

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103004/I/2016/3062633485

Fuzzy metódy v úlohách viackriteriálneho rozhodovania
Diplomová práca

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Fuzzy metódy v úlohách viackriteriálneho rozhodovania
Diplomová práca

Študijný program: Informačný manažment

Študijný odbor: Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Peter Bednár, PhD.

Bratislava 2016

Milan Polák

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Milan Polák
Študijný program: Informačný manažment (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Typ záverečnej práce: Inžinierska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Fuzzy metódy v úlohách viackriteriálneho rozhodovania

Anotácia: Práca je zameraná na problematiku výberu kompromisnej varianty v podmienkach neurčitosti za predpokladu fuzzy hodnotenia variant podľa jednotlivých kritérií a následne na agregáciu dielčich fuzzy hodnotení vybranou metódou viackriteriálneho rozhodovania /

Vedúci: doc. Ing. Peter Bednár, CSc.
Katedra: KAI FHI - Katedra aplikovanej informatiky FHI
Dátum zadania: 09.11.2014

Dátum schválenia: 18.11.2014

doc. Ing. Gabriela Kristová, CSc.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: 29.4.2016, Bratislava

.....
Milan Polák

Pod'akovanie:

Na tomto mieste by som sa chcel pod'akovať svojmu vedúcemu diplomovej práce, doc. Ing. Petrovi Bednárovi, PhD., za jeho odborné vedenie, cenné rady, pripomienky a pomoc, ktorú mi pri písaní práce poskytol.

ABSTRAKT

POLÁK, Milan: *Fuzzy metódy v úlohách viackriteriálneho rozhodovania*. - Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra aplikovanej informatiