praktického významu pri odhade budúceho vývoja trhov. Pre účely výskumu v tejto práci sa predpokladá využitie upravených momentových stratégií ako vstupov pri výbere optimálneho portfólia na základe Black-Littermanovej metodológie.

3.5 Metodológia testovania úspešnosti momentových stratégií

Momentové investičné stratégie, alebo tiež stratégie založené na cenovej hybnosti, sú obvykle stratégie zahŕňajúce nakupovanie aktív s relatívne lepšou minulou výkonnosťou a predaj aktív s relatívne horšou minulou výkonnosťou. Minulá výkonnosť nemusí byť nevyhnutne vyjadrená pomocou percentuálneho nárastu aktíva v určitom časovom období, investor si môže zvoliť ľubovoľné alternatívne kritériá pre identifikáciu cenovej hybnosti. V kapitole 2.4 sú uvedené príklady rôznych alternatívnych kritérií pre určenie cenovej hybnosti. Viaceré z nich sú ďalej použité v praktickej časti dizertačnej práce pri konštrukcii momentových stratégií. Momentové stratégie reprezentujú premenlivé taktické alokácie vybraných aktív do špeciálne skonštruovaného portfólia, ktoré sú matematicky vyjadrené pomocou vektorov relatívnych alebo absolútnych „známok“ pridelených všetkým sledovaným aktívam podľa rozličných kritérií. Vektory ďalej v prípade predkladanej práce slúžia ako subjektívne vstupy do Black-Littermanovho modelu výberu portfólia.

Všetky momentové stratégie majú vo všeobecnosti podobný investičný cieľ. Snažia sa dosiahnuť kladné zhodnotenie v mesačnom až ročnom investičnom horizonte, pričom zvyčajne ide o tzv. samofinancujúce sa alebo trhovo neutrálne stratégie, t.j. stratégie, pri ktorých je dlhá pozícia v určitom počte aktív financovaná rovnako veľkou krátkou pozíciou v podobnom počte iných aktív. Stratégie nekopírujú vývoj trhu a ich korelácia s trhovými indexmi je obvykle nízka. Pre konštrukciu týchto stratégií je kľúčové kritérium, na základe ktorého sa uskutočňujú investície. Väčšina kritérií má empirický charakter a ich úspešnosť je potrebné overovať na historických údajoch. Čím väčší zisk vykazuje stratégia, tým úspešnejšie je kritérium cenovej hybnosti, aj keď jeho úspešnosť v budúcnosti tým nie je garantovaná. Na skúmanom základnom súbore sa budeme snažiť identifikovať kritériá a parametre, ktoré majú najväčší predpoklad prispieť k budúcej výkonnosti. Kľúčovou hodnotiacou veličinou bude priemerná výkonnosť stratégie v rámci skúmanej vzorky údajov, ako aj jej štatistická a ekonomická významnosť.

V predkladanej práci budeme skúmať výnosnosť momentových stratégií založených na piatich alternatívnych kritériách cenovej hybnosti, ktorými sú:

1. Štandardné kritérium – percentuálne zhodnotenie aktív za predchádzajúcich 3, 6, 9 a 12 mesiacov.

Kritérium vychádza z výskumného článku Jegadeesha a Titmana (1993), ktorý je považovaný za prelomový v oblasti skúmania cenovej hybnosti finančných aktív. Podobne ako vo vyššie uvedenom článku, v predkladanej práci skúmame percentuálne zhodnotenia aktív v rozhodnom období (3, 6, 9 a 12 mesiacov) a ich následné zhodnotenia v investičnom období (3, 6, 9 a 12 mesiacov). Keďže skúmaný základný súbor obsahuje 10 aktív⁸, nie je potrebné ich dodatočné triedenie do decilov podľa minulej výkonnosti. Aktíva sme len označili známkami od 1 do 10 podľa ich relatívnej výkonnosti, pričom aktívum s najnižším zhodnotením dostalo známku 1 a aktívum s najvyšším zhodnotením známku 10. Momentové stratégie s nulovými nákladmi (označenie W-L) boli vytvorené tak, že sa predpokladal nákup dvoch (troch, piatich) aktív s najvyššou výkonnosťou a súčasný krátky predaj dvoch (troch, piatich) aktív s najnižšou výkonnosťou v sledovanom rozhodnom období. Výsledné portfólio teda pozostávalo z dlhých a krátkych pozícií v sektorových indexoch, čo je v súčasnej finančnej praxi pomerne ľahko dosiahnuteľné prostredníctvom rozmanitých finančných nástrojov. Ďalej sa zaznamenalo zhodnotenie takto zostavených portfólií v investičných obdobiach naprieč skúmanou údajovou základňou. Na základe rovnakého princípu sme postupovali aj pri ďalších kritériách.

2. Kritérium 52-týždňového maxima – vzdialenosť od 52-týždňového cenového maxima vyjadrená ako percentuálny pomer aktuálnej ceny aktíva voči maximálnej cene aktíva za predchádzajúcich 52 týždňov.

Kritérium 52-týždňového maxima je vo finančnom svete populárne empirické kritérium pre výber aktív s krátkodobým a strednodobým potenciálom nárastu. Základnou myšlienkou je predpoklad, že čím sa určité aktívum nachádza bližšie k svojmu 52-týždňovému cenovému maximu, tým väčší je momentálny relatívny dopyt po danom aktíve, či už podložený fundamentálnymi ekonomickými očakávaniami alebo psychológiou trhu. Zároveň pri takom aktíve existuje významná šanca, že sa tento dopyt udrží aj v blízkej budúcnosti. Kritérium 52-týždňového maxima v kontexte cenovej hybnosti preskúmali George a Hwang (2004), ktorí potvrdili, že kritérium bolo na širokej vzorke údajov od roku 1963 do roku

⁸ Pozri kapitolu 6.3 pre podrobnejší popis použitých finančných údajov.

2001 nemenej úspešné ako štandardné kritérium, a v určitých prípadoch aj úspešnejšie. Autori prisudzujú fenoménu behaviorálne vysvetlenie, na základe ktorého investori pri aktívach dosahujúcich 52-týždňové maximá najprv váhajú s nákupom (*under-reaction*), ale neskôr preváži vplyv pozitívnych správ a umožní ďalší rast cien (*over-reaction*).

Výpočtovo je kritérium tiež nenáročné, aj keď v prípade identických výsledkov pre viaceré aktíva je potrebné kritérium upraviť, pretože nie je možné jednoznačne priradiť výslednú známku (resp. jednoznačne aktíva zoradiť). V daných prípadoch využívame ako náhradné kritérium štandardné kritérium 52-týždňového zhodnotenia. Hoci intuitívnejším kritériom by sa mohla zdať vzdialenosť od 52-týždňového minima, George a Hwang (2004) na základe empirických výsledkov poukazujú na neúčinnosť tohto kritéria. Pri zohľadnení kritéria 52-týždňového maxima prirodzene preferujeme vyššiu hodnotu výrazu

$$52WH_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{\text{Max}_k(P_{i,k})}, \quad \text{pre } k = \{t-51, t-50, \dots, t\}, \quad (16)$$

kde

$52WH_{i,t}$ je hodnota kritéria 52-týždňového maxima pre i -te aktívum v čase t ,

$P_{i,t}$ je cena i -teho aktíva v čase t .

Takto stanovené kritérium generuje číselné hodnoty z intervalu $(0,1>$, avšak relatívne často nastáva situácia, pri ktorej obsahuje vygenerovaný vektor alokácie viaceré výskyty známky 10 (t.j. hodnota kritéria je 1, resp. aktívum je na svojom 52-týždňovom maxime). Vtedy nie je možné jednoznačne usporiadať aktíva a je potrebné použiť dodatočné kritérium, ktoré umožní určiť prioritu pri aktívach so známkou 10 (nachádzajúcich sa na svojich 52-týždňových maximách). V daných prípadoch bolo ako dodatočné rozlišovacie kritérium použité štandardné kritérium 52-týždňového zhodnotenia, t.j. vyššiu výslednú známku dostali aktíva s vyššou výkonnosťou v rozhodnom období.

3. Sharpeho kritérium⁹ – pomer percentuálneho zhodnotenia aktíva za predchádzajúcich 3, 6, 9 a 12 mesiacov a štandardnej odchýlky týždenných výnosov toho istého aktíva pre príslušné obdobie.

Podobne formulované kritérium je okrem iných výskytov uvedené v publikácii Fabozziho et al. (2006) v súvislosti s ukážkou praktickej aplikácie momentovej stratégie v kombinácii s využitím Black-Littermanovho modelu. Jeho hlavnou ideou je snaha o odfiltrovanie aktív, ktorých vysoké relatívne výnosy v minulosti boli sprevádzané prudkým nárastom volatility. Pri skúmaní úspešnosti momentových stratégií aplikujeme kritérium vychádzajúce zo vzťahu (14) v kapitole 2.4, avšak upravujeme ho o zhodnotenie súhrnného indexu za príslušné obdobie nasledovným spôsobom¹⁰:

$$SR_{t,j} = \frac{R_{t,j} - R_{t,j}^M}{\sigma_{t,j}}, \quad (17)$$

kde

$SR_{t,j}$ je hodnota upraveného Sharpeho kritéria v čase t pre rozhodné obdobie dĺžky j ,

$R_{t,j}$ je zhodnotenie aktíva v čase t pre rozhodné obdobie dĺžky j ,

$R_{t,j}^M$ je zhodnotenie referenčného indexu v čase t pre rozhodné obdobie dĺžky j , ktoré reprezentuje vážený priemer zhodnotení všetkých skúmaných aktív,

$\sigma_{t,j}$ je štandardná odchýlka v čase t pre rozhodné obdobie dĺžky j .

Minimálne rozhodné obdobie bolo stanovené v dĺžke troch mesiacov, čo predstavuje približne 13 týždenných pozorovaní.

⁹ Kritérium v dostupnej literatúre nie je pomenované, názov bol zvolený vzhľadom na jeho podobnosť so Sharpeho pomerom (Sharpe ratio) pri predpoklade nulového výnosu bezrizikového aktíva.

¹⁰ Ide o kombináciu Sharpeho pomeru a tzv. informačného pomeru (*information ratio*). Vo vzťahu pre informačný pomer je však deliteľom aktívne riziko (*tracking error*). Úprava o výnos referenčného indexu sa v uvedenom kritériu uskutočňuje kvôli lepšej vzájomnej porovnateľnosti výsledných hodnôt kritéria.

4. Kritérium relatívnej sily - priemer výsledných hodnôt štandardných alebo iných podobných kritérií pre viaceré rozhodné obdobia súčasne.

Toto kritérium sa v rôznych modifikáciách vyskytuje pomerne často v praktických aplikáciách. Ako príklad môžeme uviesť prácu Diona a Burgessa (2008), v ktorej autori využívajú upravené kritérium relatívnej sily pre zostrojenie úspešnej investičnej stratégie zameranej na investície do európskych sektorových akciových indexov. Kritérium je v nej konštruované ako aritmetický priemer normalizovaných výkonností aktíva počas rozhodného obdobia 3, 6, 9 a 12 mesiacov, t.j. výkonností očistených o medián výkonností všetkých aktív v danom období a predelených štandardnou odchýlkou výnosov daného aktíva v danom období. V predkladanej dizertačnej práci využívame kritérium relatívnej sily definované nasledovným spôsobom:

$$RS_{t,j} = \sum_j w_j SR_{t,j}, \quad \text{pre } j = \{13, 26, 39, 52\}, \quad (18)$$

kde

$RS_{t,j}$ je hodnota kritéria relatívnej sily v čase t pre rozhodné obdobie dĺžky j ,

$\mathbf{w}$ je vektor váh, ktorého prvky predstavujú váhy jednotlivých Sharpeho kritérií pre rozličné dĺžky rozhodných období j .

Dion a Burgess (2008) pri konštrukcii kritéria identifikovali problém s prisudzovaním implicitne vyšších váh relatívne novším pozorovaniam, pričom navrhli jeho riešenie prostredníctvom predĺženia investičného obdobia. V predkladanom výskume sme však zvolili iný prístup. Lepšie výsledky sa budeme snažiť dosiahnuť prostredníctvom alternatívneho nastavenia vektora váh $\{w\}_j$, v ktorom budú väčšie váhy kladené na dlhšie rozhodné obdobia pomocou exponenciálne váženého priemeru. Upravené kritérium môžeme potom zapísať nasledovným spôsobom:

$$ERS_{t,j} = \frac{SR_{t,52} + \lambda SR_{t,39} + \lambda^2 SR_{t,26} + \lambda^3 SR_{t,13} + \lambda^4 SR_{t,4}}{\sum_{k=0}^4 \lambda^k} \quad (19)$$

kde

λ je parameter útlmu exponenciálnych váh nastavený explicitne na hodnotu 0,8.

5. Regresné kritérium – smernica regresnej krivky preloženej cenami daného aktíva vypočítaná pomocou metódy najmenších štvorcov za obdobia 3, 6, 9 a 12 mesiacov.

Kritérium sa podľa dostupných informácií v akademickej literatúre o cenovej hybnosti neuvádza, hoci vo finančnej praxi sa regresné priamky a podobné kritériá vychádzajúce priamo z cien (t.j. nie z výnosov) využívajú pre identifikáciu trendov vývoja cien pri tzv. technickej analýze (pozri napr.: Murphy, 1999)¹¹. Za výberom kritéria stojí úvaha, že ak určité aktívum vykazuje silný rastový (klesajúci) trend, existuje možnosť, že tento trend sa v najbližšom období udrží. Sklon regresnej priamky cien konkrétneho aktíva určíme prostredníctvom známej metódy najmenších štvorcov nasledovným spôsobom:

$$REG = \frac{\sum_{k=1}^j (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^j (x_k - \bar{x})^2} \quad (20)$$

kde

REG_i je hodnota kritéria sklonu regresnej priamky i -teho aktíva,

x_k je poradové číslo k -teho pozorovania i -teho aktíva (nezávislá premenná),

$\bar{x}$ je priemerný počet pozorovaní v danej vzorke,

y_k je hodnota (cena) k -teho pozorovania (závislá premenná),

$\bar{y}$ je priemerná hodnota (cena) skúmaného aktíva v danej vzorke,

j je celkový počet pozorovaní vo vzorke.

Podobne ako pri všetkých predchádzajúcich kritériách zoradíme aktíva podľa kritéria sklonu regresnej priamky na základe preferovania maximálnej hodnoty kritéria. Vyššie hodnoty reprezentujú silnejší rastový trend, záporné hodnoty reprezentujú klesajúci trend. Na

¹¹ Tu je potrebné podotknúť, že pri cenovej hybnosti spomínanej v literatúre o technickej analýze sa nejedná o identický fenomén s cenovou hybnosťou v tejto práci.

základe zoradenia podľa kritéria priradíme jednotlivým aktívam známky od 1 do 10 (10 reprezentuje najvyššiu hodnotu kritéria, 1 najnižšiu hodnotu).

Všetky vyššie uvedené kritériá generujú vektor známk pre všetky skúmané aktíva, s pomocou ktorého môžeme následne zostaviť investičnú stratégiu využívajúcu cenovú hybnosť. Ako najjednoduchšia stratégia sa vo všeobecnosti v prípade desiatich skúmaných sektorových indexov javí stratégia pozostávajúca z dlhej pozície v dvoch sektorových indexoch s najvyššími známami a z krátkej pozície v dvoch sektoroch s najnižšími známami (stratégia 2W2L). Pre porovnanie však preskúmame aj stratégie s tromi dlhými a tromi krátkymi pozíciami (3W3L) a s piatimi dlhými a krátkymi pozíciami (5W5L). Na základe výskumu vlastností cenovej hybnosti zároveň medzi rozhodným a investičným obdobím vynechávame určitý počet pozorovaní (0, 4, alebo 8 týždňov). Váhy jednotlivých aktív ponechávame vo všetkých prípadoch rovnaké pre všetky uvažované aktíva. Podobné momentové stratégie sú použité napríklad v prácach Jegadeeshaa a Titman (1993), Moskowitza a Grinblatt (1999), alebo Georgea a Hwanga (2004).

Súhrnne môžeme postup pri testovaní výnosnosti momentových stratégií popísať pomocou nasledovných krokov:

1. Zvolíme si dĺžku rozhodného obdobia, t.j. kĺzavej vzorky (13, 26, 39 a 52 týždňov, prípadne tiež 65 a 104 týždňov), a pre všetky obdobia a všetky aktíva vypočítame hodnoty všetkých zoradovacích kritérií.
2. Aktíva zoradíme pri každom týždennom pozorovaní podľa všetkých kritérií a následne vygenerujeme vektory známk osobitne pre každé kritérium.
3. Pri každom týždennom pozorovaní vytvoríme investičné portfóliá s využitím vektorov známk tak, že tieto portfóliá budú obsahovať dlhé pozície v dvoch (troch, piatich) aktívach s najvyššími známami a krátke pozície v dvoch (troch, piatich) aktívach s najnižšími známami. Váhy aktív sú v absolútnej hodnote rovnaké pre všetky uvažované aktíva, pričom súčet všetkých váh je rovný nule a súčet kladných aj záporných váh osobitne je stanovený na 100%.

4. Pri takto zostavených portfóliach sledujeme ich zhodnotenie počas investičného obdobia nasledujúceho po konkrétnom rozhodnom období. Medzi rozhodným a investičným obdobím buď nevynechávame žiadne pozorovania, alebo vynechávame 4 pozorovania (resp. 8 pozorovaní). Investičné obdobia stanovujeme v dĺžke 4, 13, 26, 39 a 52 týždňov (prípadne tiež 65 a 104 týždňov).
5. Následne určíme priemerné výnosy všetkých stratégií pre všetky uvažované parametre a zoraďovacie kritériá a identifikujeme najúspešnejšie (najvýnosnejšie) stratégie.
6. Overíme štatistickú a ekonomickú významnosť výnosov najúspešnejších stratégií.
7. Preskúmame osobitne priemerné výnosy všetkých stratégií v dvoch nadväzujúcich časových vzorkách približne od roku 1989 do roku 2002 a od roku 2003 do roku 2009. Cieľom je otestovanie celkovej konzistentnosti fenoménu cenovej hybnosti ako aj jednotlivých stratégií.

Najúspešnejšie stratégie využijeme v ďalšej časti výskumu ako zdroj subjektívnych očakávaní. Vektory známk nám poslúžia pri odhadovaní očakávaných výnosov pomocou Black-Littermanovho modelu aj napriek tomu, že poskytujú kvalitatívne (t.j. nie kvantitatívne) očakávania. Pri optimalizácii pomocou Black-Littermanovho modelu sú subjektívne očakávania tým najcennejším elementom, pretože len od nich závisí, či výsledné optimalizované portfólio dokáže poraziť svojou výkonnosťou trhové portfólio (referenčný index, *benchmark*). Kvalita subjektívnych vstupov je preto kľúčová.

4 Black-Littermanov model výberu portfólia

Autormi pôvodného Black-Littermanovho modelu z roku 1990 boli Fisher Black a Robert Litterman z investičnej banky Goldman Sachs (Black, Litterman, 1990, 1991, 1992). Ich cieľom bolo umožniť využitie klasického Markowitzovho optimalizačného konceptu v praxi bez toho, aby bolo explicitne nutné vopred deterministicky určiť veľké množstvo vstupov optimalizačného procesu, keďže práve odhad veľkého množstva neznámych parametrov znižoval výslednú efektívnosť klasickej Markowitzovej optimalizácie prakticky na nulu. Black-Littermanov model vychádza z predpokladu platnosti trhovej rovnováhy, pričom umožňuje určenie výnosov implikovaných aktuálnymi trhovými váhami aktív. Tieto „trhom očakávané“ výnosy slúžia ako neutrálny referenčný bod, pričom ak investor nemá žiadny špecifický názor a využije ich ako vstupy pri optimalizácii, výsledný vektor váh bude identický s trhovým portfóliom. Model však okrem toho využíva aj bayesovskú štatistiku, ktorá umožňuje do implikovaných výnosov zakomponovať vlastný názor investora aj s jeho silou vyjadrenou pomocou pravdepodobnosti výskytu danej udalosti. Výsledkom sú konzistentné zmiešané odhady očakávaných výnosov a rizika, z ktorých sa následne určia optimálne váhy jednotlivých aktív. Ide o podobný proces ako pri Markowitzovom modeli, ale vstupy do optimalizácie zahŕňajú individuálne očakávania investorov a neistotu s nimi spojenú, pričom finálny výsledok optimalizácie je oveľa stabilnejší a intuitívnejší. Black-Littermanov model je teda modelom výberu portfólia, avšak jeho ťažisko spočíva v špecifickej úprave vždy problematických vstupov do optimalizačného procesu, pričom umožňuje kombinovať názory investorov s trhovými očakávaniami.

4.1 Markowitzov prístup a problémy praktickej aplikácie

Práca Harryho Markowitza z roku 1952 s názvom Portfolio Selection (Markowitz, 1952) sa stala základom toho, čo sa dnes nazýva klasickou modernou teóriou portfólia. Markowitz v nej formuluje a rieši úlohu výberu portfólia, pričom sa pohybuje v priestore očakávaného výnosu a rozptylu výnosov (rizika). Zároveň tiež zdôrazňuje výhody diverzifikácie prostredníctvom investovania do aktív s nízkymi vzájomnými kovarianciami výnosov. Autor

sa však nezaobrá podrobnejšie vstupmi do svojho modelu, čo sa s postupom času ukázalo byť kľúčovým problémom.

Pri tradičnej formulácii Markowitzovho problému výberu portfólia investor preferuje vyšší výnos pred nižším výnosom a nižšie riziko pred vyšším rizikom. Ak sa tieto dva princípy uplatňujú súčasne, vedie to k maximalizácii funkcie užitočnosti, čo je hlavným cieľom racionálneho investora. Podľa Markowitza môže investor postupovať napríklad tak, že si určí očakávaný výnos μ_p , ktorý chce dosiahnuť, pričom hľadá portfólio, ktoré mu umožní tento výnos dosiahnuť s čo najmenším rizikom σ^2 . Druhou možnosťou je maximalizácia očakávaného výnosu μ^* portfólia za predpokladu obmedzenia rizika na úrovni σ_p^2 . Oba spôsoby sa dajú matematicky zapísať vo forme úlohy hľadania viazaného extrému kvadratickej funkcie .

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (21)$$

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_p,$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1$$

$$\max_{\mathbf{w}} \mu^* = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (22)$$

$$\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = \sigma_p^2,$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1$$

kde $\mathbf{w}$ je vektor váh aktív v portfóliu, Σ je variančno-kovariančná matica výnosov aktív, $\mathbf{e}$ je jednotkový vektor a $\boldsymbol{\mu}$ je vektor očakávaných výnosov jednotlivých aktív.

Problém sa často formuluje aj nasledovným alternatívnym spôsobom, ktorý je analogický k vzťahom (14) a (15):

$$\max_{\mathbf{w}} U = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (23)$$

kde $\delta = \frac{\mu_P}{\sigma_P^2}$ je parameter averzie voči riziku vyjadrujúci požadovanú odmenu za znášanie rizika straty investovaného kapitálu (pozri kapitolu 4.6).

Ak úlohu riešime napríklad Lagrangeovou metódou, výsledkom je vektor optimálnych váh $\mathbf{w}^*$, ktorý reprezentuje optimálne portfólio investora.

$$\mathbf{w}^* = (\delta \Sigma)^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (24)$$

Markowitzove závery sú aj po 50-tich rokoch teoreticky stále veľmi silné, avšak vo finančnej praxi nenašla táto teória veľké uplatnenie najmä kvôli problémom, ktoré sprevádzajú celý proces tvorby optimálneho investičného portfólia od generovania vstupov až po výsledné váhy optimálnych portfólií. V literatúre sa môžeme stretnúť s popisom nasledovných problémov Markowitzovej teórie (viď: Michaud, 1989; He, Litterman, 1999; Mankert, 2006; Ravinger, Štulajter, 2008):

- Váhy optimálnych portfólií získané z optimalizačného procesu sú vinou zle zadaných vstupných údajov často extrémne a neintuitívne, pričom popierajú samotnú podstatu diverzifikácie. Pridaním dodatočných ohraničujúcich podmienok sa problém síce redukuje, ale nerieši.
- Riešenie optimalizačnej úlohy je nestabilné. Aj relatívne malé zmeny vo vstupných parametroch môžu spôsobiť relatívne veľké zmeny vo výslednej alokácii. Úloha je mimoriadne citlivá najmä na zmeny vektora očakávaných výnosov.
- Úloha si vyžaduje veľké množstvo vstupov ($\boldsymbol{\mu}$, Σ , δ), pričom všetky tieto vstupy musia byť explicitne uvedené. To je v rozpore s bežnou praxou investičných manažérov, ktorých cieľom je zvyčajne poraziť určitý referenčný index, napríklad akciový index. Ich odhady sa preto zväčša zameriavajú len na niekoľko vybraných aktív, pri ktorých sú schopní formulovať svoje očakávania. Model zároveň neumožňuje formulovať očakávania s inou ako 100%-nou istotou.

- Pri zadávaní vektora očakávaných výnosov sa často využívajú historické priemerné výnosy, čo však spôsobuje, že chyby odhadov sa znásobujú. Miesto optimalizácie preto pri Markowitzovom modeli dochádza k „maximalizácii chýb“ (Michaud, 1989).
- Markowitzov model neberie do úvahy trhovú kapitalizáciu (váhu) aktív, čo spôsobuje vychýlenie optimálnych váh v prospech aktív s vyšším výnosom a nižšou trhovou kapitalizáciou kvôli nižšej kovariancii s ostatnými aktívami.
- Model bol skonštruovaný za predpokladu normálneho rozdelenia výnosov, kvôli čomu berie do úvahy len prvé dva momenty rozdelenia pravdepodobnosti výnosov, t.j. strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku. Zároveň však ignoruje ďalšie momenty, hoci o výnosoch finančných aktív je v súčasnosti známe, že majú nesymetrické rozdelenie pravdepodobnosti.

4.2 Základné myšlienky Black-Littermanovho modelu

Alternatívou k Markowitzovej teórii je Black-Littermanov model výberu portfólia, ktorý síce spočíva na podobnej (aj keď oveľa širšej) teoretickej základni, avšak umožňuje vyhnúť sa väčšine problémov spomínaných v predchádzajúcej kapitole. Model sa okrem Markowitzových poznatkov opiera o Sharpeho CAPM model a reverznú optimalizáciu (Sharpe, 1964, 1974), ako aj o bayesovskú štatistiku, ktorá umožňuje kombinovať trhom implikované očakávané výnosy so subjektívnymi očakávaniami investičných manažérov. Od zverejnenia pôvodnej verzie modelu v roku 1990 došlo k publikácii mnohých pozmenených, vylepšených a zovšeobecnených variantov pôvodného modelu, avšak jeho pôvodná idea súvisiaca so zahrnutím neurčitosti a názorov (očakávaní) manažérov do investičného rozhodovania zostáva zachovaná. Zároveň sa otvorila nová oblasť výskumu v oblasti modelov výberu portfólia.

Black a Litterman vo svojej práci významne prispeli k riešeniu problému alokácie aktív tým, že po prvýkrát použili rovnovážne portfólio z CAPM modelu ako základnú referenciu pre určenie očakávaných výnosov, ako aj pre výpočet váh optimálneho portfólia.

Predchádzajúce práce obvykle využívali v tomto smere robustné odhady vychádzajúce z historických údajov, alebo sa zameriavali na portfóliá s globálnym minimálnym rozptylom výnosov (ďalej len GMV portfóliá), pri ktorých nie je potrebné poznať vektor očakávaných výnosov. Základná myšlienka Blacka a Littermana spočívala v tom, že rovnovážne portfólio pomôže generovať stabilné prvotné odhady očakávaných výnosov. Ak navyše investori nemajú žiadne vlastné očakávania ohľadne vývoja trhových aktív, mali by na základe tohto modelu investovať do rovnovážneho trhového portfólia, čo je súčasne intuitívne a zhodné s modernou teóriou portfólia, ako aj s praxou v oblasti správy investičných aktív.

Druhým nemenej dôležitým príspevkom Blacka a Littermana sa stalo vytvorenie všeobecného rámca pre formulovanie externých očakávaní na vývoj jednotlivých aktív a zahrnutie týchto očakávaní do procesu odhadu očakávaných výnosov a rizika portfólia. Očakávania investorov sa pritom môžu týkať všetkých aktív v portfóliu, iba časti aktív, alebo kombinácií rôznych aktív. Model zároveň umožňuje formulovať očakávania s rôznou pravdepodobnosťou. Hoci postupy využité v modeli boli v čase jeho vzniku známe, ich aplikácia na určenie očakávaných výnosov zmiešaním trhom implikovaných výnosov a očakávaní investorov sa stala prevratnou novinkou v oblasti riešenia problému výberu portfólia. Vďaka svojej intuitívnosti sa o model začala výrazne zaujímať nielen akademická obec, ale aj popredné finančné spoločnosti po celom svete.

4.2.1 Základné predpoklady modelu

Black-Littermanov model využíva na implementovanie očakávaní investorov do výslednej alokácie poznatky bayesovskej štatistiky. Tá vychádza zo známej Bayesovej vety

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)}{P(B)} P(A) \quad (25)$$

kde $P(A|B)$ je združené rozdelenie pravdepodobnosti udalosti A za predpokladu výskytu udalosti B (tiež označovaná ako aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti), $P(B|A)$ je združené rozdelenie pravdepodobnosti výskytu udalosti B za predpokladu výskytu udalosti A

(výberové rozdelenie pravdepodobnosti), $P(A)$ je pravdepodobnosť výskytu udalosti A (apriórne rozdelenie pravdepodobnosti) a $P(B)$ je pravdepodobnosť výskytu udalosti B (normalizačná konštanta).

Pri využití Bayesovej vety v podmienkach Black-Littermanovho modelu vzniká otázka, či považovať subjektívne očakávania investorov za apriórne rozdelenie pravdepodobnosti a trhom implikované výnosy za výberové rozdelenie pravdepodobnosti alebo naopak. Pri odvodzovaní Black-Littermanovho modelu pomocou Bayesovej vety sa obvykle používa práve prvá spomenutá alternatíva, hoci v pôvodnom článku Black a Litterman (1992) definujú apriórne rozdelenie ako rozdelenie výnosov vyplývajúcich z investorských očakávaní. Pre účely tejto práce budeme používať práve definíciu Blacka a Littermana. Výnosy oboch rozdelení majú podľa základného predpokladu normálne rozdelenie, a teda aj aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti je normálne (pre dôkaz pozri: Walters, 2009). Majme teda všeobecný model očakávaných výnosov konkrétnych aktív definovaný pomocou normálneho rozdelenia:

$$E(R) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (26)$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je stredná hodnota a $\boldsymbol{\Sigma}$ je rozptyl výnosov.

V klasickej verzii Black-Littermanovho modelu je $\boldsymbol{\mu}$ ďalej definované ako náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti.

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_{\pi}) \quad (27)$$

z čoho vyplýva aj vzťah

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\pi}) \quad (28)$$

Keďže ďalej predpokladáme, že $\boldsymbol{\Sigma}$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{\pi}$ sú navzájom nezávislé, môžeme výsledný rozptyl $\boldsymbol{\Sigma}_R$ odhadu strednej hodnoty $\boldsymbol{\pi}$ zapísať ako

$$\Sigma_R = \Sigma + \Sigma_\pi \quad (29)$$

na základe čoho môžeme všeobecné rozdelenie pravdepodobnosti výnosov zapísať ako

$$E(R) \sim N(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}_R) \quad (30)$$

Súčasťou modelu je predpoklad, že rozptyl apriórneho aj aposteriórneho rozdelenia okolo skutočnej strednej hodnoty je známy, zatiaľ čo samotné skutočné priemerné výnosy nie sú známe. Detailnejšie je model špecifikovaný napríklad v prácach Waltersa (2009), Meucciho (2005, 2008), alebo Mankert (2006).

4.2.2 Reverzná optimalizácia

Black a Litterman svoje úvahy založili na predpoklade platnej trhovej rovnováhy a hypotézy efektívnych trhov, čo umožnilo využiť CAPM model na získanie výnosov odvodených z trhových váh aktív a im prislúchajúcich implikovaných výnosov pomocou reverznej optimalizácie. Očakávaný výnos i -teho aktíva nad bezrizikovú sadzbu je v CAPM modeli definovaný nasledovným spôsobom:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i (E(r_m) - r_f), \quad (31)$$

$$\text{pričom } \beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_m)}{\sigma_m^2}$$

kde $E(r_i)$ je očakávaný výnos i -teho aktíva,

r_f je bezrizikový výnos,

$E(r_m)$ je očakávaný výnos trhového portfólia,

β_i je senzitivita i -teho aktíva na vývoj trhového portfólia.

Označme $\boldsymbol{\pi}$ stĺpcový vektor očakávaných výnosov nad bezrizikovú sadzbu, pričom jeho i -ty prvok môžeme zapísať nasledovným spôsobom:

$$\pi_i = E(r_i) - r_f. \quad (32)$$

Ak chceme získať vektor výnosov implikovaný trhovými váhami $\mathbf{w}_M$, musíme riešiť známu kvadratickú optimalizačnú úlohu, pri ktorej maximalizujeme konkávnu funkciu užitočnosti:

$$\min_{\boldsymbol{\pi}} U = \mathbf{w}_M^T \boldsymbol{\pi} - \frac{\delta}{2} \mathbf{w}_M^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_M \quad (33)$$

Parameter δ popisuje rizikovú averziu trhového portfólia. Riešením optimalizačnej úlohy je podľa vzťahu (24) $\mathbf{w}_M = (\delta \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi}$, avšak keďže vektor trhových váh je v tomto prípade známy a hľadáme vektor $\boldsymbol{\pi}$ výnosov nad bezrizikovú sadzbu, preformulujeme výslednú rovnicu do nasledujúceho tvaru:

$$\boldsymbol{\pi} = \delta \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_M \quad (34)$$

Vektor neznámych skutočných budúcich výnosov $\boldsymbol{\mu}$ môžeme teda vyjadriť ako

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\pi}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\pi} \sim N(0, \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Sigma}), \quad (35)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je voliteľný parameter určujúci spoľahlivosť odhadu, resp. výberového rozdelenia pravdepodobnosti. Autori tu prijímajú zjednodušujúci predpoklad, že disperzia chyby odhadu je proporcionálna k skutočnej disperzii pôvodného rozdelenia výnosov prostredníctvom parametra $\boldsymbol{\tau}$. O vhodnom nastavení parametra $\boldsymbol{\tau}$ sa vedú v literatúre pomerne rozsiahle diskusie (viď: Idzorek, 2004; Walters, 2009)¹². Vzťah (27) teda môžeme prepísať nasledovným spôsobom

¹² Pozri tiež kapitolu 4.6.

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Sigma}) \quad (36)$$

Vzťah (34) sa dá zapísať aj s pomocou symboliky CAPM modelu. Ak uvažujeme, že trhový výnos sa rovná $r_m = \sum_{i=1}^N r_i w_{Mi}$, potom prebytkový výnos aktíva i možno zapísať ako

$$\pi_i = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m^2} \sum_{j=1}^N \text{Cov}(r_i, r_j) w_{Mj} \quad (37)$$

Toto je základná myšlienka Sharpeovej inverznej optimalizácie, pri ktorej poznáme trhové váhy aktív a z nich na základe variančno-kovariančnej matice odvodíme trhom očakávané (implikované) výnosy. Veľkou výhodou je fakt, že nepotrebujeme pritom odhadovať hodnoty parametra β . Potrebujeme však určiť hodnotu koeficientu δ , ktorý vyjadruje averziu voči riziku (viď: Walters, 2009)¹³.

Motiváciou pre využitie konceptu trhovej rovnováhy boli podľa Littermana (2003) jeho výhodné vlastnosti. Hoci rovnováha v skutočnom svete nemusí nastať, slúži ako referenčný bod, ku ktorému sa trh dlhodobo približuje pôsobením trhových síl. Autor argumentuje, že aj v prípade veľkých trhových diskrepancií sa skôr či neskôr chybné ocenenie trhu napravi. CAPM model v tomto prípade slúži ako aproximácia rovnovážneho modelu.

4.2.3 Očakávania investorov

Na rozdiel od Markowitzovho modelu môžu byť očakávania v Black-Littermanovom modeli formulované ako absolútne, t.j. napríklad „aktívum A dosiahne výnos X%“, alebo aj ako relatívne, napríklad „aktívum C dosiahne o Y% vyšší výnos ako aktívum B“. Model však vyžaduje, aby jednotlivé očakávania boli vzájomne nekorelované a plne zainvestované (suma váh jednotlivých aktív sa musí rovnať 1 pri absolútnom očakávaní a 0 pri relatívnom

¹³ Pre podrobnejšiu diskusiu o nastavení parametra pozri tiež kapitolu 4.6.

očkávanií). Znamená to, že K očkávanií o N aktívach (K môže byť menšie ako N) môžeme zapísať do matic nasledovným spôsobom:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\varepsilon}_q, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_q \sim N(0, \boldsymbol{\Omega}) \quad (38)$$

kde $\mathbf{P}$ je matica rozmeru $K \times N$ vyjadrujúca váhy jednotlivých aktív v jednotlivých očkávaniach. Pri relatívnom očkávaní musí byť súčet hodnôt v riadku 0, pri absolútnom očkávaní 1. Vektor $\mathbf{q}$ je K -rozmerný vektor výnosov pre každé očkávanie a $\boldsymbol{\varepsilon}_q$ je neznáma nezávislá náhodná zložka so strednou hodnotou 0 a s rozptylom vyjadreným variančno-kovariančnou maticou $\boldsymbol{\Omega}$. Matica $\boldsymbol{\Omega}$ vyjadruje spoľahlivosť odhadu a v klasickom Black-Littermanovom modeli je definovaná tak, že na jej diagonále sú rozptyly subjektívnych očkávaných výnosov ω_q a mimo diagonály sú nuly, pretože model predpokladá, že očkávania nie sú navzájom korelované.

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_K \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Určenie spoľahlivosti jednotlivých očkávanií nie je triviálny proces. He a Litterman (1999) navrhujú maticu $\boldsymbol{\Omega}$ konštruovať z diagonálnych prvkov matice $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Sigma}$, čo môžeme zapísať nasledovným spôsobom:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}\{\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{P}^T\} \quad (40)$$

Meucci (2005, 2008a) definuje maticu spoľahlivosti očkávanií $\boldsymbol{\Omega}$ pomocou koeficientu spoľahlivosti c , ktorý by mal byť definovaný v intervale (0,1).

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{1}{c} - 1\right) \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T, \quad (41)$$

alebo alternatívne tiež

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c} \mathbf{P} \mathbf{\Sigma} \mathbf{P}^T \quad (42)$$

Ako intuitívne vhodná hodnota parametra c sa pritom podľa Waltersa (2009) javí $c = \tau^{-1}$. Alternatívne spôsoby konštrukcie matice $\mathbf{\Omega}$ okrem vyššie uvedených postupov navrhujú Idzorek (2004) a Walters (2009).

Aj keď vyššie uvedená špecifikácia umožňuje formulovať rozsiahlu škálu absolútnych a relatívnych očakávaní, v praxi sa často stretávame aj s kvalitatívnymi očakávaniami, ktoré nie sú definované číselne, ale vyjadrujú len určité relatívne preferencie investora. Príkladom môže byť manažér globálneho akciového fondu, ktorý svoje očakávania ohľadne vývoja jednotlivých regionálnych trhov formuluje pomocou celočíselných známk v intervale od -2 do $+2$, pričom tieto známky vyjadrujú očakávané negatívne alebo pozitívne relatívne zhodnotenie oproti zhodnoteniu celého trhu (referenčného indexu). Klasická špecifikácia Black-Littermanovho modelu takéto očakávania neberie do úvahy, avšak Meucci (2008) uvádza spôsob, vďaka ktorému je možné tieto očakávania formulovať. Na základe predpokladov modelu vieme, že očakávania investorov majú normálne rozdelenie, pričom strednú hodnotu tohto rozdelenia označíme $\mathbf{q}$ v súlade so vzťahom (38).

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N(\mathbf{q}, \mathbf{\Omega}) \quad (43)$$

Ak má investor len kvalitatívne očakávania, môžeme ich sformulovať s využitím očakávaného výnosu a volatility odvodenéj z trhového portfólia, resp. vektora $\boldsymbol{\pi}$ a matice $\mathbf{P}\mathbf{\Sigma}\mathbf{P}^T$. Jednotlivé očakávania q_k teda môžeme zapísať nasledovným spôsobom:

$$q_k = (\mathbf{P}\boldsymbol{\pi})_k + \eta_k \sqrt{(\mathbf{P}\mathbf{\Sigma}\mathbf{P}^T)_{kk}}, \quad \text{pre} \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (44)$$

kde K je počet aktív, voči ktorým sa formulujú subjektívne očakávania, a vektor $\boldsymbol{\eta}$ je K -rozmerný vektor, ktorého prvky nadobúdajú celočíselné hodnoty z množiny $\{-2, -1, 0, +1, +2\}$. Vektor $\boldsymbol{\eta}$ reprezentuje kvalitatívne subjektívne očakávania definované investorom od „veľmi negatívneho“ (-2) po „veľmi pozitívne“ ($+2$) očakávanie. Tento

zaujímavý postup bude ďalej podrobený podrobnejšiemu skúmaniu v kapitole 4.6, nakoľko jeho využitie v praxi je spojené s určitými problémami.

4.3 Základné vzťahy modelu

Black-Littermanov model pri konštrukcii vektora zmiešaných očakávaných výnosov využíva vážený priemer vektora $\boldsymbol{\pi}$ rovnovážnych dodatočných výnosov nad bezrizikovú sadzbu a vektora výnosov subjektívnych očakávaní $\mathbf{q}$, pričom váhy sú funkciou skalárneho parametra τ a matice spoľahlivosti očakávaní $\boldsymbol{\Omega}$. Čím sa očakávaniam priraduje väčšia spoľahlivosť, tým viac sa bude výsledný zmiešaný vektor očakávaných výnosov podobáť na vektor výnosov očakávaní a naopak.

Pri hľadaní výsledného zmiešaného estimátora očakávaných výnosov sa snažíme minimalizovať jeho rozptyl okolo vektora rovnovážnych výnosov nad bezrizikovú sadzbu $\boldsymbol{\pi}$ (Koch, 2003; Walters, 2009). Na základe zovšeobecnenej metódy najmenších štvorcov (GLS), rovnako ako aj s pomocou Bayesovej vety, je možné ukázať, že výsledný upravený vektor očakávaných výnosov $\boldsymbol{\mu}_{BL}$ má nasledovný tvar:

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{q} \right] \quad (45)$$

Tento vzťah sa niekedy nazýva hlavným vzorcom Black-Littermanovho modelu. Ak v ňom dosadíme za $\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$ (nemáme žiadne očakávania), výsledkom bude $\boldsymbol{\mu}_{BL} = \boldsymbol{\pi}$. Ak predpokladáme, že $(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \rightarrow \infty$ (očakávané výnosy nad bezrizikovú sadzbu sú bez chýb odhadu), vzťah sa zredukuje na $\boldsymbol{\mu}_{BL} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{q} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}$. Označme takýto odhad vektora výnosov očakávaní $\boldsymbol{\mu}_q$. V danom limitnom prípade potom môžeme vzťah (29) prepísať nasledovne:

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\mu}_q \right] \quad (46)$$

Z daného vzťahu vidíme, že výsledný odhadnutý vektor výnosov je skutočne váženým priemerom vektora očakávaných dodatočných výnosov $\boldsymbol{\pi}$ a vektora $\boldsymbol{\mu}_q$. Váhy odhadov sú vyjadrením ich spoľahlivosti, pričom majú nasledovný tvar:

$$w_{\pi} = [(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}]^{-1} (\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad (47)$$

$$w_q = [(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \quad (48)$$

Analogicky sa dá pomocou Bayesovej vety alebo metódy GLS ukázať, že odhad rozptylu okolo strednej hodnoty $\boldsymbol{\mu}$ má tvar

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} = [(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}]^{-1}. \quad (49)$$

Na základe predpokladu nezávislosti očakávaní voči implikovaným výnosom a na základe vzťahu (29) môžeme celkový rozptyl odhadovaných zmiešaných výnosov Black-Littermanovho modelu (rozptyl aposteriórneho rozdelenia výnosov) zapísať ako

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} \quad (50)$$

Ak investor nemá žiadne očakávania ($\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$), vzťah (50) sa zredukuje na tvar

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} = (1 + \tau) \boldsymbol{\Sigma} \quad (51)$$

Z uvedeného vzťahu je vidieť, že výsledný rozptyl v Black-Littermanovom modeli je vždy väčší alebo rovný ako skutočný rozptyl trhových výnosov. To na prvý pohľad nie je intuitívny záver, ale Meucci (2008) poskytuje argumenty, ktoré tento výsledok podporujú. Niektorí autori však aposteriórny rozptyl pri následnej optimalizácii neberú do úvahy, pričom využívajú len maticu $\boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu}$.

Dá sa ukázať, že vzťahy (45) a (50) možno alternatívne zapísať aj nasledovným spôsobom (Mankert, 2006; Walters, 2009):

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} = \boldsymbol{\pi} + \tau \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}^T [\boldsymbol{\Omega} + \tau \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}^T]^{-1} [\mathbf{q} - \mathbf{P} \boldsymbol{\pi}], \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} = (1 + \tau) \boldsymbol{\Sigma} - \tau^2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}^T [\tau \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{P}^T + \boldsymbol{\Omega}]^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma} \quad (53)$$

Výsledkom Black-Littermanovho modelu je teda vektor zmiešaných očakávaných výnosov $\boldsymbol{\mu}_{BL}$ a zmiešaná variančno-kovariančná matica $\boldsymbol{\Sigma}_{BL}$ zahŕňajúca očakávania investorov. Tieto odhady sa ďalej môžu využiť ako vstupy pre klasickú optimalizačnú úlohu v zmysle Markowitzovho modelu výberu portfólia podľa vzťahu (21) alebo (22). Výsledkom je optimálne portfólio, ktoré v sebe zahŕňa tak trhom implikované očakávania ako aj subjektívne očakávania investorov. Optimalizácia samotná však nie je pevnou súčasťou modelu, preto investor nemusí nutne použiť klasický prístup Markowitza, ale môže uprednostniť iné metódy optimalizácie portfólia. Pri investíciách, ktorých výnosy sa sledujú voči referenčnému indexu (*benchmark*), sa priamo ponúka využitie optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko (*tracking error*). Táto optimalizácia je podrobnejšie popísaná v kapitole 6.1.

4.4 Alternatívna špecifikácia Black-Littermanovho modelu

Vzhľadom na pribúdajúce množstvo prác vychádzajúcich z myšlienok Blacka a Littermana vzniklo s postupom času viacero alternatívnych špecifikácií modelu. Niektorí autori sa snažili zovšeobecniť predpoklady normálneho rozdelenia výnosov a očakávaní, iní sa zamerali na aktíva a trhy s nelineárnymi výnosmi. Významná pozornosť bola venovaná aj alternatívnym formuláciám investorských očakávaní. Vzhľadom na fakt, že cieľom tejto práce nie je podrobné skúmanie všetkých alternatívnych špecifikácií Black-Littermanovho modelu, uvádzame ďalej len alternatívnu špecifikáciu uvedenú v práci Meucciho (2008), ktorá sa stala základom pre výpočty v praktickej časti tejto práce.

Attilio Meucci vychádza rovnako ako Black a Litterman z predpokladu, že výnosy aktív alebo tried aktív (označené ako náhodná premenná $\mathbf{X}$) majú normálne rozdelenie.

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (54)$$

Ďalej však nestanovuje vektor $\boldsymbol{\mu}$ ako náhodnú premennú, ale kladie ju rovnú vektoru $\boldsymbol{\pi}$ z reverznej optimalizácie, čo znamená, že model výnosov trhu bez očakávaní investorov abstrahuje od rizika chyby odhadu a má normálne rozdelenie

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (55)$$

Investor vyjadruje svoje očakávania $\mathbf{Q}$ prostredníctvom lineárnych funkcií trhových výnosov $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P}\mathbf{X}$, pričom matica $\mathbf{P}$ tu má rovnakú funkciu ako pri klasickej špecifikácii. Realizácia náhodnej premennej $\mathbf{Q}$ môže byť väčšia alebo menšia ako realizácia $\mathbf{P}\mathbf{X}$ vychádzajúca z modelu (55). Meucci preto náhodnú premennú $\mathbf{Q}$ modeluje pomocou podmieneného normálneho rozdelenia výnosov

$$\mathbf{Q}|\mathbf{x} \sim N(\mathbf{P}\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (56)$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ reprezentuje neurčitost' spojenú s očakávaniami investorov rovnako ako v štandardnom Black-Littermanovom modeli. Maticu $\boldsymbol{\Omega}$ pritom môžeme zadefinovať spôsobom uvedeným vo vzťahu (41) alebo (42). Meucci na základe takto zadaného modelu trhových výnosov a investorských očakávaní odvodzuje s využitím Bayesovskej štatistiky alternatívny spôsob odhadov zmiešaných očakávaných výnosov $\boldsymbol{\mu}_{BLM}$ a rozptylu $\boldsymbol{\Sigma}_{BLM}$ aposteriórneho rozdelenia.

$$\boldsymbol{\mu}_{BLM} = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T]^{-1} [\mathbf{q} - \mathbf{P}\boldsymbol{\pi}], \quad (57)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BLM} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T [\mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T + \boldsymbol{\Omega}]^{-1} \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}, \quad (58)$$

kde $\mathbf{q}$ je $K \times 1$ – rozmerný vektor výnosov jednotlivých investorských očakávaní. Výsledné vzťahy sú veľmi podobné vzťahom (52) a (53), avšak nevyskytuje sa v nich vôbec parameter $\boldsymbol{\tau}$, ktorý vyjadruje spoľahlivosť odhadu implikovaných výnosov. Namiesto toho je v špecifikácii matice $\boldsymbol{\Omega}$ použitý parameter c , ktorý sa však vzťahuje iba k spoľahlivosti

očkávani investorov. Takto definovaný model má ešte aj tú výhodu, že nevyžaduje, aby sa aposteriórny rozptyl pripočítaval k pôvodnému rozptylu ako vo vzťahu (29). V extrémnych prípadoch nulovej a 100%-nej spoľahlivosti očkávani sa pritom model správa intuitívne, t.j. aposteriórne rozdelenie je identické s pôvodným rozdelením, resp. v prípade 100%-nej spoľahlivosti je aposteriórne rozdelenie podmienené exaktnými subjektívnymi očkávaniami¹⁴. V ďalšom texte budeme uvedenú Meucciho alternatívnu špecifikáciu Black-Littermanovho modelu označovať aj ako BLM model.

4.5 Dôsledky a kritika modelu

Black-Littermanov model má oproti klasickej teórii portfólia Harryho Markowitza viacero veľmi atraktívnych vlastností. Využitím reverznej optimalizácie investorovi odpadá povinnosť jednotlivo zadefinovať očkávania pre všetky aktíva, avšak investor môže svoje očkávania do modelu zahrnúť, pričom môže špecifikovať aj ich spoľahlivosť. Výsledkom manipulácií so vstupnými údajmi je upravený zmiešaný vektor očkávaných výnosov, ktorý je oveľa lepším vstupom pre klasickú optimalizačnú úlohu v priestore očkávaných výnos-rozptyl ako jednotlivo zadávané (odhadované) hodnoty, pretože vykazuje oveľa vyššiu stabilitu riešenia a generuje oveľa intuitívnejšie portfóliá bez extrémnych alokácií. Trhové portfólio slúži ako neutrálny referenčný rámec, ktorý pomáha prekonávať problém veľkého množstva odhadov a vzájomného umocňovania chýb odhadov, pričom v prípade absencie subjektívnych očkávani sa stáva zároveň optimálnym portfóliom.

Model je v literatúre kritizovaný najmä pre svoje relatívne silné predpoklady a komplikované zadávanie niektorých vstupov. Viacerí autori napádajú najmä predpoklad o normálnom rozdelení výnosov aktív. Pri normálnom rozdelení totiž dochádza k podceňovaniu rizika vyplývajúceho z extrémnych udalostí. V dostupnej literatúre sa v tomto smere uvádzajú riešenia založené napríklad na modeloch so zmenami režimov (*regime-switching models*), ktoré umožňujú lepšie popísať rozdelenie pravdepodobnosti výnosov, a predovšetkým extrémne pozorovania (*fat tails*). Problematicky je vnímaný aj

¹⁴ V literatúre sa prípad 100%-nej spoľahlivosti očkávani niekedy označuje ako analýza scenárov (*scenario analysis*). Analýza scenárov sa často využíva pri procese riadení rizika.

predpoklad nezávislosti (ortogonalita) jednotlivých subjektívnych očakávaní, na základe ktorého je možné uvažovať o matici Ω ako o diagonálnej matici. Najmä v prípade vysoko korelovaných výnosov je tento predpoklad ťažko prijateľný. Kritika modelu sa ďalej zameriava aj na nie úplne dôsledne vysvetlený parameter τ (spoľahlivosť odhadu) a problémy s určením spoľahlivosti subjektívnych očakávaní. Samostatným problémom je navyše odhad kovariančnej matice vstupujúci do modelu.

Využitie modelu v praxi bohužiaľ okrem vyššie spomínaných problémov komplikuje aj v literatúre zatiaľ nedoriešená otázka zahrnutia menového hedžingu, resp. aktív v rôznych menách. Zároveň by sa dalo poukázať na fakt, že o skutočnej sile modelu pri praktickom využití je relatívne málo akademických dôkazov, a to aj napriek tomu, že model v rôznych úpravách preukázateľne využívajú analytické tímy uznávaných svetových bankových inštitúcií. Cieľom ďalšieho autorovho výskumu v tejto oblasti bude preto najmä praktická aplikácia modelu s využitím moderných poznatkov z oblasti odhadov kovariančnej matice a vektora očakávaných výnosov.

4.6 Vstupy do Black-Littermanovho modelu

Black-Littermanov model obsahuje veľmi silný teoretický rámec poskytujúci stabilné a konzistentné odhady očakávaných výnosov a rizika. Odhady získané z modelu umožňujú kvalitnejšiu a zmysluplnejšiu optimalizáciu portfólia v praxi. Na druhej strane model vyžaduje niekoľko typov vstupných údajov, ktoré musia spĺňať určité predpoklady, aby boli aj výsledné odhady konzistentné a ekonomicky interpretovateľné. Môžeme povedať, že model je len taký kvalitný, aké kvalitné sú jeho vstupy.

Pravdepodobne najdôležitejším vstupom je variančno-kovariančná matica reprezentujúca odhad skutočného rozptylu výnosov. Rôznym metódam odhadu variančno-kovariančnej matice je venovaná samostatná kapitola 5, nakoľko ide o pomerne rozsiahlu oblasť teoretického výskumu. Kapitola 5.5 popisuje metodológiu porovnávania kvality odhadov variančno-kovariančnej matice z reálnych finančných údajov pri využití viacerých alternatívnych metód. Získané výsledky uvedené v kapitole 7.1 potvrdzujú význam aplikácie nových moderných metód odhadu.

Rovnako veľký význam ako odhad variančno-kovariančnej matice majú aj váhy aktív v rovnovážnom trhovom portfóliu. Tieto váhy majú zásadný vplyv na odhad implikovaných výnosov, t.j. rovnovážnych očakávaných výnosov pomocou metódy reverznej optimalizácie (viď kapitola 4.2.2). Hoci teoreticky je rovnovážne trhové portfólio jediné portfólio obsahujúce proporcionálne všetky aktíva, v praxi nie je toto portfólio pozorovateľné. Obvykle sa preto nahrádza určitým súhrnným finančným indexom alebo kombináciou indexov popisujúcich skúmané aktíva. Dôvodom je dobrá dostupnosť historických údajov o hodnotách a zložení finančných indexov. V takto skonštruovanom približnom trhovom portfóliu majú zvyčajne jednotlivé aktíva váhy zodpovedajúce ich trhovej kapitalizácii (celkovej trhovej hodnote). Približné trhové portfólio pritom často zahŕňa len aktíva v sfére záujmu investora, nie všetky existujúce aktíva. Pre investora sa tak stáva referenčným indexom, voči ktorému sa môžu porovnávať skutočne dosiahnuté výnosy. Litterman (2003) uvádza príklad uvažujúci s akciovými indexmi vybraných vyspelých krajín, Bevan a Winkelmann (1998) demonštrujú využitie modelu na globálnom dlhopisovom portfóliu. Ak sa teda investor zaujíma napríklad o americké akcie, ako referenčný index (resp. trhové portfólio) si môže zvoliť index S&P 500, prípadne index MSCI North America. V predkladanej práci sa využíva prvý zo spomínaných indexov.

Dodatočné výnosy nad bezrizikovú sadzbu implikované trhom môžeme z definovaných váh trhového (referenčného) portfólia odvodiť na základe vzťahu (34) v kapitole 4.2.2. Tento spôsob odhadu očakávaných výnosov však nie je vhodný pre všetky typy portfólií a aktív. Najlepšie sa uplatňuje pri podielových fondoch naviazaných na finančné indexy. Autori ako napríklad Meucci (2006), Ghezzi et al. (2006), DaSilva et al. (2009) alebo Martellini a Ziemann (2007) uvádzajú rozličné alternatívne definície Black-Littermanovho modelu, ktoré sa reverznej optimalizácii vyhýbajú.

Osobitnú pozornosť si pri reverznej optimalizácii zasluhuje parameter δ , ktorý vyjadruje celkovú priemernú rizikovú averziu všetkých investorov. Niektorí autori, ako napríklad Black a Litterman (1992) alebo Bevan a Winkelmann (1998), ho odvodzujú z priemerného požadovaného Sharpeho pomeru pre všetky trhové aktíva, resp. aktíva zahrnuté v referenčnom indexe. Podobne aj Fabozzi (2006) v praktickom príklade nastavuje parameter na základe volatility trhového indexu. He a Litterman (1999) uvádzajú pre rôznorodé portfólio viacerých globálnych aktív odporúčanú hodnotu 2,5. Ghezzi et al. (2006) uvádza

príklad s nastavením $\delta=5,5$ pre aktíva z rozvíjajúcich sa trhov (*emerging markets*), Meucci (2008) však poznamenáva, že sa nejedná o citlivý parameter. Koeficient rizikovej averzie môžeme odvodiť aj ako podiel požadovanej trhovej rizikovej prémie a očakávaného rozptylu výnosov trhového portfólia, resp. referenčného indexu (pozri napríklad: Idzorek, 2004; Walters, 2009). V praktickej časti práce budeme používať hodnotu parametra $\delta=4$, čo približne zodpovedá očakávanému Sharpeho pomeru 0,5 použitému napríklad v práci Blacka a Littermana (1992).

Ďalším z dôležitých parametrov Black-Littermanovho modelu je spoľahlivosť odhadu implikovaných výnosov τ ¹⁵. Black a Litterman prijímajú predpoklad, že skutočná disperzia rozdelenia výnosov aktív je neznáma a že chyba odhadu disperzie je proporcionálna k skutočnej disperzii výnosov, pričom parameter τ vyjadruje kvalitu, resp. spoľahlivosť odhadu. Čím je hodnota τ bližšia nule, tým sa predpokladá spoľahlivejší odhad trhom implikovaných výnosov. Inak môžeme τ interpretovať aj ako váhu subjektívnych očakávaní. Pri predpoklade $\tau = 0$ odhadovaná variančno-kovariančná matica netrpí chybou odhadu, avšak v praxi sa obvykle využívajú hodnoty z intervalu $(0, 1)$.

Autori ako napríklad Black a Litterman (1992), He a Litterman (1999), Idzorek (2004) a Fabozzi et al. (2006) sa prikláňajú k názoru, že hodnota τ by mala byť blízka nule, približne v intervale od 0,02 do 0,05. Meucci (2008a), Walters (2009) a ďalší autori navrhujú pri štandardnej formulácii Black-Littermanovho modelu nastaviť parameter spoľahlivosti odhadu na $\tau \approx 1/T$, kde T je počet pozorovaní v skúmanej vzorke. Druhá skupina autorov, ako napríklad Satchell a Scowcroft (2000), Meucci (2005) a Mankert (2006), priamo alebo nepriamo navrhuje hodnotu $\tau = 1$. Walters (2009) argumentuje, že tento pomerne zásadný nesúlad je spôsobený okrem iného aj rozdielnymi špecifikáciami používaných modelov. Investori používajúci klasickú špecifikáciu uvedenú v kapitolách 4.2 a 4.3 by mali podľa Waltersa preferovať hodnotu τ blízku nule. Pri použití alternatívnej špecifikácie z kapitoly 4.4 (BLM model) sa môžeme určeníu τ vyhnúť tým, že nastavíme len spoľahlivosť subjektívnych očakávaní. Výhodou je fakt, že τ následne nevystupuje pri formulácii rozptylu a posteriorného rozdelenia.

¹⁵ Pozri vzťah (35) v kapitole 4.2.2.

Nespornou prednosťou Black-Littermanovho modelu je skutočnosť, že tento model umožňuje do investičného rozhodovania zahrnúť aj subjektívne očakávania investorov s ohľadom na neistotu spojenú s týmito očakávaniami. Subjektívne očakávania sú mimoriadne dôležité, nakoľko iba ich prítomnosť môže investorovi pomôcť potenciálne dosiahnuť dodatočný výnos oproti referenčnému indexu, čo je obvykle hlavným cieľom investičnej stratégie pri aktívnej správe finančných aktív.

Subjektívne očakávania môžu byť sformulované pomocou matice $\mathbf{P}$ vyjadrujúcej váhy jednotlivých aktív v daných očakávaniach (viď kapitola 4.2.3). Táto matica umožňuje formulovať konkrétne absolútne a relatívne očakávania ohľadne vybraných aktív, pričom predpokladom jej využitia je znalosť predpokladaných výnosov jednotlivých očakávaní. Investor však nemusí nutne vyjadrovať svoje očakávania kvantitatívne. Alternatívny spôsob formulácie kvalitatívnych subjektívnych názorov bez nutnosti definovať ich očakávané výnosy uvádzajú napríklad Meucci (2005, 2008a) alebo Almgren a Chriss (2006). Investor si pri tomto postupe zoradí aktíva podľa vybraných kritérií a toto zoradenie vyjadrí ako subjektívne očakávanie. Okrem toho Meucci (2008, 2008a) ukazuje, že je možné preformulovať Black-Littermanov model tak, že miesto očakávaní pre konkrétne aktíva investor môže vyjadriť svoje subjektívne očakávania ohľadne rizikových faktorov vysvetľujúcich vo všeobecnosti výnosy vybraných aktív. Tento spôsob umožňuje prekonať jeden z nedostatkov klasickej formulácie Black-Littermanovho modelu, ktorým je problematické použitie modelu pre aktíva s nelineárnym výnosovým profilom.

Osobitnou záležitosťou je v kontexte formulácie subjektívnych názorov určenie ich spoľahlivosti. V literatúre sa uvádzajú viaceré spôsoby určenia spoľahlivosti subjektívnych očakávaní reprezentovanej maticou $\mathbf{\Omega}$. Poznatky v tejto oblasti zhrnul Walters (2009), ktorý uvádza nasledovné možné postupy:

- Matica $\mathbf{\Omega}$ sa môže skonštruovať proporcionálne (ako násobok) k skutočnej variančno-kovariančnej matici $\mathbf{\Sigma}$, resp. k odhadu variančno-kovariančnej matice. Príklady použitia tohto spôsobu sú uvedené v kapitole 4.2.3.
- Spoľahlivosť môže byť určená z intervalov spoľahlivosti na základe predpokladu normálneho rozdelenia výnosov.

- Spôľahlivosť môže byť určená na základe rozptylu reziduálnych zložiek z faktorového modelu očakávaných výnosov. Aplikáciu v praxi uvádzajú napríklad Beach a Orlov (2007).
- Spôľahlivosť môže byť určená pomocou metódy uvedenej v práci Idzorek (2004).

Okrem spomínaných metód je možné použiť aj iné postupy. Napríklad ak pracujeme s akciami a využívame odporúčania bankových analytikov, môžeme rozptyl odporúčaní pre konkrétnu akciu použiť ako indikátor spoľahlivosti daného očakávania.

Vráťme sa teraz na chvíľu k spôsobom určenia matice Ω uvedeným v kapitole 4.2.3. Vzťah (40) navrhnutý He a Littermanom (1999) obsahuje τ - násobok skutočnej variančno-kovariančnej matice Σ vychádzajúc zo vzťahu (35). Dôsledkom rozhodnutia prijať aj pre subjektívne očakávania predpoklad proporcionálneho rozptylu je výskyt parametra τ vo vzťahoch (45) a (49) pre určenie aposteriórneho očakávaného výnosu a rozptylu. Spôsob určenia matice Ω na základe vzťahov (41) a (42) má tú výhodu, že parameter c sa týka len subjektívnych očakávaní a ďalej sa vo vzťahoch pre odhad momentov aposteriórneho rozdelenia nevyskytuje. V limitných prípadoch majú potom pri BLM modeli očakávaný výnos a rozptyl intuitívnejšie vyjadrenie, pričom parameter τ nie je potrebné definovať.

V praktickej časti tejto práce budeme pracovať s BLM modelom, t.j. s Meucciho alternatívnou špecifikáciou Black-Littermanovho modelu, pričom subjektívne očakávania budeme formulovať na základe postupu zo vzťahu (44). Meucci (2008) v ňom navrhuje parameter $\eta_k = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$, ktorý reprezentuje kvalitatívne subjektívne očakávania investora. V praxi sa takéto hodnotenia jednotlivých trhov alebo aktív využívajú pomerne často, pričom škála kritérií pre hodnotenie môže byť mimoriadne široká. Obvykle sú to kritériá určitým spôsobom spojené s relatívnym a absolútnym ocenením jednotlivých aktív, ale často sa využívajú aj kritériá cenovej, ziskovej a sektorovej hybnosti, ako aj kritériá trhového objemu a „hlĺbky trhu“ (*market breadth*). Prirodzeným rozšírením Meucciho myšlienky je teda využitie parametra η_k v prípade, že subjektívne očakávania investora sú definované ako relatívne zoradenie aktív podľa určitého kritéria cenovej hybnosti.

Nech existuje kritérium cenovej hybnosti, ktoré K aktívam v každom časovom okamihu priradí určité číselné hodnoty vyjadrujúce ich relatívnu atraktivitu. O týchto číselných

hodnotách môžeme predpokladať, že sú realizáciami náhodnej premennej s normálnym rozdelením pravdepodobnosti a môžeme ich následne previesť na hodnoty normovaného normálneho rozdelenia. Tieto hodnoty následne dosadíme za hodnoty parametra η_k , vďaka čomu na základe vzťahu (44) získavame subjektívne očakávania, ktoré sú realizáciami náhodnej premennej s rozdelením $N(\mathbf{P}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T)$. Ak je hodnota parametra η_k blízka 0, čo znamená, že cenová hybnosť by sa nemala pre dané aktívum prejaviť, subjektívny očakávaný výnos je zhodný s výnosom implikovaným trhovou váhou aktíva. V krajných prípadoch, t.j. v prípadoch kedy η_k nadobúda najvyššie hodnoty v absolútnom vyjadrení, sú očakávané subjektívne výnosy výrazne vyššie (resp. nižšie) ako implikované výnosy a generujú sa na základe volatility výnosov odvodennej z matice $\boldsymbol{\Sigma}$. Uvedeným spôsobom získame intuitívne očakávané subjektívne výnosy pre jednotlivé aktíva.

Teoreticky je tento postup zaujímavý, avšak v praxi je potrebné uskutočniť určité ďalšie úpravy, nakoľko takto zadané očakávané subjektívne výnosy predstavujú problém. Ak pracujeme s aktívami, ktoré vykazujú vysokú volatilitu, subjektívne očakávania budú mať v prípade vysokých absolútnych hodnôt η_k extrémne očakávané výnosy. To samo o sebe nepredstavuje prekážku, avšak keď tieto očakávané subjektívne výnosy spojíme s trhom implikovanými výnosmi pomocou Black-Littermanovho modelu, dostaneme zmiešané výnosy, ktoré budú kvôli spomínaným extrémnym hodnotám η_k významne odlišné od rovnovážneho stavu. Portfólio vygenerované na základe zmiešaných odhadov bude taktiež výrazne odlišné od rovnovážneho trhového portfólia a môže obsahovať extrémne pozície, čo je v pravom protiklade s dôvodom použitia Black-Littermanovho modelu. Vplyv subjektívnych očakávaní sa síce dá „utlmiť“ nastavením nižšej spoľahlivosti v parametroch τ , resp. c , avšak to zároveň znamená, že v spomínanom prípade musíme uvažovať s extrémne nízkou spoľahlivosťou subjektívnych očakávaní. Ich vplyv na zmiešané očakávané výnosy by bol akceptovateľný, avšak zmiešaná variančno-kovariančná matica by bola prakticky totožná s pôvodnou odhadnutou maticou $\boldsymbol{\Sigma}$ (t.j. vplyv $\boldsymbol{\Omega}$ by bol zanedbateľný). Vzťah (44) zároveň ignoruje fakt, že rozptyl subjektívnych očakávaní je reprezentovaný maticou $\boldsymbol{\Omega}$.

Spomínaný numerický problém má v praxi jednoduché riešenie. Stačí, ak vo vzťahu (44) nahradíme prvok matice $\mathbf{P}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P}^T$ prvkom matice $\boldsymbol{\Omega}$ a hodnoty z normovaného normálneho rozdelenia určené na dosadenie do parametra η_k pred dosadením predelíme hodnotou

parametra τ , resp. prenásobíme hodnotou parametra c (podľa toho, či využívame klasickú Black-Littermanovu špecifikáciu alebo Meucciho BLM model). Výsledné zmiešané očakávané výnosy sú konzistentné a zmiešaná variančno-kovariančná matica zohľadňuje príspevok rozptylu subjektívnych očakávaní. V praktickej časti práce je využitý práve tento inovovaný postup.

5 Odhad variančno–kovariančnej matice

Black-Littermanov model ako aj Markowitzov model výberu portfólia predpokladajú, že skutočný rozptyl výnosov a ich vzájomné kovariancie sú známe. V praxi však nie je možné pozorovať skutočný rozptyl a kovariancie výnosov, kvôli čomu sa pristupuje k odhadom rozptylu pomocou rôznych štatistických postupov. V prípade viacerých aktív je štandardom vyjadrovať riziko výnosov týchto aktív pomocou variančno-kovariančnej matice, ktorej diagonálne prvky tvoria rozptyly výnosov jednotlivých aktív a mimodiagonálne prvky reprezentujú vzájomné kovariancie výnosov jednotlivých aktív.

Pri odhade variančno-kovariančnej matice z historických údajov musíme ako pri každom odhade počítať s chybou. Obvykle sa pritom rozlišuje medzi chybou súvisiacou s nedostatočným stupňom voľnosti pre odhadované parametre, alebo inak s nízkym počtom pozorovaní v porovnaní s počtom odhadovaných parametrov a chybou špecifikácie, ktorá nastáva v prípade, že model rizika uplatnený pri použití konkrétneho estimátora nepopisuje dostatočne presne skutočne pozorované údaje. Vlastnosti estimátorov v súvislosti so spomínanými chybami sa označujú ako výdatnosť (efektívnosť) a vychýlenosť. Počet metód na odhad variančno-kovariančnej matice je veľmi veľký, nakoľko sa jedná o rozsiahly a pomerne populárny výskumný smer.

V ďalšom texte sú uvedené viaceré metódy odhadu variančno-kovariančnej matice, ktoré sú využité aj v praktickej časti tejto dizertačnej práce. Metódy boli vybraté predovšetkým vďaka tomu, že umožňujú pracovať s rovnakými predpokladmi, ako aj samotný Black-Littermanov model. Za základný predpoklad sa pritom považuje tvrdenie, že výnosy aktív sú navzájom nezávislé a majú normálne rozdelenie. Okrem toho metódy umožňujú využívať výnosy aktív s týždňovou frekvenciou. Kvalita odhadov na základe týchto metód je jednoznačne dôležitým faktorom pri konečnom výbere metódy, preto si autor v jednom z čiastkových cieľov tejto práce dáva za úlohu vyhodnotiť úspešnosť vybraných metód odhadu variančno-kovariančnej matice na skutočných finančných údajoch.

Hodnotenie kvality jednotlivých odhadov popísaných detailnejšie v kapitole 5.5 prebieha empiricky, pričom sa opiera o riešenie podobného problému v prácach Benninga a Disatnika

(2006, 2007). Autori v nich porovnávajú estimátory variančno-kovariančnej matice, pričom ako hodnotiace kritérium im slúži empiricky pozorovaný vývoj portfólií s globálnym minimálnym rozptylom (GMV portfóliá) v zmysle Markowitzovho modelu výberu portfólia. Základnou myšlienkou je intuitívny predpoklad, že ak estimátor poskytuje lepší odhad skutočného realizovaného rozptylu, tak by malo GMV portfólio vytvorené na základe tohto estimátora mať nižšiu skutočnú volatilitu ako GVM portfólio zostavené na základe horšieho estimátora.

Problém výberu GMV portfólia v priestore očakávaného výnosu a rizika môžeme zapísať ako úlohu minimalizácie funkcie rozptylu portfólia nasledovným spôsobom:

$$\min Var = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (59)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1, \quad (60)$$

kde Σ je variančno-kovariančná matica, $\mathbf{w}$ je vektor váh jednotlivých aktív v portfóliu a $\mathbf{e}$ je jednotkový vektor. Rovnica (60) predstavuje podmienku úplného zainvestovania. Bez jej prítomnosti by riešenie bolo triviálne $\mathbf{w} = 0$. V takto formulovanej úlohe hľadáme taký vektor váh $\mathbf{w}_{GMV}$, ktorý minimalizuje celkový rozptyl portfólia a spĺňa podmienku 100%-ného zainvestovania. Dá sa ľahko ukázať, že úloha má nasledovné riešenie:

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}}. \quad (61)$$

Výhoda GMV portfólia spočíva v tom, že pre jeho konštrukciu nepotrebujeme poznať očakávané výnosy, ktoré sú rovnako neznáme ako aj skutočná variančno-kovariančná matica.

5.1 Výberová variančno-kovariančná matica

Najznámejším a pravdepodobne najčastejšie používaným estimátorom rozptylu je výberová variančno-kovariančná matica, ktorá má na diagonále výberové rozptyly a jej

mimodiagonálne prvky tvoria výberové kovariancie. Maticu môžeme skonštruovať nasledovným spôsobom

$$\hat{\Sigma} = \text{Cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j), \quad i, j = 1, \dots, N \quad (62)$$

kde

$\hat{\Sigma}$ je estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice,

r_{it} je výnos i -teho aktíva v čase t ,

$\bar{r}_i$ je priemerný výnos i -teho aktíva,

N je celkový počet aktív,

T je celkový počet pozorovaní.

Výberová variančno-kovariančná matica sa ľahko počíta a dopĺňa o nové údaje, avšak má aj viaceré nedostatky. Predovšetkým je o nej známe, že obsahuje významnú chybu odhadu kvôli problematickej výdatnosti. Prípadný menší počet stupňov voľnosti (resp. nedostatok historických pozorovaní) sa často prejavuje výskytom nepravdepodobne vysokých mimodiagonálnych prvkov. Michaud (1989) pritom podotýka, že tento stav vedie pri konštrukcii inverznej matice potrebnej pre určenie GMV portfólia k znásobovaniu chýb odhadu. Okrem toho, všetky historické pozorovania majú pri výpočte estimátora rovnakú váhu, čo môže spôsobiť oneskorenú reakciu estimátora na významné zmeny na trhu¹⁶. Ledoit a Wolf (2003) tiež poukazujú na problémy výberovej matice, najmä pri jej využití pre potreby optimalizácie portfólia.

Vo finančnej praxi sa v minulosti zvykli intenzívne využívať viaceré alternatívne spôsoby konštrukcie výberovej matice, medzi ktoré patrí najmä metóda rovnomerne vážených kľzavých priemerov. Pri použití tejto metódy sa výberová matica neodhaduje z celej vzorky, ale len z vopred definovaného kratšieho časového intervalu, ktorý sa kľzavo posúva v čase. Alexander (2008b) upozorňuje na nedostatky tejto metódy na triviálnych príkladoch, avšak aj napriek problémom sa tento spôsob často využíva v jednoduchších aplikáciách.

¹⁶ Tento fakt by nepredstavoval problém, keby boli výnosy skutočne nezávislé a normálne rozdelené tak, ako to hovoria predpoklady modelov.

5.2 Exponenciálne vážená variančno-kovariančná matica

Jednou z najjednoduchších úprav výberovej matice je zmena rovnakých váh pozorovaní na váhy, ktoré pripisujú väčšiu významnosť novším pozorovaniám. Najčastejšie využívaným spôsobom konštrukcie váh je úprava pomocou exponenciálnych klzavých priemerov. Metóda našla významné uplatnenie v praxi vďaka jednoduchosti a výhodným vlastnostiam (viď: Alexander, 2008b, s. 120-124). Pri exponenciálnej schéme váh má prvé pozorovanie najvyššiu váhu w_t a každé ďalšie (v zmysle staršie) pozorovanie má váhu w_{t-1} skonštruovanú nasledovným spôsobom:

$$w_{t-1} = \lambda w_t, \quad (63)$$

kde parameter λ určuje rýchlosť „útlmu“¹⁷. V dostupnej literatúre sa spomínajú dva spôsoby konštrukcie estimátora variančno-kovariančnej matice s využitím exponenciálnych klzavých priemerov. Prvý spôsob vychádza z rekurzívnej danej vzťahom (63) a spomína ho okrem iných napríklad Zmeškal et. al (2004) alebo Alexander (2008), druhý spôsob je spomenutý napríklad v práci De Santis et al. (2003). Vzhľadom na výpočtové problémy spojené s rekurzívnym tvarom pomocou prvej metódy tu uvádzame práve druhý tvar, pri ktorom sa upravené váhy aplikujú priamo na jednotlivé pozorovania, vďaka čomu odpadá potreba určiť počiatočný krok rekurzívneho algoritmu. Exponenciálne váženú kovarianciu výnosov i -teho a j -teho aktíva teda môžeme vypočítať nasledovným spôsobom (De Santis et al., 2003):

$$Cov_{EW}(r_i, r_j)_T = \frac{\sum_{t=1}^T w_t^{1/2} (r_{it} - \bar{r}_i) w_t^{1/2} (r_{jt} - \bar{r}_j)}{\sum_{t=1}^T w_t}, \quad (64)$$

kde

¹⁷ V anglojazyčnej literatúre sa tento parameter zvykne nazývať decay parameter alebo smoothing constant.

w_t je váha pozorovania v čase t

r_{it} je výnos i -teho aktíva v čase t

$\bar{r}_i$ je priemerný výnos i -teho aktíva naprieč sledovanou vzorkou

Analogicky môžeme sformulovať aj vzťah pre exponenciálne vážený rozptyl, ak uvažujeme, že $i = j$. Parameter λ je definovaný ako konštanta z intervalu $(0,1)$ a môžeme ho odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti alebo pomocou minimalizácie chyby predikcie mimo skúmanej vzorky. Čím je jeho hodnota nižšia, tým je reakcia estimátora na aktuálne dianie na trhu intenzívnejšia, ale zároveň o to rýchlejšie dochádza k „útlmu“, t.j. váhy starších údajov sa rýchlo stávajú zanedbateľnými. Keď sa hodnota λ približuje k číslu 1, výsledné odhady sú čoraz viac vyhladené a približujú sa k odhadom pomocou metódy rovnomerne vážených kľazových priemerov.

Alexander (2008b) kritizuje používanie exponenciálne váženej variančno-kovariančnej matice najmä kvôli podmienke, na základe ktorej musí byť hodnota parametra λ rovnaká pre všetky aktíva uvažované v matici, a to aj keď vieme, že odlišný charakter týchto aktív môže viesť k odlišnému vývoju volatility týchto aktív. Toto je nutné dodržať najmä preto, aby bola garantovaná pozitívna semidefinitnosť výslednej variančno-kovariančnej matice. Z dôvodu tohto obmedzenia, ako aj kvôli problémom s určením parametra pomocou vyššie uvedených metód sa v praxi táto konštanta stanovuje ad hoc. Zvyčajne sa využívajú rozdielne hodnoty pre dáta s rozličnou frekvenciou a teda aj rozličné odhadované časové intervaly. Obvykle sa preto λ stanovuje explicitne ako číslo z intervalu 0,75 až 0,98 (Alexander, 2008b, s. 120-123). Často sa tiež používajú hodnoty okolo 0,94 pre denné dáta a 0,97 pre mesačné dáta. Spomínané nastavenia parametra sa okrem iného využívajú aj v uznávanom systéme RiskMetrics od spoločnosti JP Morgan¹⁸.

Spoločnosti z finančného sektora začali využívať uvedenú metódu odhadu rozptylu najmä pre jej dobré praktické vlastnosti. Metóda je výpočtovo relatívne nenáročná a umožňuje pracovať s veľkým množstvom aktív. Zároveň tiež odstraňuje problém s extrémnymi pozorovaniami. Extrémne pozorovania zaznamenané v minulosti majú pri matici konštruovanej pomocou rovnomerne vážených priemerov stále rovnakú váhu ako aktuálne

¹⁸ Zhrnutie najdôležitejších črt systému RiskMetrics uvádza napríklad aj publikácia Alexander (2008b).

„normálne“ pozorovania. Tento fakt sám o sebe nepredstavuje veľký problém, ale v situácii, keď extrémne pozorovania s postupom času vypadávajú z kľzavej vzorky, môže hodnota odhadu prudko kolísať, hoci z pohľadu trhového vývoja sa nemusí diať nič mimoriadne. Exponenciálne vážené priemery sa začali používať aj kvôli tomu, že „vyhladzujú“ minulé pozorovania, nakoľko ich váha s postupom času prirodzene klesá.

5.3 Redukovaný estimátor variančno-kovariančnej matice

Pri odhadovaní variančno-kovariančnej matice výnosov rovnakého druhu aktív z historických údajov sa často stáva, že výsledná matica trpí množstvom šumu v dôsledku multikolinearity. V praxi sa preto pri odhade variančno-kovariančnej matice používajú rôzne metódy na jej očistenie, resp. určenie významných štatistických faktorov. Jednou z často využívaných metód je analýza hlavných komponentov (*principal component analysis*, ďalej len PCA analýza), ktorá slúži na redukcii problémov spojených s multikolinearitou a pomáha znižovať počet náhodných premenných (redukovať dimenziu). PCA analýza je založená na spektrálnej dekompozícii variančno-kovariančnej matice a je jednou z najjednoduchších ortogonalizačných metód (viď: Alexander, 2008a; Fabozzi, 2006; Rachev et al., 2007; Stankovičová, Vojtková, 2007). Pri jej použití sa skupina korelovaných náhodných premenných transformuje na novú skupinu nekorelovaných náhodných premenných, ktorá je lineárnou kombináciou pôvodných premenných. Novovytvorené premenné sa nazývajú hlavné komponenty. PCA analýza sa často využíva pri aplikácii štatistických faktorových modelov oceňovania finančných aktív a pri riadení rizika portfólia finančných nástrojov. Okrem toho poskytuje vstupy pre odhad rozptylu pomocou redukovaných estimátorov.

Spektrálnu dekompozíciu symetrickej štvorcovej matice $\mathbf{A}$ veľkosti $N \times N$ môžeme za predpokladu, že vlastné hodnoty a vlastné vektory sú zapísané v rovnakom poradí, zapísať nasledovne:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^T, \quad (65)$$

kde $\mathbf{W}$ je ortogonálna matica vlastných vektorov veľkosti $N \times N$ a Λ je matica rozmeru $N \times N$, ktorá má na diagonále vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$ zoradené od najväčšej po najmenšiu a mimodiagonálne prvky sú nulové.

Označme $\mathbf{X}$ maticu veľkosti $T \times N$, ktorá reprezentuje T pozorovaní N náhodných premenných a nech matica Σ veľkosti $N \times N$ je prislúchajúca variančno-kovariančná matica. Hlavné komponenty matice Σ sú definované ako stĺpce matice $\mathbf{P}$ veľkosti $T \times N$, ktorú získame ako produkt matice $\mathbf{X}$ a matice vlastných vektorov $\mathbf{W}$.

$$\mathbf{P} = \mathbf{XW} \quad (66)$$

Keďže matica $\mathbf{W}$ je ortogonálna, a teda $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T$, vzťah (66) môžeme prepísať nasledovne

$$\mathbf{X} = \mathbf{PW}^T \quad (67)$$

Z uvedeného vyplýva, že pôvodné výnosy aktív reprezentované maticou $\mathbf{X}$ môžeme zapísať ako lineárnu kombináciu hlavných komponentov, pričom matica $\mathbf{W}$ reprezentuje váhy jednotlivých hlavných komponentov.

Meucci (2005) sa pri konštrukcii redukovaného estimátora variančno-kovariančnej matice opiera o PCA analýzu, pričom významnú úlohu tu zohráva práve matica vlastných hodnôt Λ , resp. jednotlivé vlastné hodnoty na diagonále tejto matice. Autor poukazuje na skutočnosť, že vychýlenosť estimátora výberovej matice je minimálna a celková chyba estimátora je prevažne dôsledkom slabej výdatnosti (neefektívnosti) estimátora. Navrhuje preto skombinovať výberovú maticu s konštantnou maticou, o ktorej je známe, že má nulovú chybu výdatnosti, hoci vykazuje veľké vychýlenie. Výsledkom je vychýlený estimátor, ktorého celková chyba odhadu je však menšia ako pri výberovej matici, pretože spomínané chyby sa navzájom rušia. Podobným spôsobom napríklad Ledoit a Wolf (2003, 2004) propagujú využitie váženého priemeru výberovej matice s maticou získanou pomocou jednofaktorového modelu.

Redukované estimátory obvykle pozostávajú z troch zložiek – estimátora so silnou väzbou na pozorované dáta a s minimálnou štruktúrou (napr. výberová matica), silno štruktúrovaného estimátora (cieľ redukcie, napr. konštantný estimátor) a parametra intenzity redukcie (*shrinkage parameter*). Pri odhade variančno-kovariančnej matice môže byť za cieľ redukcie okrem konštantného estimátora zvolená napríklad aj variančno-kovariančná matica vychádzajúca z jednofaktorového modelu, alebo matica s konštantnými koreláciami (Fabozzi et al., 2006; Ledoit, Wolf, 2003, 2004). Meucci (2005) navrhuje ako ideálneho kandidáta na zníženie celkovej chyby odhadu výberovej matice konštantnú maticu $\mathbf{C}$, ktorú môžeme zapísať nasledovným spôsobom

$$\mathbf{C} \equiv \bar{\lambda} \mathbf{I}_N, \quad (68)$$

kde $\bar{\lambda}$ je priemer všetkých skutočných vlastných hodnôt matice Σ určený ako $\bar{\lambda} = \frac{tr\{\Lambda\}}{N} = \frac{tr\{\Sigma\}}{N}$ a matica $\mathbf{I}_N$ je jednotková matica veľkosti $N \times N$. Keďže skutočné vlastné hodnoty matice Σ nie sú pozorovateľné, nahrádzame ich príslušnými výberovými ekvivalentmi:

$$\hat{\mathbf{C}} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n \mathbf{I} \quad (69)$$

Redukovaný estimátor rozptylu je následne definovaný ako vážený priemer výberovej matice $\hat{\Sigma}$ a diagonálnej matice $\hat{\mathbf{C}}$ zo vzťahu (69).

$$\hat{\Sigma}_s = (1 - \alpha) \hat{\Sigma} + \alpha \hat{\mathbf{C}}, \quad (70)$$

kde α je parameter redukcie, ktorého optimálnu hodnotu je možné stanoviť analyticky pomocou nasledovného vzťahu:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{t} \sum_{j=1}^t tr\left\{\left(\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j - \hat{\Sigma}\right)^2\right\}}{tr\left\{\left(\hat{\Sigma} - \hat{\mathbf{C}}\right)^2\right\}}, \quad \text{ak } \alpha < 1, \text{ inak } \alpha = 1, \quad (71)$$

kde

t je počet období vo vzorke

$\mathbf{r}_j$ je vektor pozorovaných výnosov všetkých aktív v období j

Takto definovaný estimátor je síce vychýlený, ale celková chyba odhadu je nižšia ako pri výberovej matici. Čím sú vlastné hodnoty variančno-kovariančnej matice bližšie ich priemernej hodnote, tým výberová matica obsahuje viac šumu a optimálna hodnota parametra redukcie rastie. Naopak s rastúcim počtom použitých pozorovaní optimálna hodnota parametra redukcie klesá.

Hoci priaznivé vlastnosti redukovaných estimátorov boli potvrdené aj na empirických dátach, ich nevýhodou zostáva vyššia výpočtová náročnosť. Benninga a Disatnik (2006, 2007) v tejto súvislosti argumentujú, že komplikovanejšie estimátory nemusia byť nutne presnejšie a vo svojom empirickom výskume dokazujú, že v určitých prípadoch môžu rovnako dobre poslúžiť aj portfóliá estimátorov skonštruované ako priemery jednoduchších estimátorov s rozdielnymi zdrojmi chýb. Príčinou je opäť efekt vzájomného rušenia chýb daných rozličnou výdatnosťou a vychýlením jednotlivých estimátorov, pričom v prípade redukovaných odhadov podľa autorov nutnosť odhadu parametrov redukcie prináša dodatočnú chybu odhadu.

5.4 Jednofaktorový model

Klasický jednofaktorový model výnosov finančného aktíva je určený vzťahmi (1), (2), (3)¹⁹. Elton, Gruber a Ulrich (1978) odporúčajú využívať tento model aj na odhad variančno-kovariančnej matice, pričom ukazujú, že tento postup má za následok kvalitnejšie odhady, stabilnejšie alokácie optimalizovaných portfólií a lepšiu diverzifikáciu. Vzťah (1) môžeme pre aktívum i preznačiť podľa konvencie z literatúry nasledovne

¹⁹ V angličtine sa model označuje ako *single-index model*. Model je tiež známy ako model trhu, William Sharpe na jeho osnove sformuloval známy CAPM model.

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i X_t + \varepsilon_{it} \quad t = 1, \dots, T, \quad (72)$$

kde

r_{it} je očakávaný výnos i -teho aktíva v čase t

α_i je očakávaný relatívny výnos i -teho aktíva voči faktorovému portfóliu (referenčnému indexu),

β_i je senzitivita výnosu i -teho aktíva voči faktorovému portfóliu (referenčnému indexu),

X_t je očakávaný výnos faktorového portfólia (referenčného indexu) v čase t ,

ε_{it} je idiosynkratická zložka výnosu.

Pre portfólio N rizikových aktív s váhami $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$ môžeme výnos tohto portfólia na základe vzťahu (72) zapísať ako

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T, \quad (73)$$

kde Y_t je celkový očakávaný výnos portfólia a jednotlivé charakteristiky α , β a ε_t sú definované vzťahmi

$$\alpha = \sum_{i=1}^N w_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^N w_i \beta_i, \quad \varepsilon_t = \sum_{i=1}^N w_i \varepsilon_{it} \quad (74)$$

Koeficient β môžeme odhadnúť napríklad pomocou metódy najmenších štvorcov. V danom prípade majú všetky pozorovania vo vzorke rovnakú váhu. Zároveň môžeme odhad $\hat{\beta}$ zapísať aj ako podiel výberovej kovariancie portfólia s referenčným indexom a výberového rozptylu, t.j.

$$\hat{\beta} = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{Cov^{\wedge}(X, Y)}{Var^{\wedge}(X)} \quad (75)$$

Súčasťou modelu je aj predpoklad, že výnosy referenčného indexu a reziduá sú navzájom nezávislé, t.j. ich vzájomná kovariancia je nulová. Na základe tohto predpokladu môžeme odhad variančno-kovariančnej matice z jednofaktorového modelu zapísať v maticovom tvare ako

$$\hat{\Sigma}_{SIM} = s_X^2 \hat{\beta}^T \hat{\beta} + \hat{V}_\varepsilon, \quad (76)$$

kde

$\hat{\Sigma}_{SIM}$ je odhad variančno-kovariančnej matice pomocou jednofaktorového modelu,

$\hat{\beta}$ je vektor odhadnutých parametrov $\hat{\beta}_i$ jednotlivých aktív,

s_X^2 je výberový rozptyl faktorového portfólia (referenčného indexu),

$\hat{V}_\varepsilon$ je matica, ktorej diagonálne prvky tvoria výberové rozptyly reziduálnych zložiek ε_{it} a mimodiagonálne prvky sú nulové.

Rovnaká váha všetkých pozorovaní pri využití metódy najmenších štvorcov môže byť v určitých finančných aplikáciách problémom. Ak napríklad považujeme novšie dáta za významnejšie z hľadiska odhadu, je zmysluplné uplatňovať iné váhy jednotlivých pozorovaní. Alexander (2008b) uvádza alternatívnu verziu jednofaktorového modelu, ktorá umožňuje uvažovať s premenlivosťou koeficientov v čase, pričom pozorovania sú vážené metódou exponenciálnych kľzavých priemerov. Očakávaný výnos portfólia v tomto modeli je definovaný ako

$$Y_t = \alpha_t + \beta_t X_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (77)$$

Koeficienty modelu sa v čase menia a preto na ich odhad nemôžeme použiť metódu najmenších štvorcov. Pri odhade β -koeficientov však môžeme postupovať analogicky podľa vzťahu (75):

$$\hat{\beta}_t^\lambda = \frac{Cov^\wedge_\lambda(X_t, Y_t)}{Var^\wedge_\lambda(X_t)}, \quad (78)$$

kde λ je parameter útlmu metódy exponenciálnych kľzavých priemerov. Odhad variančno-kovariančnej matice podľa exponenciálne váženého jednofaktorového modelu môžeme uskutočniť analogicky podľa vzťahu (76) nasledovným spôsobom:

$$\hat{\Sigma}_{EWSIM} = s_{\lambda X}^2 \hat{\beta}_t^{\lambda T} \hat{\beta}_t^{\lambda} + \hat{V}_{\lambda \varepsilon} \quad (79)$$

Index λ vo vzťahu označuje, že odhady rozptylu a kovariancie jednotlivých zložiek modelu sa uskutočňujú pomocou metódy exponenciálne vážených kľzavých priemerov s parametrom útlmu λ (pozri kapitolu 5.2).

Variančno-kovariančná matica vytvorená pomocou jednofaktorového modelu je podľa viacerých štúdií lepším estimátorom disperzie ako výberová matica a jej výpočtová náročnosť je významne nižšia najmä pri veľkom počte aktív. Implicitná redukcia dimenzie pôvodnej matice však spôsobuje problémy s inverziou matice najmä pri vysoko korelovaných systémoch. V určitých hraničných prípadoch môže byť determinant veľmi blízky nule a váhy získané z optimalizácie sú bez použitia dodatočných podmienok extrémne.

5.5 Metodológia testovania odhadov variančno–kovariančnej matice

Testovanie rôznych spôsobov konštrukcie variančno-kovariančnej matice je významne inšpirované prácami Simona Benningu a Davida Disatnika z univerzity v Tel Avive (Benninga, Disatnik, 2006, 2007). Autori sa v nich venujú porovnaniu viacerých metód konštrukcie variančno-kovariančnej matice na základe empirických výsledkov skúmanej vzorky finančných údajov. Testovanie prebieha s využitím optimalizácie v zmysle Markowitzovho modelu výberu portfólia. Kvalitu odhadov vybraných metód pritom porovnávajú na základe vývoja testovacích portfólií s globálnym minimálnym rozptylom (GMV portfóliá). Základná myšlienka experimentu spočíva v tom, že ak sú GMV portfóliá skonštruované na základe kvalitnejšieho odhadu skutočnej variančno-kovariančnej matice,

rozptyl takto konštruovaných portfólií by mal byť v nasledujúcich časových obdobiach mimo pôvodnej vzorky (*out-of-sample period*) intuitívne nižší ako pri GMV portfóliách vychádzajúcich z menej presného odhadu. Benninga a Disatnik zároveň poukazujú na skutočnosť, že použitie výberovej variančno-kovariančnej matice nie je „optimálne“ z hľadiska kvality odhadu a na základe empirického výskumu odporúčajú využívať lineárne kombinácie (portfóliá) viacerých estimátorov založených na odlišných predpokladoch, prípadne tiež redukované estimátory, ktoré sú však výpočtovo náročnejšie kvôli nutnosti odhadovať parameter redukcie (a teda aj kvôli dodatočnej chybe odhadu).

Ďalšie významné podnety a teoretické poznatky pre uskutočnenie výskumu v tejto oblasti poskytli aj práce Ledoita a Wolfa (2003, 2004), Jaganathana a Maa (2003), Littermana a Winkelmana (1998), De Santisa et al. (2003), ako aj publikácia Alexander (2008b). Autori v nich priamo alebo nepriamo odporúčajú využívať rôzne spôsoby konštrukcie variančno-kovariančnej matice, nakoľko výsledná matica sa môže významne líšiť od metódy k metóde, rovnako ako kvalita odhadu a výsledné optimálne portfóliá.

Údajová základňa, na ktorej je postavené skúmanie odhadov, je opísaná v kapitole 2.3. Ide o historické údaje o hodnotách desiatich sektorových indexov tvoriacich dohromady americký akciový index S&P 500. K dispozícii teda máme celkovo 1008×10 pozorovaní s týždennou frekvenciou. Vďaka nízkemu počtu aktív variančno-kovariančná matica netrpí výraznými problémami spojenými s nedostatočným stupňom voľnosti.

Pre vytvorenie prvého odhadu variančno-kovariančnej matice potrebujeme v prvom kroku stanoviť rozsah výpočtového obdobia (dĺžku kĺzavej vzorky), z ktorého budeme vychádzať počas celého experimentu. Podobne ako pri experimentoch Benningu a Disatnika využijeme systém kĺzavých výpočtových období, t.j. počet pozorovaní, z ktorých sa bude počítať odhad, bude konštantný. Benninga a Disatnik odhadujú variančno-kovariančnú maticu zo 120-tich predchádzajúcich mesačných hodnôt, čo predstavuje časové obdobie 10-tich rokov. Pri týždenných údajoch však môžeme použiť kratšie časové obdobie vychádzajúc z predpokladu, že odhadujeme očakávaný rozptyl taktiež na kratšie obdobie. Aktuálne pozorovania majú v danom prípade väčší význam.

Pri stanovení dĺžky výpočtového obdobia pre odhad variančno-kovariančnej matice sme zvolili tri alternatívy – 52 týždňov, 156 týždňov a 260 týždňov. Tieto obdobia by mali byť vo

všeobecnosti dostatočne dlhé nato, aby bol odhad variančno-kovariančnej matice kvalitný. Dlhšie výpočtové obdobie by síce malo teoreticky zvyšovať spoľahlivosť odhadu, avšak jednotlivé lokálne pozorovania by v takom prípade neboli dostatočne významné. Pre posúdenie vplyvu dĺžky obdobia sme zvolili rôzne dlhé výpočtové obdobia.

Pre konštrukciu variančno-kovariančnej matice bolo vybraných celkovo deväť rozličných estimátorov:

1. Výberová variančno-kovariančná matica

Výberová variančno-kovariančná matica je najznámejším a pravdepodobne aj najintuitívnejším estimátorom rozptylu. Aj napriek známym nedokonalostiam (viď kapitola 5.1) sa používa najmä v jednoduchších praktických aplikáciách pomerne často, preto jej zahrnutie do testovacieho procesu bolo prirodzeným rozhodnutím. Cieľom experimentu je určenie estimátora, ktorý má schopnosť najlepšie odhadnúť budúce riziko, pričom dostupná literatúra tvrdí, že iné estimátory majú menšiu celkovú chybu odhadu.

Ak predpokladáme, že očakávaný výnos je pre všetky aktíva nulový²⁰, $\hat{\Sigma}$ zo vzťahu (62) je nevychýleným estimátorom rozptylu²¹. Ak však musíme priemerný výnos odhadovať zo vzorky, čo je zvyčajne prípad údajov s nižšou frekvenciou (vrátane použitých týždenných údajov), počet stupňov voľnosti sa znižuje. Estimátor zo vzťahu (62) je potom vychýlený a pre odstránenie vychýlenia ho musíme upraviť nasledovným spôsobom (Alexander, 2008b, s. 101):

$$\hat{\Sigma}_s = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (80)$$

kde

$\hat{\Sigma}_s$ je estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice,

r_{it} je výnos i -teho aktíva v čase t ,

$\bar{r}_i$ je aritmetický priemerný výnos i -teho aktíva naprieč T pozorovaniami,

²⁰ Jedná sa o obvyklý predpoklad pri použití logaritmických cien s veľkou frekvenciou, napr. dennou.

²¹ Očakávaná hodnota estimátora sa rovná jeho skutočnej hodnote.

N je celkový počet aktív,
 T je celkový počet pozorovaní.

V predkladanej štúdii sa využíva práve uvedený nevychýlený estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice, pričom v súlade s metódou kľzavých priemerov je počet hodnôt využitých pre výpočet výberovej matice menší ako celkový počet pozorovaní, konkrétne 52, 156 a 260.

2. Redukovaný estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice

Súčasťou testu odhadov variančno-kovariančnej matice je aj metóda redukovaných odhadov, propagovaná okrem iných autorov napríklad v prácach Meucci (2005), Ledoit a Wolf (2003, 2004) a Fabozzi et al. (2006). Redukovaný estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice je tu na základe vzťahu (70) konštruovaný ako vážený priemer dvoch estimátorov, konkrétne výberovej matice a diagonálnej matice (s konštantnými nulovými mimodiagonálnymi prvkami), ktorej prvky sú dané vzťahom (69). Parameter redukcie α zo vzťahu (70) je v každom časovom kroku odhadovaný na základe vzťahu (71). Vlastné hodnoty matice Σ hľadáme pomocou metódy hlavných komponentov (*principal component analysis*, vid' kapitola 5.3). Pre výpočet výberovej matice sa rovnako ako v predchádzajúcom prípade používa kľzavá vzorka pozorovaní dĺžky 52, 156 a 260 týždňov.

3. Exponenciálne vážený estimátor variančno-kovariančnej matice

Exponenciálne vážená matica je konštruovaná na základe vzťahu (64), pričom parameter útlmu λ je stanovený explicitne na úrovni 0.96, čo je v súlade s odporúčanými hodnotami (vid' kapitola 5.2). Pri výpočte exponenciálne vázenej matice sa podobne ako v prípade výberovej matice používa kľzavá vzorka historických údajov v dĺžke 52, 156 a 260 týždňov.

4. Redukovaný estimátor variančno-kovariančnej matice uplatnený na exponenciálne vážený odhad variančno-kovariančnej matice

Pri konštrukcii redukovaného estimátora exponenciálnej matice bol taktiež využitý teoretický vzťah (70), pričom namiesto rovnomerne vázenej výberovej matice bola dosadená variančno-kovariančná matica určená pomocou metódy exponenciálne vážených kľzavých

priemerov. Dôvodom bola snaha o využitie údajne výhodných vlastností exponenciálne váženej matice. Estimátor sa v dostupnej skúmanej literatúre nevyskytuje, hoci viacerí autori podporovali využívanie oboch dotknutých metód nezávisle. Určitý teoretický problém spočíva v tom, že exponenciálne vážená matica nie je nevychýleným estimátorom disperzie. Pri testovaní na reálnych údajoch preto budeme okrem iného skúmať, či takto zostrojený estimátor vykazuje väčšiu celkovú chybu odhadu ako redukovaný estimátor výberovej matice.

5. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer výberovej matice, matice získanej pomocou rovnomerne váženého jednofaktorového modelu, matice s konštantnými koreláciami a diagonálnej konštantnej matice.

Konštrukcia estimátora je priamo inšpirovaná prácami Benningu a Disatnika (2006, 2007), v ktorých autori na empirických údajoch preukazujú vyššiu úspešnosť takto vytvoreného estimátora oproti výberovej matici a porovnateľnú úspešnosť s redukovaným estimátorom výberovej matice. Jednofaktorový model a matica s konštantnými koreláciami sú v súvislosti s obdobnými empirickými testami spomínané okrem iného aj v prácach Ledoita a Wolfa (2003, 2004) a Jagannathana a Maa (2003).

Variančno-kovariančná matica vychádzajúca z klasického jednofaktorového modelu je odhadnutá pomocou vzťahu (76), pričom faktorom (referenčným indexom), voči ktorému sa pomocou metódy najmenších štvorcov odhaduje vektor β , je súhrnný index S&P 500 (resp. jeho medzitýždenné zmeny cien). Pre odhad β používame rovnako ako pri výberovej matici 52, 156 a 260 pozorovaní, pričom dodatočných 52 pozorovaní slúži pre odhad rozptylu chýb jednofaktorového modelu (pomocou estimátora výberovej matice). Vzorka, z ktorej sa odhaduje estimátor, sa posúva v čase po jednotlivých týždňoch, rovnako ako pri všetkých ostatných estimátoroch.

Maticu s konštantnými koreláciami využíva napríklad Ledoit a Wolf (2004) ako cieľ redukcie pri konštrukcii vlastného redukovaného estimátora. V danom teste však matica slúži ako pevná súčasť portfólia estimátorov. Konštrukciu matice s konštantnými koreláciami $\mathbf{F}$ môžeme popísať nasledovnými vzťahmi (podľa Ledoit, Wolf, 2004):

$$f_{ii} = s_{ii}, \quad (81)$$

$$f_{ij} = \bar{r} \sqrt{s_{ii} s_{jj}}, \quad (82)$$

kde

f_{ii} je diagonálny prvok matice $\mathbf{F}$ pre i -te aktívum,

f_{ij} je mimodiagonálny prvok matice $\mathbf{F}$ ($i \neq j$) pre i -te a j -te aktívum,

s_{ii} je diagonálny prvok výberovej variančno-kovariančnej matice Σ pre i -te aktívum,

$\bar{r}$ je priemerný korelačný koeficient výberovej matice Σ vypočítaný podľa vzťahu

$$\bar{r} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N r_{ij} \quad (83)$$

kde

r_{ij} je korelačný koeficient j -teho a i -teho aktíva z výberovej matice Σ ,

N je celkový počet uvažovaných aktív.

Do portfólia estimátorov sme podľa vzoru Benningu a Disatnika zahrnuli aj diagonálnu maticu $\mathbf{C}$ použitú pri redukovanom estimátore pre výberovú maticu. Matica sa odhaduje na základe vzťahu (68) pri použití metódy hlavných komponentov.

Výsledné portfólio estimátorov je vytvorené ako aritmetický priemer spomínaných štyroch estimátorov, pričom sa využíva metóda kľzavých období v dĺžke 52, 156 a 206 týždňov (plus 52 týždenných pozorovaní pre určenie rozptylu chýb jednofaktorového modelu). Vzorka, z ktorej sa estimátory odhadujú, sa v každom časovom kroku posúva o jeden týždeň, pričom si zachováva fixnú dĺžku.

6. Rovnomerne vážené portfólio estimátorov zložené z exponenciálne váženej matice, matice získanej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu, matice s konštantnými koreláciami a diagonálnej konštantnej matice.

Podobne ako predchádzajúce portfólio estimátorov je aj tento experimentálny estimátor skonštruovaný ako vážený priemer rôznorodých estimátorov na základe predpokladu, že ich

kombinácia môže mať nižšiu celkovú chybu odhadu ako jednotlivé estimátory. V danom prípade využívame aritmetický priemer exponenciálne váženej matice, variančno-kovariančnej matice určenej pomocou exponenciálne váženého jednofaktorového modelu vzťahom (79), matice s konštantnými kovarianciami zostrojenej z exponenciálne váženej matice, a nakoniec diagonálnej matice zostrojenej na základe vzťahu (69) s dosadením vlastných hodnôt exponenciálne váženej matice.

Matica získaná z jednofaktorového modelu pomocou vzťahu (79) je založená na exponenciálne vážených odhadoch koeficientov jednofaktorového modelu. V čase meniace sa koeficienty β_t modelu (77) lepšie vystihujú premenlivé riziko pri krátkodobejších odhadoch (Alexander, 2008b, s. 7). Parameter útlmu λ pri exponenciálne váženom odhade koeficientov $\hat{\beta}_t^\lambda$ je podobne ako pri exponenciálnej matici a príslušnom redukovanom estimátore stanovený explicitne v súlade s odporúčaniami na úrovni 0,96. Pre odhad rozptylu chýb modelu $\hat{V}_{\lambda e}$ zo vzťahu (79) opäť potrebujeme údaje o chybe odhadu v predchádzajúcich časových krokoch. Okrem štandardných 52, 156 a 260 pozorovaní pre určenie koeficientov preto aj pri tomto estimátore využívame nasledujúcich 52 pozorovaní, z ktorých sa odhaduje disperzia chýb modelu, avšak v danom prípade pomocou exponenciálne váženej metódy.

Ako trhový faktor (referenčný index) v exponenciálne váženom jednofaktorovom modeli slúži vývoj indexu S&P 500, rovnako ako pri štandardnom jednofaktorovom modeli. Exponenciálne vážený odhad koeficientov $\hat{\beta}_t^\lambda$ sa teda tiež vzťahuje k percentuálnym medzitýždenným zmenám indexu. Exponenciálne vážené kovariancie (resp. rozptyly) sa odhadujú podľa vzťahu (64).

Podobne ako pri redukovanom estimátore pre exponenciálne váženú maticu ide v prípade uvedeného portfólia estimátorov o experiment, ktorý sa v literatúre dostupnej autorovi nevyskytuje. Vzhľadom na určitú kontroverznosť využitia estimátora exponenciálnej matice z pohľadu jeho vlastností preto očakávame, že tento estimátor bude vykazovať väčšiu celkovú chybu ako predchádzajúce portfólio estimátorov.

Počet pozorovaní použitých v každom časovom kroku pre výpočet estimátora je podobne ako pri všetkých predchádzajúcich estimátoroch fixne stanovený na 52, 156 a 260 týždňov

(plus 52 týždňov pre odhad chýb jednofaktorového modelu) a skúmaná vzorka sa posúva v čase po každom odhade.

7. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer výberovej matice, matice získanej pomocou rovnomerne váženého jednofaktorového modelu a diagonálnej konštantnej matice.

Konštrukcia tohto estimátora vychádza z konštrukcie portfóliového estimátora z bodu 5, avšak kvôli porovnaniu účinnosti tu vynechávame maticu s konštantnými koreláciami. Estimátor bol použitý pri podobných testoch aj v prácach Benningu a Disatnika (2007) a Jagannathana a Maa (2003).

8. Rovnomerne vážené portfólio estimátorov zložené z exponenciálne vázenej matice, matice získanej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu a diagonálnej konštantnej matice.

Jedná sa o portfóliový estimátor analogický k estimátoru z bodu 6, avšak matica s konštantnými koreláciami je pre porovnanie vynechaná z portfólia. Ide opäť o experimentálny estimátor, ktorý sa v dostupnej literatúre neuvádza.

9. Rovnomerne vážené portfólio estimátorov zložené z výberovej matice, matice vytvorenej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu a diagonálnej konštantnej matice získanej z výberovej matice.

Účelom tohto pokusného estimátora je preveriť, či môže portfólio spájajúce rovnomerne vážené estimátory s exponenciálne váženými estimátormi dosiahnuť nižšiu chybu odhadu ako spomínané dve skupiny estimátorov. Estimátor sa v dostupnej literatúre nevyskytuje.

Pre účely výpočtu všetkých vyššie uvedených estimátorov variančno-kovariančnej matice boli použité historické týždenné percentuálne zmeny cien jednotlivých sektorových indexov, vypočítané pomocou štandardnej konvencie:

$$r_{it} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1, \quad (84)$$

kde

r_{it} je výnos i -teho aktíva v čase t

$P_{i,t}$ je cena i -teho aktíva v čase t

V literatúre sa okrem uvedenej konvencie často vyskytuje logaritmická konvencia výpočtu výnosov, ktorá súvisí s predpokladom spojitého úročenia aktív. Logaritmický výnos sa v praxi často aplikuje pre jeho výhodné teoretické vlastnosti v spojení s predpokladom normálneho rozdelenia výnosov (Alexander, 2008a, s. 24), avšak v prípade týždňových údajov Alexander (2008b) odporúča používanie štandardnej konvencie (Alexander, 2008b, s. 101). Logaritmické výnosy sú vhodné pri relatívne malých percentuálnych zmenách, avšak v danom základnom súbore sa vyskytujú aj extrémne hodnoty vývoja trhov z roku 2008. Týždenné zmeny sú v ojedinelých prípadoch aj v desiatkach percent, čo by pri použití logaritmických výnosov spôsobilo, že by straty za dlhšie obdobie mohli presiahnuť 100%.

Postup testovania odhadov variančno-kovariančnej matice môžeme zapísať pomocou nasledovných krokov:

Krok 1 – Výpočet všetkých deviatich estimátorov variančno-kovariančnej matice. Použije sa 52 najstarších historických hodnôt.

Krok 2 – Určenie optimálneho GMV portfólia pomocou vzťahu (61) a zaznamenanie jeho výkonnosti za obdobie 1 týždňa (investičné obdobie) nasledujúceho bezprostredne po období, z ktorého boli údaje použité pre výpočet jednotlivých estimátorov (výpočtové obdobie).

Krok 3 – Kroky 1 a 2 sa zopakujú pre všetky časové obdobia v základnom súbore, pričom dĺžka výpočtového a investičného obdobia zostáva nemenná. Pri týždňovom investičnom

období a 52-týždňovom výpočtovom období sme získali celkovo 903 pozorovaných hodnôt výnosu GMV portfólia pre každý estimátor²².

Krok 4 - Štandardné odchýlky výnosov GMV portfólií pre jednotlivé estimátory sa porovnávajú vzájomne medzi sebou a určí sa poradie estimátorov. Čím nižšia je štandardná odchýlka nameraných výnosov, tým presnejší odhad poskytuje estimátor pri danej vzorke údajov.

Krok 5 – Pomocou štatistického testu (F-test) určíme, či je rozdiel rozptylu výnosov GMV portfólií generovaných alternatívnymi estimátormi voči rozptylu GMV portfólia generovaného výberovou maticou štatisticky významný.

Krok 6 – Celý postup sa opakuje pre 156-týždňové a 260-týždňové výpočtové obdobie, ako aj pre 4-týždňové, 13-týždňové a 26-týždňové investičné obdobie.

Výsledky testovania uvedených estimátorov variančno-kovariančnej matice sú k dispozícii v kapitole 7.1.

²² Pri výberovej matici a redukovanom estimátore dostaneme pri 52-týždňovom výpočtovom období a 1-týždňovom investičnom období 955 pozorovaní, avšak pre porovnateľnosť so zvyšnými estimátormi vynechávame 52 týždňov potrebných pre prvý odhad rozptylu chýb jednofaktorového modelu.

6 Výber optimálneho portfólia

Základným motívom pre vytvorenie Black-Littermanovho modelu bola snaha o odstránenie známych problémov spojených s využitím klasického Markowitzovho modelu výberu portfólia. Pozornosť autorov sa však zamerala primárne na vstupy do modelu výberu portfólia, pretože kvalita vstupov je v modeli kľúčová. Samotný Markowitzov model je teoreticky veľmi silný, avšak v praxi sa v štandardnej podobe uplatňoval minimálne. Black-Littermanov model poskytuje konzistentné odhady vstupov pre optimalizáciu, zahŕňa neistotu a očakávania investorov, a zároveň implicitne predpokladá, že dlhodobým a spoločným cieľom všetkých investorov je investovanie do trhového portfólia, t.j. že referenčným indexom je trhové portfólio. Tento predpoklad sa prejavuje tým, že pri absencii subjektívnych očakávaní model generuje trhom implikované výnosy. Ak na tieto implikované výnosy aplikujeme Markowitzovu optimalizáciu, výsledkom je trhové portfólio.

Predpoklad výberu konkrétneho referenčného indexu je najmä v investičnej praxi úzko spätý s pojmom aktívne riziko (*tracking error*). Ide o pomerne bežný koncept hodnotenia rizika aktívnej správy finančných investícií. Z hľadiska voľby metódy optimalizácie portfólia sa preto javí vhodné využitie metód optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko. Vychádzajúc aj z potrieb aplikačnej časti dizertačnej práce ďalej uvádzame najnovšie teoretické poznatky práve z oblasti optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko.

6.1 Optimalizácia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko

Aktívne riziko je definované ako volatilita odchýlok výnosov portfólia od výnosu podkladového aktíva, trhového portfólia alebo všeobecne referenčného indexu²³. Cieľom

²³ Investiční manažéri pri správe podielových fondov a podobných portfólií často definujú maximálnu prípustnú hodnotu aktívneho rizika, zvyčajne napríklad na úrovni 2% alebo 5% ročne. Ako referenčný index obvykle slúži vývoj určitého finančného indexu, alebo kombinácie finančných indexov.

investora môže byť analogicky ako pri Markowitzovom modeli minimalizácia aktívneho rizika pre určitú zvolenú hodnotu očakávaného dodatočného výnosu nad výnos referenčného indexu, alebo maximalizácia výnosu portfólia s obmedzením maximálnej prípustnej hodnoty aktívneho rizika²⁴. Problém minimalizácie rozptylu odchýlok výnosov portfólia od výnosov referenčného indexu (t.j. druhej mocniny aktívneho rizika) za podmienky 100%-ného zainvestovania a explicitne stanoveného očakávaného dodatočného výnosu portfólia nad výnos referenčného indexu sformuloval a vyriešil Roll (1992). Investor tu rieši nasledovnú úlohu matematického programovania:

$$\min_{\mathbf{x}} TE^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \quad (85)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{r} = R \quad (86)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 0 \quad (87)$$

kde

$\mathbf{w}_p$ je vektor veľkosti $N \times 1$ reprezentujúci váhy N aktív v aktívnom portfóliu, $\mathbf{w}_B$ je analogický vektor váh referenčného indexového portfólia,

$\mathbf{x} = \mathbf{w}_p - \mathbf{w}_B$ je vektor aktívnych váh, t.j. odchýlok od referenčného indexu,

TE^2 je rozptyl výnosov aktívneho portfólia²⁵,

$\mathbf{r}$ je vektor očakávaných výnosov všetkých aktív v aktívnom portfóliu,

R je očakávaný dodatočný výnos aktívneho portfólia nad výnos referenčného indexu

$\mathbf{e}$ je jednotkový vektor rozmeru $N \times 1$

Riešenie tejto úlohy, ktoré poskytuje vektor optimálnych aktívnych váh $\mathbf{x}^*$ a vektor váh optimálneho aktívneho portfólia $\mathbf{w}_p^*$, môžeme vyjadriť nasledovným spôsobom:

²⁴ Portfólio, ktorého cieľom je dlhodobo dosahovať vyšší výnos ako stanovený referenčný index prostredníctvom aktívnej správy aktív sa zvykne označovať ako aktívne riadené portfólio, alebo iba aktívne portfólio. Portfólio presne kopírujúce určitý index alebo kombináciu indexov (referenčný index) sa zvykne nazývať referenčné alebo pasívne riadené portfólio.

²⁵ Aktívne riziko (TE) je odmocninou výrazu $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$.

$$\mathbf{x}^* = \frac{R}{R_1 - R_0} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0), \quad (88)$$

$$\mathbf{w}_P^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{w}_B, \quad (89)$$

kde

$\mathbf{w}_0$ je vektor váh aktívneho portfólia s minimálnym rozptylom,

$\mathbf{w}_1$ je vektor váh portfólia, ktoré leží v priestore očakávaného výnosu a rozptylu na priesečníku priamky pretínajúcej portfólio s minimálnym rozptylom a pôvodné aktívne portfólio s hranicou efektívnych portfólií,

R_0 a R_1 sú očakávané výnosy portfólií s váhami $\mathbf{w}_0$ a $\mathbf{w}_1$.

Portfóliá s váhami $\mathbf{w}_0$ a $\mathbf{w}_1$ a im prislúchajúce očakávané výnosy R_0 a R_1 môžeme na základe poznatkov z Markowitzovho modelu vyjadriť s využitím konštánt a , b , c a d nasledovným spôsobom:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{e}}{c}, \quad \mathbf{w}_1 = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{r}}{b}, \quad (90)$$

$$R_0 = \frac{b}{c}, \quad R_1 = \frac{a}{b}, \quad (91)$$

pričom pre konštanty a , b , c a d využívané aj v ďalšom texte platia nasledovné vzťahy:

$$a = \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{r}, \quad (92)$$

$$b = \mathbf{r}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}, \quad (93)$$

$$c = \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}, \quad (94)$$

$$d = a - \frac{b^2}{c} > 0. \quad (95)$$

Aj keď riešenie dané vzťahmi (88) a (89) je vzhľadom na zadanie úlohy (85), (86) a (87) optimálne, Roll (1992) poukazuje na jeho zjavné nedostatky. Predovšetkým toto riešenie vôbec nezávisí od referenčného indexu, čo v praxi znamená, že dvaja investiční manažéri s rovnakými očakávaniami a rôznymi referenčnými indexmi by pri rovnakej množine

dostupných aktív postupovali rovnako. Ďalším problémom je, že uvedené riešenie neposkytuje optimálne portfólio v zmysle Markowitzovho modelu, t.j. optimálne portfólio zo vzťahu (88) a (89) neleží na hranici efektívnych portfólií. Navyše je toto portfólio celkovo rizikovejšie ako referenčný index a vykazuje vyšší β – koeficient. Všeobecne uvedený postup ignoruje absolútne riziko portfólia. Roll (1992) navrhol v tejto súvislosti použitie dodatočnej podmienky na celkový β – koeficient portfólia s cieľom odstránenia nedostatkov postupu.

Ďalším z autorov, ktorý významne prispel k rozvoju teoretických poznatkov v oblasti optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko je Jorion (2003). Jorion ponecháva hodnotu aktívneho rizika fixnú a pomocou zmeny podmienky pre celkové riziko portfólia generuje množinu optimálnych portfólií nazvanú hranica konštantného aktívneho rizika (*constant tracking error frontier*). Táto množina má v priestore očakávaného výnosu a rozptylu tvar elipsy. Autor ďalej popisuje vlastnosti spomínanej elipsy a odvodzuje postup pre určenie optimálneho portfólia, pričom odporúča výber takého portfólia z množiny portfólií na hranici konštantného aktívneho rizika, ktoré má rovnaké celkové riziko (rozptyl) ako referenčný index. Nastavením aktívneho rizika na určitú vhodnú hodnotu je dokonca možné pri uvedenom postupe dosiahnuť také optimálne portfólio, ktoré bude ležať na hranici efektívnych portfólií generovanej Markowitzovou optimalizáciou, a zároveň bude mať rovnaké celkové riziko (rozptyl) ako referenčný index.

Čiastočnou nevýhodou postupu je potreba určenia vhodnej výšky aktívneho rizika a obmedzenia celkovej volatility portfólia. V prípade nesprávne zvolenej hodnoty aktívneho rizika (príliš vysokej), ako aj pri absencii obmedzenia na celkové riziko, môže byť optimálne portfólio rizikovejšie ako referenčný index, a dokonca množina optimálnych portfólií nemusí obsahovať portfólio referenčného indexu. Poznatky Joriona boli okrem iného využité napríklad aj v práci Palombu (2006), kde sa postup uplatnil pri optimalizácii portfólia v súvislosti s aplikáciou Black-Littermanovho modelu.

Medzi najnovšie významné teoretické príspevky v oblasti optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko patrí predovšetkým práca Bertranda (2008). Autor v tejto práci uvádza elegantné a pritom relatívne jednoduché riešenie problému, pričom toto riešenie netrpí problematickými vlastnosťami známymi z prác Rolla (1992) a Joriona (2003). Úloha optimalizácie portfólia je sformulovaná nasledovne:

$$\max_{\mathbf{w}_P} U = \mathbf{w}_P^T \mathbf{r} - \frac{\phi}{2} \mathbf{w}_P^T \Sigma \mathbf{w}_P, \quad (96)$$

$$\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} = TE^2, \quad (97)$$

$$\mathbf{w}_P^T \mathbf{e} = 1, \quad (98)$$

kde

U je účelová funkcia užitočnosti investora,

ϕ je hraničná miera substitúcie očakávaného výnosu a rozptylu portfólia, inak nazývaná aj riziková averzia²⁶,

TE je zvolená hodnota aktívneho rizika.

Podmienka (97) reprezentuje obmedzenie na výšku aktívneho rizika (TE). Cieľom úlohy je maximalizácia funkcie užitočnosti vo vzťahu (96) pri stanovených obmedzeniach na aktívne riziko a 100%-né zainvestovanie. Takto postavená úloha má podľa Bertranda nasledovné riešenie:

$$\mathbf{w}_P^{**} = \mathbf{w}_B + \frac{1}{\phi + \lambda} (-\phi \mathbf{w}_B + \Sigma^{-1} (\mathbf{r} - \mu \mathbf{e})), \quad (99)$$

pričom platia vzťahy

$$\phi + \lambda = \frac{\sqrt{P(\phi)}}{TE}, \quad (100)$$

$$P(\phi) = \phi^2 (\sigma_B^2 - \sigma_0^2) - 2\phi(R_B - R_0) + d, \quad (101)$$

$$\mu = \frac{b - \phi}{c} = R_0 - \phi \sigma_0^2, \quad (102)$$

kde

²⁶ Vo vzťahoch (23) a (24) je parameter označený ako δ . Vyskytuje aj pri reverznej optimalizácii v Black - Littermanovom modeli (kapitola 4.2.2).

$\sigma_0^2 = \frac{1}{c}$ je očakávaný rozptyl portfólia s globálnym minimálnym rozptylom,

σ_B^2 je očakávaný rozptyl referenčného indexu.

Vzťah (99) je možné preformulovať aj do nasledujúceho tvaru

$$\mathbf{w}_P^{**} = \mathbf{w}_B + \frac{TE}{\sqrt{P(\phi)}} (-\phi \mathbf{w}_B + b \mathbf{w}_1 - (b - \phi) \mathbf{w}_0) \quad (103)$$

Na rozdiel od Joriona, ktorý uvažuje s fixnou hodnotou aktívneho rizika a mení celkové riziko portfólia, Bertrand generuje množinu optimálnych portfólií prostredníctvom zmien parametra ϕ rizikovej averzie, ktorý môže nadobúdať hodnoty z intervalu $(0, \infty)$. Táto množina má v priestore očakávaného výnosu a rozptylu tvar hyperboly, ktorá vždy pretína portfólio referenčného indexu. Bertrand nazýva takúto množinu optimálnych portfólií izo-averzná hranica (*iso-aversion frontier*). Výhodou oproti formulácii Joriona aj Rolla je fakt, že výsledkom optimalizácie sú portfóliá, ktoré sú bližšie k hranici efektívnych portfólií a majú obvykle nižšie celkové riziko (s výnimkou extrémnych hodnôt aktívneho rizika). To je oproti postupom v prácach Rolla (1992) a Joriona (2003) rozdiel, pretože tu boli potrebné obmedzenia na celkové riziko portfólia, napríklad na úrovni referenčného indexu. Keďže investori často implicitne preferujú nižšie celkové riziko, je voľba postupu podľa Bertranda (2008) opodstatnená.

Bertrand sa ďalej venuje aj problému nastavenia parametra rizikovej averzie ϕ , pričom odvodzuje tvrdenie, že každá izo-averzná hranica má jediný bod dotyku s hranicou efektívnych portfólií (s výnimkou prípadu $\phi=0$). Pre tento bod dotyku zároveň platí vzťah²⁷

$$TE = \frac{\sqrt{P(\phi)}}{\phi}. \quad (104)$$

²⁷ Tento vzťah bol v pôvodnej práci Bertranda (2008) uvedený chybné ako $TE = \frac{P(\phi)}{\phi}$.

Izo-averzná hranica, ktoré je tangenciálna s hranicou efektívnych portfólií v bode s rovnakým rozptylom ako referenčný index, je definovaná nasledovnou optimálnou hodnotou parametra ϕ :

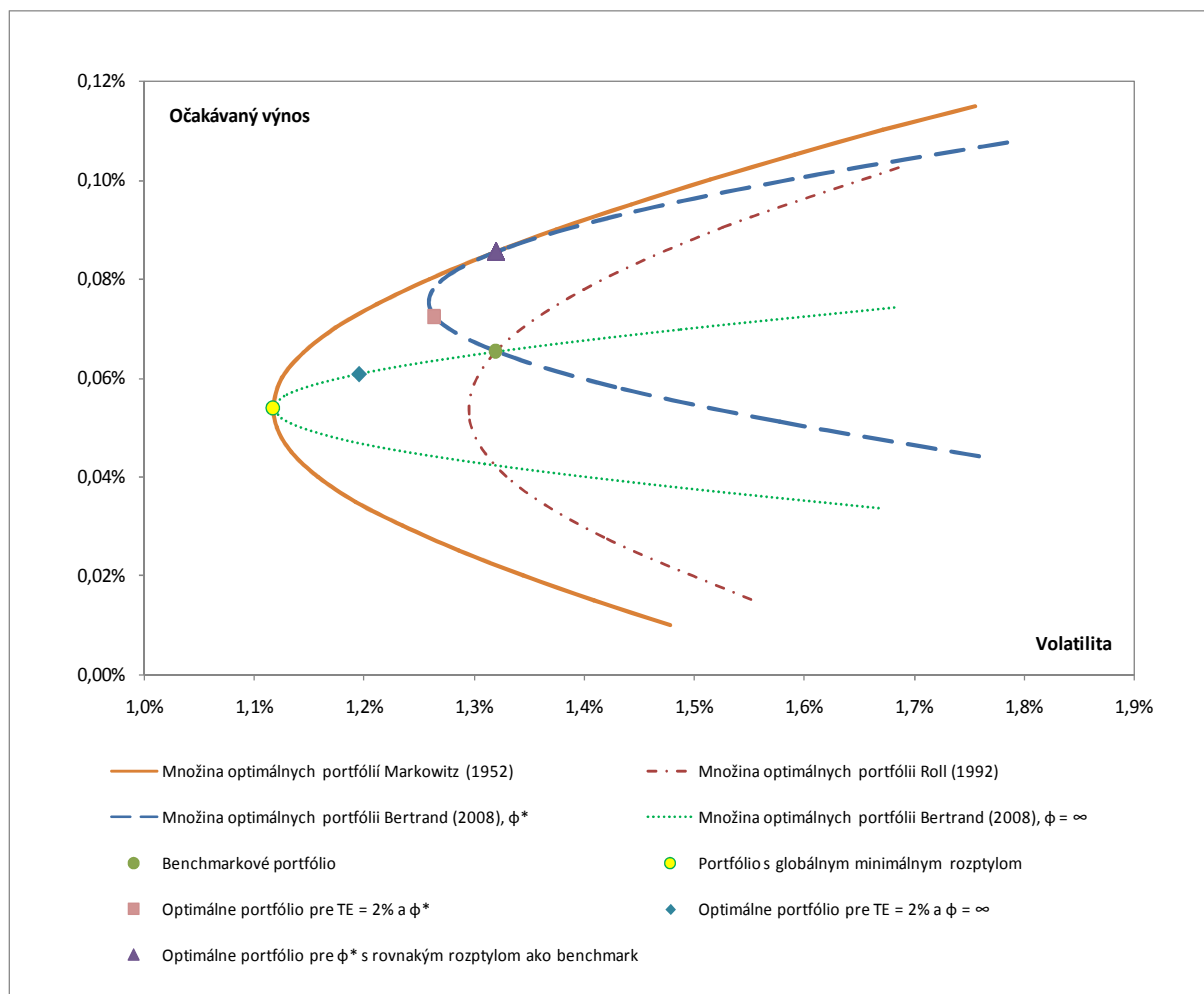
$$\phi^* = \sqrt{\frac{d}{\sigma_B^2 - \sigma_0^2}} \quad (105)$$

Ak dosadíme vzťah (105) do vzťahu (104), získame optimálne portfólio v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko, ktoré zároveň leží na hranici efektívnych portfólií v priestore očakávaný výnos – rozptyl a má rovnaký rozptyl ako referenčný index. Toto portfólio však môže vykazovať vysoké aktívne riziko, preto v praxi investor zväčša stanovuje obmedzenie na výšku aktívneho rizika explicitne.

Parameter ϕ nemusí mať nevyhnutne hodnotu zo vzťahu (105), investor si ho môže zvoliť aj podľa vlastných preferencií. V prípade, že $\phi = 0$, izo-averzná hranica nemá bod dotyku s hranicou efektívnych portfólií a je totožná s množinou optimálnych portfólií z práce Rolla (1992). Ak naopak $\phi = \infty$, izo-averzná hranica má bod dotyku s hranicou efektívnych portfólií v bode reprezentujúcom portfólio s globálnym minimálnym rozptylom.

Ak uvažujeme o využití uvedeného postupu pre optimalizáciu portfólia na základe očakávaných výnosov a rizika z Black-Littermanovho modelu, použitie vzťahu (105) sa javí ako ideálne. Celkový počet vstupov do úlohy výberu optimálneho portfólia sa tým redukuje, keďže riziková averzia referenčného indexu je vopred definovaná parametrom δ zo vzťahov (33) a (34).

Obrázok 1 - Optimálne portfóliá v priestore očakávaný výnos - volatilita



Obrázok 1 znázorňuje hranicu efektívnych portfólií v priestore očakávaného výnosu a volatility (štandardnej odchýlky výnosov), ako aj izo-averzné hranice pre rôzne hodnoty rizikovej averzie. Zároveň sú na obrázku vyznačené optimálne portfóliá pre rôzne nastavenia obmedzenia na aktívne riziko. Obrázok je vytvorený na základe skutočných finančných údajov použitých v praktickej časti tejto práce, avšak aj napriek tomu korešponduje so znázorneniami v práci Bertranda (2008)²⁸.

Optimalizácia pomocou Bertrandovej metódy je teoreticky veľmi efektívna a zároveň intuitívna. Nakoľko ide o relatívne nedávno publikovaný postup, otázkou a výzvou zostáva jeho uplatnenie v praxi. Cieľom autora je využitie metódy a overenie jej aplikovateľnosti pri praktickej optimalizácii portfólií s využitím vstupov vygenerovaných pomocou Black-Littermanovho modelu.

²⁸ V prípade očakávaných výnosov aj volatility sú na rozdiel od Bertranda použité týždenné údaje.

6.2 Metodológia odhadu vstupných parametrov pre optimalizáciu portfólia

Vstupné parametre pre optimalizáciu portfólia tvorí v autorom skúmanom prípade vektor očakávaných výnosov a variančno-kovariančná matica všetkých aktív. Odhadom týchto dvoch parametrov je v akademickej literatúre venovaná veľká pozornosť, pretože nekvalitné odhady vedú k nekvalitnej optimalizácii, ktorá vykazuje neuspokojivé výsledky v praktických aplikáciách. Jedným zo spôsobov, ako skvalitniť odhad spomínaných parametrov, je využitie Black-Littermanovho modelu, resp. alternatívneho BLM modelu. V predkladanej práci využívame pre odhad vstupných parametrov práve poznatky získané štúdiom BLM modelu.

Keďže odhad variančno-kovariančnej matice nie je súčasťou BLM (resp. Black-Littermanovho) modelu, testujeme viaceré moderné metódy odhadu popísané v kapitole 5. Metódy s najväčšou presnosťou odhadu ďalej využívame na odhad variančno-kovariančnej matice Σ slúžiacej ako vstup pre BLM model.

Vektor očakávaných výnosov pre uvažované portfólio sektorových indexov získame v dvoch krokoch. Najprv s využitím reverznej optimalizácie určíme vektor trhom implikovaných výnosov a do neho následne s pomocou teoretickej základne BLM modelu zakomponujeme subjektívne očakávania z momentových stratégií. Výsledkom je vektor zmiešaných očakávaných výnosov a zmiešaná variančno-kovariančná matica.

Za trhové portfólio v danom prípade považujeme index S&P 500, ktorý je referenčným indexom pre všetky uvažované sektorové indexy. Vektor π trhom implikovaných výnosov nad bezriziková sadzbu určíme s využitím matice Σ a vektora $\mathbf{w}_m$ trhových váh jednotlivých sektorov pomocou reverznej optimalizácie (vzťah (34) v kapitole 4.2.2). Prvky vektora $\mathbf{w}_m$ určíme v každom období ako percentuálne podiely príslušnej trhovej kapitalizácie jednotlivých sektorových indexov na celkovej trhovej kapitalizácii indexu S&P

500. Za hodnotu parametra rizikovej averzie dosadíme $\delta=4$ (pozri diskusiu v kapitole 4.6). Vektor π potom ďalej upravujeme o subjektívne očakávania.

Pri vytvorení vektora $\mathbf{q}$ výnosov subjektívnych očakávaní vychádzame z postupu uvedeného v práci Meucciho (2008) (pozri vzťah (44) v kapitole 4.2.3), ale čiastočne ho upravujeme pre potreby skúmanej vzorky údajov. V prípade, keď využívame ako subjektívne očakávania len kvalitatívne očakávania vyjadrené vektorom znáмок pridelených na základe určitého zoradovacieho kritéria, matica $\mathbf{P}$ vyjadrujúca váhy jednotlivých aktív v jednotlivých očakávaniach má rozmer $N \times N$. Vektor znáмок (označme ho $\mathbf{v}$) je totiž v skúmanom prípade N - rozmerný, keďže známky sú vygenerované pre všetkých desať sektorových indexov. Jeho prvky sú celočíselné hodnoty z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$. Za vektor kvalitatívnych očakávaní η zo vzťahu (44) nedosadzujeme priamo vektor znáмок $\mathbf{v}$. Jednotlivé prvky vektora $\mathbf{v}$ pred dosadením štandardizujeme tak, že od každej známky odpočítame aritmetický priemer všetkých znáмок a predelíme ju štandardnou odchýlkou všetkých znáмок. Výsledné hodnoty pre násobíme konštantou c zo vzťahu (42) a dosadíme za prvky vektora η . Vo vzťahu (44) potom nahradíme výraz $\mathbf{P}\Sigma\mathbf{P}^T$ variančno-kovariančnou maticou subjektívnych očakávaní Ω , pre ktorej zostrojenie využívame taktiež vzťah (42). Vzťah pre výpočet jednotlivých prvkov vektora $\mathbf{q}$ teda môžeme napísať nasledovne

$$q_k = (\mathbf{P}\pi)_k + c \frac{(v_k - \bar{v})}{\sigma_v} \sqrt{(\Omega)_{kk}} = (\mathbf{P}\pi)_k + \eta_k \sqrt{(\Omega)_{kk}}, \text{ pre } k = 1, \dots, N, \quad (106)$$

kde

v_k je k -ty prvok vektora $\mathbf{v}$,

$\bar{v}$ je aritmetický priemer všetkých prvkov vektora $\mathbf{v}$,

σ_v je štandardná odchýlka všetkých prvkov vektora $\mathbf{v}$.

$(\Omega)_{kk}$ je k -ty diagonálny prvok matice Ω

Konštanta c reprezentuje spoľahlivosť odhadov a Meucci ju vo vzťahu (44) nevyužíva. Ak sa však konštanta nepoužije, výsledné očakávania sú v praxi extrémne a ich použitie vedie k extrémnym a neintuitívnym výsledkom (pozri tiež diskusiu v kapitole 4.6).

Vyššie popísané postupy boli použité pre výpočet vstupnej variančno-kovariančnej matice Σ , vektora implikovaných výnosov nad bezriziková sadzbu π , variančno-kovariančnej matice subjektívnych očakávaní Ω a vektora očakávaných výnosov subjektívnych očakávaní q . Môžeme teda pristúpiť k procedúre, na základe ktorej získame výsledný vektor zmiešaných očakávaných výnosov μ_{BLM} a zmiešanú variančno-kovariančnú maticu Σ_{BLM} . Využijeme k tomu vzťahy (57) a (58) z Meucciho alternatívnej špecifikácie Black-Littermanovho modelu. Získané zmiešané očakávané výnosy a variančno-kovariančnú maticu použijeme ďalej pri optimalizácii portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko. Uvedené výpočty boli uskutočnené pre všetky obdobia v základnom súbore, pre ktoré existovali vstupné údaje.

6.3 Metodológia optimalizácie portfólia a testovanie jeho výkonnosti

Klasické momentové stratégie sa obvykle nezaoberajú optimalizáciou portfólia, nakoľko cenové momentum neposkytuje priamo kvantitatívne odhady očakávaných výnosov jednotlivých aktív, ale iba relatívne kvalitatívne očakávania. Napriek tomu momentum preukázateľne obsahuje určité cenné informácie o očakávanom vývoji aktív, a preto by bolo chybou nevyužiť tieto informácie pri správe portfólia. V predkladanej práci sa zaoberáme výskumom zameraným na portfóliá spravované s cieľom sledovať a prekonávať určitý finančný index (referenčný index) pri zachovávaní definovanej maximálnej volatility odchýlok výnosov portfólia od výnosov referenčného indexu (aktívne riziko). V tejto súvislosti sme sa zamerali na najnovšie poznatky z oblasti optimalizácie portfólií v priestore stredná hodnota – aktívne riziko.

Vektor očakávaných výnosov a variančno-kovariančnú maticu získané postupom popísaným v predchádzajúcej kapitole využívame ako vstupy v úlohe optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko podľa špecifikácie v práci Bertranda (2008). Úloha je zadefinovaná vzťahmi (96) až (98) v kapitole 6.1 a jej cieľom je nájsť takého vektora váh aktív v portfóliu w_p , ktorý maximalizuje funkciu užitočnosti a spĺňa zadané ohraničenia pre aktívne riziko. Súčet všetkých prvkov vektora sa musí rovnať 1, čo

predstavuje plné zainvestovanie zverenej sumy a je v súlade s predpokladom aktívneho riadenia portfólia s ohľadom na definovaný referenčný index. Riešenie úlohy je uvedené vo vzťahoch (99) až (102). Parameter rizikovej averzie ϕ zo vzťahu (96) optimalizujeme vždy osobitne pre každé nové nastavenie vstupných parametrov na základe vzťahu (105). Výsledný vektor $\mathbf{w}_p^{**}$ definuje optimálne portfólio. Postup sa opakuje pre všetky časové obdobia, pre ktoré sú k dispozícii vstupné údaje. Pri takto formulovanej optimalizácii môžeme pracovať iba so vstupnými údajmi, ktoré už zohľadňujú externé subjektívne očakávania, pretože trhom implikované výnosy vychádzajú z predpokladu optimálnosti trhového portfólia. Celý dodatočný prínos oproti referenčnému indexu je preto závislý od kvality externých vstupných údajov.

V záverečnej fáze výskumu získavame na základe vyššie uvedeného postupu optimálne portfóliá. Aby sme preverili, či je použitý súbor metód v praxi účinný, budeme analogicky ako pri testovaní výnosnosti momentových stratégií skúmať výkonnosť a zároveň aj volatilitu optimálnych portfólií v rozličných bezprostredne nasledujúcich časových obdobiach (1, 4, 13, 26 a 52 týždňov). Výkonnosť a volatilitu portfólií porovnáme s výkonnosťou a volatilitou trhového portfólia všetkých sektorových indexov (referenčného indexu) a naivného portfólia. Naivné portfólio zostrojíme ako portfólio piatich sektorových indexov, pre ktoré sú subjektívne očakávania pozitívne. Váhu jednotlivých sektorových indexov v naivnom portfóliu určíme ako podiel trhovej kapitalizácie daného sektorového indexu voči súčtu trhových kapitalizácií vybraných piatich indexov s pozitívnymi očakávaniami. Výkonnosť a volatilitu optimálnych portfólií budeme zároveň posudzovať pri alternatívnych nastaveniach hodnoty aktívneho rizika (TE vo vzťahu (97)), konkrétne pre hodnoty 1%, 2% a 5% ročne, ktoré zodpovedajú typickým limitom pri správe portfólií princípom aktívneho prekonávania referenčného indexu (aktívneho riadenia).

7 Aplikácia cenovej hybnosti v Black-Littermanovom modeli výberu portfólia

Nasledujúca časť práce je venovaná výsledkom praktického výskumu s použitím historických hodnôt sektorových indexov spadajúcich pod súhrnný americký akciový index S&P 500. Údaje sú dostupné s týždňovou frekvenciou od septembra 1989 do januára 2009. V úvodnej časti zhrnieme výsledky testovania rozličných odhadov variančno-kovariančnej matice na základe ex-post vývoja GMV portfólií a v diskusii sa pokúsime identifikovať najvhodnejší estimátor pre ďalšie použitie v optimalizačnom modeli. Po výbere estimátora variančno-kovariančnej matice nasleduje štúdia úspešnosti viacerých alternatívnych investičných stratégií vychádzajúcich z cenovej hybnosti aktív. V nej sa pokúsime identifikovať momentové stratégie, ktoré v minulosti vykazovali ekonomicky a štatisticky významné výnosy, a otestovať ich účinnosť v rôznych časových obdobiach. Najúspešnejšie stratégie poslúžia ako subjektívne vstupy v tretej časti praktického experimentu, ktorej náplňou je aplikácia alternatívnej špecifikácie Black-Littermanovho modelu v kombinácii s Bertrandovým modelom optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko. Výsledné zhodnotenie a riziko optimalizovaných portfólií porovnávame s trhovým portfóliom a „naivným“ portfóliom.

7.1 Výsledky testovania odhadov variančno-kovariančnej matice

Testovanie kvality alternatívnych estimátorov variančno-kovariančnej matice bolo založené na postupe uvedenom v kapitole 5.5. Princíp tohto postupu spočíva v konštrukcii GMV portfólií pre každý estimátor v určitom časovom okamihu a vo vyhodnocovaní reálne vykázaného rizika za bezprostredne nasledujúce časové obdobie. Keďže GMV portfóliá teoreticky predstavujú portfóliá s najnižším možným rizikom (pri absencii bezrizikového aktíva), estimátor s najnižším nameraným rozptylom výnosov GMV portfólia predstavuje

zároveň estimátor s najnižšou celkovou chybou odhadu. Celkovo sme skúmali deväť alternatívnych estimátorov variančno-kovariančnej matice:

1. Výberová variančno-kovariančná matica (VM)
2. Redukovaný estimátor výberovej variančno-kovariančnej matice (SVM)
3. Exponenciálne vážený estimátor variančno-kovariančnej matice (EVM)
4. Redukovaný estimátor exponenciálne váženej variančno-kovariančnej matice (SEVM)
5. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer výberovej matice, matice získanej pomocou jednofaktorového modelu, matice s konštantnými koreláciami a diagonálnej konštantnej matice (M4)
6. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer exponenciálne váženej matice, matice získanej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu, matice s konštantnými koreláciami a diagonálnej konštantnej matice (EM4)
7. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer výberovej matice, matice získanej pomocou jednofaktorového modelu a diagonálnej konštantnej matice (M3)
8. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer exponenciálne váženej matice, matice získanej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu a diagonálnej konštantnej matice (EM3)
9. Portfólio estimátorov vytvorené ako aritmetický priemer výberovej matice, jej prislúchajúcej diagonálnej konštantnej matice a matice získanej pomocou exponenciálneho jednofaktorového modelu (ZM3)

Celý základný súbor (ZS) sme rozdelili na dve vzorky. Vzorka A reprezentuje 300 časovo najmladších týždenných pozorovaní (t.j. približne 6 rokov do roku 2009), zvyšné pozorovania sú zahrnuté vo vzorke B. Pri kalkuláciách sa uplatnili výpočtové obdobia s rozličnou dĺžkou N , konkrétne 52 týždňov, 156 týždňov a 260 týždňov. Vývoj portfólií sme následne skúmali pre rozličné investičné obdobia dĺžky T , konkrétne 1 týždeň, 4 týždne, 13 týždňov, 26 týždňov a 52 týždňov. V ďalšom texte tejto kapitoly budeme hovoriť o N/T testoch pre rozličné estimátory (VM, SVM, EVM, SEVM, M4, EM4, M3, EM3 a ZM3).

V nasledujúcej Tabuľke 2 uvádzame priemerné umiestnenie jednotlivých estimátorov zahŕňajúce všetky uskutočnené testy. Jednotlivé estimátory majú priradené hodnoty

reprezentujúce ich relatívne umiestnenie, pričom hodnota 1 znamená najnižší vykázaný rozptyl a hodnota 9 najvyšší²⁹. Tabuľka je členená podľa skúmaných vzoriek.

Tabuľka 2 - Priemerné umiestnenie estimátorov naprieč vzorkami

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie)	naprieč vzorkami		
	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	2	1	7
Redukovaná výberová matica (SVM)	3	4	3
Exponenciálne vážená matica (EVM)	6	5	6
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	1	2	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	4	3	8
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	6	7	2
Mix troch estimátorov (M3)	9	8	9
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	8	9	4
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	4	5	5

Z tabuľky vidíme, že najúspešnejším estimátorom naprieč celým základným súborom (ZS) je SEVM, nasledovaný estimátormi VM a SVM. Alternatívne portfóliá estimátorov boli menej úspešné, pričom v priemere najvyšší rozptyl vykazovali GMV portfóliá zostrojené na základe estimátorov M3 a EM3. Pri pohľade na výsledky vo vzorke B (údaje od roku 1989 približne do roku 2002) vidíme určité zmeny. Rovnako ako v prípade základného súboru má v priemere najnižšiu chybu estimátor SEVM, avšak VM sa prepadá až na siedme miesto. Dobré výsledky tu vykazuje EM4 a SVM, a naopak najväčšie rozptyly výnosov GMV portfólií zaznamenali estimátory M3 a M4. V prípade vzorky A bola paradoxne najúspešnejšia výberová matica VM. Všetky ostatné estimátory zaznamenali v priemere horšie hodnoty, hoci aj tu sa darilo estimátoru SEVM. Vyššie chyby odhadu vykazovali opäť najmä portfóliové estimátory.

Celkovo môžeme skonštatovať, že pri súhrnnom hodnotení naprieč všetkými testami a vzorkami sa najviac darilo estimátoru SEVM. Pomerne dobré a robustné výsledky vykázal aj SVM estimátor. Výberovej matici VM sa nedarilo dobre odhadovať riziko najmä vo vzorke B. Z hľadiska typu estimátorov boli jednoznačne úspešnejšie redukované estimátory pred jednoduchými estimátormi VM a EVM, ako aj pred portfóliovými estimátormi. Vplyv

²⁹ Prípadný výskyt rovnakých priemerných umiestnení nie je chybou, ide o zhodne priemerné umiestnenie naprieč všetkými skúmanými N/T obdobiami.

pridania matice s konštantnými koreláciami do portfólia estimátorov môžeme vo všeobecnosti hodnotiť ako mierne pozitívny. Estimátory M4 a EM4 dosiahli lepšie výsledky ako M3 a EM3 vo všetkých vzorkách. Využitie exponenciálnych váh namiesto rovnomerných váh však celkovo neprinieslo jednoznačné výsledky. Pri prechode od vzorky B k vzorke A môžeme pozorovať určité zmeny v pozíciách, keď vo vzorke B všeobecne úspešnejšie exponenciálne vážené estimátory zaznamenávajú vo vzorke A výrazné zhoršenie v prospech estimátorov využívajúcich rovnomerné váhy minulých pozorovaní. Ide o situáciu, ktorá by mohla vyplývať z toho, že exponenciálne vážené estimátory sú citlivejšie na lokálne zmeny rizika. V roku 2008 totiž trhy opakovane zaznamenali extrémne dvojciferné medzitýždenné výkyvy, ktoré spôsobili výrazný nárast korelácií medzi jednotlivými aktívami a následné problémy s vysokou multikolinearitou jednotlivých estimátorov. Problémy sa prejavujú napríklad extrémnymi hodnotami váh pri konštrukcii GMV portfólií kvôli veľmi nízkej hodnote determinantu invertovanej matice.

Aby sme otestovali vyššie uvedenú hypotézu, v Tabuľke 3 ďalej uvádzame priemerné umiestnenie estimátorov pri vynechaní posledných 52 týždenných pozorovaní (rok 2008 a január 2009). Základný súbor a vzorka A sa tým skrátili o 52 pozorovaní.

Tabuľka 3 - Priemerné umiestnenie estimátorov naprieč vzorkami (skrátенý základný súbor)

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie) - skrátенý ZS	naprieč vzorkami		
	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	8	7	7
Redukovaná výberová matica (SVM)	2	8	3
Exponenciálne vážená matica (EVM)	4	5	6
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	1	3	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	7	1	8
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	4	4	2
Mix troch estimátorov (M3)	8	8	9
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	3	1	4
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	6	6	5

Z tabuľky vidíme, že umiestnenia jednotlivých estimátorov väčšinou vykazujú vyššiu robustnosť naprieč vzorkami, pričom platí, že všeobecne nižšie chyby odhadu vykazujú redukované estimátory a exponenciálne vážené estimátory. Aj tu je najlepším estimátorom SEVM, nasledovaný EM3 a EM4. Chyby odhadu výberovej matice VM boli nadpriemerné naprieč všetkými vzorkami, čo potvrdzuje teoretické predpoklady z akademickej literatúry.

V Tabuľke 4 ďalej uvádzame priemerné umiestnenie estimátorov pri rôznych dĺžkach výpočtových období (N=52, 156, 260) naprieč všetkými skúmanými investičnými obdobiami.

Tabuľka 4 - Priemerné umiestnenie estimátorov pri rôznych výpočtových obdobiach

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie)	podľa počtu pozorovaní pre výpočet matice (N)								
	N=52			N=156			N=260		
	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	5	1	4	1	1	5	2	1	6
Redukovaná výberová matica (SVM)	3	6	1	3	2	2	3	3	6
Exponenciálne vážená matica (EVM)	9	5	9	5	6	3	5	4	3
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	4	3	5	1	3	1	1	2	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	1	2	3	7	4	9	7	6	8
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	2	3	2	5	7	3	9	9	2
Mix troch estimátorov (M3)	6	8	6	9	8	8	8	7	8
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	8	9	8	8	9	6	6	8	3
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	7	6	6	4	4	7	4	4	5

Pri 52-týždňovom výpočtovom období sa v priemere najlepšie darilo portfóliovému estimátoru M4 a jeho exponenciálnej verzii EM4. V rámci vzorky B (staršie pozorovania) však dominoval estimátor SVM. Všeobecne najslabšie výsledky vykázal estimátor EM3, nasledovaný estimátorom EVM. Použitie metódy redukovaného odhadu malo mierne pozitívny vplyv na výsledky estimátorov, zatiaľ čo exponenciálne váhy sa príliš neosvedčili. Použitie matice s konštantnými koreláciami však v priemere znížilo chybovosť estimátorov.

Výsledky za 156-týždňové a 260-týždňové obdobie sa navzájom dosť podobajú, hoci sa líšia od 52-týždňového obdobia. Porovnanie exponenciálne vážených estimátorov s rovnomerne váženými je nejednoznačné a všeobecná úspešnosť metódy redukovaného odhadu je tiež sporná. Najúspešnejším estimátorom je podľa očakávania SEVM, tesne nasledovaný výberovou maticou VM a redukovaným estimátorom SVM. Najslabšie priemerné umiestnenie zaznamenal portfóliový estimátor M3. Pri pohľade na umiestnenie VM v rôznych vzorkách si môžeme všimnúť, že novšie údaje (vzorka A) výrazne prispeli k celkovej úspešnosti estimátora. Exponenciálne estimátory pritom boli úspešnejšie vo vzorke B, kým vo vzorke A vykázali nižšie chyby odhadu rovnomerne vážené estimátory. Dôvodom sú s veľkou pravdepodobnosťou spomínané extrémne výkyvy cien zaznamenané v roku 2008. Pre porovnanie preto opäť uvádzame tabuľku priemerného umiestnenia estimátorov pre základný súbor skrátený o 52 týždňov.

Tabuľka 5 - Umiestnenie estimátorov pri rôznych výpočtových obdobiach (skrátенý základný súbor)

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie) - skrátенý ZS	podľa počtu pozorovaní pre výpočet matice (N)								
	N=52			N=156			N=260		
	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	8	7	4	6	6	5	8	7	6
Redukovaná výberová matica (SVM)	1	9	1	2	7	2	5	6	6
Exponenciálne vážená matica (EVM)	9	5	9	3	5	3	2	3	3
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	4	4	5	1	2	1	1	2	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	3	2	3	8	2	9	6	3	8
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	2	1	2	4	1	3	9	9	2
Mix troch estimátorov (M3)	6	8	6	9	7	8	6	7	8
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	5	3	8	5	4	6	2	1	3
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	6	6	6	6	9	7	4	5	5

V Tabuľke 5 môžeme pozorovať oveľa vyššiu robustnosť priemerných výsledkov naprieč vzorkami, pričom najúspešnejšie a najmenej úspešné estimátory zostávajú rovnaké. Jasne viditeľná je aj dominancia redukovaných estimátorov pred štandardnými estimátormi (VM a EVM), exponenciálne vážených estimátorov pred rovnomerne váženými (s výnimkou EM4) a 4-maticových portfóliových estimátorov pred 3-maticovými.

Pri ďalšej analýze sa sústreďíme na priemernú úspešnosť jednotlivých estimátorov pri rôznych investičných obdobiach (T=1, 4, 13, 26 týždňov) naprieč rozličnými výpočtovými obdobiami. V Tabuľke 6 sú uvedené priemerné relatívne umiestnenia jednotlivých estimátorov.

Tabuľka 6 - Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne investičné obdobia

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie)	podľa dĺžky investičného obdobia (T)											
	T=1			T=4			T=13			T=26		
	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	2	1	6	4	2	3	3	1	8	2	1	4
Redukovaná výberová matica (SVM)	5	6	2	1	2	1	2	4	3	4	4	4
Exponenciálne vážená matica (EVM)	9	4	9	9	9	5	4	2	4	3	3	3
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	3	5	1	2	5	1	1	3	1	1	2	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	3	3	8	2	1	8	5	5	7	7	5	7
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	7	8	5	6	6	3	6	7	1	5	7	2
Mix troch estimátorov (M3)	8	8	7	7	7	6	9	7	9	9	8	9
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	5	6	3	8	8	8	8	9	4	8	9	4
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	1	2	3	5	4	7	7	6	6	5	5	7

V tabuľke sú pozorovateľné podobné charakteristiky ako v prípade priemerovania podľa výpočtových období, avšak nachádzame tu aj určité špecifiká. Pri týždňovom investičnom období sa ako najúspešnejší estimátor prejavuje zmiešaný estimátor ZM3, ktorý v doterajších

skúmaníach vykazoval skôr priemerné výsledky. Nižšiu chybu odhadu zaznamenala aj výberová matica VM, avšak opäť najmä vďaka prvenstvu vo vzorke A. Najväčšie rozptyly vykazovali výnosy GMV portfólií zostrojených na základe estimátorov M3 a EVM. Celkovo sú však výsledky za týždňové investičné obdobie málo robustné a nie je možné identifikovať všeobecne úspešnejšie estimátory.

Situácia pri 4-týždňovom investičnom období je odlišná. Prejavuje sa tu dominancia redukovaných estimátorov SVM a SEVM a darí sa aj portfóliovému estimátoru M4, aj keď najmä vďaka nízkemu rozptylu výnosov vo vzorke A. Exponenciálne vážené estimátory tu vo všeobecnosti ustupujú presnosťou rovnomerne váženým. Najhoršie umiestnenie naprieč vzorkami vykázali estimátory EM3 a EVM. Pridanie matice s konštantnými koreláciami malo priaznivý vplyv na zníženie rozptylu výnosov v investičnom období. Výsledky môžeme celkovo hodnotiť ako robustnejšie oproti týždňovému investičnému obdobiu. Portfólio troch estimátorov sa osvedčilo najmenej.

Výsledky 13-týždňového a 26-týždňového investičného obdobia majú v mnohom zhodné črty. Najúspešnejším estimátorom je v oboch prípadoch SEVM. Výberová matica VM sa v celom základnom súbore umiestnila pri oboch investičných obdobiach pomerne vysoko kvôli najnižšej chybe odhadu vo vzorke A. Celkovo môžeme podobne ako v predchádzajúcich prípadoch konštatovať dominanciu redukovaných estimátorov pred inými typmi. Porovnanie exponenciálne a rovnomerne vážených estimátorov zároveň vyznieva nejednoznačne.

V tabuľke môžeme podobne ako pri predchádzajúcich analýzach pozorovať určitú všeobecnú zmenu pri prechode zo vzorky B na vzorku A. Zatiaľ, čo vo vzorke B (staršie pozorovania) sa viac darilo exponenciálne váženým estimátorom, vo vzorke A už dosahovali rovnomerne vážené estimátory relatívne lepšie výsledky. Vzhľadom na spomínaný výskyt extrémnych hodnôt v roku 2008 preto v súlade s predošlými analýzami ponúkame aj tabuľkový prehľad priemerného umiestnenia jednotlivých estimátorov za predpokladu skrátenia základného súboru o posledných 52 týždňov.

Tabuľka 7 - Umiestnenie estimátorov pre rôzne investičné obdobia (skrátенý základný súbor)

Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne hodnoty vstupných parametrov (1=najlepšie umiestnenie, 9=najhoršie umiestnenie) - skrátенý ZS	podľa dĺžky investičného obdobia (T)											
	T=1			T=4			T=13			T=26		
	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B	ZS	A	B
Výberová matica (VM)	5	2	6	5	8	3	9	9	8	9	5	4
Redukovaná výberová matica (SVM)	1	2	2	1	9	1	4	8	3	2	8	4
Exponenciálne vážená matica (EVM)	7	9	9	3	6	5	4	1	4	2	1	3
Redukovaná exponenciálne vážená matica (SEVM)	1	1	1	2	6	1	1	2	1	1	2	1
Mix štyroch estimátorov (M4)	9	5	8	3	1	8	6	5	7	6	3	7
Mix štyroch estimátorov - exponenciálny (EM4)	6	7	5	5	3	3	2	3	1	5	4	2
Mix troch estimátorov (M3)	7	8	7	8	5	6	8	7	9	8	7	9
Mix troch estimátorov - exponenciálny (EM3)	3	2	3	8	2	8	2	3	4	2	5	4
Mix troch estimátorov - zmiešaný (ZM3)	4	6	3	7	4	7	6	6	6	7	9	7

Pri bližšom skúmaní Tabuľky 7 vidíme, že predpoklad o všeobecne relatívne nižšej priemernej chybe odhadu exponenciálnych estimátorov oproti rovnomerne váženým platí pri väčšine investičných období a vzoriek. Jediným jednoznačným výsledkom však zostáva dominancia SEVM estimátora naprieč všetkými investičnými obdobiami. Výnimku tvorí A vzorka pri 4-týždennom investičnom období, kde sa všeobecne lepšie darilo portfóliovým estimátorom. Výberová matica VM vykázala v skrátenej vzorke priemerné až podpriemerné výsledky, najmä pri dlhších investičných obdobiach.

Vyššie uvedené analýzy nezahŕňajú rozbor štatistickej významnosti výsledkov v jednotlivých testoch. Okrem umiestnenia estimátorov sme preto v každom teste skúmali, či sú rozdiely vo výsledných nameraných rozptyloch výberovej matice a alternatívnych estimátorov štatisticky významné. Kanderová a Úradníček (2007) odporúčajú pri skúmaní rozdielov rozptylov v podobných prípadoch používať metódu F-testu. Za nulovú hypotézu sme teda zvolili predpoklad, že rozptyl výnosov GMV portfólia zostrojeného z výberovej matice VM sa rovná rozptylu výnosov GMV portfólia zostrojeného pomocou vybraného alternatívneho estimátora pre konkrétny N/T test. Pri všetkých alternatívnych estimátoroch (SVM, EVM, SEVM, M4, EM4, M3, EM3 a ZM3) teda testujeme, či je rozdiel nameranej chyby odhadu oproti výberovej matici VM štatisticky významný na hladine významnosti $\alpha=5\%$ a $\alpha=10\%$.

Pri teste 52/1 sme zaznamenali iba jediný štatisticky významný výsledok na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Významne vyšší rozptyl oproti výberovej matici VM vykázal redukovaný estimátor SVM na vzorke A. Rozdiely rozptylov ostatných alternatívnych estimátorov proti výberovej matici VM boli štatisticky nevýznamné na konvenčných hladinách významnosti. Test 52/4 nepriniesol žiadne štatisticky významné rozdiely.

Najbližšie sa k zamietnutiu nulovej hypotézy priblížili estimátory M4 a EM4, ktoré mali nižší rozptyl ako výberová matica VM. Nulová hypotéza by mohla byť v daných prípadoch zamietnutá na hladine významnosti $\alpha=16\%$.

V teste 52/13 neboli vo vzorke B a v základnom súbore zaznamenané žiadne štatisticky významné výsledky. Vo vzorke A však všetky alternatívne estimátory vykázali vyššie rozptyly ako výberová matica VM a pri estimátoroch EM3 a ZM3 išlo o štatisticky významnú odchýlku na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Podobná situácia nastala aj pri teste 52/26, kde však už odchýlky alternatívnych estimátorov môžeme považovať za extrémne, pretože všetkých päť portfóliových estimátorov malo výrazne vyššie rozptyly a odchýlky oproti výberovej matici VM boli štatisticky významne na hladine významnosti $\alpha=1\%$. Estimátor SVM tiež vykázal štatisticky vyššiu chybu vo vzorke A na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Vo vzorke B neboli zaznamenané žiadne štatisticky významné rozdiely, avšak v základnom súbore sa prejavili extrémne hodnoty zistené vo vzorke A. Estimátory EM3 a ZM3 mali štatisticky významne vyššiu chybu odhadu na hladine významnosti $\alpha=1\%$, estimátor M3 na hladine významnosti $\alpha=5\%$ a estimátory M4 a EM4 na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Žiadny alternatívny estimátor v žiadnej vzorke testu 52/26 nemal nižší rozptyl ako príslušná výberová matica VM.

Pri teste 156/1 boli výsledky menej extrémne ako pri 52/26, avšak vo vzorke A zaznamenali estimátory SVM, EM4, M3 a EM3 opäť štatisticky významne vyššie chyby odhadu na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Ostatné výsledky neboli štatisticky významné. Poraziť výberovú maticu VM sa však podarilo iba estimátoru SVM v prípade vzorky B, a aj to len veľmi tesne. V prípade testu 156/4 sa výberovú maticu VM podarilo prekonať estimátorom SVM, EVM a SEVM, ale všetky rozdiely rozptylov boli opäť štatisticky nevýznamné. Výnimku tvoril len štatisticky významne vyšší rozptyl estimátora EVM vo vzorke A na hladine významnosti $\alpha=5\%$.

Pri teste 156/13 vo vzorke A opäť štatisticky významne dominuje výberová matica VM s najnižším rozptylom. Nulovú hypotézu zamietame pri estimátoroch EM4, M3, EM3 a ZM3 na hladine významnosti $\alpha=1\%$ a pri estimátore M4 na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Zároveň pri estimátoroch M3 a EM3 zamietame nulovú hypotézu aj v základnom súbore na hladine významnosti $\alpha=5\%$, resp. $\alpha=10\%$. Všetky spomínané estimátory mali v danom teste vyššiu

chybu odhadu ako VM. V základnom súbore mal nižšiu chybu odhadu len estimátor SEVM, vo vzorke B však už šesť estimátorov vykázalo nižšie chyby, aj keď štatisticky nevýznamné.

Podobné výsledky ako pri 156/13 sa prejavili aj pri teste 156/26, len s výraznejšími extrémami. Vo vzorke A sme pri všetkých portfóliových estimátoroch zamietli nulovú hypotézu pri hladine významnosti $\alpha=1\%$, pri estimátore SVM na hladine významnosti $\alpha=5\%$ a pri estimátore EVM na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Všetky alternatívne estimátory mali vyššie rozptyly ako výberová matica VM. Vo vzorke B po prvýkrát zaznamenávame štatisticky významne nižšie chyby pri estimátoroch EVM a SEVM na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Estimátor SEVM mal nižšiu chybu na hladine významnosti $\alpha=10\%$ aj pri zohľadnení celého základného súboru. Ďalej sme v základnom súbore pri estimátoroch M4, EM3 a ZM3 zamietli nulovú hypotézu na hladine významnosti $\alpha=10\%$ a pri estimátore M3 na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Všetky portfóliové estimátory mali v základnom súbore vyššie rozptyly ako výberová matica VM.

Pri teste 260/1 opäť vo vzorke A dominovala výberová matica VM, pričom nulovú hypotézu sme zamietli pri estimátore EM4 na hladine významnosti $\alpha=1\%$ a pri estimátore M3 na hladine významnosti $\alpha=10\%$ kvôli vysokým rozptylom. Rovnako aj v základnom súbore mala výberová matica najnižší rozptyl a pri estimátore EM4 bola zamietnutá nulová hypotéza na hladine významnosti $\alpha=1\%$. Vo vzorke B však malo päť estimátorov nižší rozptyl, aj keď štatisticky nevýznamný. Pri teste 260/4 mala vo vzorke B výberová matica dokonca druhý najvyšší rozptyl zo všetkých estimátorov a estimátory SVM a SEVM mali nižšiu chybu odhadu aj v celom základnom súbore. Štatisticky významné odchýlky na hladine významnosti $\alpha=5\%$ však vykázali len estimátory EVM a EM4 vo vzorke A, pričom išlo o vyššie rozptyly oproti výberovej matici VM.

Test 260/13 priniesol veľmi podobné výsledky ako predchádzajúce dva testy s kratším investičným obdobím. Vo vzorke A boli zamietnuté nulové hypotézy pri portfóliových estimátoroch na hladinách významnosti $\alpha=1\%$ (EM4 a EM3), $\alpha=5\%$ (M3 a ZM3) a $\alpha=10\%$ (M4). Pri estimátore EM4 sme zamietli nulovú hypotézu na hladine významnosti $\alpha=5\%$ aj v základnom súbore. Všetky portfóliové estimátory mali v základnom súbore a vzorke A vyššie rozptyly, vo vzorke B však viacero alternatívnych estimátorov vykázalo nižšie rozptyly ako výberová matica VM.

Zaujímavé výsledky, ktoré do istej miery sumarizujú pozorované vlastnosti estimátorov, priniesol test 260/26. Vo vzorke A mali všetky portfóliové estimátory štatisticky významne vyššie chyby odhadu oproti výberovej matici VM na hladine významnosti $\alpha=1\%$. Na druhej strane estimátor SEVM po prvýkrát vykázal nižší rozptyl ako výberová matica VM aj vo vzorke A. Vo vzorke B vykázala výberová matica VM naopak druhý najhorší výsledok. Štatisticky významné zníženie chyby odhadov na hladine významnosti $\alpha=5\%$ prinieslo použitie estimátorov EVM a SEVM. Rovnaké estimátory zväčšili aj v základnom súbore, pričom SEVM zaznamenal štatisticky významnú odchýlku na hladine významnosti $\alpha=1\%$ a EVM na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Štatisticky významne vyššiu chybu odhadu na hladine významnosti $\alpha=1\%$ vykázal v základnom súbore iba estimátor EM4.

Súhrnne môžeme konštatovať, že portfóliové estimátory výrazne zlyhali vo vzorke A, čo sa prejavilo ich vyššími rozptylmi aj v celom základnom súbore. Výberová matica VM pritom vo vzorke A dominovala prakticky pri všetkých testoch a estimátoroch. Vo vzorke B sme mohli pozorovať, že viaceré alternatívne estimátory (vrátane portfóliových) boli schopné dosahovať nižšie chyby odhadu ako výberová matica. Štatisticky významné zníženia chyby odhadu na konvenčných hladinách významnosti však dosiahli iba estimátory EVM a SEVM, a aj to iba v základnom súbore a vo vzorke B. Z uvedených výsledkov však vyplýva, že vzorka A a B sa od seba výrazne líšia výsledkami, pravdepodobne pre výskyt extrémnych pozorovaní v rámci vzorky A.

Podobne ako pri analýze relatívneho umiestnenia jednotlivých estimátorov uvádzame tiež rozbor štatistickej významnosti rozdielov chýb estimátorov pre základný súbor skrátený o 52 týždňov. Ak sú príčinou výrazne rozdielnych výsledkov vzorky A a vzorky B pri štandardnej dĺžke základného súboru extrémne pozorovania z roku 2008, výsledky získané zo skrátených vzoriek by mali byť robustnejšie. Vzorka A sa samozrejme taktiež skracuje o 52 týždňov.

Pri testoch 52/1, 52/4, 52/13 a 52/26 môžeme skonštatovať, že žiadny alternatívny estimátor pri testovaní na základnom súbore, vzorke A a vzorke B nevykázal štatisticky významný rozdiel oproti výsledkom výberovej matice VM. Celková chyba odhadu alternatívnych estimátorov sa preto pri danom výpočtovom období a daných investičných obdobiach štatisticky nelíši od výberovej matice VM. Výberová matica VM vykázala navyše vo väčšine testov a vzoriek relatívne vyššiu chybu odhadu ako alternatívne estimátory. Výnimku tvorila vzorka B v testoch 52/4 a 52/26 a vzorka A v teste 52/26. K cieľu

zamietnutia nulovej hypotézy sa najbližšie dostal estimátor EVM vo vzorke B a v základnom súbore testu 52/26 a estimátor EM4 vo vzorke A a v základnom súbore pri teste 52/13. Rozptyly estimátorov boli v uvedených prípadoch nižšie ako rozptyl VM, pričom nulovú hypotézu by bolo možné zamietnuť na hladine významnosti $\alpha=18\%$.

Žiadne štatisticky významné rozdiely neboli zaznamenané ani pri testoch 156/1 a 156/4. V teste 156/13 bola nulová hypotéza zamietnutá na hladine významnosti $\alpha=10\%$ iba v prípade estimátora EM4 vo vzorke A, pričom jeho rozptyl bol nižší ako pri výberovej matici VM. Výberová matica VM zaznamenala podpriemerné hodnoty rozptylov v takmer všetkých vzorkách testov 156/1 a 156/4 a naopak nadpriemerné hodnoty v teste 156/13, ako aj v teste 156/26. Test 156/26 bol pritom prvým potvrdením hypotézy o negatívnom vplyve extrémnych pozorovaní na chybovosť alternatívnych estimátorov. Estimátor SEVM tu vykázal štatisticky významne nižší rozptyl výnosov GMV portfólia oproti výberovej matici na hladine významnosti $\alpha=5\%$ pri vzorke B a aj v celom základnom súbore. Vo vzorke A tento estimátor tiež dosiahol najnižšiu chybu, hoci rozdiel oproti VM nebol štatisticky významný.

Pri teste 260/1 sa výsledky alternatívnych estimátorov s výnimkou EM4 štatisticky nelíšili od výberovej matice VM. Pri EM4 bola zamietnutá nulová hypotéza na hladine významnosti $\alpha=1\%$ vo vzorke A a aj v celom základnom súbore z dôvodu výrazne vyššieho rozptylu. Výberová matica VM mala vo vzorke A najnižší rozptyl. Opačná situácia však nastala v teste 260/4. Výberová matica VM tu mala druhú najvyššiu chybovosť vo všetkých troch vzorkách, hoci žiadny z rozdielov nebol štatisticky významný. Podobne tento estimátor zaostával aj pri teste 260/13, avšak tu sa už rozdiely prejavili výraznejšie. Vo vzorke A dosiahli štatisticky nižšiu chybu odhadu na hladine významnosti $\alpha=5\%$ estimátory EVM, SEVM a EM3 a na hladine významnosti $\alpha=10\%$ estimátory M4 a ZM3. Na celom základnom súbore svoju dominanciu štatisticky potvrdili EVM a SEVM na hladine významnosti $\alpha=5\%$ a estimátor EM3 na hladine významnosti $\alpha=10\%$.

Posledným z uskutočnených testov bol test 260/26, v ktorom opäť uspeli rovnaké estimátory ako pri kratších investičných obdobiach. Estimátor SEVM dosiahol štatisticky významne nižší rozptyl na hladine významnosti $\alpha=1\%$ vo vzorke A a v základnom súbore a na hladine významnosti $\alpha=5\%$ vo vzorke B. Estimátor EVM dosiahol štatisticky významne

nižší rozptyl na hladine významnosti $\alpha=1\%$ vo vzorke A a na hladine významnosti $\alpha=5\%$ vo vzorke B a v základnom súbore. Jediným estimátorom, ktorý vykázal štatisticky významne vyššiu chybu odhadu, sa stal estimátor EM4 vo vzorke A a v základnom súbore na hladine významnosti $\alpha=1\%$. Dôvodom výrazne vyššieho rozptylu testovacích portfólií boli najmä vysoké výkyvy výnosov vyplývajúce z extrémnych váh GMV portfólia vo viacerých pozorovaniach.

Celkovo na základe analýzy relatívneho umiestnenia jednotlivých estimátorov a rozboru štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných výberovou maticou a alternatívnymi estimátormi môžeme konštatovať, že alternatívne estimátory majú schopnosť vykazovať nižšiu chybu odhadu ako štandardná výberová matica, avšak v prípade výskytu extrémnych pozorovaní sa zvyšuje ich chybovosť kvôli vyššej chybe špecifikácie. Platí to najmä pre portfóliové estimátory. Pri vzájomnom porovnávaní estimátorov sa budúce riziko darilo mierne lepšie odhadovať estimátorom využívajúcim exponenciálne váhy minulých pozorovaní. Zaradenie matice s konštantnými koreláciami nemalo výrazný vplyv na výsledky estimátorov a rovnako tiež zmiešanie rovnomerne vážených a exponenciálne vážených estimátorov v estimátore ZM3 neprinieslo zníženie chýb odhadu. Metóda redukovaného odhadu (*shrinkage*) však naopak zaznamenala úspech. V celom základnom súbore prekonal nižšou chybovosťou výberovú maticu iba redukovaný estimátor SEVM, pričom štatisticky významné rozdiely sa vo vzorke A nepodarilo namerať. Pri základnom súbore skrátenom o 52 týždňov kvôli vynechaniu extrémnych pozorovaní z roku 2008 však viaceré estimátory preukázali nižšie chyby odhadu. Okrem úspešného SEVM išlo najmä o estimátory EM3, EM4 a EVM. Pri viacerých testoch bola úspešnosť týchto estimátorov oproti výberovej matici VM potvrdená aj štatisticky. Pre potreby ďalšieho výskumu budeme preto okrem výberovej matice VM využívať aj estimátory SEVM a EM3, ktoré vykazovali najlepšie charakteristiky.

7.2 Výsledky testovania úspešnosti momentových stratégií

Testovanie úspešnosti investičných stratégií založených na využití cenovej hybnosti bolo uskutočnené na základe postupu uvedeného v kapitole 2.4.2. Celkovo sme testovali päť alternatívnych kritérií cenovej hybnosti – štandardné kritérium, Sharpeho kritérium,

kritérium relatívnej sily, kritérium 52-týždňového maxima a regresné kritérium. Pri všetkých kritériách sme podľa možnosti testovali rôzne nastavenia parametrov – dĺžku rozhodného a investičného obdobia (J , resp. $T = 1, 4, 13, 26, 39, 52, 65, 104$ týždňov) a počet vynechaných období medzi rozhodným a investičným obdobím ($l = 0, 4, 8$).

Každé kritérium v každom jednotlivom nastavení a časovom období vygenerovalo určité jednoznačné poradie skúmaných aktív, na základe ktorého sme vytvorili portfólio investujúce 100% do dvoch, troch alebo piatich aktív s najvyššou hodnotou kritéria a -100% do dvoch, troch alebo piatich aktív s najnižšou hodnotou kritéria³⁰. Pre zjednodušenie budeme alternatívne J/T stratégie označovať 2W2L, 3W3L a 5W5L (J -týždňové rozhodné obdobie, T -týždňové investičné obdobie). Všetky aktíva pritom mali v takto zostrojenom samofinancujúcom sa portfóliu vždy rovnakú váhu. Ďalej sme sledovali zhodnotenie a riziko vygenerovaného portfólia v investičnom období. Priemerné zhodnotenie a riziko pre rôzne stratégie a nastavenia parametrov sme ďalej podrobili testovaniu štatistickej významnosti. Za nulovú hypotézu sme podľa vzoru existujúcej akademickej literatúry dosadili predpoklad nulového zhodnotenia zadefinovaných stratégií vyplývajúci z hypotézy efektívnych trhov. Vzhľadom na fakt, že skutočnú smerodajnú odchýlku nepoznáme, nulovú hypotézu zamietame, ak absolútna hodnota testovacej t -štatistiky prekračuje 95%-ný (resp. 97,5%-ný) kvantil Studentovho t -rozdelenia s $n-1$ stupňami voľnosti (t.j. na hladine významnosti $\alpha=10\%$, resp. $\alpha=5\%$, pre n pozorovaní).

Kvôli otestovaniu robustnosti výsledkov sme priemerné zhodnotenie pre rôzne stratégie a nastavenia parametrov spočítali osobitne pre posledných 300 týždenných pozorovaní (pre všetky stratégie) a osobitne pre zvyšok základného súboru. 300 pozorovaní zodpovedá približne posledným šiestim rokom, pričom v dostupnej literatúre sa práve o období rokov 2000-2003 hovorí ako o možnom zlome, po ktorom sa už cenová hybnosť prestáva prejavovať (viď napríklad: Hwang, Rubesam, 2007; Henker et al., 2006).

Vzhľadom na veľké množstvo skúmaných stratégií a parametrov nie je možné priamo v texte uviesť tabuľky s výslednými hodnotami priemerných výnosov, štandardnej odchýlky a testovacej t -štatistiky všetkých stratégií. Čitateľa preto v tomto zmysle odkazujeme na

³⁰ Aktíva s kladnými váhami tvoria súhrnne tzv. dlhú pozíciu, zatiaľ čo aktíva so zápornými váhami reprezentujú krátke predaje a súhrnne tvoria tzv. krátku pozíciu.

prílohy, v rámci ktorých sú zverejnené najrelevantnejšie výsledky v prehľadnej tabuľkovej podobe. V nasledujúcom texte uvádzame súhrnné výsledky a príklady najúspešnejších stratégií pre rôzne kritériá, parametre a časové obdobia.

1. Štandardné zoraďovacie kritérium

Štandardné zoraďovacie kritérium Jegadeesha a Titmana sme testovali pre rozhodné a investičné obdobia dĺžky 1, 4, 13, 26, 39, 52 a 65 týždňov a pre stratégie 2W2L, 3W3L a 5W5L bez vynechania pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím, ako aj s vynechaním štyroch, resp. ôsmich týždňov. Pri pohľade na výsledky môžeme vo všeobecnosti potvrdiť existenciu cenovej hybnosti pre skúmaný základný súbor, aj keď s určitými výhradami. Priemerný výnos naprieč celým základným súborom a všetkými stratégiami dosiahol 0,05% týždenne (2,6% p.a.), čo je štatisticky aj ekonomicky nevýznamná hodnota pri všetkých obvyklých hladinách významnosti. Maximálny výnos 0,16% (8,7% p.a.) vykázala 52/13 stratégia 2W2L pre $l=8$, ktorá bola zároveň jedinou stratégiou (pri skúmaní všetkých pozorovaní), pri ktorej sme zavrhlí nulovú hypotézu na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Medzi ďalšie relatívne úspešné a ekonomicky významné stratégie, aj keď štatisticky nepotvrdené stratégie, patrili najmä zvyšné stratégie s 13-týždňovým investičným obdobím a 52-týždňovým rozhodným obdobím, ktoré dosahovali vo viacerých prípadoch výnosy vyššie ako 7% ročne. Rôzne parametre $l=0,4,8$ nemali významný vplyv na výsledky, na rozdiel od spôsobu konštrukcie investičných portfólií. 2W2L portfóliá dosahovali v priemere zhodnotenie 0,7% týždenne (3,7% p.a.) oproti 0,3%-nému zhodnoteniu (1,6% p.a.) 5W5L portfólií naprieč celým základným súborom.

Úplnejší obraz o úspešnosti momentových stratégií s využitím štandardného zoraďovacieho kritéria sa vynára pri analýze robustnosti získaných výsledkov pomocou rozdelenia pozorovaní na dva rozdielne časové úseky. Údaje z rozličných časových pozorovaní získané pre každé nastavenie parametrov a stratégií rozdelíme na 300 najnovších pozorovaní podľa dátumu (vzorka A) a zvyšné staršie pozorovania (vzorka B). Celkovo máme k dispozícii 1008 týždenných údajov o zhodnotení všetkých aktív, avšak celkový

počet pozorovaní sa znižuje o tie pozorovania, pre ktoré neexistujú údaje z rozhodného a investičného obdobia.

Ukazuje sa, že vzorka B obsahuje pomerne veľké množstvo úspešných stratégií, hoci priemerný výnos všetkých alternatív dosahuje len 0,07% týždenne (3,7% p.a.). Výnosy jednotlivých stratégií sa pohybovali v intervale od -0,05% do 0,23% týždenne (t.j. od -2,6% p.a. do 12,7% p.a.). Najvyššie zhodnotenie podľa očakávania dosiahla rovnako ako pri celom základnom súbore stratégia 52/13 stratégia 2W2L pre $l=8$. Ostatné stratégie s vyššími výnosmi na súhrnnej vzorke taktiež vo vzorke B dosiahli lepšie výsledky a medzi úspešné stratégie sa zaradili aj viaceré 3W3L a 5W5L stratégie. Testom štatistickej významnosti na hladine významnosti $\alpha=10\%$ však prešlo celkovo len 8 stratégií. Žiadna stratégia nebola štatisticky významná na 5%-nej hladine významnosti, hoci zhodnotenie najvýkonnejšej stratégie by bolo štatisticky významné na 5,27%-nej hladine významnosti.

Vzorka A (novšie pozorovania) na rozdiel od vzorky B neobsahuje žiadne štatisticky významné zhodnotenia napriek veľkému množstvu alternatívnych nastavení parametrov. Priemerné zhodnotenie dosahuje iba 0,01% týždenne (0,5% p.a.) a pohybuje sa v intervale od -0,14% do 0,10% týždenne (t.j. od -8,1% do 5,3%). Najúspešnejšie stratégie sa pritom čiastočne líšia od predchádzajúcich vzoriek najmä vyššou úspešnosťou stratégií s 26-týždňovým a 65-týždňovým rozhodným obdobím a nižším výnosom. Za zmienku ešte stojí zaujímavý záporný výnos 4/1 stratégie 2W2L pre $l=0$, ktorý dosiahol hodnotu -0,14% týždenne (-8,1% p.a.). Vynechanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím nemalo významný vplyv na výsledky, zatiaľ čo z pohľadu konštrukcie stratégií bola podobne ako v predchádzajúcich prípadoch najúspešnejšia stratégia 2W2L.

Celkovo môžeme konštatovať, že štandardné zoraďovacie kritérium zachytilo výskyt cenovej hybnosti v sektorových indexoch, avšak oveľa významnejšie sa fenomén prejavuje na údajoch od roku 1989 približne do roku 2003 (vzorka B). Údaje od roku 2003 do roku 2009 výskyt cenovej hybnosti štatisticky nepotvrdili, hoci najvyššie dosiahnuté výsledky možno interpretovať ako ekonomicky významné. Vynečanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím výsledky nijako významne neovplyvnilo. Z pohľadu spôsobu konštrukcie boli najúspešnejšie 2W2L stratégie, nasledované 3W3L stratégiami a 5W5L stratégiami. Vyššie výnosy 2W2L stratégií oproti 3W3L a 5W5L stratégiám neboli

vo všeobecnosti poznačené vyššími nameranými štandardnými odchýlkami, t.j. t-štatistiky vykazovali najvyššie hodnoty predovšetkým pri 2W2L stratégiach.

2. Kritérium 52-týždňového maxima

Zorad'ovacie kritérium 52-týždňového maxima vychádzajúce z práce Georgea a Hwanga (2004) sme testovali pre investičné obdobia dĺžky 1, 4, 13, 26, 39, 52 a 65 týždňov a pre stratégie 2W2L, 3W3L a 5W5L bez vynechania pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím, ako aj s vynechaním štyroch, resp. ôsmich týždňov. Rozhodné obdobie je pevne dané, nakoľko kritérium skúma ceny aktív za predchádzajúcich 52 týždňov a rovnaké rozhodné obdobie sme zvolili aj pre doplnkové štandardné kritérium.

Priemerný výnos stratégie naprieč celým základným súborom dosiahol 0,04% týždenne (2,1% p.a.) a pohyboval sa v intervale od -0,2% do 0,09% týždenne (-1,0% - 4,8% p.a.). Žiadna zo stratégií nebola štatisticky významná, ale ekonomicky sú dosiahnuté zisky pri najúspešnejších stratégiach významné. Najväčšie zhodnotenie vykázala 52/26 stratégia 2W2L pre $l=0$, nasledovaná 52/39 stratégiami 2W2L pre $l=0$ a $l=4$.

Skúmanie vzorky B (staršie pozorovania) prinieslo podobné výsledky ako v prípade štandardného kritéria, avšak pri kritériu 52-týždňového maxima sa vo vzorke B nenašla ani jediná stratégia, ktorej priemerný výnos by bol štatisticky významný na hladine významnosti $\alpha=5\%$ alebo $\alpha=10\%$. Priemerný výnos naprieč vzorkou B dosiahol 0,08% týždenne (4,2% p.a.), t.j. približne dvojnásobok priemerného výnosu z celého základného súboru. Zhodnotenia sa pohybovali v rozmedzí od -0,02% do 0,14% týždenne (t.j. -1% až 7,5% p.a.). Najúspešnejšími alternatívami sa ukázali byť stratégie s 39-týždňovým investičným obdobím, pričom zaznamenali ekonomicky významné ale štatisticky nevýznamné výsledky. Vynechávanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím malo minimálny vplyv na výsledky, avšak stratégie 2W2L dosiahli v priemere takmer dvojnásobné zhodnotenie oproti stratégiám 5W5L.

Prekvapivé výsledky priniesla analýza vzorky A (novšie pozorovania), v rámci ktorej dosiahli takmer všetky testované momentové stratégie záporné alebo nulové zhodnotenie z intervalu -0,07% až 0,01% týždenne (t.j. -3,7% až 0,5% p.a.). Žiadna zo skúmaných

stratégií nedosiahla ekonomicky alebo štatisticky významné zhodnotenie. Z uvedeného možno konštatovať, že kritérium 52-týždňového maxima nebolo schopné zachytiť cenovú hybnosť sektorových indexov v priebehu rokov 2003 až 2009, a preto výsledky celého základného súboru nemožno považovať za smerodajné. Ďalším implikáciám uvedeného zistenia sa budeme ďalej venovať v diskusii.

3. Sharpeho kritérium

Zorad'ovacie kritérium využívajúce Sharpeho pomer je založené na poznatkoch z práce Fabozziho et al. (2006). Toto kritérium sme testovali pre investičné obdobia dĺžky 4, 13, 26, 39, 52, 65 a 104 týždňov a pre stratégie 2W2L, 3W3L a 5W5L bez vynechania pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím, ako aj s vynechaním štyroch, resp. ôsmich týždňov. Priemerný výnos naprieč celým základným súborom a všetkými skúmanými alternatívnymi stratégiami síce dosiahol štatisticky aj ekonomicky nevýznamnú hodnotu 0,06% týždenne (3,2% p.a.), ale celkovo bol rozptyl dosiahnutých hodnôt väčší ako u predchádzajúcich kritérií. Najvyššie zhodnotenie 0,17% týždenne (9,2% p.a.) patrilo 52/13 stratégiam 2W2L pre $l=4$ a $l=8$. Nasledovali ďalšie stratégie najmä s 52-týždňovým rozhodným obdobím. Zisky viacerých stratégií boli ekonomicky aj štatisticky významné na hladine významnosti $\alpha=10\%$. a dokonca aj na hladine významnosti $\alpha=5\%$, čo naznačuje, že informačná hodnota Sharpeho kritéria je vyššia ako u predchádzajúcich kritérií. Najnižšie zaznamenané zhodnotenie dosiahlo -0,04% týždenne (-2,1% p.a.). Stratégie 2W2L dosiahli v priemere približne dvojnásobné zhodnotenie oproti stratégiam 5W5L a aj ich testovacie t-štatistiky vykazovali vyššie hodnoty. Prínos vynechania pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím bol v priemere zanedbateľný, avšak najlepšie výsledky patrili práve stratégiam s parametrami $l=8$ a $l=4$.

Výsledky vzorky B (staršie pozorovania) jednoznačne štatisticky aj ekonomicky potvrdili prítomnosť cenovej hybnosti v cenách sektorových indexov, hoci priemerné týždenné zhodnotenie 0,07% (3,7% p.a.) to nenaznačuje. Výsledky sa však pohybovali v intervale od -0,04% až do impozantných +0,22% týždenne (t.j. od -2,1 do +12,1% p.a.). Najlepšie zhodnotenia vykázali prakticky rovnaké stratégie ako v prípade celého základného súboru. Vynechanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím malo len marginálny prínos v podobe mierne vyššieho zhodnotenia najúspešnejších stratégií (o 0,01-0,02%

týždenne) a mierne vyšších hodnôt testovacej štatistiky. Rozdiely medzi výnosmi 2W2L, 3W3L a 5W5L stratégií zodpovedali doterajším pozorovaniam, t.j. výnosy 2W2L boli v priemere mierne vyššie ako výnosy 3W3L a takmer dvojnásobné oproti 5W5L. Vyššie výnosy až na určité výnimky neboli kompenzované zodpovedajúcim nárastom štandardnej odchýlky príslušných stratégií.

Sľubné výsledky vzorky B navodili pozitívne očakávania ohľadne výsledkov vzorky A (novšie pozorovania), avšak tie sa nakoniec ukázali ako dosť rozporuplné. Priemerný výnos 0,03% týždenne (1,6% p.a.) naprieč vzorkou nie je ničím zaujímavý, ale výsledky sa pohybujú v intervale od -0,08% do 0,13% týždenne (t.j. od -4,2% do 7,1% p.a.), čo naznačuje, že niektoré stratégie by mohli byť úspešné aspoň z ekonomického hľadiska. Najvyššie zhodnotenie dosiahla 39/4 stratégia 2W2L pre $l=0$, nasledovali najmä stratégie so 104-týždňovým investičným obdobím. Žiaden výsledok však nebol štatisticky významný na konvenčných hladinách významnosti.

Medzi najúspešnejšími stratégiami sa vo vzorke A zjavuje určitý nový prvok, ktorým je zaujímavé zhodnotenie stratégií s rozhodným obdobím 65 a 104 mesiacov. Aj keď sme údaje pre rozhodné a investičné obdobie 104 mesiacov pri predchádzajúcich kritériách nepublikovali, dodatočné testovanie ukázalo, že predĺženie rozhodného alebo investičného obdobia nemalo žiadny výrazný pozitívny vplyv na výnosy alebo štatistickú významnosť. Posun účinnosti stratégií by mohol súvisieť s dĺžkou rozhodného obdobia, pretože napríklad pre získanie 300 pozorovaní 104/13 stratégie pre $l=8$ potrebujeme najmenej 424 pozorovaní, čo predstavuje takmer 8,5 roka údajov a teda dosť hlboko zasahuje do vzorky B pre stratégie s kratším rozhodným obdobím. Doteraz získané výsledky pre kratšie investičné a rozhodné obdobia pritom potvrdzujú, že cenové momentum sa vo vzorke B prejavovalo pomerne výrazným spôsobom. Preto sme stratégie s rozhodným obdobím 104 týždňov ďalej testovali na skrátenej vzorke 200 a 150 posledných údajov, čím sme sa vyhli prieniku s pozorovaniami vo vzorke B. Výsledné zhodnotenia však zostali pri uvedených stratégiách prakticky zhodné s pôvodným testom, čo demonštruje ich pretrvávajúce aj v časovom rozpätí rokov 2003 až 2009.

Konštrukcia stratégií mala na celkové výsledky podobný vplyv ako pri predchádzajúcich kritériách a vzorkách. Zatiaľ čo stratégie 2W2L dosiahli priemerné zhodnotenie 0,04% (2,1% p.a.), zhodnotenie 5W5W stratégií bolo v priemere nulové. Vynechávanie pozorovaní medzi

rozhodným a investičným obdobím nemalo významný vplyv na výsledky, avšak mierne úspešnejšie boli stratégie bez vynechania pozorovaní.

Celkovo pri Sharpeho kritériu môžeme skonštatovať, že cenovú hybnosť v minulosti zachytávalo veľmi úspešne. V uplynulých šiestich rokoch sa táto úspešnosť výrazne znížila, avšak nezmizla úplne. Najúspešnejšie stratégie majú svoje ekonomické opodstatnenie, aj keď štatisticky sú ich výnosy neodlíšiteľné od nuly na hladinách významnosti $\alpha=5\%$ a $\alpha=10\%$.

4. Kritérium relatívnej sily

Kritérium relatívnej sily patrí medzi populárne kritériá v praktických aplikáciách. Vo svojej podstate ide o vážený priemer Sharpeho kritérií pre rôzne časové intervaly. V uskutočnenom experimente sme kritérium testovali pre investičné obdobia dĺžky 1, 4, 13, 26, 39, 52 a 65 týždňov a pre stratégie 2W2L, 3W3L a 5W5L bez vynechania pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím, ako aj s vynechaním štyroch, resp. ôsmich týždňov. 52-týždňové rozhodné obdobie bolo podobne ako pri kritériu 52-týždňového maxima determinované aplikáciou vzťahu (18) pri rovnomerne váženej alternatíve (RV) a vzťahu (19) pri exponenciálne váženej alternatíve (EV).

Priemerný výnos pre všetky sledované stratégie naprieč celým základným súborom dosiahol 0,10% týždenne (5,3% p.a.) a pohyboval sa v intervale od 0,01% do 0,16% týždenne (t.j. od 0,5% do 8,7% p.a.). Medzi najúspešnejšie stratégie sa zaradili EV/13 a RV/13 stratégie 2W2L pre $l=0$, $l=4$ a $l=8$, ako aj EV/26 a RV/26 stratégie 2W2L pre $l=0$, $l=4$ a $l=8$. Všetky tieto stratégie v priemere zarobili viac ako 0,13% týždenne (7,0% p.a.), čo je ekonomicky významná hodnota. Viaceré stratégie vykázali aj štatisticky významné výsledky na hladine významnosti $\alpha=10\%$. Žiadna zo stratégií však nedosiahla štatisticky významné zhodnotenie na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Vynechanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím nemalo významný vplyv na výsledky, rovnako ako úprava pomocou exponenciálnych váh. Priemerná úspešnosť 2W2L stratégií bola opäť mierne vyššia ako pri 3W3L stratégiách a takmer dvojnásobná oproti 5W5L stratégiám, pričom nebola plne vykompenzovaná vyššou volatilitou.

Testovanie vzorky B (staršie pozorovania) neprinieslo žiadne významné prekvapenia. Priemerné výnosy sa pohybovali v intervale od 0,02% do 0,19% týždenne (t.j. 1,0% - 10,4% p.a.). Podľa očakávania medzi favoritov z hľadiska priemerného zhodnotenia a patrili prevažne 2W2L stratégie s investičným obdobím v dĺžke 13, 26 a 39 mesiacov. Skúmanie štatistickej významnosti však odhalilo menšie zmeny. Štatisticky významné priemerné nárasty na hladine významnosti $\alpha=10\%$ vykázali len niektoré 3W3L a 5W5L stratégie. Žiadne 2W2L neboli štatisticky významné na hladine významnosti $\alpha=10\%$ a vôbec žiadne stratégie vo vzorke B nemali štatisticky významné priemerné zhodnotenie na hladine významnosti $\alpha=5\%$. Vynechanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím významne výsledky neovplyvnilo, rovnako ako úprava pomocou exponenciálnych váh. Priemerné zhodnotenie 2W2L stratégií bolo opäť najvyššie, avšak 3W3L vykázali len mierne nižšie priemerné prírastky pri nižšej volatilita, čo sa prejavilo vyššími hodnotami testovacích t-štatistík. Hodnoty prírastkov 5W5L boli výrazne nižšie, čo však rovnako bolo vykompenzované výrazne nižšou volatilitou.

Analýza vzorky A poskytla veľmi podobné výsledky ako v prípade Sharpeho kritéria, čo je prirodzené vzhľadom na konštrukciu kritéria relatívnej sily. Priemerné zhodnotenia sa pohybovali v intervale od -0,2% do 0,12% týždenne (-1,0% až +6,4% p.a.). Najúspešnejšie z pohľadu zhodnotenia aj testovacej štatistiky boli RV/13 a EV/13 stratégie 2W2L pre $l=0$, RV/26 a EV/26 stratégie 2W2L pre $l=0$ a RV/13 stratégia 2W2L pre $l=4$. Všetky dosiahli priemerný zisk na úrovni vyššej ako 0,1% týždenne (5,3 p.a.) a môžeme ich považovať za ekonomicky významné, aj keď štatistická významnosť sa pre konvenčné hladiny významnosti pri žiadnej stratégii nepotvrdila. Nulovú hypotézu teda nemôžeme zamietnuť. Vynechávanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím malo mierne nepriaznivý účinok, v dôsledku ktorého vykazovali stratégie $l=4$ a $l=8$ všeobecne nižšie hodnoty testovacích štatistík. Predpoklad o vyššej účinnosti exponenciálne váženého priemeru sa tiež nepotvrdil. Z hľadiska konštrukcie stratégií však opäť vo výkonnosti aj v testovacích štatistikách dominovali 2W2L stratégie pred 3W3L a 5W5L stratégiami.

Z uvedených výsledkov vyplýva, že kritérium relatívnej sily bolo podobne ako Sharpeho kritérium v minulosti schopné zachytiť cenové momentum relatívne úspešne, avšak táto úspešnosť pri novších pozorovaniach klesla. Napriek tomu vykazujú niektoré stratégie ekonomicky zaujímavé zhodnotenia. Vynechávanie pozorovaní medzi rozhodným

a investičným obdobím prinieslo rozporuplné výsledky a výrazný prínos nemala ani úprava kritéria pomocou exponenciálne váženého priemeru.

5. Regresné kritérium

Posledným z testovaných zoradovacích kritérií pre zostavenie momentových stratégií bolo regresné kritérium. Kritérium je vyjadrené ako smernica regresnej priamky prelozenej historickými cenami. Pri testovaní boli použité alternatívy zahrňujúce 4, 13, 26, 39, 52 a 104 historických cien. Rovnaké časové obdobia boli uplatnené pri nastavení dĺžky investičného obdobia. Pri porovnávaní sa podobne ako v predchádzajúcich prípadoch uplatnilo aj vynechávanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím a delenie na stratégie 2W2L, 3W3L a 5W5L.

Zhodnotenia jednotlivých stratégií naprieč celým základným súborom sa pohybovali v intervale od -0,04% do +0,16% týždenne (t.j. od -2,1% do +8,7% p.a.). Medzi najúspešnejšie stratégie z hľadiska výkonnosti (a tiež hodnoty testovacej t-štatistiky) sa zaradili 52/13 stratégie 2W2L pre $l=4$ a $l=8$, ako aj 39/13 stratégie 2W2L pre $l=0$ a $l=4$ a 52/4 stratégia 2W2L pre $l=8$. Všetky uvedené stratégie dosiahli výnos vyšší ako 0,14 % týždenne (7,5% p.a.), ktorý môžeme považovať za ekonomicky významný. Žiadna zo stratégií však nevykázala štatisticky významné priemerné zhodnotenie na hladine významnosti $\alpha=5\%$ a $\alpha=10\%$. Vynechanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím malo podobne ako pri väčšine použitých kritérií zanedbateľný vplyv na výsledky. Na druhej strane sa potvrdilo, že spôsob konštrukcie môže zhodnotenie ovplyvniť výrazne. Priemerné zhodnotenie 5W5L stratégií bolo prakticky nulové, zatiaľ čo 2W2L stratégie v priemere vykázali výnosy na úrovni 0,05% týždenne (2,6% ročne).

Testovanie stratégií na vzorke B prinieslo podľa očakávania lepšie výsledky. Priemerné zhodnotenie sa pohybovalo v intervale od -0,04% do +0,22% (od -2,1% do +12,1% p.a.). Medzi stratégie s najväčšími priemernými výnosmi sa zaradili najmä stratégie s 52-týždňovým a 39-týždňovým rozhodným obdobím. Mnohé stratégie vykázali ekonomicky zaujímavé zhodnotenia, avšak štatistickú významnosť na hladine významnosti $\alpha=10\%$ sa podarilo preukázať len pri 52/13 stratégiách 3W3L a 5W5L pre $l=4$ a $l=8$ a 2W2L pre $l=8$. Žiadna stratégia nebola štatisticky významná pri hladine významnosti $\alpha=5\%$. Stratégie

s vynechaním štyroch alebo ôsmich týždňov medzi rozhodným a investičným obdobím boli vo všeobecnosti mierne úspešnejšie z pohľadu výkonnosti aj štatistickej významnosti. Z hľadiska koncepcie vytvárania momentových portfólií dosiahli 2W2L stratégie opäť v priemere dvojnásobné výnosy oproti 5W5L stratégiám, avšak tie boli v mnohých prípadoch vykompenzované vyššou nameranou volatilitou.

Analýza zhodnotení vo vzorke A (300 najnovších pozorovaní) nepriniesla významné nové poznatky oproti iným kritériám. Priemerné výnosy sa pohybovali v intervale od -0,08% do +0,09% týždenne (-4,2% až +4,8% p.a.), žiadna zo stratégií nedosiahla štatisticky významné výsledky na konvenčných hladinách významnosti a dosadenie dodatočných pozorovaní medzi rozhodné a investičné obdobie nemalo žiadny významnejší vplyv na výsledky. Medzi najvýnosnejšie alternatívy patrili stratégie so 4-týždňovým investičným obdobím, avšak ich výsledky sú na hranici ekonomickej významnosti. 2W2L, 3W3L aj 5W5L stratégie mali zhodne prakticky nulové priemerné výnosy.

Využitie regresného kritéria malo podľa získaných údajov význam najmä v minulosti, keďže na vzorke B bolo kritérium úspešné. Pri novších pozorovaniach sa však úspešnosť kritéria vytráca a výsledky sú štatisticky nevýznamné a ekonomicky nepresvedčivé. Vynechávanie pozorovaní medzi rozhodným a investičným obdobím prinieslo len minimálne zlepšenie, rovnako ako premenlivý počet aktív v momentových portfóliach.

Fenomén cenovej hybnosti bol na vzorke desiatich sektorových akciových indexov patriacich pod index S&P 500 preskúmaný pomocou piatich rozličných zoraďovacích kritérií. Každé z kritérií generovalo iné poradie skúmaných aktív, t.j. aj výsledky boli do určitej miery odlišné. Vo všeobecnosti však môžeme konštatovať, že existencia cenovej hybnosti sa potvrdila a zvolené kritériá tento jav zachytili uspokojivým spôsobom. Najúspešnejšie boli všeobecne stratégie s rozhodným obdobím dĺžky 26 až 65 týždňov a investičným obdobím 4 až 39 týždňov. Z hľadiska konštrukcie momentových portfólií sa v prevažnej miere osvedčili 2W2L stratégie, avšak v mnohých prípadoch za cenu vyššieho rizika. Stratégie s vynechanými pozorovaniami medzi rozhodným a investičným obdobím dosahovali zvyčajne mierne vyššie výnosy, avšak nejednalo sa o významné rozdiely. Obvyklé zhodnotenie najúspešnejších stratégií a kritérií naprieč celým základným súborom sa pohybovalo na úrovniach od 0,09% do 0,17% týždenne (t.j. od 4,8% do 9,2% p.a.), čo sú

ekonomicky významné hodnoty, aj keď štatistická významnosť bola potvrdená len v ojedinelých prípadoch. O výsledkoch môžeme konštatovať, že vo veľkej väčšine prípadov korešpondujú s empirickými výsledkami z dostupnej akademickej literatúry z hľadiska výšky dosiahnutého zhodnotenia (približne 2% až 9% p.a.), dĺžky rozhodného a investičného obdobia (1-15 mesiacov), konštrukcie portfólií (úspešnosť 2W2L), ako aj ďalších parametrov (viď: Jegadeesh, Titman, 2001; Rouwenhorst, 1998; Griffin et al., 2005; Nijman et al., 2002; Leippold, Lohre, 2009, Figelman, 2007). Zhoda je o to významnejšia, že sa v uskutočnenom výskume jednalo o indexy, hoci v literatúre sa častejšie vyskytujú štúdie venované jednotlivým akciovým titulom. Za najúspešnejšie zorad'ovacie kritérium môžeme pri uskutočnenom experimente považovať Sharpeho kritérium, pri ktorom bolo identifikovaných najviac štatisticky aj ekonomicky významných stratégií a zhodnotenia úspešných stratégií boli najvyššie zo všetkých porovnávaných kritérií. Mierne nižšiu úspešnosť malo štandardné kritérium a kritérium relatívnej sily. Účinnosť regresného kritéria bola taktiež nižšia a výsledkami sklamalo najmä kritérium 52-týždňového maxima. Hoci Sharpeho kritériu sa v danom teste najlepšie darilo zachytávať cenovú hybnosť, nehovorí to nič o všeobecnej úspešnosti tohto kritéria. Keďže nedostatky Sharpeho pomeru sú dobre známe, v súvislosti s výsledkami predkladanej práce sa otvára priestor na ďalší empirický výskum, ktorý by sa napríklad mohol zamerať na kritériá skonštruované s využitím Treynorovho alebo Sortinovho koeficientu.

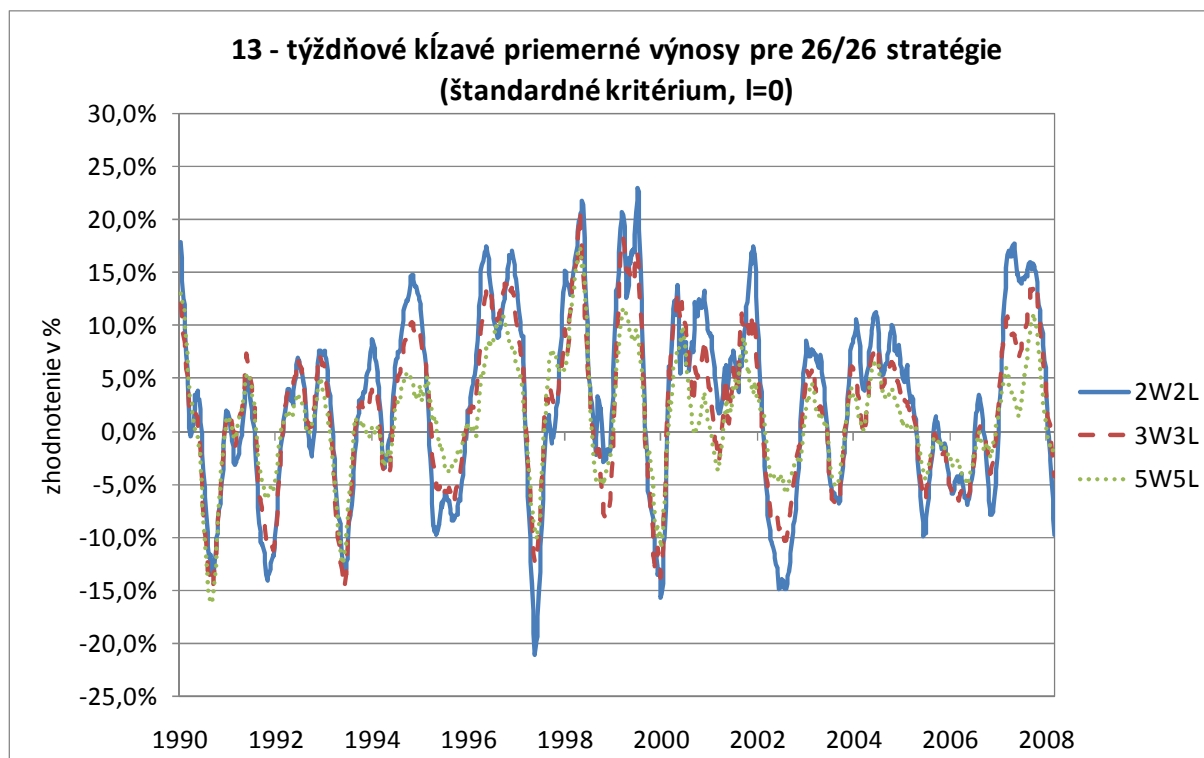
Analýza robustnosti získaných údajov bola uskutočnená na dvoch samostatných vzorkách. Vzorka A obsahovala (z časového hľadiska) 300 najnovších pozorovaní pre každú stratégiu a vzorka B obsahovala zvyšné týždenné pozorovania. Výsledky potvrdili silnú prítomnosť efektu cenovej hybnosti vo vzorke B pri všetkých piatich kritériách a všetkých alternatívnych nastaveniach parametrov. Najúspešnejšie stratégie dosiahli ekonomicky veľmi významné priemerné zhodnotenie na úrovni 0,14% až 0,22% týždenne (t.j. 7,5% až 12,1% p.a.) naprieč rôznymi zorad'ovacími kritériami a množstvo z nich bolo aj štatisticky významných na konvenčných hladinách významnosti. Skúmanie zhodnotení a štandardných odchýlok jednotlivých momentových stratégií vo vzorke A však odhalilo výrazný pokles účinnosti kritérií, resp. postupný útlm efektu cenovej hybnosti. Zhodnotenie najúspešnejších stratégií naprieč kritériami dosiahlo len 0,01% až 0,13% týždenne (0,5%-7,1% p.a.) a hoci ho najmä v prípade Sharpeho kritéria, štandardného kritéria a kritéria relatívnej sily možno považovať za ekonomicky významné, štatistická významnosť získaných údajov nebola potvrdená pri

žiadnej zo skúmaných stratégií. Kritérium 52-týždňového maxima dokonca vo vzorke A nevykázalo žiadne známky existencie cenovej hybnosti.

Jedným z možných vysvetlení oveľa menej výrazného prejavu cenovej hybnosti vo vzorke A (údaje približne od roku 2003 do roku 2009) je slabnutie javu v súvislosti s prudkým rozvojom odvetvia špecializovaných investičných fondov (tzv. hedžových fondov) a nárastom popularity momentových stratégií koncom deväťdesiatych rokov dvadsiateho storočia, kedy boli publikované viaceré články popularizujúce fenomén. Existujúca literatúra tento vývoj reflektuje, keďže viacerí autori si kladli otázku, či sa táto cenová anomália postupne nevytratí podobne ako populárny „januárový“ efekt (vyššie výnosy v januári) alebo efekt „veľkosti“ (menšie firmy prekonávali výkonnosťou väčšie). Napríklad Hwang a Rubesam (2007) určili rok 2000 ako zlomový pre ziskovosť momentových stratégií (pri individuálnych akciách). Stratégie s nulovými nákladmi testované na amerických akciách od roku 2000 podľa tejto štúdie prestali dosahovať štatisticky významné zhodnotenia (vzorka končí v roku 2005). Veľmi podobné zistenia ohľadne amerických akcií vyplývajú aj z prác Henkera et al. (2006) a Ravingera (2008a), v ktorých sú zahrnuté údaje do roku 2004, resp. do roku 2008. V kontraste s uvedenými autormi však napríklad Leippold a Lohre (2009) v rozsiahlej štúdii na amerických a európskych trhoch potvrdzujú pretrvávanie fenoménu aj po roku 2000 (pričom výraznejšie najmä v Európe). Podobne tiež Aquilar (2006) dokumentuje pri amerických akciách kladné výsledky momentových stratégií v roku 2001 a v roku 2004.

Na Obrázku 2 ďalej pre ilustráciu uvádzame graf časového vývoja zhodnotenia 26/26 stratégií v alternatívach 2W2L, 3W3L a 5W5L pre $l=0$ pri použití štandardného kritéria. Zhodnotenie je pre prehľadnosť uvedené vo forme 13-týždňových kľzavých priemerov (neanualizovaných) výnosov stratégií v 26-týždňovom rozhodnom období.

Obrázok 2 - Príklad zhodnotenia momentových stratégií v čase



Z grafu vidíme, že v období od roku 2000 sa záporné výnosy vyskytovali častejšie ako v predchádzajúcej dekáde, ale aj tu sa v určitých obdobiach momentovým stratégiám dobre darilo (napríklad v roku 2001, na prelome rokov 2004 a 2005 a v rokoch 2007 a 2008). Na základe uvedených údajov a poznatkov uvedených autorov teda môžeme skonštatovať, že efekt cenovej hybnosti naďalej pretrváva aj napriek výrazne negatívnemu vývoju v roku 2000, 2003 a 2006.

Ekonomická významnosť skúmaných stratégií je umocnená tým, že sme pri konštrukcii momentových portfólií neuvažovali s pákovým efektom, keďže suma váh portfólia „vítazov“ (W) bola stanovená na 100% a zároveň suma váh portfólia „porazených“ (L) bola stanovená na -100%. Ak by sme uvažovali s vyššou finančnou pákou (napríklad 2 alebo 3), bolo by možné (za cenu vyšších nákladov v súvislosti s potrebou financovania) dosiahnuť vyššie absolútne výnosy pri rovnako sformulovaných stratégiách. Z hľadiska nákladov na realizáciu sú dosiahnuté výnosy dostatočne vysoké, pretože stratégie je možné pomerne ľahko realizovať pomocou indexových podielových fondov, indexových fondov obchodovaných na burze (tzv. ETF) a ďalších indexových nástrojov s nízkymi poplatkami a vysokou likviditou. Pre ilustráciu napríklad Korajczyk a Sadka (2004) uvádzajú analýzu dopadu poplatkov na momentové stratégie vytvorené z individuálnych akcií. Pri veľmi

podobných parametroch a zhodnoteniach sú momentové stratégie na základe výsledkov výskumu autorov účinné aj v prípade započítania poplatkov a pri zohľadnení nižšej likvidity jednotlivých akcií.

Na základe uskutočneného testovania môžeme skonštatovať, že efekt cenovej hybnosti je v skúmanej vzorke prítomný, aj keď z pohľadu štatistickej významnosti sú najmä výsledky vzorky A sporné. Z ekonomického hľadiska sú však dosiahnuté zhodnotenia významné. Ich uplatnenie v praktickej aplikácii by preto malo priniesť zaujímavé výnosy. Keďže Sharpeho kritérium sa ukázalo ako najúčinnnejšie pri detekcii cenovej hybnosti, vektory poradia aktív vygenerované na základe tohto kritéria ďalej využijeme ako subjektívne vstupy pri optimalizácii portfólia s využitím Black-Littermanovho modelu.

7.3 Optimalizácia portfólia a testovanie výkonnosti optimálnych portfólií

V nasledujúcom praktickom experimente sa spájajú závery z predchádzajúcich experimentov s najnovšími teoretickými poznatkami v oblasti optimalizácie portfólií. Jeho cieľom je posúdiť účinnosť zvolených metód pri praktickom procese optimalizácie a zhodnotiť vplyv kvality vstupných parametrov na výsledky. Hodnotenie bude prebiehať na základe porovnávania výsledkov dosiahnutých jednotlivými optimálnymi portfóliami v investičnom období s výnosmi a výsledkami trhového portfólia a naivného portfólia. Od optimalizovaných portfólií sa v investičnom období v súvislosti s využitím optimalizačných metód, ale najmä externých subjektívnych vstupov, očakávajú lepšie výsledky ako od trhového portfólia.

Na základe výsledkov testovania alternatívnych odhadov variančno-kovariančných matíc využívame tri estimátory s najlepšimi zaznamenanými výsledkami – výberovú maticu, redukovaný estimátor exponenciálne váženej matice a portfóliový estimátor vytvorený ako priemer exponenciálne váženej matice, jej prislúchajúcej diagonálnej matice a matice určenej pomocou exponenciálne váženého jednofaktorového modelu. Pre všetky uvedené estimátory

sme zvolili výpočtové obdobie dĺžky 156 týždňov³¹. Pri určovaní vstupných parametrov (očakávaných výnosov a rozptylu) pre optimalizáciu portfólií bola použitá alternatívna špecifikácia Black-Littermanovho modelu, v ktorej sme za subjektívne očakávania dosadili vektor relatívnych známkov vygenerovaný pomocou Sharpeho kritéria cenovej hybnosti. Pri konštrukcii Sharpeho kritéria využívame rozhodné obdobia dĺžky 52 a 26 týždňov s vynechaním 4 týždňov medzi rozhodným a investičným obdobím.

V nasledujúcom texte sú v tabuľkovej forme publikované Sharpeho pomery dosiahnuté pri troch optimálnych portfóliach (získaných na základe troch rôznych estimátorov variančno-kovariančnej matice), trhovom portfóliu a naivnom portfóliu pre rôzne investičné obdobia. Sharpeho pomery sú vypočítané na základe pozorovaní z celého základného súboru (ZS), ako aj osobitne pre vzorku A (300 najnovších pozorovaní) a vzorku B (ZS okrem A) kvôli analýze robustnosti dosiahnutých výsledkov. Okrem toho každá tabuľka obsahuje aj priemerné hodnoty sumy absolútnych hodnôt odchýlok zložiek jednotlivých portfólií od trhového portfólia. Tento údaj umožňuje porovnávať výsledky optimálnych portfólií s výsledkami naivného portfólia, nakoľko optimálne portfóliá sú na rozdiel od naivného portfólia ohraničené pevne stanoveným limitom na aktívne riziko.

³¹ Kvôli výpočtom v súvislosti s exponenciálne váženým jednofaktorovým modelom využívame dodatočných 52 pozorovaní pre odhad reziduálnej zložky. K dispozícii preto máme 800 pozorovaní pre každý estimátor.

Tabuľka 8 - Sharpeho pomer pre TE=1% a Sharpeho momentové kritérium (J=52)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=52	TE=1%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.053	0.111	0.202	0.335	0.500	29.19%
	A	0.017	0.031	0.068	0.215	0.420	29.60%
	B	0.074	0.157	0.287	0.405	0.555	28.30%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.053	0.110	0.200	0.329	0.495	25.65%
	A	0.014	0.025	0.056	0.190	0.387	27.64%
	B	0.076	0.160	0.292	0.410	0.565	24.43%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.052	0.109	0.198	0.328	0.494	25.88%
	A	0.014	0.025	0.057	0.195	0.394	28.02%
	B	0.075	0.158	0.289	0.407	0.559	24.55%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.067	0.145	0.257	0.389	0.524	93.01%
	A	0.038	0.054	0.100	0.236	0.421	105.27%
	B	0.082	0.197	0.347	0.475	0.599	85.35%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia

Na základe údajov z Tabuľky 8 môžeme konštatovať, že v základnom súbore sa všetkým skúmaným optimálnym portfóliám podarilo prekonať trhové portfólio, t.j. dosiahli vyšší Sharpeho pomer pri všetkých skúmaných investičných obdobiach. Najlepšie výsledky zaznamenalo optimálne portfólio vytvorené na základe výberovej matice, aj keď rozdiely medzi jednotlivými optimálnymi portfóliami boli minimálne. Vo vzorke B môžeme pozorovať prakticky rovnaké výsledky, avšak najvyšší Sharpeho pomer naprieč všetkými investičnými obdobiach zaznamenalo optimálne portfólio vytvorené na základe redukovaného estimátora SEVM. Vzorka A však poskytuje odlišný pohľad. Optimálne portfóliá vytvorené na základe redukovaného estimátora SEVM a portfóliového estimátora EM3 mierne zaostávajú za trhovým portfóliom pri všetkých investičných obdobiach, pričom v prípade 13-týždňového investičného obdobia majú všetky tri optimálne portfólia nižší Sharpeho pomer ako trhové portfólio. Optimálne portfólio skonštruované na základe výberovej matice dosahuje v ostatných obdobiach vyšší Sharpeho pomer ako trhové portfólio.

Zaujímavo vyznieva porovnanie s naivným portfóliom, ktoré dosiahlo pre všetky vzorky a investičné obdobia najvyššie Sharpeho pomery zo všetkých skúmaných portfólií. Na druhej

strane vidíme, že priemerná suma absolútnych odchýlok bola viac ako trojnásobná oproti skúmaným optimálnym portfóliám. Naivné portfólio okrem toho potvrdzuje existenciu cenovej hybnosti v celom základnom súbore, ako aj vo vzorkách A a B. Z experimentu s rôznymi kritériami cenovej hybnosti však vieme, že všetky kritéria mali vo vzorke A slabšiu účinnosť ako vo vzorke B, čo sa prejavilo aj na uvádzaných výsledkoch optimálnych portfólií. Okrem toho však za horšími výsledkami portfólií zostrojených na základe redukovaného estimátora SEVM a portfóliového estimátora EM3 stojí aj použitie exponenciálnych váh. Pri testovaní rôznych estimátorov variančno-kovariančnej matice sa potvrdilo, že extrémne pozorovania výnosov vyskytujúce sa vo vzorke A znížili predikčnú schopnosť exponenciálne vážených estimátorov v porovnaní s rovnomerne váženými estimátormi, hoci vo vzorke B boli exponenciálne úspešnejšie. Rovnaký vývoj vidíme aj na výsledkoch za jednotlivé optimálne portfóliá.

Aby sme ďalej preskúmali vplyvy cenovej hybnosti a použitého odhadu variančno-kovariančnej matice, uskutočnili sme rovnaký pokus aj s použitím Sharpeho kritéria cenovej hybnosti s rozhodným obdobím dĺžky 26 týždňov. Pri tomto rozhodnom období síce kritérium pri testovaní účinnosti jednotlivých estimátorov variančno-kovariančnej matice vykazovalo nižšie výnosy, ale tieto boli robustnejšie naprieč rôznymi vzorkami.

Tabuľka 9 - Sharpeho pomer pre TE=1% a Sharpeho momentové kritérium (J=26)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=26	TE=1%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.050	0.108	0.201	0.338	0.506	29.27%
	A	0.019	0.038	0.084	0.229	0.424	29.74%
	B	0.069	0.148	0.275	0.401	0.563	28.20%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.051	0.108	0.198	0.332	0.501	25.48%
	A	0.017	0.032	0.071	0.206	0.398	27.14%
	B	0.072	0.152	0.279	0.406	0.569	24.46%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.050	0.107	0.197	0.332	0.502	25.89%
	A	0.016	0.031	0.072	0.211	0.403	28.08%
	B	0.071	0.151	0.277	0.404	0.566	24.52%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.062	0.131	0.249	0.405	0.562	94.92%
	A	0.044	0.060	0.128	0.291	0.460	104.72%
	B	0.071	0.170	0.320	0.471	0.636	88.82%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia

Z Tabuľky 9 vidíme, že štruktúra výsledkov je obdobná ako pri výsledkoch s rozhodným obdobím 52 týždňov. Najväčší rozdiel predstavujú výsledky vo vzorke A. Obe portfóliá zostrojené na základe exponenciálne vážených estimátorov tu prekonávajú trhové portfólio prakticky vo všetkých obdobiach, aj keď len mierne. Rovnako ako v prípade výsledkov z Tabuľky 8 však vo vzorke A dominuje portfólio vytvorené na základe výberovej matice, zatiaľ čo vo vzorke B je to portfólio vytvorené pomocou redukovaného estimátora. Na základe získaných údajov teda môžeme konštatovať, že výber vhodnej momentovej stratégie je pre dosiahnutie dodatočného výnosu nad referenčný index dôležitejší ako výber estimátora variančno-kovariančnej matice, keďže v celom základnom súbore nie sú medzi jednotlivými optimálnymi portfóliami výrazné rozdiely v dosiahnutých Sharpeho pomeroch.

Ďalej sa budeme zaoberať rozborom výsledkov pre prípady ohraničenia $TE=2\%$ a $TE=5\%$. Tabulované výsledky pre uvedené parametre sú uvedené v prílohách dizertačnej práce. Rovnako ako pri $TE=1\%$ ide o štandardné ohraničenia využívané pri praktickom riadení portfólií vo finančných inštitúciách. Našou snahou je okrem iného preskúmať, či je optimalizačný proces pri rôznych nastaveniach obmedzenia na aktívne riziko schopný rovnako dobre využívať externé vstupy v podobe údajov o cenovej hybnosti. Zároveň očakávame, že porovnanie s naivným portfóliom nadobudne väčší význam.

Z výsledkov pre ohraničenie $TE=2\%$ a 52-týždňové rozhodné obdobie pri Sharpeho kritériu vyplývajú prakticky rovnaké závery ako pri analýze s ohraničením $TE=1\%$. Optimálne portfóliá v celom základnom súbore a vo vzorke B prekonávajú trhové portfólio, zatiaľ čo vo vzorke A je v tomto smere úspešné iba optimálne portfólio vytvorené na základe výberovej matice. Dosiahnuté Sharpeho pomery sú pri všetkých optimálnych portfóliách vyššie ako pri ohraničení $TE=1\%$ pre všetky investičné obdobia v celom základnom súbore a vo vzorke B. Pri vzorke A však lepšie výsledky vykázalo len portfólio určené pomocou výberovej matice (s výnimkou 13-týždňového investičného obdobia). Optimálne portfóliá zostrojené na základe redukovaného estimátora SEVM a portfóliového estimátora EM3 dosiahli nižšie hodnoty Sharpeho pomeru ako v predchádzajúcej analýze.

Pri použití 26-týždňového Sharpeho kritéria boli výsledky optimalizovaných portfólií až na ojedinelé prípady lepšie ako výsledky za trhové portfólio. Zároveň boli prakticky všetky hodnoty Sharpeho pomerov pri optimálnych portfóliách vyššie ako v prípade obmedzenia

TE=1%. V základnom súbore a vo vzorke A výsledkami dominovalo optimálne portfólio vytvorené na základe výberovej matice, vo vzorke B však bolo úspešnejšie portfólio vytvorené na základe redukovaného estimátora SEVM. Naivné portfólio dosiahlo takmer vo všetkých použitých rozhodných a investičných obdobiach a vzorkách vyššie hodnoty Sharpeho pomeru ako optimálne portfóliá a trhové portfólio, avšak opäť za cenu omnoho väčších odchýlok od referenčného indexu.

Pri obmedzení TE=5% sa všetky doteraz pozorované vlastnosti prejavili ešte výraznejšie ako v predchádzajúcich prípadoch. Optimálne portfóliá dosiahli lepšie výsledky ako trhové portfólio v celom základnom súbore a vo vzorke B. Vo vzorke A je v tomto smere úspešné iba portfólio vytvorené na základe výberovej matice, ktoré vďaka tomu poráža ostatné optimálne portfóliá v celom základnom súbore. Oproti predchádzajúcej analýze (TE=2%) je väčšina Sharpeho pomerov zaznamenaných pri optimálnych portfóliách vyššia. Výnimku tvoria opäť najmä viaceré testy portfólií vytvorených z exponenciálne vážených estimátorov vo vzorke A a v základnom súbore, ako aj niektoré testy portfólií vytvorených na základe výberovej matice vo vzorke B a v základnom súbore.

Pri použití 26-týždňového Sharpeho kritéria sme zaznamenali podobne ako pri predchádzajúcich prípadoch vo vzorke A zlepšenie Sharpeho pomerov u portfólií vytvorených na základe exponenciálne vážených estimátorov, hoci vo väčšine ostatných prípadov boli dosiahnuté Sharpeho pomery nižšie ako pri použití 52-týždňového rozhodného obdobia. Korešponduje to so zisteniami z testovania momentových stratégií, na základe ktorých bola úspešnosť Sharpeho kritéria pri 26-týždňovom rozhodnom období nižšia ako pri 52-týždňovom rozhodnom období, avšak výsledky boli stabilnejšie naprieč rôznymi vzorkami a obdobiami. Pozorované Sharpeho pomery sú až na malé výnimky vyššie ako v prípade obmedzenia TE=2%, čo hovorí v prospech použitia optimalizačného procesu. Na druhej strane s uvoľnením limitu na aktívne riziko sa dostavili aj vyššie odchýlky od referenčných váh. Vďaka týmto odchýlkam sa optimálnemu portfóliu vytvorenému z výberovej matice podarilo vo viacerých prípadoch vo vzorke A poraziť aj naivné portfólio.

Naivné portfólio naďalej z hľadiska dosiahnutého Sharpeho pomeru dominovalo nad všetkými sledovanými portfóliami v celom základnom súbore a vo vzorke B. Vo vzorke A ho však v niekoľkých prípadoch porazilo optimálne portfólio skonštruované na základe výberovej matice, avšak iba za cenu väčších odchýlok od referenčného indexu, než pri naivnom portfóliu. Na prvý pohľad sa teda môže zdať, že neoptimalizované naivné portfólio

dosiahlo lepšie výsledky ako optimálne portfóliá v takmer všetkých skúmaných prípadoch. Problémom naivného portfólia je však absencia regulácie celkového rizika, zatiaľ čo optimálne portfólia sú skonštruované tak, aby ich aktívne riziko neprekračovalo stanovený limit. Nedostatok sa prejavuje najmä pri prísnych limitoch na aktívne riziko, pri ktorých sú realizované hodnoty aktívneho rizika a volatility optimálnych portfólií obvykle výrazne nižšie ako realizované aktívne riziko a volatilita naivného portfólia. Pre porovnanie uvádzame vybrané hodnoty namerané v základnom súbore pri 26-týždňovom investičnom období, 52-týždňovom rozhodnom období pre Sharpeho kritérium a obmedzení $TE=1\%$. Optimálne portfólio vytvorené na základe výberovej matice dosiahlo výnos $3,83\%$ pri volatilita $11,44\%$, trhové portfólio sa v priemere zhodnotilo o $3,63\%$ pri volatilita $11,48\%$ a naivné portfólio dosiahlo priemerný výnos na úrovni $4,72\%$ pri volatilita $12,14\%$. Na druhej strane naivné portfólio jednoznačne lepšie zachytáva fenomén cenovej hybnosti, čo mu umožňuje dosahovať lepšie výsledky oproti optimálnym portfóliám pri voľnejších limitoch na aktívne riziko.

Záverom experimentu môžeme skonštatovať, že použitie optimalizačných metód v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko v kombinácii s alternatívnou špecifikáciou Black-Littermanovho modelu zahŕňajúcou externé očakávania vo forme vektora relatívnych očakávaní vygenerovaného pomocou Sharpeho momentového kritéria bolo úspešné. Všetky skúmané optimálne portfóliá boli vo väčšine prípadov schopné porážať trhové portfólio pri dodržiavaní stanovených limitov, najmä zásluhou kvality vstupov, ale aj vďaka uskutočnenej optimalizácii. Neoptimalizované naivné portfólio vykázalo takmer vo všetkých analyzovaných prípadoch najvyššie hodnoty Sharpeho pomeru, avšak často za cenu vyšších odchýlok od váh trhového portfólia a vyššej (neoptimalizovanej) realizovanej volatility. Na druhej strane však naivné portfólio preukázalo schopnosť lepšie zachytávať fenomén cenovej hybnosti. Z hľadiska použitia rôznych estimátorov variančno-kovariančnej matice sa najviac dарило portfóliu zostrojenému na základe výberovej matice, hoci v základnom súbore boli namerané rozdiely v Sharpeho pomeroch medzi jednotlivými optimálnymi portfóliami väčšinou zanedbateľné. Portfóliá zostrojené na základe exponenciálne vážených estimátorov výraznejšie zaostávali najmä vo vzorke A, predovšetkým kvôli výskytu extrémnych (extrémne korelovaných) pozorovaní výnosov. Pri dodatočnom testovaní na základnom súbore skrátenom o 52 posledných pozorovaní za účelom odstránenia extrémnych hodnôt sa ukázalo, že jednotlivé optimálne portfóliá sa od seba vo výsledkoch odlišujú iba minimálne. Optimalizačný proces celkovo splnil očakávania, nakoľko uvoľnenie limitu na aktívne riziko

prinieslo vo všeobecnosti vyššie hodnoty Sharpeho pomerov pri optimálnych portfóliach, hoci za cenu väčších odchýlok od referenčného indexu.

Hodnoty aktívneho rizika namerané ex-post pre jednotlivé portfóliá boli všeobecne vyššie ako vopred stanovené ohraničenia. Pri ohraničení $TE=1\%$ sa namerané hodnoty pohybovali v intervale od 1,1% do 1,7% p.a., pri ohraničení $TE=2\%$ od 2,2% do 3,3% p.a. a pri limite $TE=5\%$ od 5,3% do 8,3%. Najvyššie hodnoty realizovaného aktívneho rizika vo všetkých prípadoch patrili optimálnemu portfóliu zostrojenému pomocou výberovej matice. Portfóliá vytvorené na základe exponenciálne vážených variančno-kovariančných matíc tak dosahovali všeobecne lepšie hodnoty informačného pomeru³², pričom víťazom spomedzi optimálnych portfólií sa vo všetkých skúmaných alternatívach v tomto smere stalo portfólio vytvorené na základe redukovaného estimátora SEVM. Celkovo najvyššie hodnoty informačného pomeru však v takmer všetkých prípadoch dosiahlo naivné portfólio, predovšetkým vďaka lepšej schopnosti zachytávať cenové momentum. Vyššie namerané hodnoty aktívneho rizika sledovaných portfólií v porovnaní so zadanými ohraničeniami sú v súlade s teoretickými odvodeniami v práci Hwanga a Satchella (2001), na základe ktorých je realizované aktívne riziko pri podobne definovaných investičných stratégiach vždy vyššie ako očakávané aktívne riziko.

7.4 Zhrnutie výsledkov a diskusia

Teoretická časť predkladanej práce sa zameriava na súhrn najnovších poznatkov v dvoch samostatných oblastiach výskumu. Prvou z oblastí je fenomén cenovej hybnosti akciových trhov, ktorý je predmetom záujmu akademickej aj laickej verejnosti od začiatku 90-tych rokov 20. storočia. Práca popisuje charakteristické vlastnosti fenoménu, sumarizuje existujúce vysvetlenia, popisuje existujúce a nové stratégie vedúce k využitiu cenovej hybnosti a poskytuje podrobný prehľad dostupnej literatúry. Druhým tematickým okruhom sú modely výberu portfólia, pričom najväčšia pozornosť je venovaná Black-Littermanovmu modelu a optimalizačným modelom v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko.

³² z anglického termínu *information ratio*. Pomer sa vypočíta ako podiel priemerného dosiahnutého relatívneho výnosu voči referenčnému indexu a realizovaného aktívneho rizika (Reilly, Brown, 2003, s. 1117).

Mimoriadny dôraz je kladený na popis vstupov do modelu výberu portfólia a alternatívne metódy odhadu vstupných parametrov.

Náplňou praktickej časti predkladanej dizertačnej práce je vytvorenie a otestovanie investičnej stratégie umožňujúcej využitie fenoménu cenovej hybnosti v praktickej aplikácii. Aplikácia zodpovedá reálnym podmienkam pri riadení portfólií, pričom sa zameriava na portfólio aktívne spravované s cieľom prekonávať stanovený referenčný index (v danom prípade trhové portfólio). Na základe testovania rôznych kritérií pre identifikáciu cenovej hybnosti sa vyberá kritérium, ktoré poskytuje dôležité externé vstupy do optimalizačného procesu. Aplikovanie alternatívnej špecifikácie Black-Littermanovho modelu následne umožňuje zahrnúť tieto dodatočné vstupy do odhadov výnosov a rizika a tie sú následne použité pri optimalizácii portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko pomocou modelu navrhnutého Bertrandom.

Záverom skúmania účinnosti stratégií zameraných na cenovú hybnosť je preukázaná prítomnosť tohto javu v skúmanej vzorke výnosov sektorových indexov amerického akciového indexu S&P 500 v rokoch 1989 až 2009. Výnosy momentových stratégií sú pri viacerých použitých kritériách ekonomicky aj štatisticky významné, pričom najlepšie výsledky pri uskutočnenom teste dosiahlo Sharpeho kritérium. Teoreticky by mohli iné kritériá dosahovať ešte lepšie výsledky, ale cieľom práce nebolo hľadanie najefektívnejšieho kritéria pre zachytenie cenovej hybnosti. Za čiastkový cieľ práce č.2 sme si zvolili otestovanie viacerých kritérií cenovej hybnosti a výber najvhodnejšieho kritéria pre ďalšie použitie. Na základe vyššie uvedených výsledkov považujeme tento čiastkový cieľ za splnený. Z hľadiska odkazov na existujúcu literatúru predkladaná dizertačná práca v oblasti cenovej hybnosti nepriamo nadväzuje na práce Nijmana et al. (2002), Scowcrofta a Seftona (2005), ako aj Diona a Burgesa (2008). Všetci spomínaní autori sa do určitej miery zaoberajú cenovou hybnosťou akciových sektorových indexov a potvrdzujú existenciu fenoménu na globálnych akciových trhoch od roku 1980 do roku 2008. Okrem potvrdenia prítomnosti cenovej hybnosti v celej skúmanej vzorke údajov sa preukázalo aj určité utlmenie momentového efektu na údajoch približne od roku 2001 do roku 2009. Henker et al. (2006) v rovnakej súvislosti ako dôvod uvádza negatívne výnosy momentových stratégií v súvislosti s prepadom technologických akcií (prasknutie tzv. technologickej bubliny). Práca okrem toho prináša inovatívne porovnanie účinnosti viacerých alternatívnych kritérií.

V dostupnej literatúre sa test podobného charakteru nevyskytuje, hoci viaceré z kritérií sa aktívne využívajú pri empirických testoch.

Praktický experiment v oblasti testovania alternatívnych estimátorov variančno-kovariančnej matice bol inšpirovaný najmä prácami Benningu a Disatnika (2006, 2007) a Jagannathana a Maa (2003), v ktorých autori podobným spôsobom analyzovali výhodnosť využitia rozličných estimátorov, vrátane redukovaných estimátorov a portfóliových estimátorov. Závery testovania rôznych estimátorov v predkladanej práci potvrdzujú pozorovania vyššie menovaných autorov, na základe ktorých vykazujú redukované estimátory a portfóliové estimátory vo všeobecnosti nižšiu celkovú chybu odhadu ako výberová variančno-kovariančná matica. Toto tvrdenie však neplatí v prípade výskytu extrémnych pozorovaní výnosov (a zároveň extrémne korelovaných), nakoľko v danom prípade na celkovú chybu odhadu výraznejšie vplýva chyba špecifikácie. Dodatočným teoretickým prínosom práce je aj zapojenie experimentálnych estimátorov využívajúcich exponenciálne váhy minulých pozorovaní. Najlepšie výsledky pritom dosahoval práve redukovaný estimátor exponenciálne váženej variančno-kovariančnej matice. V tejto súvislosti teda môžeme považovať čiastkový cieľ č. 1 za splnený.

Potreba odhadu vstupných parametrov pre model výberu portfólia bola v predkladanej dizertačnej práci naplnená použitím alternatívnej špecifikácie Black-Littermanovho modelu. Využitie metód umožnili skombinovať trhom implikované očakávania s externými subjektívnymi očakávaniami plynúcimi z použitia kritéria cenovej hybnosti. Nejde pritom o úplne novú ideu. Podobný postup s využitím cenovej hybnosti akcií a optimalizácie v priestore očakávaný výnos – rozptyl popisuje napríklad Fabozzi et al. (2006). Babameto a Harris (2008) tiež úspešne využívajú cenové momentum v kombinácii s hodnotovými stratégiami aplikované na globálnych akciových indexoch ako subjektívny vstup do štandardného Black-Littermanovho modelu. Uplatňujú pritom aj obmedzenie na aktívne riziko. Stratégia investovania do indexov založená na cenovej hybnosti sa okrem toho spomína aj v prácach ako napríklad Blitz a Vliet (2008) a Faber (2007). Prínos predkladanej práce však spočíva v kombinácii viacerých metód, najmä Meucciho alternatívnej špecifikácie Black-Littermanovho modelu a optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko podľa špecifikácie Bertranda. Zároveň sa v danom experimente testuje vplyv výberu rôznych estimátorov variančno-kovariančnej matice. Okrem toho boli

v práci použité nové postupy v súvislosti s kalibráciou parametrov Black-Littermanovho modelu a úpravou vektora relatívnych subjektívnych očakávaní.

Výsledky testovania optimalizovaných portfólií potvrdili vhodnosť použitých metód pre odhad parametrov a optimalizáciu portfólia, ako aj ich schopnosť zachytiť informácie obsiahnuté v údajoch získaných na základe použitia kritéria cenovej hybnosti. Skúmané optimálne portfóliá systematicky prekonávali trhové portfólio, predovšetkým vďaka existencii momentového efektu. Použitie alternatívnych estimátorov variančno-kovariančnej matice sa prejavilo rozdielnymi výsledkami jednotlivých optimálnych portfólií. Portfólio vytvorené na základe výberovej variančno-kovariančnej matice dosahovalo najvyššie priemerné výnosy pri najvyššom zaznamenanom Sharpeho pomere. Na druhej strane však portfóliá zostrojené pomocou exponenciálne vážených estimátorov (a najmä portfólio vychádzajúce z redukovaného estimátora SEVM) vykazovali nižšie hodnoty ex-post meraného aktívneho rizika a vyššie hodnoty informačného pomeru. Naivné portfólio vo väčšine parametrov dokázalo prekonať optimálne portfóliá, avšak jeho namerané hodnoty aktívneho rizika zodpovedali približne obmedzeniu $TE=5\%$ bez možnosti ovplyvniť výsledné aktívne riziko. V súvislosti s uvedenými výsledkami môžeme konštatovať splnenie čiastkových cieľov č. 3, 4 a 5.

Hlavným cieľom predkladanej práce bol návrh a implementácia procesu výberu portfólia s využitím moderných metód Black-Littermanovho modelu a Bertrandovej optimalizácie portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko so súčasným zahrnutím externých informácií o cenovej hybnosti aktív. Predkladaná dizertačná práca obsahuje komplexný teoretický návrh spomínaného rámca, ako aj výsledky empirického experimentu súvisiaceho s implementáciou vyššie uvedených modelov a postupov. V teoretickej rovine sa jedná o inovatívny a doteraz v literatúre málo spomínaný komplexný prístup k problému výberu portfólia, ktorý zároveň poskytuje zaujímavé podnety pre ďalší výskum v danej oblasti. Všetky tematické okruhy spomínané v práci sa intenzívne vyvíjajú prakticky nezávisle od seba a v uplynulých rokoch sa pohli významne vpred, čo len zvyšuje dopyt po prácach spájajúcich vo svojej náplni viacero smerov vo finančnej matematike, štatistike a ekonometrii. Hlavný cieľ tejto práce bol podľa názoru autora vzhľadom na rozsiahle a detailné spracovanie vybranej tematiky splnený.

Praktická aplikácia výsledkov akademického výskumu v oblasti financií a riadenia aktív historicky takmer vždy zaostávala za teoretickými poznatkami kvôli náročnosti na implementáciu a softvérové riešenia. Aj v dnešných časoch internetu a výkonných počítačov majú spoločnosti a jednotlivci zaoberajúci sa riadením investičných portfólií relatívne málo možností, ako sa dostať k nástrojom umožňujúcim efektívnejšie spravovanie zverených investícií. Jednou z možností je kúpa moderného softvéru pre riadenie portfólií, čo je zvyčajne finančne, časovo a technologicky náročné riešenie a nemusí poskytnúť požadovanú funkcionálnu a dostatočnú flexibilitu. Otázny je aj stupeň implementácie vedeckých poznatkov. Druhou možnosťou je vývoj vlastných softvérových nástrojov, ktorý je náročný najmä na kvalifikovanú pracovnú silu a čas. Vďaka internetu dnes tiež máme prístup k mnohým bezplatným softvérom a zdrojovým kódom, avšak tie sa väčšinou zameriavajú na rôzne samostatné metódy a neriešia celkový problém výberu portfólia so všetkými čiastkovými úlohami týkajúcimi sa výberu a implementácie nástrojov, výberu a úpravy vstupných údajov, kalibrácie modelov, ako aj odhadu a stanovenia vstupných parametrov. O to cennejšie sú ojedinelé vedecké práce poskytujúce okrem nových teoretických poznatkov aj návrhy na riešenia vyššie spomínaných problémov.

Vedľajším cieľom predkladanej dizertačnej práce bolo vytvorenie uceleného metodologického rámca a súboru ekonomicko-matematických nástrojov pre riešenie problému optimalizácie portfólia v praxi. Tematika práce bola zámerne zvolená tak, aby výsledok bolo možné aplikovať vo finančných spoločnostiach zaoberajúcich sa správou aktív. Praktický experiment, ktorý je súčasťou práce, bol navrhnutý s cieľom využitia údajov a nástrojov pre optimalizáciu spravovaných portfólií, ako aj ďalšie teoretické bádanie. Dôležitým prínosom sú v tomto smere najmä spomínané modely a metódy implementované v programe MS Excel s využitím programovacieho jazyka Visual Basic a voľne šíriteľného doplnku Matrix umožňujúceho flexibilnejšiu prácu s maticami. Praktickým výsledkom práce je súbor moderných nástrojov a techník, ktorý je možné okamžite aplikovať na aktívne riadené (predovšetkým akciové) portfóliá, ktorých cieľom je dlhodobé porážanie určitého finančného indexu (referenčného indexu) pri dodržiavaní vopred stanovených obmedzení na veľkosť rizika. Uvedené nástroje a techniky by mali byť podľa predpokladu autora zavedené do praxe v roku 2009 až 2010. Čiastkový cieľ práce teda môžeme taktiež považovať za splnený.

Záver

Predkladaná dizertačná práca sa venuje dvom špecifickým témam v oblasti riadenia a optimalizácie finančných portfólií – cenovej hybnosti a Black-Littermanovmu modelu výberu portfólia. Hlavným cieľom práce je vytvorenie a otestovanie komplexného metodologického rámca pre praktické riešenie úlohy výberu portfólia so zohľadnením subjektívnych informácií správcu. Prvou z podrobne rozoberaných tém je cenová hybnosť (cenové momentum) alebo tiež hybnosť výnosov finančných aktív. Ide o špecifickú vlastnosť finančných aktív, na základe ktorej aktíva s nadpriemerným výnosom v minulom období (obvykle 3 až 12 mesiacov) vykazujú často nadpriemerné výnosy aj v ďalšom období (opäť 3 až 12 mesiacov). Tento efekt je v literatúre dostatočne dobre zdokumentovaný a podložený množstvom empirických štúdií, avšak ohľadne jeho teoretického vysvetlenia panuje v akademickej verejnosti pomerne rozsiahla polemika. Predkladaná práca obsahuje podrobný prehľad stavu bádania v tejto oblasti, ako aj viaceré teoretické vysvetlenia fenoménu. Okrem toho prispieva k téme tým, že predstavuje a testuje viaceré existujúce a nové heuristické kritériá slúžiace na zachytenie a využitie cenovej hybnosti pri správe investičných portfólií.

Druhým hlavným tematickým okruhom práce je Black-Littermanov model výberu portfólia, ktorý poskytuje silný teoretický rámec pre odhad vstupných parametrov do procesu optimalizácie investičného portfólia. Ide o pomerne nový súbor metód, ktorého hlavnou výhodou je možnosť kombinovania trhom implikovaných očakávaní ohľadne výnosov a rizika so subjektívnymi očakávaniami správcu. Výsledkom použitia modelu je konzistentná množina odhadov očakávaných výnosov a rizika, s ktorou je možné ďalej pracovať pomocou optimalizačných metód. Súčasťou práce je detailný popis modelu a jeho jednotlivých metód a konceptov (reverzná optimalizácia, očakávania investorov, kombinovanie subjektívnych a trhom implikovaných očakávaní), ako aj alternatívnych verzií modelu. Osobitná pozornosť je taktiež venovaná pomerne komplikovanej kalibrácii, ako aj vstupom do modelu. Dôležitú úlohu pritom zohráva taktiež výber vhodného estimátora variančno-kovariančnej matice. Skúmaniu a testovaniu rôznych alternatívnych estimátorov (vrátane viacerých experimentálnych estimátorov) je preto venovaná podstatná časť teoretického a praktického výskumu v predkladanej práci.

Úloha výberu portfólia bola vzhľadom na očakávanú praktickú implementáciu zámerne stanovená tak, aby čo najpresnejšie zodpovedala požiadavkám praxe. Predkladaná práca teda okrem vyššie uvedenej náplne hľadá odpovede na otázky spojené s výberom a implementáciou metód vedúcich k stanoveniu optimálneho portfólia v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko. V súvislosti s tým je osobitná teoretická kapitola venovaná práve metódam optimalizácie v priestore očakávaný výnos – aktívne riziko. V praktickej časti práce bola pritom uplatnená nová Bertrandova metóda optimalizácie.

Na základe dôkladnej analýzy teoretických poznatkov a údajov získaných pomocou praktického experimentu môžeme konštatovať, že uplatnenie súboru metód vedúcich k identifikácii optimálnych portfólií bolo úspešné. Významnú úlohu zohrala preukázaná prítomnosť fenoménu cenovej hybnosti, nakoľko bez subjektívnych očakávaní sú výsledné optimálne portfóliá identické s trhovým portfóliom. Použitý metodologický rámec však jednoznačne preukázal svoju účinnosť v praktickom experimente, vďaka čomu je vysoko pravdepodobné aj jeho skoré nasadenie pri reálnej správe investičných portfólií, ako aj pri ďalšom teoretickom výskume. Okrem teoretických výsledkov totiž práca ponúka aj praktické ekonomicko-matematické nástroje umožňujúce implementáciu použitých metód v reálnych podmienkach.

Summary

The dissertation deals with two specific topics in the area of financial management and portfolio optimization – namely the price momentum and the Black-Litterman model of portfolio selection. The main goal of the thesis is to develop and examine a complex methodological framework for the task of portfolio selection with the inclusion of subjective information. Price momentum, which is the first more thoroughly discussed topic, is a specific phenomenon associated with returns or prices of financial assets. According to this phenomenon, financial assets with above-average (below-average) returns over the past 3-12 months tend to achieve above-average (below-average) returns over the following 3-12 months. The effect has been widely documented in academic literature and supported by numerous empirical studies. However, the theoretical explanation is still subject of debate among various authors. The presented thesis offers an in-depth insight into the state of the problem including the most widely accepted theoretical explanations. On top of that, the thesis contributes to the topic by discussing and testing several existing or new heuristic criteria for price momentum identification. Criteria are empirically tested on their ability to deliver arbitrage profits when used in long-short momentum strategies.

Another major part of the dissertation is dedicated to the Black-Litterman model of portfolio selection. The model contains a very strong theoretical framework for the estimation of inputs into portfolio optimization process. It is a comprehensive set of methods and concepts that allows combining market-implied equilibrium expectations with investor's subjective views into blended expectations for returns and risk. The model provides a vector of blended expected returns as well as blended variance-covariance matrix. The results are then used as inputs for portfolio optimization. The thesis includes a detailed description of the model and its particular methods and concepts (reverse optimization, subjective views, blended expectations, etc.). Additionally, alternative specifications of the model are discussed and tested in a practical experiment. Particular attention is paid to the somewhat peculiar matter of model calibration. The thesis also goes beyond the original model in the area of variance-covariance matrix estimation. Although not addressed by Black and Litterman, the estimation of variance-covariance matrix is yet another important issue in

financial management. Several alternative estimators are discussed both from the theoretical point of view and in an empirical study.

The presented thesis aims to find answers to the questions related to the portfolio selection process. The portfolio optimization problem has been deliberately formulated in such a way that it is as close to the real world conditions as possible. A special chapter has been therefore devoted to the optimization in the mean – tracking error space, which is a popular approach within the asset management industry. Recently introduced Bertrand method is tested in an empirical study using inputs derived from the Black-Litterman model. Subjective views in the Black-Litterman model are generated by the most successful price momentum criteria.

The results of the practical experiment on empirical financial data showed that the whole aforementioned framework is able to generate excess returns over benchmark. Firstly, the weekly returns of Standard & Poor's US industry indices from September 1989 to January 2009 revealed strong price momentum tendencies using multiple momentum criteria. Sharpe ratio criterion has been the most successful in identifying future winners and losers. Secondly, the information contained in the criteria has been translated into blended expected returns, which in turn were used in the Bertrand optimization. The applied models and methods demonstrated their ability to transform the qualitative information on future returns into profits in the mean – tracking error setting.

The developed practical portfolio selection framework is the most notable contribution of the presented dissertation. Other theoretical contributions include novel momentum criteria, several alternative variance-covariance matrix estimators, as well as some innovative adjustments to the Black-Litterman model. Practical contribution is represented by ready-to-use financial modeling spreadsheets implemented in MS Excel and Visual Basic environment.

Použitá literatúra

- ALEXANDER, Carol. 2008a. *Market Risk Analysis Volume I: Quantitative Methods in Finance*. Wiley, Chichester, West Sussex, England, 2008. 290 s. ISBN 978-0-470-99800-7 (H/B).
- ALEXANDER, Carol. 2008b. *Market Risk Analysis Volume II: Practical Financial Econometrics*. Wiley, Chichester, West Sussex, England, 2008. 396 s. ISBN 978-0-470-99801-4 (H/B).
- ALEXANDER, Carol. 2008c. *Market Risk Analysis Volume III: Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. Wiley, Chichester, West Sussex, England, 2008. 396 s. ISBN 978-0-470-99789-5 (H/B).
- ALMGREN, Robert – CHRISS, Neil. 2006. Optimal Portfolios from Ordering Information. In *Journal of Risk*, Fall 2006, č. 9, s. 1-47.
- ARENA, Matteo – HAGGARD, Stephen K. – YAN, Xuemin (Sterling). 2005. Price Momentum and Idiosyncratic Volatility. In *FMA European Conference Proceedings*, 2005. Dostupné na internete: <http://www.fma.org/Chicago/Papers/Yan_ivolmom.pdf>.
- AQUILAR, Omar. 2006. Positive Momentum for Price Momentum. ING Investment Management, Február 2006.
- BABAMETO, E. – HARRIS, Richard D.F. 2008. Exploiting Predictability in the Returns to Value and Momentum Investment Strategies: A Portfolio Approach. Nepublikovaná práca. November 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1302772>>.
- BALVERS, Ronald J. – WU, Yangru. 2006. Momentum and Mean Reversion Across National Equity Markets. In *Journal of Empirical Finance*, Vol. 13, č. 1, Január 2006, s. 24-48, ISSN 0927-5398.
- BARBERIS, Nicolas – SHLEIFER, Andrei – VISHNY, Robert. 1998. A Model of Investor Sentiment. In *Journal of Financial Economics* 49, 1998, s. 307-343. ISSN 0304-405X.
- BEACH, Steven L. – ORLOV, Alexei G. 2007. An Application of the Black-Litterman Model with EGARCH-M-Derived Views for International Portfolio Management. In *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 21, No. 2, 2007, s. 147-166.
- BENNINGA, Simon. 2000. *Financial Modeling*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 2000. 2. vydanie, 622 s., ISBN 0-262-02482-9.

- BENNINGA, Simon. 2004. Portfolio Choice – Adapting the Black-Litterman Model. Notes from Presentation at Otto Beisheim Graduate School of Management, Január 2004.
- BENNINGA, Simon – DISATNIK, David J. 2006. Estimating the Covariance Matrix for Portfolio Optimization. Nepublikovaná práca. Tel Aviv University. Január 2006. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=873125>>.
- BENNINGA, Simon – DISATNIK, David J. 2007. Shrinking the Covariance Matrix. In *The Journal of Portfolio Management*, Summer 2007, s. 55-63, ISSN 1068-0896.
- BERTRAND, Philippe. 2008. Another Look at Portfolio Optimization under Tracking-Error Constraints. Nepublikovaná práca. Júl 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1155032>>.
- BEVAN, Andrew – WINKELMANN, Kurt. 1998. Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience. Goldman Sachs Fixed Income Research. December 1998.
- BIGLOVA, A. – JAŠIĆ, T. – RACHEV, S. – FABOZZI, F. J. 2004. Profitability of momentum strategies: Application of novel risk/return Ratio stock selection criteria. In *Investment Management and Financial Innovations*, Vol. 4, 2004, s. 47-61. ISSN 1812-9358
- BLACK, F. – LITTERMAN, R. 1990. Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium. Goldman Sachs Fixed Income Research. September 1990.
- BLACK, F. – LITTERMAN, R. 1991. Global Asset Allocation With Equities, Bonds, and Currencies. Goldman Sachs. 1991.
- BLACK, F. – LITTERMAN, R. 1992. Global Portfolio Optimization. In *Financial Analysts Journal*. September/Október 1992, Vol. 48, No. 5, s. 28-43.
- BLITZ, David C. – VLIET, Pim Van. 2008. Global Tactical Cross-Asset Allocation: Applying Value and Momentum Across Asset Classes. In *The Journal of Portfolio Management*, Fall 2008, s. 23-28, ISSN 1068-0896.
- BONI, Leslie – WOMACK, Kent L. 2004. Analysts, Industries, and Price Momentum. In *Tuck School of Business Working Paper*, No. 03-12, Tuck School of Business, 2004. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=387220>>.
- BROOKS, Chris – LI, Xiafei – MIFFRE, Joëlle. 2007. Low-cost Momentum Strategies. ICMA Centre Discussion Papers in Finance. University of Reading, August 2007. Dostupné na internete: <http://www.icmacentre.ac.uk/files/pdf/dps/dp2007_12.pdf>.
- CARHART, Mark. M. 2003. Global Tactical Asset Allocation. In *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*. LITTERMAN, Robert. New Jersey, USA: Wiley, August 2003, s. 455-482, ISBN 978-0-471-12410-8.

- CHAN, Kalok – HAMEED, Allaudeen – TONG, Wilson. 2000. Profitability of Momentum Strategies in the International Equity Markets. In *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 35, No. 2, Jún 2000. ISSN 0022-1090.
- CHAN, Louis K.C. – JEGADEESH, Narasimhan – LAKONISHOK, Josef. 1995. Momentum Strategies. In *National Bureau of Economic Research Working Paper*, No. W5375, National Bureau of Economic Research, December 1995. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=225438>>.
- CHEN, Joseph – HONG, Harrison. 2002. Discussion Comments on “Momentum and Autocorrelation in Stock Returns”. In *Review of Financial Studies*, Vol. 15/2002, s. 565-574. ISSN 0893-9454.
- CHORDIA, Tarun – SHIVAKUMAR, Lakshmanan. 2006. Earnings and Price Momentum. In *Journal of Financial Economics*, 2006, Vol. 80, Issue 3, s. 627-656. ISSN 0304-405X.
- CHORDIA, Tarun – SHIVAKUMAR, Lakshmanan. 2002. Momentum, Business Cycle and Time-Varying Expected Returns. 2002. In *The Journal of Finance*, Vol. 57, Issue 2, Jún 2002, s. 985-1019. ISSN 0022-1082.
- CHRISTODOULAKIS, G.A. – CASS, J.C. 2002. Bayesian Optimal Portfolio Selection: The Black-Litterman Approach. Notes for Quantitative Asset Pricing MSc Mathematical Trading and Finance. November 2002. Dostupné na internete: <http://www.globalriskguard.com/resources/assetman/bayes_0008.pdf>.
- CONRAD, Jennifer S. – KAUL, Gautam. 1998. An anatomy of trading strategies. In *Review of Financial Studies*, Vol. 11/1998, s. 489–519. ISSN 0893-9454.
- COOPER, Michael J. – GUTIERREZ, Roberto C. Jr. – HAMEED, Allaudeen. 2004. Market States and Momentum. In *The Journal of Finance*, Vol. 59, Issue 3, Jún 2004, s. 985-1019. ISSN 0022-1082.
- DANIEL, Kent – HIRSHLEIFER, David – SUBRAHMANYAM Avanidhar. 1997. A Theory of Overconfidence, Self-Attribution, and Security Market Under- and Over-Reaction. Nepublikovaná práca, 1997. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=2017>>.
- DANIEL, Kent – TITMAN, Sheridan. 1997. Evidence on the Characteristics of Cross Sectional Variation in Stock Returns. In *Journal of Finance*, č. 52, Marec 1997, s. 1–33. ISSN 0022-1082.
- DASILVA, Axelandre S. – LEE, Wai – PORNROJNANGKOOL, Bobby. 2009. The Black-Litterman Model for Active Portfolio Management. In *Journal of Portfolio Management*, Winter 2009, s. 61-70, ISSN 1068-0896.

- DE SANTIS, Giorgio – LITTERMAN, Robert – VESVAL, Adrien – WINKELMANN, Kurt. 2003. Covariance Matrix Estimation. In *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*. LITTERMAN, Robert. New Jersey, USA: Wiley, August 2003, s. 224-248, ISBN 978-0-471-12410-8.
- DITTMAR, Robert F. – KAUL, Gautam – LEI, Qin. 2007. Momentum is Not an Anomaly. Nepublikovaná práca, Október 2007. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1027057>>.
- DION, Marco – BURGESS, Matthew. 2008. Sector Selection Model. JP Morgan Europe Equity Research, Máj 2008.
- ELTON, Edwin J. – GRUBER, Martin J. – URICH, Thomas J. 1978. Are Betas Best? In *Journal of Finance*, Vol. 33, s. 1375–1384. ISSN 0022-1082.
- FABER, Mebane T. 2007. A Quantitative Approach to Tactical Asset Allocation. In *Journal of Wealth Management*, Spring 2007, ISSN 1520-4154.
- FABOZZI, Frank J. – FOCARDI, Sergio M. – KOLM, Petter N. 2006. *Financial Modelling of the Equity Market: From CAPM to Cointegration*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, Január 2006. 651 s., ISBN: 978-0-471-69900-2.
- FAMA, Eugene F. 1965. The Behavior of Stock-Market Prices. In *The Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, s. 34-105, Január 1965, ISSN 0021-9398.
- FAMA, Eugene F. – FRENCH, Kenneth R. 1996. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. In *Journal of Finance*, Vol. 51, Marec 1996, s. 55-84. ISSN 0022-1082.
- FIGELMAN, Ilya. 2007. Stock Return Momentum and Reversal. In *Journal of Portfolio Management*, Fall 2007, s. 51-67, ISSN 1068-0896.
- GEORGE, Thomas J. – HWANG, Chuan-Yang. 2004. The 52-Week High and Momentum Investing. In *Journal of Finance*, Vol. 59, No. 5, Október 2004, ISSN 0022-1082.
- GHEZZI, P. – JONES, G. – OLIVEIRA, R. 2006. On the Optimal Allocation of EM Risk: Bridging the Gap between Academics and Practitioners. Deutsche Bank Global Markets Research, September 2006.
- GIACOMETTI, R. – BERTOCCHI, M. I. – RACHEV, S. T. – FABOZZI, F. J. 2005. Stable Distributions in the Black-Litterman Approach to Asset Allocation. December 2005. Dostupné na internete: <<http://www.pstat.ucsb.edu/research/papers/BLapproach2005.pdf>>.
- GOODFELLOW, Simon – WILLIAMS, Gareth – YACOU, Alberto. 2008. ING Equity Strategy 2009. ING Wholesale Banking, November 2008, s. 8-13.

- GRIFFIN, John M. – JI, Xiuqing – MARTIN, Spencer J. 2005. Global Momentum Strategies: A Portfolio Perspective. In *Journal of Portfolio Management*, Winter 2005, s. 23-39. ISSN 1068-0896.
- GRIFFIN, John M. – JI, Xiuqing – MARTIN, Spencer J. 2003. Momentum Investing and Business Cycle Risk: Evidence from Pole to Pole. In *Journal of Finance* 58, December 2003, s. 2515-2547. ISSN 0022-1082.
- GRINBLATT, Mark – HAN, Bing. 2005. Prospect Theory, Mental Accounting, and Momentum. In *Journal of Financial Economics*, 2005, Vol. 78, Issue 2, s. 311-339. ISSN 0304-405X.
- GRINBLATT, Mark – HAN, Bing. 2002. The Disposition Effect and Momentum. In *National Bureau of Economic Research Working Paper*, No. W8734, National Bureau of Economic Research, Január 2002. Dostupné na internete: <<http://www.econ.yale.edu/~shiller/behfin/2002-04-11/grinblatt-han.pdf>>.
- GRUNDY, Bruce D. – MARTIN, Spencer J. 2001. Understanding the Nature of the Risks and the Source of the Rewards to Momentum Investing. In *Review of Financial Studies*, Vol. 14/2001, s. 29-78. ISSN 0893-9454.
- HARLOFF, Gary J. 1998. Dynamic Asset Allocation: Beyond Buy and Hold. In *Technical Analysis of Stocks & Commodities*, Január 1998. ISSN 0738-3355
- HE, G. – LITTERMAN, R. 1999. The Intuition behind Black-Litterman Model Portfolios, Goldman Sachs Investment Management Research, December 1999.
- HENKER, Thomas – MARTENS, Martin – HUYNH, Robert. 2006. The vanishing abnormal returns of momentum strategies and 'front-running' momentum strategies. Nepublikovaná práca, Január 2006. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=924522>>.
- HONG, Harrison – STEIN, Jeremy C. 1997. A Unified Theory of Underreaction, Momentum Trading and Overreaction in Asset Markets. In *National Bureau of Economic Research Working Paper*, No. W6324, National Bureau of Economic Research, December 2007. Dostupné na internete: <<http://www.nber.org/papers/w6324>>.
- HOU, Kewei – PENG, Lin – XIONG, Wei. 2008. A Tale of Two Anomalies: The Implication of Investor Attention for Price and Earnings Momentum. Nepublikovaná práca, August 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=890875>>.
- HWANG, Soosung – RUBESAM, Alexandre. 2007. The Disappearance of Momentum. Cass Business School Working Paper, November 2007. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=968176>>.

- IDZOREK, T. M. 2004. A Step – By – Step Guide to the Black-Litterman Model. Zephyr Associates. 2004. Dostupné na internete: <http://www.economia.unimore.it/pattarin_francesco/didattica/papers/idzorek_2004.pdf>.
- JACKSON, Andrew – JOHNSON, Timothy C. 2006. Unifying Underreaction Anomalies. In *Journal of Business*, 2006, Vol. 79, s. 75-114. ISSN 0021-9398.
- JAGANNATHAN, Ravi – MA, Tongshu. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing The Wrong Constraints Helps. In *Journal of Finance*, Júl 2003, 58(4), s. 1651-1684. ISSN 0022-1082.
- JEGADEESH, Narasimhan – TITMAN, Sheridan. 1993. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. In *Journal of Finance*, Marec 1993, Vol. 48, s. 65–91. ISSN 0022-1082.
- JEGADEESH, Narasimhan – TITMAN, Sheridan. 1995. Overreaction, Delayed Reaction and Contrarian Profits. In *Review of Financial Studies*, Vol. 8/1995, s. 973-993. ISSN 0893-9454.
- JEGADEESH, Narasimhan – TITMAN, Sheridan. 2001. Momentum. In *University Of Illinois Working Paper*, Október 2001. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=299107>>.
- JEGADEESH, Narasimhan – TITMAN, Sheridan. 2001a. Profitability of momentum strategies: An evaluation of alternative explanations. In *Journal of Finance*, Apríl 2001, Vol. 56, s. 699-720. ISSN 0022-1082.
- JOHNSON, Timothy C. 2002. Rational Momentum Effects. In *Journal of Finance*, 2002, Vol. 52, s. 585-608. ISSN 0022-1082.
- JORION, Philippe. 2003. Portfolio Optimization with Constraints on Tracking Error. In *Financial Analyst Journal*, Vol. 59, č. 5, September/Október 2003, s.70-82, ISSN 0015-198X.
- KANDEROVÁ, Mária – ÚRADNÍČEK, Vladimír. 2007. *Štatistika a pravdepodobnosť pre ekonómov 2. časť*. Banská Bystrica: OZ Financ, 2007, 190 s., ISBN 978-80-969535-1-6.
- KOCH, Werner. 2003. Consistent Asset Return Estimates via Black-Litterman - Theory and Application. Cominvest Asset Management Presentation. Jún 2003.
- KORAJCZYK, Robert A. – SADKA, Ronnie. 2004. Are Momentum Profits Robust to Trading Costs? In *Journal of Finance*, Jún 2004, Vol. 59, s. 1039–82. ISSN 0022-1082.
- LEDOIT, Olivier – WOLF, Michael. 2003. Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns With an Application to Portfolio Selection. In *Journal of Empirical Finance*, Volume 10, Issue 5, December 2003, s. 603-621. ISSN 0927-5398.

- LEDOIT, Olivier – WOLF, Michael. 2004. Honey, I Shrunk the Covariance Matrix. In *Journal of Portfolio Management*, Fall 2004, s. 110-119. ISSN 1068-0896.
- LEE, Charles M.C. – SWAMINATHAN, Bhaskaran. 2000. Price Momentum and Trading Volume. In *Journal of Finance*, Október 2000, Vol. 55, s. 2017–2069. ISSN 0022-1082.
- LEIPPOLD, Marcus – LOHRE, Harald. 2009. International Price and Earnings Momentum. Nepublikovaná práca. Január 2009. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1102689>>.
- LEWELLEN, Jonathan. 2002. Momentum and Autocorrelation in Stock Returns. In *Review of Financial Studies*, Vol. 15/2002, s. 533-564. ISSN 0893-9454.
- LIU, Laura X.L. – WARNER, Jerold B. – ZHANG, Lu. 2004. Economic Fundamentals, Risk and Momentum Profits. In *Simon School Working Paper*, FR 04-03. Január 2004. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=486362>>.
- LITTERMAN, Robert. 2003. *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*. New Jersey, USA: Wiley, August 2003, 626 s., ISBN 978-0-471-12410-8.
- LITTERMAN, Robert – WINKELMANN, Kurt. 1998. Estimating Covariance Matrices. Nepublikovaná práca. Goldman Sachs Risk Management Series, Január 1998. Dostupné na internete: <<http://www.som.yale.edu/Faculty/zc25/Investments/GS-Estimating.pdf>>.
- LO, Andrew W. – MACKINLAY, Craig A. 1990. When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction. In *Review of Financial Studies*, Vol. 3/1990, s. 175-205. ISSN 0893-9454.
- MANKERT, Charlotta. 2006. *The Black-Litterman Model - mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice*: rigorózna práca. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2006, 111 s.
- MARKOWITZ, H., 1952. Portfolio Selection, In *Journal of Finance*, Marec 1952, s. 77-91.
- MARKOWITZ, H. 1991. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Oxford: Blackwell Publishing, 1991, 2.vydanie, ISBN 1-55786-108-0.
- MARTELLINI, Lionel – ZIEMANN, Volker. 2007. Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework. In *Journal of Portfolio Management*, Vol. 18, Issue 4, Summer 2001, s. 33-44, ISSN 1068-0896.
- MEUCCI, Attilio. 2005. *Risk and Asset Allocation*. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, Január 2005, ISBN 3-54022213-8.
- MEUCCI, Attilio. 2006. Beyond Black-Litterman: views on on-normal markets, In *Risk Magazine*, February 2006, Vol. 19, No. 2, s. 87-92. ISSN 0952-8776.

- MEUCCI, Attilio. 2006a. Beyond Black-Litterman in practice: a five-step recipe to input views on non-normal markets. In *Risk Magazine*, September 2006, Vol. 19, s. 114-119.
- MEUCCI, Attilio. 2008. Enhancing the Black-Litterman and Related Approaches: Views and Stress-test on Risk Factors. Nepublikovaná práca. August 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1213323>>.
- MEUCCI, Attilio. 2008a. The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions. Nepublikovaná práca. August 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1117574>>.
- MICHAUD, RICHARD O. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? In *Financial Analyst Journal*, Vol. 45, No. 1, Január/Február 1989, s. 31-42.
- MIŤKOVÁ, V. - MLYNAROVIC, V. 2007. A Performance and Risk Analysis on the Slovak Private Pension Funds Market. In *Ekonomický časopis*, 55. vydanie, č. 3 (2007), s. 232-249, Bratislava, Ekonomický ústav SAV a Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035.
- MLYNAROVIC, V. 2001. *Finančné investovanie, Teórie a aplikácie*. Bratislava: Edícia Ekonómia, 2001, ISBN 80-89047-16-5.
- MOOSBURGER, Georg – WAGNER, Christian. 2004. Return Predictability and Portfolio Optimization. Apríl 2004. Dostupné na internete: <<http://www-classic.uni-graz.at/bvbwww/awg/AWG%2018/MosburgerWagner.pdf>>.
- MOSKOWITZ, Tobias J. – GRINBLATT, Mark. 1999. Do industries explain momentum? In *Journal of Finance*, August 1999, Vol. 54, s. 1249–1290. ISSN 0022-1082.
- MURPHY, John J. 1999. *Technical Analysis of the Financial Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications*. Paramus, NJ, USA: New York Institute of Finance, 1999, ISBN 0-7352-0066-1.
- NIJMAN, Theo – SWINKELS, Laurens – VERBEEK, Marno. 2002. Do Countries or Industries Explain Momentum in Europe? In *ERIM Report Series*, Reference No. ERS-2002-91-F&A, Október 2002. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=301533>>.
- PALOMBA, Giulio. 2006. Multivariate GARCH Models and Black-Litterman Approach for Tracking Error Constrained Portfolios: An Empirical Analysis. Università Politecnica delle Marche, Working Paper No. 267, September 2006. Dostupné na internete: <<http://dea2.univpm.it/quaderni/pdf/267.pdf>>.
- RACHEV, S. T. – MITTNIK, S. – FABOZZI, F. J. – FOCARDI S. M. – JASIĆ, T. 2007. *Financial Econometrics: From Basics to Advanced Modeling Techniques*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2007, 553 s., ISBN-13 978-0-471-78450-0.

- REILLY, Frank K. – BROWN, Keith C. 2003. *Investment Analysis and Portfolio Management*. Mason, OH, USA: Thompson/South-Western, 2003, 1162 s., 7. vydanie. ISBN: 978-0-324-17173-0
- ROLL, Richard. 1992. A Mean-Variance Analysis of Tracking Error. In *Journal of Portfolio Management*, Vol. 18, No. 4, Summer 1992, s. 13-22, ISSN 1068-0896.
- ROUWENHORST, Geert K. 1998. International Momentum Strategies. In *Journal of Finance*, February 1998, Vol. 53, s. 267–284. ISSN 0022-1082.
- SATCHELL, S. – SCOWCROFT A. 2000. A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. In *Journal of Asset Management* Vol. 1, No. 2, September 2000, s.138-150. ISSN: 1470-8272.
- SATCHELL, S. E. – HWANG, S. 2001. 4. Tracking error: Ex-Ante versus Ex-Post Measures. In *Journal of Asset Management* Vol. 2, No. 3, December 2001, s.241-246. ISSN: 1470-8272.
- SCOWCROFT A. – SEFTON J. Size and Sector Effects in Momentum Returns. 2005. Prezentácia na konferencii Northfield's 18th Annual Research Conference, Montebello, Kanada, Júl 2005. Dostupné na internete: < <http://www.northinfo.com/documents/179.pdf>>.
- SHARPE, W.F. 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk. In *Journal of Finance*, September 1964, Vol. 19, No. 3, s. 425-442.
- SHARPE, WILLIAM F. 1967. Portfolio Analysis. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 2., No. 2, Jún 1967, s. 76-84.
- SHARPE, W. F. 1974. Imputing Expected Security Returns from Portfolio Composition. In *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 9, No. 3, Jún 1974, s. 463-472.
- SOLNIK, Bruno. 1993. *Predictable Time-Varying Components of International Asset Returns*. Institute of Chartered Financial Analysts, August 1993, ISBN 978-0-943205-20-5.
- STANKOVIČOVÁ, Iveta – VOJTKOVÁ, Mária. 2007. *Viacrozmerné štatistické metódy s aplikáciami*. Bratislava: Iura Edition, 2007, 261 s., ISBN 978-80-8078-152-1.
- ŠTULAJTER, František. 2007. *Optimalizačné metódy tvorby investičného portfólia: diplomová práca*. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 2007, 92 s.
- WANG, Kevin Q. 2005. Style Rotation, Momentum and Multifactor Analysis. In *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40, Marec 2005, s. 349-372. ISSN 0022-1090.
- WALTERS, J. 2009. The Black-Litterman Model in Detail. Nepublikovaná práca. Február 2009. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1314585>>.
- WU, Xueping. 2001. A Conditional Multifactor Analysis of Return Momentum, In *Journal of Banking and Finance* 26, No. 8, s. 1675-1696. ISSN 0378-4266.

- YAO, Tong. Dynamic Factors and the Source of Momentum Profits. 2008. In *Journal of Business and Economic Statistics*, 26 (2), Apríl 2008, s. 211-226. ISSN 0735-0015.
- ZHANG, Hong. Dynamic Beta, Time-Varying Risk Premium, and Momentum. 2004. In *Yale ICF Working Paper*, No. 04-26. Júl 2004. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=571006>>.
- ZHOU, Guofu. 2008. Beyond Black-Litterman: Letting the Data Speak. Nepublikované práca, August 2008. Dostupné na internete: <<http://ssrn.com/abstract=1125282>>.
- ZMEŠKAL, Zdeněk – DLUHOŠOVÁ, Dana – TICHÝ, Tomáš. 2004. *Finanční modely*. Ecopress, Praha, Česká republika, 2004. 2. vydanie, 236 s., ISBN 80-86119-87-4.

Zoznam publikovaných prác

RAVINGER, Vladimír. 2008a. Cenové momentum v teórii a praxi. In *Ekonomika a informatika*. Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave, Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku, Bratislava, č. 2/2008, ISSN 1336-3514.

RAVINGER, Vladimír. 2008. Cenová zotrvačnosť ako riziková anomália – diskusia o alternatívnych teóriách a nových trendoch. In *Zborník konferencie Řízení a modelování finančních rizik*. Ostrava, Česká Republika, Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, September 2008.

RAVINGER, Vladimír – ŠTULAJTER, František. 2008. Asset Allocation with the Black-Litterman Model. In *Zborník 10. medzinárodnej konferencie „MEKON 2008“*, Ekonomická fakulta VŠB-TU, Ostrava, Česká Republika, Február 2008.

RAVINGER, Vladimír. 2007. Momentum – faktor zisku. In *Investor*, Bratislava: Ecopress, Marec 2007, ISSN 1335-8235.

RAVINGER, Vladimír. 2006. Mutual Fund Pricing: Stale Prices and “Cash Drag”, In *Zborník konferencie „AIESA – Participácia doktorandov na budovaní spoločnosti založenej na vedomostiach“*, Ekonomická Univerzita, Bratislava, Máj 2006.

RAVINGER, Vladimír. 2005. Investičné certifikáty – budúcnosť investovania? In *Hospodárske noviny: príloha Peniaze a investície*, s. 18-19. Bratislava: Ecopress, 27. decembra 2005, ISSN 1335-4701.

Zoznam obrázkov a tabuliek

Obrázok 1 - Optimálne portfóliá v priestore očakávaný výnos - volatilita.....	99
Obrázok 2 - Príklad zhodnotenia momentových stratégií v čase.....	129
Tabuľka 1 - Prehľad sektorových sub-indexov akciového indexu S&P 500.....	22
Tabuľka 2 - Priemerné umiestnenie estimátorov naprieč vzorkami	106
Tabuľka 3 - Priemerné umiestnenie estimátorov naprieč vzorkami (skrátенý základný súbor)	107
Tabuľka 4 - Priemerné umiestnenie estimátorov pri rôznych výpočtových obdobiach	108
Tabuľka 5 - Umiestnenie estimátorov pri rôznych výpočtových obdobiach (skrátенý základný súbor)	109
Tabuľka 6 - Priemerné umiestnenie estimátorov pre rôzne investičné obdobia.....	109
Tabuľka 7 - Umiestnenie estimátorov pre rôzne investičné obdobia (skrátенý základný súbor)	111
Tabuľka 8 - Sharpeho pomer pre $TE=1\%$ a Sharpeho momentové kritérium ($J=52$).....	132
Tabuľka 9 - Sharpeho pomer pre $TE=1\%$ a Sharpeho momentové kritérium ($J=26$).....	133

Zoznam príloh

- Príloha 1 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/1
- Príloha 2 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/4
- Príloha 3 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/13
- Príloha 4 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/26
- Príloha 5 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/1
- Príloha 6 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/4
- Príloha 7 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/13
- Príloha 8 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/26
- Príloha 9 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/1
- Príloha 10 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/4
- Príloha 11 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/13
- Príloha 12 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/26
- Príloha 13 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/1 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 14 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/4 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 15 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/13 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 16 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/26 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 17 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/1 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 18 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/4 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 19 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/13 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 20 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/26 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 21 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/1 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 22 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/4 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 23 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/13 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 24 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/26 (skrátенý základný súbor)
- Príloha 25 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)
- Príloha 26 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)
- Príloha 27 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)
- Príloha 28 - Kritérium 52-týždňového maxima (základný súbor)
- Príloha 29 – Kritérium 52-týždňového maxima (vzorka A)
- Príloha 30 - Kritérium 52-týždňového maxima (vzorka B)
- Príloha 31 – Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)

Príloha 32 - Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)
Príloha 33 - Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)
Príloha 34 – Kritérium relatívnej sily (základný súbor)
Príloha 35 - Kritérium relatívnej sily (vzorka A)
Príloha 36 - Kritérium relatívnej sily (vzorka B)
Príloha 37 – Regresné kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)
Príloha 38 – Regresné kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)
Príloha 39 - Regresné kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)
Príloha 40 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria ($J=52$, $TE=2\%$)
Príloha 41 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria ($J=26$, $TE=2\%$)
Príloha 42 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria ($J=52$, $TE=5\%$)
Príloha 43 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria ($J=26$, $TE=5\%$)

Ďalšie tabuľky a prílohy sú z priestorových dôvodov uložené v elektronickej podobe na priloženom CD.

Príloha 1 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/1

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/1	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.13%	0.10%	0.13%	0.12%	0.09%	0.08%	0.10%	0.09%	0.10%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.89%	2.10%	1.97%	2.02%	1.89%	1.92%	1.96%	1.97%	1.94%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	7.9%	48.0%	27.0%	99.8%	78.8%	56.2%	49.0%	66.3%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.11%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.13%	0.12%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	1.80%	1.73%	1.87%	1.75%	1.77%	1.76%	1.76%	1.75%	1.75%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	36.7%	34.7%	48.1%	66.9%	58.5%	56.4%	53.0%	49.6%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%	0.11%	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.83%	1.86%	1.90%	1.84%	1.81%	1.81%	1.83%	1.83%	1.82%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	61.5%	23.9%	85.6%	73.9%	79.9%	94.0%	96.8%	80.3%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 2 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/4

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/4	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.51%	0.37%	0.49%	0.43%	0.36%	0.31%	0.37%	0.35%	0.37%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.82%	3.64%	3.98%	3.57%	3.51%	3.52%	3.64%	3.65%	3.64%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	40.5%	48.4%	23.3%	13.6%	15.6%	40.0%	43.3%	39.8%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.43%	0.44%	0.47%	0.47%	0.47%	0.49%	0.49%	0.52%	0.50%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.28%	3.29%	3.40%	3.38%	3.29%	3.31%	3.31%	3.35%	3.32%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	93.6%	37.6%	45.5%	92.0%	77.8%	80.6%	59.7%	74.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.45%	0.42%	0.48%	0.46%	0.43%	0.43%	0.45%	0.46%	0.45%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.47%	3.41%	3.60%	3.44%	3.36%	3.38%	3.42%	3.45%	3.43%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	61.2%	25.6%	82.4%	36.1%	47.2%	70.1%	90.0%	74.3%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 3 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/13

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/13	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	2.03%	1.32%	1.88%	1.33%	1.32%	1.18%	1.35%	1.27%	1.35%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	5.96%	6.16%	6.04%	6.15%	6.25%	6.30%	6.54%	6.59%	6.56%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	55.6%	81.2%	57.6%	41.1%	33.8%	10.5%	8.0%	9.8%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.40%	1.41%	1.60%	1.52%	1.51%	1.54%	1.55%	1.62%	1.57%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	5.63%	5.44%	5.88%	5.48%	5.45%	5.44%	5.53%	5.55%	5.53%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	38.9%	29.5%	49.4%	42.2%	39.3%	66.5%	70.5%	64.1%
Priemerný výnos pre základný súbor	1.61%	1.38%	1.69%	1.46%	1.45%	1.42%	1.48%	1.50%	1.50%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	5.75%	5.69%	5.93%	5.71%	5.73%	5.74%	5.89%	5.92%	5.89%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	75.4%	34.6%	84.4%	91.5%	96.8%	46.9%	38.7%	46.7%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 4 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/26

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/26	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	4.65%	3.25%	4.63%	3.17%	3.34%	3.07%	3.43%	3.27%	3.41%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	6.61%	7.43%	6.82%	7.07%	7.71%	7.76%	8.03%	8.04%	7.98%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	4.4%	58.7%	24.6%	0.8%	0.6%	0.1%	0.1%	0.1%
Priemerný výnos pre vzorku B	3.09%	2.99%	3.47%	3.20%	3.17%	3.19%	3.25%	3.34%	3.28%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	7.67%	7.70%	8.17%	7.92%	7.83%	7.80%	7.97%	8.06%	8.05%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	92.4%	12.9%	45.2%	61.7%	68.4%	35.6%	24.1%	25.3%
Priemerný výnos pre základný súbor	3.62%	3.08%	3.86%	3.19%	3.23%	3.15%	3.32%	3.32%	3.33%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	7.36%	7.61%	7.75%	7.63%	7.79%	7.78%	7.99%	8.05%	8.02%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	33.0%	12.3%	28.0%	9.6%	9.9%	1.5%	0.8%	1.1%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 5 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/1

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/1	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.13%	0.13%	0.13%	0.10%	0.10%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.76%	1.94%	1.92%	1.92%	1.90%	1.96%	1.96%	1.95%	1.88%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	9.2%	13.3%	13.2%	19.7%	6.8%	7.0%	7.1%	25.7%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.07%	0.08%	0.07%	0.08%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%	0.10%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	1.83%	1.79%	1.87%	1.80%	1.86%	1.83%	1.85%	1.83%	1.83%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	70.5%	56.0%	78.7%	63.7%	91.2%	72.5%	94.5%	97.5%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.09%	0.10%	0.09%	0.09%	0.10%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.80%	1.85%	1.89%	1.85%	1.88%	1.88%	1.89%	1.88%	1.85%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	44.4%	16.9%	46.8%	24.8%	22.1%	16.3%	23.9%	47.5%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 6 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/4

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/4	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.53%	0.49%	0.52%	0.42%	0.38%	0.32%	0.39%	0.37%	0.42%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.34%	3.40%	3.84%	3.52%	3.45%	3.55%	3.57%	3.62%	3.52%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	75.6%	1.6%	35.4%	56.5%	27.6%	24.5%	15.3%	35.9%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.31%	0.33%	0.32%	0.33%	0.38%	0.39%	0.42%	0.43%	0.40%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.46%	3.42%	3.43%	3.42%	3.50%	3.47%	3.49%	3.51%	3.49%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	81.3%	84.8%	79.3%	80.4%	92.2%	80.9%	74.8%	80.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.39%	0.39%	0.39%	0.37%	0.38%	0.36%	0.41%	0.41%	0.41%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.41%	3.41%	3.59%	3.45%	3.48%	3.50%	3.52%	3.55%	3.50%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	99.3%	15.9%	72.7%	59.6%	46.5%	37.5%	26.3%	46.2%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 7 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/13

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/13	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	1.76%	1.53%	1.91%	1.42%	1.20%	1.13%	1.25%	1.31%	1.39%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	5.37%	5.75%	5.83%	5.76%	6.16%	6.40%	6.44%	6.56%	6.31%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	24.2%	15.4%	22.3%	1.8%	0.3%	0.2%	0.1%	0.5%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.12%	1.13%	1.29%	1.23%	1.26%	1.29%	1.39%	1.42%	1.36%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	6.03%	6.01%	5.83%	5.76%	6.04%	5.76%	6.10%	5.89%	6.01%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	95.2%	46.1%	30.8%	96.6%	31.6%	80.6%	61.3%	95.4%
Priemerný výnos pre základný súbor	1.36%	1.28%	1.53%	1.30%	1.24%	1.23%	1.34%	1.37%	1.37%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	5.79%	5.91%	5.84%	5.76%	6.08%	6.01%	6.23%	6.15%	6.13%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	56.4%	83.4%	86.2%	17.0%	30.2%	4.2%	9.1%	11.7%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 8 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/26

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/26	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	3.82%	3.44%	4.52%	3.52%	2.94%	2.92%	3.07%	3.26%	3.31%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	5.80%	6.51%	6.40%	6.03%	7.63%	7.94%	7.96%	8.01%	7.59%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	4.6%	9.1%	50.2%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Priemerný výnos pre vzorku B	2.52%	2.57%	2.85%	2.78%	2.81%	2.80%	3.08%	3.06%	3.04%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	9.01%	8.93%	8.08%	8.20%	9.03%	8.51%	9.05%	8.72%	8.94%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	85.0%	1.8%	4.0%	96.7%	21.6%	92.1%	46.8%	86.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	3.02%	2.91%	3.50%	3.06%	2.86%	2.84%	3.08%	3.14%	3.14%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	7.94%	8.09%	7.51%	7.44%	8.51%	8.29%	8.64%	8.44%	8.44%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	61.7%	12.2%	6.8%	5.6%	23.6%	1.9%	9.1%	9.2%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 9 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/1

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/1	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.16%	0.15%	0.13%	0.09%	0.12%	0.03%	0.12%	0.10%	0.12%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.78%	1.92%	1.91%	1.92%	1.92%	2.70%	1.98%	1.95%	1.88%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	21.4%	22.9%	22.0%	20.3%	0.0%	7.6%	12.6%	38.6%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.08%	0.07%	0.09%	0.08%	0.08%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	2.01%	1.98%	2.01%	1.96%	2.04%	1.97%	2.03%	1.97%	1.98%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	79.1%	94.4%	61.6%	75.4%	74.9%	82.5%	73.0%	76.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.09%	0.09%	0.08%	0.07%	0.10%	0.06%	0.10%	0.09%	0.09%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.91%	1.95%	1.97%	1.94%	1.99%	2.31%	2.01%	1.96%	1.93%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	59.3%	44.3%	73.8%	31.8%	0.0%	21.5%	51.6%	78.9%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 10 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/4

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/4	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.64%	0.56%	0.52%	0.35%	0.47%	0.28%	0.47%	0.37%	0.47%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.33%	3.37%	3.82%	3.60%	3.48%	3.79%	3.59%	3.62%	3.51%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	83.5%	1.8%	17.8%	45.7%	2.6%	18.9%	14.9%	35.5%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.19%	0.21%	0.25%	0.24%	0.33%	0.30%	0.35%	0.33%	0.32%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.87%	3.83%	3.69%	3.65%	3.87%	3.76%	3.85%	3.77%	3.79%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	83.7%	35.5%	26.1%	99.7%	56.6%	92.6%	61.2%	67.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.38%	0.36%	0.37%	0.29%	0.39%	0.29%	0.40%	0.35%	0.39%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.65%	3.64%	3.75%	3.63%	3.70%	3.77%	3.74%	3.70%	3.67%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	93.9%	48.7%	88.3%	70.4%	40.0%	52.3%	69.7%	88.3%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 11 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/13

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/13	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	2.17%	1.83%	1.94%	1.30%	1.54%	0.84%	1.56%	1.32%	1.58%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	5.58%	5.80%	5.78%	5.78%	6.18%	7.53%	6.45%	6.56%	6.26%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	50.6%	53.3%	52.7%	7.7%	0.0%	1.2%	0.5%	4.6%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.62%	0.66%	1.22%	1.06%	1.00%	0.98%	1.09%	1.09%	1.07%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	6.55%	6.57%	6.21%	6.09%	6.55%	6.14%	6.59%	6.23%	6.39%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	95.2%	30.9%	16.0%	99.0%	20.4%	91.1%	33.8%	62.5%
Priemerný výnos pre základný súbor	1.30%	1.17%	1.54%	1.17%	1.24%	0.92%	1.30%	1.19%	1.29%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	6.18%	6.26%	6.03%	5.96%	6.39%	6.78%	6.53%	6.37%	6.33%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	74.2%	52.3%	32.7%	38.9%	1.7%	15.8%	43.0%	53.8%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 12 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/26

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/26	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	4.77%	4.08%	4.58%	3.34%	3.64%	3.40%	3.75%	3.28%	3.67%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	6.03%	6.53%	6.35%	6.00%	7.59%	11.10%	7.93%	8.00%	7.46%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	16.5%	37.2%	93.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.34%	1.43%	2.55%	2.26%	2.02%	2.04%	2.22%	2.27%	2.28%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	9.43%	9.45%	8.41%	8.27%	9.37%	8.82%	9.40%	9.00%	9.20%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	96.2%	2.9%	1.2%	90.3%	19.6%	94.5%	37.5%	62.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	2.88%	2.62%	3.46%	2.75%	2.75%	2.65%	2.91%	2.72%	2.90%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	8.26%	8.37%	7.62%	7.36%	8.65%	9.92%	8.80%	8.58%	8.49%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	72.3%	3.8%	0.3%	23.0%	0.0%	10.1%	32.6%	48.1%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 13 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/1 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/1 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.13%	0.10%	0.13%	0.12%	0.09%	0.08%	0.10%	0.09%	0.10%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.71%	1.67%	1.77%	1.63%	1.66%	1.64%	1.67%	1.64%	1.66%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	67.1%	55.4%	43.7%	61.4%	45.2%	68.8%	50.0%	58.4%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.11%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.12%	0.13%	0.12%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	1.80%	1.73%	1.87%	1.75%	1.77%	1.76%	1.76%	1.75%	1.75%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	36.7%	34.7%	48.1%	66.9%	58.5%	56.4%	53.0%	49.6%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.16%	0.15%	0.18%	0.16%	0.15%	0.15%	0.15%	0.16%	0.16%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.67%	1.62%	1.72%	1.62%	1.64%	1.63%	1.64%	1.63%	1.63%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	40.7%	34.3%	45.1%	65.8%	52.5%	59.9%	50.1%	49.6%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 14 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/4 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/4 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.51%	0.37%	0.49%	0.43%	0.36%	0.31%	0.37%	0.35%	0.37%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.50%	3.50%	3.52%	3.44%	3.33%	3.30%	3.42%	3.39%	3.40%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	99.3%	93.5%	78.0%	40.4%	30.6%	69.7%	57.0%	63.7%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.43%	0.44%	0.47%	0.47%	0.47%	0.49%	0.49%	0.52%	0.50%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.28%	3.29%	3.40%	3.38%	3.29%	3.31%	3.31%	3.35%	3.32%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	93.6%	37.6%	45.5%	92.0%	77.8%	80.6%	59.7%	74.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.63%	0.57%	0.67%	0.61%	0.59%	0.59%	0.62%	0.64%	0.62%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.06%	3.06%	3.15%	3.11%	3.04%	3.05%	3.07%	3.09%	3.07%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	96.2%	39.3%	61.5%	83.8%	93.8%	96.1%	78.6%	92.3%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 15 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/13 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/13 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	2.03%	1.32%	1.88%	1.33%	1.32%	1.18%	1.35%	1.27%	1.35%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	6.00%	5.96%	5.70%	5.81%	5.70%	5.50%	5.90%	5.71%	5.83%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	90.1%	37.2%	56.7%	37.8%	13.2%	77.3%	39.1%	61.3%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.40%	1.41%	1.60%	1.52%	1.51%	1.54%	1.55%	1.62%	1.57%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	5.63%	5.44%	5.88%	5.48%	5.45%	5.44%	5.53%	5.55%	5.53%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	38.9%	29.5%	49.4%	42.2%	39.3%	66.5%	70.5%	64.1%
Priemerný výnos pre základný súbor	2.02%	1.86%	2.14%	1.94%	1.96%	1.94%	2.03%	2.06%	2.04%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	5.26%	5.05%	5.37%	5.05%	5.06%	5.02%	5.13%	5.12%	5.12%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	24.2%	56.5%	24.4%	25.0%	17.8%	48.1%	42.1%	42.5%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 16 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 52/26 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 52/26 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	4.65%	3.25%	4.63%	3.17%	3.34%	3.07%	3.43%	3.27%	3.41%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	7.91%	8.32%	7.82%	8.29%	8.16%	7.96%	8.40%	8.27%	8.43%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	38.2%	85.1%	41.4%	57.8%	91.2%	29.8%	43.9%	27.0%
Priemerný výnos pre vzorku B	3.09%	2.99%	3.47%	3.20%	3.17%	3.19%	3.25%	3.34%	3.28%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	7.67%	7.70%	8.17%	7.92%	7.83%	7.80%	7.97%	8.06%	8.05%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	92.4%	12.9%	45.2%	61.7%	68.4%	35.6%	24.1%	25.3%
Priemerný výnos pre základný súbor	3.99%	3.82%	4.30%	3.88%	4.00%	3.94%	4.13%	4.15%	4.13%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	7.27%	7.03%	7.64%	7.15%	7.13%	7.07%	7.23%	7.26%	7.28%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	33.3%	16.0%	61.2%	57.7%	41.5%	87.5%	94.7%	99.6%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 17 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/1 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/1 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.13%	0.13%	0.13%	0.10%	0.10%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.58%	1.60%	1.67%	1.63%	1.64%	1.64%	1.65%	1.63%	1.64%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	87.5%	36.6%	63.8%	57.6%	55.5%	50.5%	62.6%	57.2%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.07%	0.08%	0.07%	0.08%	0.09%	0.10%	0.10%	0.11%	0.10%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	1.83%	1.79%	1.87%	1.80%	1.86%	1.83%	1.85%	1.83%	1.83%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	70.5%	56.0%	78.7%	63.7%	91.2%	72.5%	94.5%	97.5%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.13%	0.14%	0.15%	0.13%	0.14%	0.14%	0.15%	0.15%	0.15%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.65%	1.63%	1.69%	1.65%	1.70%	1.67%	1.69%	1.67%	1.67%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	75.6%	52.7%	95.4%	44.8%	70.2%	48.9%	79.5%	77.1%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 18 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/4 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/4 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.53%	0.49%	0.52%	0.42%	0.38%	0.32%	0.39%	0.37%	0.42%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.39%	3.40%	3.41%	3.41%	3.32%	3.29%	3.38%	3.36%	3.39%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	94.8%	92.1%	90.5%	71.5%	61.3%	95.6%	89.5%	99.9%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.31%	0.33%	0.32%	0.33%	0.38%	0.39%	0.42%	0.43%	0.40%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.46%	3.42%	3.43%	3.42%	3.50%	3.47%	3.49%	3.51%	3.49%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	81.3%	84.8%	79.3%	80.4%	92.2%	80.9%	74.8%	80.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.53%	0.55%	0.59%	0.53%	0.55%	0.55%	0.59%	0.60%	0.58%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.12%	3.09%	3.12%	3.11%	3.16%	3.14%	3.16%	3.17%	3.16%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	79.6%	99.7%	91.7%	77.8%	88.5%	72.8%	70.6%	73.5%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 19 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/13 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/13 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	1.76%	1.53%	1.91%	1.42%	1.20%	1.13%	1.25%	1.31%	1.39%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	6.13%	6.06%	5.71%	5.71%	5.77%	5.56%	5.92%	5.74%	5.91%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	84.2%	22.4%	22.5%	29.7%	9.3%	54.5%	25.7%	53.3%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.12%	1.13%	1.29%	1.23%	1.26%	1.29%	1.39%	1.42%	1.36%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	6.03%	6.01%	5.83%	5.76%	6.04%	5.76%	6.10%	5.89%	6.01%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	95.2%	46.1%	30.8%	96.6%	31.6%	80.6%	61.3%	95.4%
Priemerný výnos pre základný súbor	1.75%	1.78%	1.99%	1.77%	1.83%	1.84%	1.97%	1.99%	1.94%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	5.45%	5.40%	5.26%	5.19%	5.43%	5.23%	5.49%	5.32%	5.43%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	80.2%	34.0%	18.9%	91.6%	25.4%	86.7%	50.2%	89.4%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 20 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 156/26 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 156/26 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	3.82%	3.44%	4.52%	3.52%	2.94%	2.92%	3.07%	3.26%	3.31%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	8.15%	8.19%	7.69%	7.60%	7.99%	7.99%	8.12%	8.23%	8.29%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	94.1%	31.7%	23.0%	73.2%	72.6%	95.5%	86.1%	76.5%
Priemerný výnos pre vzorku B	2.52%	2.57%	2.85%	2.78%	2.81%	2.80%	3.08%	3.06%	3.04%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	9.01%	8.93%	8.08%	8.20%	9.03%	8.51%	9.05%	8.72%	8.94%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	85.0%	1.8%	4.0%	96.7%	21.6%	92.1%	46.8%	86.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	3.47%	3.57%	3.93%	3.63%	3.77%	3.77%	4.04%	4.07%	4.01%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	7.86%	7.73%	7.41%	7.19%	7.83%	7.50%	7.84%	7.64%	7.79%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	64.7%	11.4%	1.7%	91.3%	20.0%	93.9%	43.3%	79.2%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 21 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/1 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/1 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.16%	0.15%	0.13%	0.09%	0.12%	0.03%	0.12%	0.10%	0.12%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	1.61%	1.63%	1.66%	1.64%	1.64%	2.47%	1.65%	1.63%	1.64%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	90.2%	63.1%	76.8%	78.1%	0.0%	70.2%	88.3%	76.2%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.08%	0.07%	0.09%	0.08%	0.08%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	2.01%	1.98%	2.01%	1.96%	2.04%	1.97%	2.03%	1.97%	1.98%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	79.1%	94.4%	61.6%	75.4%	74.9%	82.5%	73.0%	76.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.14%	0.14%	0.15%	0.12%	0.15%	0.11%	0.16%	0.14%	0.14%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	1.75%	1.74%	1.75%	1.73%	1.79%	2.15%	1.79%	1.73%	1.75%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	83.0%	96.7%	68.1%	63.2%	0.0%	65.1%	76.2%	90.0%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 22 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/4 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/4 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	0.64%	0.56%	0.52%	0.35%	0.47%	0.28%	0.47%	0.37%	0.47%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	3.51%	3.50%	3.38%	3.40%	3.37%	3.54%	3.42%	3.35%	3.40%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	94.2%	51.6%	57.8%	48.4%	88.4%	63.1%	40.7%	56.5%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.19%	0.21%	0.25%	0.24%	0.33%	0.30%	0.35%	0.33%	0.32%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	3.87%	3.83%	3.69%	3.65%	3.87%	3.76%	3.85%	3.77%	3.79%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	83.7%	35.5%	26.1%	99.7%	56.6%	92.6%	61.2%	67.8%
Priemerný výnos pre základný súbor	0.55%	0.53%	0.59%	0.48%	0.59%	0.50%	0.62%	0.57%	0.58%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	3.39%	3.35%	3.25%	3.23%	3.37%	3.40%	3.36%	3.29%	3.32%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	76.8%	28.7%	24.8%	88.0%	91.5%	86.4%	48.1%	61.7%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 23 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/13 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/13 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	2.17%	1.83%	1.94%	1.30%	1.54%	0.84%	1.56%	1.32%	1.58%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	6.52%	6.37%	5.62%	5.68%	5.92%	6.86%	6.03%	5.70%	5.92%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	68.6%	1.1%	1.8%	9.7%	37.2%	18.5%	2.2%	9.8%
Priemerný výnos pre vzorku B	0.62%	0.66%	1.22%	1.06%	1.00%	0.98%	1.09%	1.09%	1.07%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	6.55%	6.57%	6.21%	6.09%	6.55%	6.14%	6.59%	6.23%	6.39%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	95.2%	30.9%	16.0%	99.0%	20.4%	91.1%	33.8%	62.5%
Priemerný výnos pre základný súbor	1.76%	1.72%	2.08%	1.70%	1.91%	1.60%	2.01%	1.89%	1.93%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	5.85%	5.79%	5.40%	5.36%	5.71%	6.07%	5.75%	5.47%	5.61%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	80.0%	4.5%	2.9%	54.7%	33.9%	67.5%	9.5%	29.6%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 24 - Výsledky F-testu pre časové obdobia 260/26 (skrátенý základný súbor)

Výsledky testovania štatistickej významnosti rozdielov medzi rozptylmi výnosov GMV portfólií generovaných pomocou jednotlivých alternatívnych estimátorov a rozptylom výnosov GMV portfólia generovaného pomocou výberovej matice VM									
Test 260/26 (skrátенý základný súbor)	VM	SVM	EVM	SEVM	M4	EM4	M3	EM3	ZM3
Priemerný výnos pre vzorku A	4.77%	4.08%	4.58%	3.34%	3.64%	3.40%	3.75%	3.28%	3.67%
Štandardná odchýlka pre vzorku A	8.99%	8.82%	7.55%	7.22%	8.33%	11.22%	8.45%	8.20%	8.38%
Výsledok F-testu* pre vzorku A	100.0%	74.2%	0.3%	0.0%	18.7%	0.0%	28.4%	10.9%	22.3%
Priemerný výnos pre vzorku B	1.34%	1.43%	2.55%	2.26%	2.02%	2.04%	2.22%	2.27%	2.28%
Štandardná odchýlka pre vzorku B	9.43%	9.45%	8.41%	8.27%	9.37%	8.82%	9.40%	9.00%	9.20%
Výsledok F-testu* pre vzorku B	100.0%	96.2%	2.9%	1.2%	90.3%	19.6%	94.5%	37.5%	62.7%
Priemerný výnos pre základný súbor	3.36%	3.31%	3.97%	3.36%	3.72%	3.69%	3.93%	3.77%	3.84%
Štandardná odchýlka pre základný súbor	8.16%	8.07%	7.51%	7.12%	7.96%	9.34%	7.99%	7.71%	7.84%
Výsledok F-testu* pre základný súbor	100.0%	78.3%	4.0%	0.1%	54.4%	0.1%	60.0%	16.3%	32.1%

* Obojstranná pravdepodobnosť zhody porovnávaných rozptylov

Príloha 25 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)

Štandardné kritérium: základný súbor, I=0		Rozhodné obdobie (J) \ Investičné obdobie (T)																							
týždne		1			4			13			26			39			52			65					
		3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L
1	R _{IT}	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.01%	0.02%
	σ _{IT}	1.48%	1.04%	1.87%	1.69%	1.22%	2.11%	1.79%	1.29%	2.25%	1.82%	1.29%	2.23%	1.86%	1.35%	2.30%	1.89%	1.37%	2.37%	2.04%	1.46%	2.58%	2.04%	1.46%	2.58%
	t-stat	0.16	0.37	0.25	0.12	0.03	0.20	0.15	0.02	0.12	0.37	0.18	0.31	0.37	0.26	0.36	0.37	0.31	0.34	0.27	0.24	0.19	0.27	0.24	0.19
	R _{IT}	-0.04%	-0.05%	-0.04%	0.00%	-0.01%	0.02%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.03%	0.01%	0.02%	0.04%	0.02%	0.04%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.01%	0.03%
4	R _{IT}	1.46%	1.07%	1.86%	1.65%	1.22%	2.06%	1.88%	1.32%	2.32%	1.86%	1.35%	2.37%	1.91%	1.40%	2.46%	1.93%	1.40%	2.52%	2.03%	1.46%	2.69%	2.03%	1.46%	2.69%
	σ _{IT}	-0.89	-1.34	-0.75	0.01	-0.32	0.24	0.01	-0.24	-0.06	0.47	0.29	0.32	0.65	0.52	0.49	0.52	0.43	0.43	0.36	0.28	0.30	0.36	0.28	0.30
	t-stat	0.01%	-0.01%	0.03%	-0.02%	-0.03%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.06%	0.04%	0.08%	0.07%	0.05%	0.09%	0.06%	0.04%	0.07%	0.04%	0.03%	0.05%	0.04%	0.03%	0.05%
	R _{IT}	1.54%	1.15%	1.91%	1.83%	1.34%	2.29%	1.95%	1.44%	2.43%	1.77%	1.30%	2.26%	1.79%	1.34%	2.29%	1.78%	1.33%	2.29%	1.89%	1.42%	2.48%	1.89%	1.42%	2.48%
13	R _{IT}	0.27	-0.40	0.44	-0.32	-0.61	0.00	0.14	-0.04	0.28	1.09	0.85	1.04	1.30	1.10	1.29	1.01	0.83	1.00	0.72	0.60	0.64	0.72	0.60	0.64
	σ _{IT}	0.03%	0.02%	0.05%	0.06%	0.03%	0.06%	0.07%	0.05%	0.09%	0.11%	0.07%	0.14%	0.09%	0.06%	0.12%	0.07%	0.04%	0.09%	0.04%	0.03%	0.06%	0.04%	0.03%	0.06%
	t-stat	1.60%	1.16%	1.98%	1.89%	1.33%	2.37%	1.87%	1.33%	2.38%	1.85%	1.36%	2.31%	1.86%	1.30%	2.53%	1.87%	1.35%	2.53%	2.00%	1.46%	2.60%	2.00%	1.46%	2.60%
	R _{IT}	0.53	0.56	0.72	0.95	0.66	0.82	1.14	1.04	1.14	1.83	1.63	1.86	1.51	1.43	1.47	1.09	0.99	1.15	0.64	0.61	0.74	0.64	0.61	0.74
26	R _{IT}	0.06%	0.04%	0.07%	0.11%	0.07%	0.14%	0.11%	0.07%	0.14%	0.11%	0.07%	0.15%	0.09%	0.05%	0.13%	0.06%	0.03%	0.09%	0.05%	0.03%	0.07%	0.05%	0.03%	0.07%
	σ _{IT}	1.60%	1.11%	2.01%	1.87%	1.36%	2.36%	1.88%	1.37%	2.37%	1.98%	1.40%	2.54%	2.07%	1.46%	2.66%	2.07%	1.54%	2.58%	2.16%	1.59%	2.68%	2.16%	1.59%	2.68%
	t-stat	1.11	1.06	1.06	1.83	1.57	1.77	1.84	1.63	1.75	1.69	1.47	1.80	1.33	1.05	1.46	0.93	0.67	1.09	0.66	0.50	0.78	0.66	0.50	0.78
	R _{IT}	0.08%	0.03%	0.07%	0.10%	0.06%	0.14%	0.10%	0.07%	0.14%	0.10%	0.07%	0.13%	0.07%	0.06%	0.10%	0.05%	0.04%	0.08%	0.04%	0.03%	0.06%	0.04%	0.03%	0.06%
52	R _{IT}	1.57%	1.16%	2.09%	1.90%	1.33%	2.40%	1.89%	1.36%	2.42%	1.99%	1.46%	2.59%	2.12%	1.53%	2.66%	2.13%	1.57%	2.64%	2.19%	1.69%	2.73%	2.19%	1.69%	2.73%
	σ _{IT}	1.46	0.79	1.06	1.62	1.26	1.78	1.60	1.60	1.68	1.48	1.48	1.50	1.01	1.12	1.13	0.77	0.80	0.86	0.53	0.51	0.64	0.53	0.51	0.64
	t-stat	0.06%	0.05%	0.10%	0.09%	0.07%	0.13%	0.08%	0.07%	0.11%	0.08%	0.07%	0.10%	0.07%	0.06%	0.09%	0.06%	0.05%	0.08%	0.04%	0.03%	0.06%	0.04%	0.03%	0.06%
	R _{IT}	1.67%	1.18%	2.12%	2.01%	1.39%	2.46%	2.11%	1.43%	2.60%	2.23%	1.53%	2.73%	2.28%	1.63%	2.72%	2.26%	1.66%	2.76%	2.34%	1.76%	2.82%	2.34%	1.76%	2.82%
65	R _{IT}	1.10	1.19	1.40	1.32	1.51	1.59	1.16	1.49	1.22	1.07	1.37	1.07	0.91	1.06	1.01	0.75	0.80	0.90	0.49	0.55	0.59	0.49	0.55	0.59
	σ _{IT}	1.10	1.19	1.40	1.32	1.51	1.59	1.16	1.49	1.22	1.07	1.37	1.07	0.91	1.06	1.01	0.75	0.80	0.90	0.49	0.55	0.59	0.49	0.55	0.59
	t-stat	1.10	1.19	1.40	1.32	1.51	1.59	1.16	1.49	1.22	1.07	1.37	1.07	0.91	1.06	1.01	0.75	0.80	0.90	0.49	0.55	0.59	0.49	0.55	0.59
	R _{IT}	1.10	1.19	1.40	1.32	1.51	1.59	1.16	1.49	1.22	1.07	1.37	1.07	0.91	1.06	1.01	0.75	0.80	0.90	0.49	0.55	0.59	0.49	0.55	0.59

Príloha 26 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)

Štandardné kritérium: vzorka A - 300 najnovších pozorovaní, l=0																									
Rozhodné obdobie (J) \ Investičné obdobie (T)																									
týždne	1			4			13			26			39			52			65						
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	
1	R _{IT}	-0.01%	-0.01%	0.02%	-0.04%	-0.03%	-0.04%	0.01%	0.01%	0.00%	0.02%	0.00%	0.03%	0.02%	0.00%	0.03%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	
	σ _{IT}	1.41%	0.94%	1.74%	1.44%	1.02%	1.80%	1.42%	1.06%	1.81%	1.39%	0.97%	1.75%	1.39%	1.00%	1.75%	1.43%	1.03%	1.82%	1.46%	1.05%	1.85%	1.46%	1.05%	
	t-stat	-0.14	-0.12	0.17	-0.54	-0.59	-0.41	0.15	0.13	0.03	0.21	0.01	0.28	0.19	0.11	0.20	0.07	0.01	0.08	0.12	0.09	0.10	0.12	0.09	
4	R _{IT}	-0.11%	-0.06%	-0.14%	-0.03%	-0.02%	-0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.04%	0.02%	0.03%	0.03%	0.02%	0.03%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%		
	σ _{IT}	1.28%	0.90%	1.64%	1.37%	0.99%	1.78%	1.40%	1.02%	1.70%	1.29%	1.00%	1.71%	1.35%	1.02%	1.77%	1.44%	1.06%	1.91%	1.46%	1.07%	1.90%	1.46%	1.07%	
	t-stat	-1.49	-1.06	-1.52	-0.36	-0.31	-0.26	0.34	0.28	0.21	0.52	0.37	0.34	0.44	0.29	0.37	0.14	0.02	0.13	0.11	0.02	0.09	0.11	0.02	
13	R _{IT}	0.01%	-0.03%	0.00%	0.01%	0.00%	0.07%	0.03%	0.02%	0.07%	0.03%	0.02%	0.05%	0.02%	0.01%	0.04%	0.01%	0.01%	0.04%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	0.02%	
	σ _{IT}	1.34%	1.03%	1.69%	1.41%	1.12%	1.85%	1.29%	1.03%	1.66%	1.36%	0.99%	1.77%	1.34%	0.99%	1.78%	1.30%	0.98%	1.74%	1.26%	1.02%	1.68%	1.26%	1.02%	
	t-stat	0.11	-0.45	-0.02	0.17	-0.04	0.62	0.39	0.28	0.73	0.38	0.33	0.53	0.26	0.23	0.40	0.19	0.15	0.44	0.06	0.08	0.25	0.06	0.25	
26	R _{IT}	0.05%	0.02%	0.10%	0.10%	0.07%	0.10%	0.07%	0.04%	0.10%	0.05%	0.02%	0.09%	0.03%	0.00%	0.07%	0.02%	0.00%	0.05%	0.01%	-0.01%	0.03%	0.01%	0.03%	
	σ _{IT}	1.32%	0.96%	1.72%	1.55%	1.09%	2.00%	1.37%	1.03%	1.89%	1.36%	0.95%	1.79%	1.53%	0.98%	2.09%	1.38%	0.97%	1.80%	1.38%	0.99%	1.75%	1.38%	0.99%	
	t-stat	0.62	0.37	1.04	1.15	1.04	0.86	0.95	0.75	0.90	0.70	0.37	0.90	0.32	0.04	0.56	0.24	-0.07	0.50	0.09	-0.10	0.28	0.09	-0.10	
39	R _{IT}	0.01%	-0.01%	0.03%	0.07%	0.03%	0.10%	0.02%	-0.02%	0.04%	0.02%	-0.01%	0.05%	0.01%	-0.02%	0.04%	0.00%	-0.02%	0.01%	0.00%	-0.02%	0.02%	0.00%	0.02%	
	σ _{IT}	1.39%	0.93%	1.84%	1.60%	1.11%	2.07%	1.39%	0.99%	1.90%	1.39%	1.00%	1.83%	1.41%	0.97%	1.88%	1.22%	0.91%	1.62%	1.33%	1.04%	1.75%	1.33%	1.04%	
	t-stat	0.16	-0.13	0.26	0.73	0.50	0.84	0.20	-0.28	0.39	0.26	-0.22	0.51	0.09	-0.34	0.35	-0.06	-0.48	0.15	-0.01	-0.27	0.23	-0.01	-0.27	
52	R _{IT}	-0.01%	-0.03%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.05%	0.04%	0.01%	0.09%	0.06%	0.02%	0.09%	0.02%	0.01%	0.05%	0.02%	0.00%	0.04%	0.03%	0.00%	0.06%	0.03%	0.00%	
	σ _{IT}	1.45%	1.02%	1.97%	1.64%	1.12%	2.17%	1.40%	1.00%	1.80%	1.24%	0.99%	1.64%	1.20%	0.96%	1.49%	1.13%	0.97%	1.48%	1.19%	0.98%	1.55%	1.19%	0.98%	
	t-stat	-0.15	-0.56	-0.14	0.00	-0.29	0.36	0.52	0.26	0.84	0.79	0.31	0.94	0.30	0.13	0.55	0.25	-0.03	0.51	0.37	0.00	0.62	0.37	0.00	
65	R _{IT}	0.00%	0.00%	0.08%	0.01%	0.00%	0.08%	0.05%	0.03%	0.07%	0.05%	0.03%	0.07%	0.03%	0.01%	0.06%	0.03%	0.00%	0.06%	0.04%	0.01%	0.07%	0.04%	0.01%	
	σ _{IT}	1.49%	1.06%	1.94%	1.69%	1.17%	2.18%	1.55%	0.98%	1.85%	1.20%	0.86%	1.36%	1.25%	0.95%	1.39%	1.12%	0.90%	1.23%	1.33%	0.96%	1.48%	1.33%	0.96%	
	t-stat	0.01	-0.01	0.70	0.12	0.05	0.61	0.58	0.55	0.63	0.74	0.61	0.85	0.45	0.25	0.74	0.43	0.09	0.86	0.48	0.16	0.81	0.48	0.16	

Príloha 27 - Štandardné kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)

Štandardné kritérium: vzorka B, pozorovania od 301. týždňa ďalej, l=0																																			
Rozhodné obdobie (J) \ Investičné obdobie (T)																																			
týždne	1					4					13					26					39					52					65				
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L								
1	R _{IT}	0.02%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.04%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01%	0.03%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%								
	σ _{IT}	1.52%	1.08%	1.92%	1.79%	1.29%	2.23%	1.94%	1.38%	2.42%	1.98%	1.41%	1.41%	2.04%	1.49%	2.52%	2.07%	1.51%	2.59%	2.26%	1.62%	2.87%													
	t-stat	0.27	0.50	0.19	0.43	0.34	0.45	0.09	-0.05	0.12	0.31	0.20	0.21	0.32	0.23	0.30	0.38	0.34	0.34	0.24	0.22	0.17													
		-0.01%	-0.04%	0.00%	0.01%	-0.01%	0.03%	-0.01%	-0.02%	-0.02%	0.02%	0.01%	0.02%	0.04%	0.03%	0.04%	0.04%	0.03%	0.04%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%								
4	R _{IT}	1.53%	1.14%	1.95%	1.75%	1.30%	2.18%	2.06%	1.43%	2.55%	2.06%	1.48%	2.61%	2.11%	1.54%	2.71%	2.11%	1.53%	2.75%	2.25%	1.61%	2.99%													
	σ _{IT}	-0.20	-0.96	-0.02	0.20	-0.20	0.41	-0.15	-0.40	-0.16	0.29	0.15	0.21	0.52	0.44	0.37	0.51	0.47	0.42	0.34	0.31	0.29													
	t-stat	0.02%	-0.01%	0.04%	-0.03%	-0.04%	-0.03%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.08%	0.04%	0.08%	0.10%	0.06%	0.12%	0.08%	0.05%	0.09%	0.06%	0.04%	0.06%													
		1.62%	1.20%	2.01%	1.99%	1.43%	2.45%	2.17%	1.58%	2.70%	1.92%	1.42%	2.45%	1.94%	1.46%	2.47%	1.94%	1.46%	2.51%	2.11%	1.56%	2.78%													
13	R _{IT}	0.26	-0.20	0.52	-0.44	-0.67	-0.31	0.00	-0.16	0.00	1.03	0.78	0.90	1.33	1.12	1.25	1.03	0.85	0.90	0.76	0.63	0.59													
	σ _{IT}	0.02%	0.02%	0.02%	0.04%	0.01%	0.05%	0.07%	0.05%	0.08%	0.13%	0.10%	0.16%	0.12%	0.09%	0.15%	0.09%	0.07%	0.11%	0.06%	0.05%	0.08%													
	t-stat	1.72%	1.23%	2.09%	2.03%	1.43%	2.52%	2.06%	1.45%	2.58%	2.02%	1.50%	2.50%	1.97%	1.39%	2.70%	2.05%	1.47%	2.81%	2.23%	1.63%	2.92%													
		0.27	0.43	0.24	0.47	0.20	0.46	0.82	0.80	0.83	1.70	1.62	1.63	1.55	1.60	1.37	1.10	1.14	1.04	0.66	0.72	0.68													
26	R _{IT}	0.08%	0.06%	0.09%	0.13%	0.09%	0.15%	0.16%	0.12%	0.18%	0.15%	0.11%	0.20%	0.13%	0.08%	0.17%	0.10%	0.06%	0.13%	0.07%	0.05%	0.08%													
	σ _{IT}	1.70%	1.18%	2.08%	1.98%	1.47%	2.48%	2.06%	1.49%	2.55%	2.18%	1.52%	2.79%	2.28%	1.60%	2.92%	2.34%	1.73%	2.90%	2.45%	1.78%	3.03%													
	t-stat	1.18	1.28	1.09	1.69	1.51	1.56	1.95	1.95	1.77	1.74	1.74	1.75	1.43	1.29	1.45	1.02	0.90	1.12	0.72	0.66	0.76													
		0.12%	0.06%	0.12%	0.15%	0.09%	0.19%	0.13%	0.10%	0.16%	0.12%	0.10%	0.15%	0.10%	0.08%	0.13%	0.10%	0.06%	0.13%	0.05%	0.04%	0.06%													
39	R _{IT}	1.63%	1.23%	2.14%	2.01%	1.41%	2.50%	2.09%	1.49%	2.67%	2.27%	1.63%	2.95%	2.44%	1.73%	3.07%	2.34%	1.73%	2.90%	2.55%	1.94%	3.17%													
	σ _{IT}	1.82	1.25	1.36	1.87	1.61	1.87	1.53	1.66	1.47	1.28	1.48	1.24	0.97	1.16	1.01	1.02	0.90	1.12	0.44	0.54	0.46													
	t-stat	0.09%	0.07%	0.11%	0.13%	0.11%	0.16%	0.10%	0.09%	0.13%	0.10%	0.09%	0.12%	0.09%	0.08%	0.11%	0.10%	0.06%	0.13%	0.04%	0.05%	0.05%													
		1.76%	1.24%	2.21%	2.15%	1.49%	2.59%	2.35%	1.61%	2.91%	2.61%	1.77%	3.22%	2.66%	1.88%	3.20%	2.34%	1.73%	2.90%	2.72%	2.06%	3.32%													
65	R _{IT}	1.28	1.40	1.22	1.46	1.71	1.49	1.01	1.39	1.05	0.89	1.24	0.86	0.81	1.04	0.82	1.02	0.90	1.12	0.35	0.53	0.36													
	σ _{IT}	1.28	1.40	1.22	1.46	1.71	1.49	1.01	1.39	1.05	0.89	1.24	0.86	0.81	1.04	0.82	1.02	0.90	1.12	0.35	0.53	0.36													
	t-stat	1.28	1.40	1.22	1.46	1.71	1.49	1.01	1.39	1.05	0.89	1.24	0.86	0.81	1.04	0.82	1.02	0.90	1.12	0.35	0.53	0.36													
		1.28	1.40	1.22	1.46	1.71	1.49	1.01	1.39	1.05	0.89	1.24	0.86	0.81	1.04	0.82	1.02	0.90	1.12	0.35	0.53	0.36													

Príloha 28 - Kritérium 52-týždňového maxima (základný súbor)

Kritérium 52-týždňového maxima: základný súbor, l=0																															
Rozhodné obdobie (J)				\ Investičné obdobie (T)																											
týždne				1				4				13				26				39				52				65			
				3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	
52				R _T	0.02%	0.01%	0.03%	0.07%	0.03%	0.05%	0.06%	0.04%	0.07%	0.08%	0.07%	0.09%	0.05%	0.09%	0.04%	0.07%	0.09%	0.04%	0.07%	0.09%	0.04%	0.07%	0.09%	0.04%	0.07%	0.09%	0.04%
				σ _T	1.58%	1.15%	2.06%	1.80%	1.30%	2.31%	1.86%	1.35%	2.32%	1.78%	1.38%	2.17%	1.92%	1.41%	2.35%	1.92%	1.40%	2.39%	1.96%	1.46%	2.46%						
				t-stat	0.46	0.26	0.40	1.14	0.63	0.70	1.03	0.84	0.88	1.37	1.09	1.24	1.10	0.83	1.11	0.60	0.39	0.60	0.30	0.19	0.29						

Príloha 29 – Kritérium 52-týždňového maxima (vzorka A)

Kritérium 52-týždňového maxima: základný súbor, l=0																															
Rozhodné obdobie (J)				\ Investičné obdobie (T)																											
týždne				1				4				13				26				39				52				65			
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	
52	R _T	-0.06%	-0.04%	-0.04%	0.00%	-0.03%	0.00%	0.00%	-0.02%	0.01%	0.00%	-0.01%	0.01%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%	-0.02%
	σ _T	1.43%	0.99%	1.88%	1.54%	1.12%	1.95%	1.16%	0.93%	1.68%	1.29%	0.99%	1.66%	1.45%	1.01%	1.81%	1.36%	0.98%	1.71%	1.49%	1.10%	1.79%									
	t-stat	-0.78	-0.76	-0.37	0.03	-0.50	-0.01	0.00	-0.35	0.09	0.03	-0.26	0.07	-0.05	-0.34	-0.03	-0.26	-0.43	-0.23	-0.23	-0.30	-0.24									

Príloha 30 - Kritérium 52-týždňového maxima (vzorka B)

Kritérium 52-týždňového maxima: základný súbor, l=0																													
Rozhodné obdobie (J) \ Investičné obdobie (T)																													
52	1			4			13			26			39			52			65										
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L		
R _{IT}	0.07%	0.04%	0.06%	0.10%	0.06%	0.08%	0.10%	0.07%	0.10%	0.07%	0.12%	0.08%	0.13%	0.08%	0.13%	0.11%	0.07%	0.13%	0.07%	0.04%	0.08%	0.04%	0.02%	0.05%					
σ _{IT}	1.64%	1.22%	2.15%	1.92%	1.37%	2.47%	2.12%	1.51%	2.57%	1.95%	1.50%	2.36%	2.08%	1.54%	2.54%	2.12%	1.54%	2.64%	2.14%	1.61%	2.72%								
t-stat	1.03	0.74	0.70	1.29	1.01	0.80	1.11	1.07	0.93	1.52	1.34	1.35	1.27	1.08	1.26	0.77	0.63	0.76	0.44	0.36	0.44								

Príloha 31 – Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)

Sharpeho kritérium: základný súbor, I=0																												
Rozhodné obdobie (J)														Investičné obdobie (T)														
týždne	4				13				26				39				52				65				104			
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	
4	R _{IT}	0.00%	-0.01%	0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.02%	0.03%	0.01%	0.02%	0.04%	0.02%	0.04%	0.02%	0.04%	0.03%	0.03%	0.02%	0.04%	0.01%	0.03%	0.01%	0.00%	0.00%	0.02%	0.01%	0.00%	
	σ _{IT}	1.60%	1.21%	1.98%	1.83%	1.31%	2.24%	1.82%	1.36%	2.26%	1.88%	1.41%	2.33%	1.89%	1.41%	2.38%	1.96%	1.47%	2.50%	2.24%	1.63%	2.83%						
	t-stat	-0.02	-0.30	0.11	-0.10	-0.40	-0.24	0.47	0.23	0.27	0.69	0.45	0.54	0.56	0.39	0.47	0.38	0.26	0.35	0.12	0.08	0.19						
	R _{IT}	-0.02%	-0.03%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.06%	0.03%	0.06%	0.07%	0.05%	0.08%	0.05%	0.03%	0.05%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%					
13	σ _{IT}	1.80%	1.36%	2.17%	1.88%	1.42%	2.24%	1.69%	1.30%	2.13%	1.75%	1.35%	2.27%	1.74%	1.34%	2.24%	1.84%	1.42%	2.36%	2.19%	1.61%	2.79%						
	t-stat	-0.28	-0.67	0.06	0.06	-0.01	0.03	1.06	0.83	0.91	1.25	1.09	1.11	0.92	0.81	0.75	0.63	0.60	0.44	0.34	0.32	0.20						
	R _{IT}	0.05%	0.03%	0.06%	0.06%	0.05%	0.09%	0.10%	0.08%	0.13%	0.09%	0.06%	0.11%	0.06%	0.05%	0.09%	0.04%	0.03%	0.06%	0.02%	0.02%	0.04%						
	σ _{IT}	1.83%	1.35%	2.28%	1.81%	1.32%	2.31%	1.81%	1.37%	2.24%	1.84%	1.30%	2.50%	1.85%	1.35%	2.48%	1.95%	1.46%	2.57%	2.35%	1.65%	2.89%						
26	t-stat	0.89	0.68	0.74	1.06	1.15	1.16	1.79	1.73	1.79	1.51	1.54	1.40	1.07	1.07	1.08	0.61	0.69	0.68	0.32	0.32	0.38						
	R _{IT}	0.13%	0.07%	0.14%	0.12%	0.07%	0.14%	0.11%	0.06%	0.15%	0.09%	0.05%	0.12%	0.06%	0.03%	0.09%	0.05%	0.02%	0.06%	0.04%	0.01%	0.05%						
	σ _{IT}	1.87%	1.35%	2.32%	1.88%	1.35%	2.25%	2.02%	1.40%	2.45%	2.13%	1.47%	2.64%	2.12%	1.55%	2.61%	2.18%	1.60%	2.65%	2.56%	1.84%	3.09%						
	t-stat	2.05	1.61	1.89	1.92	1.62	1.94	1.72	1.41	1.84	1.33	1.00	1.43	0.89	0.61	1.02	0.64	0.45	0.69	0.43	0.22	0.48						
52	R _{IT}	0.11%	0.05%	0.16%	0.10%	0.07%	0.15%	0.10%	0.07%	0.14%	0.07%	0.06%	0.10%	0.05%	0.04%	0.07%	0.03%	0.03%	0.05%	0.03%	0.01%	0.04%						
	σ _{IT}	1.90%	1.34%	2.25%	1.91%	1.35%	2.30%	2.03%	1.48%	2.54%	2.15%	1.56%	2.67%	2.16%	1.60%	2.67%	2.19%	1.72%	2.76%	2.62%	1.95%	3.35%						
	t-stat	1.67	1.19	2.15	1.64	1.56	1.97	1.42	1.39	1.62	0.99	1.08	1.13	0.70	0.78	0.75	0.44	0.50	0.53	0.30	0.18	0.34						
	R _{IT}	0.10%	0.07%	0.15%	0.08%	0.07%	0.12%	0.07%	0.07%	0.09%	0.06%	0.06%	0.08%	0.05%	0.05%	0.06%	0.03%	0.03%	0.04%	0.02%	0.02%	0.04%						
65	σ _{IT}	1.99%	1.42%	2.41%	2.04%	1.43%	2.53%	2.18%	1.53%	2.69%	2.25%	1.63%	2.72%	2.24%	1.66%	2.76%	2.29%	1.76%	2.90%	2.70%	2.00%	3.42%						
	t-stat	1.49	1.56	1.87	1.22	1.47	1.38	0.97	1.32	1.00	0.79	1.07	0.86	0.59	0.81	0.67	0.34	0.55	0.40	0.23	0.22	0.31						
	R _{IT}	0.08%	0.05%	0.09%	0.09%	0.06%	0.10%	0.09%	0.05%	0.10%	0.07%	0.04%	0.09%	0.05%	0.03%	0.08%	0.05%	0.02%	0.06%	0.03%	0.01%	0.03%						
	σ _{IT}	2.06%	1.41%	2.60%	2.16%	1.52%	2.66%	2.28%	1.55%	2.93%	2.34%	1.58%	3.07%	2.31%	1.59%	3.15%	2.35%	1.69%	3.19%	2.72%	1.79%	3.65%						
104	t-stat	1.05	1.06	1.00	1.18	1.04	1.05	1.10	0.95	0.98	0.85	0.70	0.83	0.67	0.51	0.69	0.54	0.37	0.52	0.31	0.23	0.24						

Príloha 32 - Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)

Sharpeho kritérium: vzorka A, l=0		Investičné obdobie (T)																							
Rozhodné obdobie (U)		4				13				26				39				52				65			
týždne		4				13				26				39				52				65			
		3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L
4	R _{IT}	-0.01%	-0.02%	-0.02%	0.03%	0.03%	0.01%	0.01%	0.04%	0.04%	0.04%	0.02%	0.03%	0.03%	0.02%	0.03%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%
	σ _{IT}	1.34%	1.01%	1.75%	1.41%	1.00%	1.70%	1.31%	1.04%	1.31%	1.00%	1.00%	1.65%	1.32%	1.05%	1.61%	1.32%	1.07%	1.42%	1.07%	1.08%	1.77%	1.59%	1.14%	1.96%
	t-stat	-0.13	-0.41	-0.17	0.31	0.22	0.11	0.51	0.33	0.33	0.48	0.25	0.37	0.33	0.48	0.25	0.37	0.15	-0.03	0.06	-0.04	0.03	0.16	0.07	0.10
	R _{IT}	0.00%	0.00%	0.03%	0.02%	0.02%	0.04%	0.03%	0.02%	0.06%	0.02%	0.02%	0.06%	0.06%	0.02%	0.02%	0.03%	0.01%	0.01%	0.02%	0.00%	0.01%	0.03%	0.02%	0.02%
13	σ _{IT}	1.45%	1.11%	1.70%	1.38%	0.98%	1.61%	1.32%	0.99%	1.66%	1.36%	1.02%	1.81%	1.32%	1.00%	1.70%	1.24%	1.03%	1.44%	1.07%	1.03%	1.61%	1.40%	1.09%	1.87%
	t-stat	0.01	-0.08	0.28	0.31	0.27	0.42	0.45	0.38	0.58	0.23	0.28	0.33	0.23	0.48	0.25	0.37	0.14	0.16	0.23	0.05	0.06	0.14	0.33	0.29
	R _{IT}	0.09%	0.06%	0.09%	0.07%	0.04%	0.11%	0.05%	0.02%	0.09%	0.03%	0.01%	0.05%	0.02%	0.01%	0.05%	0.04%	0.02%	0.02%	0.04%	0.01%	0.02%	0.05%	0.03%	0.07%
	σ _{IT}	1.53%	1.06%	1.96%	1.32%	1.01%	1.74%	1.36%	0.95%	1.78%	1.55%	1.01%	2.10%	1.37%	0.97%	1.77%	1.37%	0.99%	1.79%	1.37%	0.99%	1.79%	1.59%	1.16%	2.07%
26	t-stat	1.04	1.03	0.77	0.94	0.67	1.07	0.68	0.37	0.92	0.31	0.09	0.44	0.20	-0.04	0.39	0.07	-0.08	0.19	0.52	0.38	0.55	0.52	0.38	0.55
	R _{IT}	0.09%	0.03%	0.13%	0.02%	-0.02%	0.06%	0.03%	-0.01%	0.06%	0.01%	-0.02%	0.04%	-0.01%	-0.03%	0.01%	0.00%	-0.02%	0.01%	0.06%	0.03%	0.08%	0.06%	0.03%	0.08%
	σ _{IT}	1.58%	1.11%	2.02%	1.36%	0.96%	1.85%	1.37%	0.97%	1.76%	1.39%	0.96%	1.85%	1.21%	0.90%	1.56%	1.32%	1.03%	1.72%	1.41%	1.06%	1.80%	1.41%	1.06%	1.80%
	t-stat	1.03	0.49	1.15	0.26	-0.36	0.59	0.32	-0.26	0.60	0.17	-0.37	0.40	-0.10	-0.51	0.13	-0.01	-0.32	0.15	0.68	0.43	0.75	0.68	0.43	0.75
52	R _{IT}	0.01%	-0.03%	0.08%	0.05%	0.01%	0.13%	0.06%	0.01%	0.11%	0.02%	0.00%	0.06%	0.01%	0.00%	0.04%	0.02%	0.00%	0.05%	0.06%	0.03%	0.09%	0.06%	0.03%	0.09%
	σ _{IT}	1.64%	1.12%	1.98%	1.38%	0.99%	1.67%	1.22%	0.96%	1.61%	1.20%	0.94%	1.53%	1.17%	0.93%	1.39%	1.23%	0.98%	1.48%	1.32%	1.04%	1.69%	1.32%	1.04%	1.69%
	t-stat	0.10	-0.40	0.74	0.56	0.23	1.31	0.82	0.20	1.23	0.35	0.08	0.69	0.19	-0.09	0.51	0.30	-0.01	0.64	0.81	0.44	0.93	0.81	0.44	0.93
	R _{IT}	0.03%	0.01%	0.11%	0.07%	0.03%	0.11%	0.06%	0.03%	0.08%	0.03%	0.01%	0.06%	0.02%	0.01%	0.06%	0.03%	0.01%	0.06%	0.05%	0.02%	0.09%	0.05%	0.02%	0.09%
65	σ _{IT}	1.61%	1.17%	2.12%	1.38%	0.98%	1.90%	1.15%	0.89%	1.39%	1.26%	0.99%	1.39%	1.16%	0.92%	1.29%	1.35%	0.99%	1.56%	1.48%	1.12%	1.71%	1.48%	1.12%	1.71%
	t-stat	0.28	0.09	0.93	0.88	0.52	0.98	0.86	0.57	1.02	0.47	0.24	0.74	0.35	0.11	0.78	0.41	0.17	0.71	0.62	0.37	0.87	0.62	0.37	0.87
	R _{IT}	0.07%	0.05%	0.11%	0.09%	0.05%	0.13%	0.09%	0.05%	0.12%	0.07%	0.04%	0.09%	0.06%	0.03%	0.07%	0.06%	0.03%	0.07%	0.06%	0.04%	0.07%	0.06%	0.04%	0.07%
	σ _{IT}	1.69%	1.17%	2.21%	1.39%	0.98%	1.69%	1.08%	0.81%	1.42%	1.16%	0.86%	1.62%	1.08%	0.80%	1.68%	1.12%	0.88%	1.76%	1.20%	0.99%	1.49%	1.20%	0.99%	1.49%
104	t-stat	0.67	0.70	0.84	1.08	0.90	1.32	1.43	1.08	1.50	1.07	0.79	0.94	0.96	0.63	0.72	0.87	0.55	0.65	0.84	0.67	0.86	0.84	0.67	0.86

Príloha 33 - Sharpeho kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)

Sharpeho kritérium: vzorka B, I=0																																
Rozhodné obdobie (J)																Investičné obdobie (T)																
týždne	4				13				26				39				52				65				104							
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L		
4	R _{JT}	0.00%	-0.01%	0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	0.02%	0.01%	0.04%	0.02%	0.04%	0.02%	0.04%	0.03%	0.04%	0.03%	0.02%	0.04%	0.03%	0.05%	0.04%	0.03%	0.02%	0.04%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.02%	0.02%	
	σ _{JT}	1.70%	1.29%	2.08%	1.98%	1.43%	2.45%	2.01%	1.50%	2.49%	2.09%	1.55%	2.59%	2.07%	1.54%	2.62%	2.16%	1.62%	1.54%	2.07%	1.62%	2.50%	1.83%	3.19%	2.50%	2.78%	1.83%	3.19%	2.50%	2.78%	1.83%	3.19%
	t-stat	0.05	-0.13	0.22	-0.26	-0.54	-0.32	0.29	0.11	0.15	0.54	0.38	0.43	0.55	0.45	0.50	0.37	0.31	0.45	0.55	0.45	0.50	0.37	0.31	0.38	0.06	0.05	0.05	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%
	R _{JT}	-0.02%	-0.04%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.07%	0.04%	0.06%	0.09%	0.06%	0.10%	0.07%	0.05%	0.07%	0.05%	0.04%	0.05%	0.07%	0.05%	0.07%	0.05%	0.04%	0.04%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%
13	σ _{JT}	1.94%	1.46%	2.35%	2.07%	1.57%	2.47%	1.83%	1.42%	2.31%	1.88%	1.47%	2.44%	1.89%	1.47%	2.45%	2.05%	1.57%	1.47%	1.89%	1.47%	2.45%	2.05%	1.57%	2.64%	2.50%	1.82%	3.16%	1.82%	3.16%	1.82%	3.16%
	t-stat	-0.31	-0.71	-0.07	-0.07	-0.13	-0.15	0.96	0.74	0.73	1.29	1.08	1.08	0.97	0.83	0.73	0.67	0.64	0.83	0.97	0.83	0.73	0.67	0.64	0.42	0.24	0.23	0.14	0.23	0.14	0.14	
	R _{JT}	0.03%	0.01%	0.04%	0.06%	0.05%	0.08%	0.13%	0.10%	0.15%	0.12%	0.09%	0.14%	0.09%	0.07%	0.11%	0.05%	0.05%	0.07%	0.09%	0.07%	0.11%	0.05%	0.05%	0.07%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%
	σ _{JT}	1.96%	1.46%	2.41%	2.00%	1.44%	2.53%	1.97%	1.50%	2.41%	1.93%	1.38%	2.65%	2.02%	1.47%	2.74%	2.17%	1.62%	1.47%	2.02%	1.47%	2.74%	2.17%	1.62%	2.87%	2.66%	1.85%	3.22%	1.85%	3.22%	1.85%	3.22%
26	t-stat	0.45	0.25	0.42	0.74	0.95	0.78	1.66	1.74	1.55	1.57	1.72	1.36	1.10	1.22	1.02	0.64	0.80	1.22	1.10	1.22	1.02	0.64	0.80	0.66	0.12	0.18	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
	R _{JT}	0.14%	0.09%	0.15%	0.17%	0.12%	0.18%	0.16%	0.10%	0.19%	0.13%	0.08%	0.16%	0.10%	0.06%	0.12%	0.07%	0.04%	0.06%	0.10%	0.06%	0.12%	0.07%	0.04%	0.08%	0.03%	0.03%	0.01%	0.03%	0.01%	0.03%	0.03%
	σ _{JT}	2.00%	1.45%	2.46%	2.06%	1.48%	2.40%	2.24%	1.52%	2.70%	2.36%	1.62%	2.91%	2.41%	1.74%	2.96%	2.48%	1.80%	1.74%	2.41%	1.74%	2.96%	2.48%	1.80%	3.00%	3.00%	2.14%	3.59%	2.14%	3.59%	2.14%	3.59%
	t-stat	1.78	1.56	1.52	2.01	1.96	1.89	1.74	1.68	1.76	1.38	1.25	1.39	0.99	0.83	1.05	0.69	0.62	0.83	0.99	0.83	1.05	0.69	0.62	0.69	0.22	0.08	0.23	0.08	0.23	0.08	0.23
52	R _{JT}	0.15%	0.09%	0.20%	0.13%	0.10%	0.16%	0.12%	0.10%	0.15%	0.09%	0.08%	0.12%	0.07%	0.06%	0.08%	0.04%	0.04%	0.06%	0.07%	0.06%	0.08%	0.04%	0.04%	0.05%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.03%
	σ _{JT}	2.01%	1.43%	2.37%	2.13%	1.49%	2.55%	2.32%	1.67%	2.89%	2.48%	1.77%	3.08%	2.51%	1.82%	3.12%	2.55%	1.98%	1.82%	2.51%	1.82%	3.12%	2.55%	1.98%	3.23%	3.09%	2.30%	3.94%	2.30%	3.94%	2.30%	3.94%
	t-stat	1.88	1.60	2.06	1.54	1.63	1.56	1.21	1.44	1.26	0.93	1.14	0.96	0.68	0.86	0.62	0.36	0.53	0.86	0.68	0.86	0.62	0.36	0.53	0.35	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05	0.03	0.05
	R _{JT}	0.14%	0.11%	0.17%	0.09%	0.09%	0.12%	0.08%	0.09%	0.10%	0.07%	0.08%	0.09%	0.10%	0.06%	0.07%	0.06%	0.02%	0.05%	0.07%	0.06%	0.06%	0.02%	0.05%	0.03%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
65	σ _{JT}	2.16%	1.53%	2.55%	2.31%	1.61%	2.81%	2.56%	1.77%	3.16%	2.63%	1.87%	3.21%	2.64%	1.92%	3.28%	2.65%	2.05%	1.92%	2.64%	1.92%	3.28%	2.65%	2.05%	3.40%	3.17%	2.36%	4.05%	2.36%	4.05%	2.36%	4.05%
	t-stat	1.55	1.74	1.62	0.95	1.38	1.06	0.74	1.21	0.73	0.67	1.05	0.67	0.51	0.83	0.47	0.22	0.53	0.83	0.51	0.83	0.47	0.22	0.53	0.18	0.02	0.10	0.04	0.10	0.04	0.10	0.04
	R _{JT}	0.08%	0.06%	0.08%	0.09%	0.06%	0.08%	0.09%	0.05%	0.09%	0.07%	0.04%	0.09%	0.05%	0.03%	0.08%	0.04%	0.02%	0.03%	0.05%	0.03%	0.08%	0.04%	0.02%	0.05%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	σ _{JT}	2.25%	1.54%	2.81%	2.52%	1.77%	3.11%	2.76%	1.86%	3.55%	2.83%	1.88%	3.68%	2.80%	1.92%	3.78%	2.85%	2.04%	1.92%	2.80%	1.92%	3.78%	2.85%	2.04%	3.81%	3.30%	2.12%	4.47%	2.12%	4.47%	2.12%	4.47%
104	t-stat	0.83	0.81	0.66	0.82	0.75	0.58	0.71	0.63	0.55	0.56	0.47	0.56	0.41	0.33	0.48	0.30	0.21	0.33	0.41	0.33	0.48	0.30	0.21	0.32	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02

Príloha 34 – Kritérium relatívnej sily (základný súbor)

Kritérium relatívnej sily: základný súbor, I=0		Investičné obdobie (T)											
		13				26				39			
Rozhodné obdobie (I)		4				13				26			
týždne		1				4				13			
RV	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L
	R _{IT}	0.06%	0.04%	0.07%	0.10%	0.07%	0.13%	0.09%	0.15%	0.13%	0.09%	0.13%	0.08%
	σ _{IT}	1.66%	1.14%	2.01%	1.91%	1.36%	2.32%	1.84%	1.35%	2.17%	1.92%	1.41%	2.25%
	t-stat	1.04	1.17	1.11	1.63	1.65	1.70	1.96	1.93	2.01	1.96	1.89	1.23
EV	R _{IT}	0.07%	0.04%	0.09%	0.12%	0.08%	0.14%	0.13%	0.09%	0.15%	0.13%	0.09%	0.07%
	σ _{IT}	1.65%	1.15%	2.01%	1.89%	1.38%	2.30%	1.83%	1.36%	2.19%	1.96%	1.44%	2.26%
	t-stat	1.33	1.00	1.37	1.89	1.69	1.76	2.05	2.01	2.02	1.93	1.84	1.11
													0.81

Príloha 35 - Kritérium relatívnej sily (vzorka A)

Kritérium relatívnej sily: vzorka A, I=0		Investičné obdobie (T)											
		13				26				39			
Rozhodné obdobie (I)		4				13				26			
týždne		1				4				13			
RV	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L
	R _{IT}	-0.01%	0.00%	0.03%	0.04%	0.02%	0.09%	0.06%	0.12%	0.10%	0.02%	0.01%	0.02%
	σ _{IT}	1.46%	1.02%	1.92%	1.63%	1.15%	2.04%	1.43%	1.06%	1.72%	1.41%	0.98%	1.71%
	t-stat	-0.08	0.00	0.24	0.43	0.35	0.73	0.67	0.39	1.21	0.58	0.31	1.05
EV	R _{IT}	0.01%	-0.02%	0.03%	0.05%	0.02%	0.09%	0.05%	0.11%	0.11%	0.05%	0.02%	0.11%
	σ _{IT}	1.49%	1.00%	1.88%	1.64%	1.15%	2.05%	1.40%	1.03%	1.75%	1.40%	0.99%	1.74%
	t-stat	0.07	-0.40	0.28	0.53	0.23	0.74	0.62	0.44	1.11	0.56	0.29	1.08
													0.46

Príloha 36 - Kritérium relatívnej sily (vzorka B)

Kritérium relatívnej sily: vzorka B, I=0		Investičné obdobie (T)											
		13				26				39			
Rozhodné obdobie (I)		4				13				26			
týždne		1				4				13			
RV	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L
	R _{IT}	0.09%	0.07%	0.10%	0.14%	0.10%	0.15%	0.12%	0.16%	0.16%	0.12%	0.17%	0.13%
	σ _{IT}	1.75%	1.19%	2.06%	2.03%	1.45%	2.45%	2.01%	1.46%	2.37%	2.09%	1.55%	2.56%
	t-stat	1.26	1.37	1.18	1.64	1.70	1.54	1.87	1.99	1.64	1.91	1.96	1.65
EV	R _{IT}	0.11%	0.07%	0.12%	0.15%	0.11%	0.16%	0.16%	0.12%	0.16%	0.17%	0.12%	0.17%
	σ _{IT}	1.72%	1.22%	2.07%	2.00%	1.48%	2.41%	2.00%	1.48%	2.37%	2.15%	1.58%	2.60%
	t-stat	1.52	1.38	1.45	1.88	1.80	1.62	1.99	2.04	1.70	1.89	1.91	1.58
													0.69

Príloha 37 – Regresné kritérium cenovej hybnosti (základný súbor)

Regresné kritérium: základný súbor, l=0																															
Rozhodné obdobie (J)				\ Investičné obdobie (T)																											
týždne				4				13				26				39				52				65				104			
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	
4	R _{IT}	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.00%	0.03%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
	σ _{IT}	1.66%	1.24%	2.07%	1.82%	1.36%	2.29%	1.79%	1.34%	2.33%	2.33%	1.91%	1.38%	1.91%	1.38%	2.49%	1.98%	1.42%	1.42%	2.59%	2.06%	1.50%	1.50%	2.34%	1.65%	2.99%	1.65%	2.99%	1.65%	2.99%	
	t-stat	-0.03	0.01	-0.04	-0.04	-0.14	-0.06	0.22	0.08	0.29	0.44	0.42	0.44	0.38	0.37	0.38	0.38	0.37	0.38	0.38	0.28	0.29	0.27	0.14	0.16	0.14	0.16	0.14	0.16	0.14	
	R _{IT}	0.02%	0.01%	0.03%	0.01%	0.00%	0.02%	0.05%	0.03%	0.07%	0.07%	0.06%	0.03%	0.06%	0.03%	0.08%	0.03%	0.02%	0.02%	0.05%	0.02%	0.02%	0.04%	0.01%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.01%	0.02%	0.02%
13	σ _{IT}	1.72%	1.28%	2.21%	1.90%	1.41%	2.38%	1.81%	1.29%	2.33%	2.33%	1.91%	1.35%	1.91%	1.35%	2.45%	1.87%	1.34%	1.34%	2.39%	1.99%	1.46%	1.46%	2.33%	1.71%	2.94%	1.71%	2.94%	1.71%	2.94%	
	t-stat	0.31	0.17	0.39	0.12	0.07	0.26	0.84	0.62	0.93	0.93	0.79	1.06	0.51	0.47	0.67	0.35	0.33	0.33	0.45	0.18	0.19	0.19	0.21	0.21	0.21	0.18	0.19	0.21	0.21	
	R _{IT}	0.03%	0.01%	0.06%	0.04%	0.03%	0.08%	0.09%	0.06%	0.14%	0.08%	0.06%	0.11%	0.06%	0.04%	0.09%	0.04%	0.04%	0.04%	0.09%	0.04%	0.02%	0.05%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	
	σ _{IT}	1.94%	1.40%	2.38%	1.84%	1.40%	2.35%	1.84%	1.37%	2.35%	1.95%	1.37%	2.43%	1.96%	1.38%	2.53%	2.03%	1.50%	1.50%	2.60%	2.39%	1.76%	1.76%	3.02%	3.02%	3.02%	1.76%	3.02%	1.76%	3.02%	
26	t-stat	0.40	0.24	0.77	0.74	0.72	1.07	1.56	1.44	1.79	1.23	1.25	1.35	0.98	0.85	1.05	0.54	0.48	0.48	0.65	0.30	0.25	0.25	0.35	0.35	0.35	0.25	0.35	0.35	0.35	
	R _{IT}	0.06%	0.04%	0.12%	0.09%	0.06%	0.15%	0.09%	0.06%	0.13%	0.07%	0.04%	0.11%	0.05%	0.02%	0.08%	0.03%	0.01%	0.04%	0.02%	0.01%	0.04%	0.02%	0.00%	0.04%	0.00%	0.04%	0.00%	0.04%	0.04%	
	σ _{IT}	1.96%	1.39%	2.26%	1.94%	1.38%	2.34%	2.13%	1.44%	2.50%	2.15%	1.41%	2.66%	2.13%	1.52%	2.67%	2.20%	1.55%	2.70%	2.51%	1.74%	1.74%	3.10%	3.10%	3.10%	1.74%	3.10%	1.74%	3.10%	1.74%	
	t-stat	0.97	0.84	1.60	1.47	1.42	1.90	1.31	1.21	1.58	1.02	0.86	1.23	0.67	0.43	0.85	0.39	0.20	0.47	0.29	-0.01	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	
52	R _{IT}	0.10%	0.06%	0.13%	0.10%	0.07%	0.12%	0.08%	0.06%	0.11%	0.05%	0.04%	0.07%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	0.02%	0.03%	0.01%	0.03%	0.03%	0.01%	0.03%	0.01%	0.03%	
	σ _{IT}	1.96%	1.43%	2.41%	1.96%	1.45%	2.56%	2.17%	1.53%	2.70%	2.20%	1.63%	2.74%	2.21%	1.64%	2.78%	2.23%	1.68%	2.80%	2.63%	1.99%	1.99%	3.33%	3.33%	3.33%	1.99%	3.33%	1.99%	3.33%	1.99%	
	t-stat	1.57	1.31	1.65	1.51	1.46	1.39	1.16	1.17	1.22	0.70	0.75	0.75	0.39	0.49	0.36	0.27	0.37	0.17	0.30	0.22	0.22	0.24	0.24	0.24	0.22	0.24	0.22	0.24	0.24	
	R _{IT}	0.07%	0.05%	0.07%	0.05%	0.05%	0.06%	0.05%	0.04%	0.06%	0.03%	0.03%	0.04%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.03%	0.03%	0.00%	0.03%	0.00%	0.03%	0.03%	
65	σ _{IT}	1.96%	1.43%	2.50%	2.14%	1.49%	2.68%	2.23%	1.54%	2.73%	2.30%	1.62%	2.77%	2.27%	1.60%	2.84%	2.33%	1.76%	2.84%	2.80%	1.98%	1.98%	3.39%	3.39%	3.39%	1.98%	3.39%	1.98%	3.39%	1.98%	
	t-stat	1.07	1.07	0.83	0.72	1.01	0.70	0.66	0.84	0.69	0.37	0.58	0.40	0.35	0.38	0.31	0.28	0.23	0.18	0.32	0.07	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.07	0.25	0.25	0.25	
	R _{IT}	0.04%	0.04%	0.02%	0.05%	0.04%	0.03%	0.05%	0.04%	0.06%	0.05%	0.03%	0.06%	0.05%	0.02%	0.05%	0.05%	0.01%	0.05%	0.04%	0.01%	0.01%	0.05%	0.04%	0.01%	0.04%	0.01%	0.04%	0.01%	0.04%	
	σ _{IT}	2.04%	1.38%	2.70%	2.20%	1.54%	2.94%	2.28%	1.60%	2.95%	2.27%	1.57%	2.99%	2.37%	1.68%	3.08%	2.52%	1.78%	3.21%	2.86%	1.75%	1.75%	3.58%	3.58%	3.58%	1.75%	3.58%	1.75%	3.58%	1.75%	
104	t-stat	0.50	0.75	0.26	0.60	0.79	0.31	0.64	0.62	0.56	0.57	0.47	0.54	0.55	0.31	0.47	0.55	0.23	0.48	0.38	0.13	0.32	0.32	0.32	0.32	0.13	0.32	0.32	0.32	0.32	

Príloha 38 – Regresné kritérium cenovej hybnosti (vzorka A)

Regresné kritérium: vzorka A, l=0		Investičné obdobie (T)																													
Rozhodné obdobie (U)		4				13				26				39				52				65				104					
týždne		3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L
4	R _{IT}	-0.03%	0.00%	-0.05%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	
	σ _{IT}	1.35%	0.98%	1.82%	1.36%	1.08%	1.71%	1.26%	0.98%	1.70%	1.34%	0.99%	1.80%	1.41%	1.04%	1.88%	1.43%	1.07%	1.91%	1.62%	1.16%	2.06%									
	t-stat	-0.43	0.06	-0.50	0.29	0.43	0.17	0.19	0.06	0.06	0.25	0.16	0.23	0.00	-0.07	0.01	-0.03	-0.06	-0.04	0.06	0.11	0.04									
	R _{IT}	0.05%	0.04%	0.08%	0.02%	0.02%	0.03%	0.01%	0.00%	0.02%	0.01%	-0.01%	0.03%	-0.02%	-0.02%	0.00%	-0.02%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%									
13	σ _{IT}	1.39%	1.07%	1.81%	1.37%	1.01%	1.72%	1.36%	0.97%	1.76%	1.47%	0.99%	1.97%	1.47%	1.01%	1.92%	1.51%	1.02%	1.87%	1.65%	1.12%	1.98%									
	t-stat	0.60	0.59	0.73	0.23	0.42	0.32	0.10	-0.07	0.19	0.12	-0.13	0.24	-0.18	-0.33	0.02	-0.27	-0.38	-0.12	0.01	0.01	0.11									
	R _{IT}	0.05%	0.04%	0.08%	0.03%	0.01%	0.07%	0.03%	0.01%	0.07%	-0.01%	-0.01%	0.02%	-0.01%	-0.02%	0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.01%	0.04%	0.01%	0.05%									
	σ _{IT}	1.53%	1.05%	1.89%	1.36%	1.03%	1.87%	1.38%	1.03%	1.77%	1.57%	1.01%	2.04%	1.52%	1.01%	1.92%	1.39%	0.98%	1.73%	1.39%	1.11%	1.65%									
26	t-stat	0.59	0.63	0.73	0.37	0.15	0.60	0.37	0.15	0.65	-0.07	-0.17	0.20	-0.14	-0.33	0.06	-0.24	-0.45	-0.07	0.51	0.15	0.50									
	R _{IT}	0.03%	-0.01%	0.09%	0.00%	-0.02%	0.05%	-0.02%	-0.03%	0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.04%	-0.03%	-0.04%	-0.03%	-0.03%	0.05%	0.02%	0.06%									
	σ _{IT}	1.56%	1.24%	2.01%	1.34%	1.19%	1.75%	1.32%	1.04%	1.69%	1.49%	0.97%	1.86%	1.30%	0.94%	1.58%	1.28%	0.89%	1.55%	1.09%	0.95%	1.27%									
	t-stat	0.39	-0.15	0.77	0.03	-0.25	0.52	-0.21	-0.44	0.09	-0.31	-0.58	-0.16	-0.43	-0.66	-0.29	-0.48	-0.63	-0.38	0.75	0.36	0.76									
52	R _{IT}	-0.01%	-0.02%	0.03%	-0.05%	-0.04%	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.05%	-0.04%	-0.07%	-0.04%	-0.04%	-0.07%	-0.03%	-0.03%	-0.06%	0.05%	0.03%	0.05%									
	σ _{IT}	1.51%	1.26%	2.01%	1.27%	1.00%	1.75%	1.24%	0.85%	1.71%	1.24%	0.86%	1.64%	1.18%	0.88%	1.58%	1.24%	0.96%	1.55%	1.16%	1.07%	1.47%									
	t-stat	-0.17	-0.32	0.25	-0.66	-0.71	-0.16	-0.42	-0.67	-0.24	-0.68	-0.82	-0.70	-0.64	-0.73	-0.76	-0.47	-0.51	-0.62	0.75	0.46	0.62									
	R _{IT}	-0.04%	-0.02%	-0.05%	-0.04%	-0.02%	-0.07%	-0.02%	-0.02%	-0.04%	-0.05%	-0.02%	-0.05%	-0.03%	-0.01%	-0.04%	-0.01%	0.00%	-0.02%	0.05%	0.03%	0.06%									
65	σ _{IT}	1.53%	1.15%	2.06%	1.27%	0.93%	1.76%	1.02%	0.79%	1.32%	1.06%	0.85%	1.33%	1.11%	0.83%	1.40%	1.29%	0.99%	1.47%	1.30%	1.02%	1.37%									
	t-stat	-0.47	-0.37	-0.43	-0.50	-0.35	-0.73	-0.36	-0.35	-0.56	-0.77	-0.48	-0.64	-0.49	-0.30	-0.55	-0.08	-0.05	-0.20	0.73	0.44	0.73									
	R _{IT}	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.00%	0.04%	0.02%	0.02%	0.05%	0.03%	0.06%									
	σ _{IT}	1.60%	1.05%	2.07%	1.38%	0.96%	1.76%	1.05%	0.82%	1.31%	1.04%	0.79%	1.45%	1.18%	0.84%	1.52%	1.26%	0.88%	1.53%	1.09%	0.74%	1.19%									
	t-stat	0.11	0.15	0.07	0.13	0.24	0.10	0.27	0.41	0.45	0.14	0.26	0.11	0.30	0.39	-0.02	0.56	0.48	0.27	0.82	0.64	0.90									

Príloha 39 - Regresné kritérium cenovej hybnosti (vzorka B)

Regresné kritérium: vzorka B, I=0																																
Rozhodné obdobie (J)																Investičné obdobie (T)																
4				13				26				39				52				65				104								
týždne																																
	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L	3W-3L	5W-5L	2W-2L		
4	R _{IT}	0.01%	0.00%	0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.00%	0.03%	0.03%	0.02%	0.04%	0.03%	0.03%	0.05%	0.02%	0.04%	0.03%	0.02%	0.04%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%					
	σ _{IT}	1.77%	1.34%	2.17%	1.98%	1.47%	2.50%	1.99%	1.47%	2.56%	2.12%	1.53%	2.75%	2.19%	1.57%	2.86%	2.30%	1.66%	3.01%	2.64%	1.85%	3.37%	2.64%	1.85%	3.37%	2.64%	1.85%	3.37%	2.64%	1.85%	3.37%	
	t-stat	0.18	-0.01	0.23	-0.17	-0.36	-0.15	0.16	0.06	0.29	0.37	0.39	0.38	0.41	0.45	0.42	0.32	0.35	0.31	0.31	0.12	0.13	0.14	0.12	0.13	0.14	0.12	0.13	0.14	0.12	0.13	0.14
	R _{IT}	0.00%	-0.01%	0.01%	0.00%	-0.01%	0.01%	0.07%	0.04%	0.09%	0.08%	0.05%	0.11%	0.05%	0.04%	0.07%	0.04%	0.03%	0.06%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%
13	σ _{IT}	1.85%	1.37%	2.37%	2.10%	1.56%	2.62%	1.97%	1.41%	2.54%	2.06%	1.47%	2.62%	2.01%	1.46%	2.57%	2.16%	1.61%	2.76%	2.61%	1.94%	3.33%	2.61%	1.94%	3.33%	2.61%	1.94%	3.33%	2.61%	1.94%	3.33%	2.61%
	t-stat	0.05	-0.12	0.06	0.03	-0.11	0.15	0.89	0.72	0.94	0.98	0.94	1.08	0.68	0.68	0.75	0.53	0.54	0.56	0.19	0.21	0.18	0.18	0.19	0.21	0.18	0.18	0.21	0.18	0.18	0.21	0.18
	R _{IT}	0.01%	0.00%	0.05%	0.05%	0.04%	0.09%	0.12%	0.09%	0.17%	0.12%	0.09%	0.14%	0.10%	0.07%	0.12%	0.06%	0.05%	0.08%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.01%	0.02%	0.03%	0.01%	0.02%	0.03%	0.02%	0.03%	0.03%
	σ _{IT}	2.10%	1.53%	2.57%	2.03%	1.54%	2.54%	2.00%	1.49%	2.55%	2.06%	1.47%	2.55%	2.09%	1.49%	2.73%	2.24%	1.67%	2.90%	2.77%	2.02%	3.53%	2.77%	2.02%	3.53%	2.77%	2.02%	3.53%	2.77%	2.02%	3.53%	2.77%
26	t-stat	0.16	-0.02	0.49	0.64	0.72	0.90	1.55	1.54	1.68	1.44	1.49	1.44	1.18	1.11	1.15	0.70	0.71	0.74	0.13	0.21	0.20	0.20	0.13	0.21	0.20	0.21	0.20	0.21	0.20	0.21	0.20
	R _{IT}	0.08%	0.06%	0.13%	0.14%	0.10%	0.19%	0.14%	0.10%	0.19%	0.12%	0.07%	0.17%	0.09%	0.05%	0.12%	0.06%	0.03%	0.08%	0.01%	-0.01%	0.03%	0.03%	0.01%	-0.01%	0.03%	0.01%	-0.01%	0.03%	0.01%	-0.01%	0.03%
	σ _{IT}	2.12%	1.45%	2.37%	2.15%	1.44%	2.56%	2.37%	1.56%	2.75%	2.35%	1.53%	2.90%	2.38%	1.70%	3.00%	2.50%	1.77%	3.08%	3.00%	2.03%	3.73%	3.00%	2.03%	3.73%	3.00%	2.03%	3.73%	3.00%	2.03%	3.73%	3.00%
	t-stat	0.89	1.06	1.40	1.60	1.79	1.86	1.50	1.56	1.69	1.26	1.21	1.43	0.89	0.72	1.02	0.59	0.44	0.64	0.10	-0.14	0.18	0.10	-0.14	0.18	0.10	-0.14	0.18	0.10	-0.14	0.18	0.10
52	R _{IT}	0.16%	0.11%	0.19%	0.17%	0.13%	0.19%	0.14%	0.11%	0.18%	0.10%	0.08%	0.13%	0.06%	0.06%	0.08%	0.05%	0.05%	0.05%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.05%	0.05%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
	σ _{IT}	2.14%	1.50%	2.58%	2.17%	1.59%	2.85%	2.46%	1.73%	3.02%	2.48%	1.86%	3.06%	2.53%	1.87%	3.15%	2.56%	1.91%	3.22%	3.16%	2.34%	3.99%	3.16%	2.34%	3.99%	3.16%	2.34%	3.99%	3.16%	2.34%	3.99%	3.16%
	t-stat	1.84	1.72	1.76	1.93	1.94	1.59	1.40	1.49	1.42	0.99	1.07	1.07	0.62	0.76	0.64	0.45	0.58	0.39	0.10	0.07	0.08	0.10	0.07	0.08	0.10	0.07	0.08	0.10	0.07	0.08	0.10
	R _{IT}	0.13%	0.09%	0.13%	0.10%	0.09%	0.14%	0.09%	0.07%	0.12%	0.07%	0.06%	0.08%	0.06%	0.04%	0.07%	0.04%	0.02%	0.04%	0.02%	-0.01%	0.01%	0.01%	-0.01%	0.01%	0.01%	-0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
65	σ _{IT}	2.14%	1.55%	2.70%	2.46%	1.70%	3.02%	2.63%	1.80%	3.20%	2.71%	1.88%	3.25%	2.66%	1.87%	3.32%	2.72%	2.05%	3.34%	3.36%	2.34%	4.10%	3.36%	2.34%	4.10%	3.36%	2.34%	4.10%	3.36%	2.34%	4.10%	3.36%
	t-stat	1.46	1.41	1.19	0.96	1.23	1.07	0.79	0.99	0.88	0.60	0.77	0.60	0.51	0.50	0.49	0.33	0.27	0.25	0.11	-0.08	0.07	0.11	-0.08	0.07	0.11	-0.08	0.07	0.11	-0.08	0.07	0.11
	R _{IT}	0.05%	0.05%	0.04%	0.07%	0.06%	0.05%	0.07%	0.05%	0.07%	0.07%	0.03%	0.09%	0.06%	0.02%	0.08%	0.05%	0.01%	0.07%	0.03%	0.00%	0.03%	0.03%	0.00%	0.03%	0.03%	0.00%	0.03%	0.00%	0.03%	0.03%	0.00%
	σ _{IT}	2.27%	1.54%	3.02%	2.57%	1.81%	3.47%	2.76%	1.92%	3.60%	2.76%	1.89%	3.61%	2.86%	2.02%	3.70%	3.04%	2.15%	3.89%	3.53%	2.13%	4.44%	3.53%	2.13%	4.44%	3.53%	2.13%	4.44%	3.53%	2.13%	4.44%	3.53%
104	t-stat	0.51	0.77	0.26	0.59	0.75	0.29	0.59	0.52	0.45	0.56	0.41	0.53	0.48	0.20	0.50	0.39	0.09	0.42	0.20	-0.04	0.14	0.20	-0.04	0.14	0.20	-0.04	0.14	0.20	-0.04	0.14	0.20

Príloha 40 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria (J=52, TE=2%)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=52	TE=2%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.056	0.118	0.213	0.351	0.506	58.38%
	A	0.017	0.032	0.066	0.227	0.445	58.38%
	B	0.078	0.167	0.306	0.421	0.556	56.59%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.056	0.116	0.209	0.339	0.498	51.30%
	A	0.012	0.019	0.042	0.177	0.378	55.27%
	B	0.082	0.173	0.316	0.433	0.575	48.85%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.055	0.114	0.205	0.338	0.495	51.76%
	A	0.012	0.019	0.043	0.186	0.391	56.05%
	B	0.080	0.169	0.309	0.426	0.563	49.11%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.067	0.145	0.257	0.389	0.524	93.01%
	A	0.038	0.054	0.100	0.236	0.421	105.27%
	B	0.082	0.197	0.347	0.475	0.599	85.35%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia

Príloha 41 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria (J=26, TE=2%)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=26	TE=2%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.051	0.112	0.212	0.358	0.520	58.54%
	A	0.023	0.044	0.098	0.257	0.454	58.54%
	B	0.067	0.150	0.281	0.415	0.573	56.40%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.053	0.112	0.205	0.346	0.511	50.97%
	A	0.017	0.032	0.071	0.209	0.399	54.28%
	B	0.074	0.158	0.289	0.424	0.584	48.92%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.051	0.110	0.204	0.346	0.511	51.77%
	A	0.016	0.030	0.074	0.218	0.409	56.17%
	B	0.072	0.155	0.286	0.420	0.580	49.05%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.062	0.131	0.249	0.405	0.562	94.92%
	A	0.044	0.060	0.128	0.291	0.460	104.72%
	B	0.071	0.170	0.320	0.471	0.636	88.82%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia

Príloha 42 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria (J=52, TE=5%)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=52	TE=5%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.062	0.134	0.237	0.381	0.502	145.94%
	A	0.017	0.031	0.056	0.254	0.511	145.94%
	B	0.086	0.191	0.344	0.451	0.538	141.48%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.064	0.130	0.228	0.355	0.489	128.26%
	A	0.006	0.000	-0.001	0.134	0.339	138.18%
	B	0.097	0.205	0.371	0.480	0.584	122.13%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.060	0.125	0.218	0.352	0.481	129.41%
	A	0.006	0.002	0.003	0.154	0.368	140.12%
	B	0.091	0.196	0.354	0.464	0.557	122.77%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.067	0.145	0.257	0.389	0.524	93.01%
	A	0.038	0.054	0.100	0.236	0.421	105.27%
	B	0.082	0.197	0.347	0.475	0.599	85.35%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia

Príloha 43 - Black-Littermanov model s využitím Sharpeho kritéria (J=26, TE=5%)

Sharpeho pomer pre jednotlivé portfóliá, vzorky a rôzne dĺžky investičného obdobia pri využití Sharpeho kritéria cenovej zotrvačnosti s dĺžkou rozhodného obdobia J=26	TE=5%	podľa dĺžky investičného obdobia (T)					AVG(Σ ABS(x))
		T=1	T=4	T=13	T=26	T=52	
Optimálne portfólio + výberová matica VM	ZS	0.050	0.119	0.235	0.401	0.542	146.35%
	A	0.032	0.063	0.141	0.336	0.536	146.35%
	B	0.060	0.150	0.287	0.440	0.583	141.00%
Optimálne portfólio + redukovaný estimátor SEVM	ZS	0.055	0.121	0.222	0.375	0.524	127.41%
	A	0.018	0.034	0.071	0.213	0.393	135.71%
	B	0.077	0.170	0.310	0.465	0.612	122.29%
Optimálne portfólio + portfóliový estimátor EM3	ZS	0.051	0.115	0.218	0.375	0.523	129.44%
	A	0.016	0.029	0.078	0.233	0.415	140.42%
	B	0.072	0.163	0.301	0.454	0.601	122.62%
Trhové portfólio	ZS	0.050	0.104	0.189	0.316	0.489	0.00%
	A	0.016	0.031	0.070	0.202	0.395	0.00%
	B	0.070	0.146	0.267	0.385	0.550	0.00%
Naivné portfólio	ZS	0.062	0.131	0.249	0.405	0.562	94.92%
	A	0.044	0.060	0.128	0.291	0.460	104.72%
	B	0.071	0.170	0.320	0.471	0.636	88.82%

AVG(Σ ABS(x)) = priemerná suma absolútnych odchýliek od trhového portfólia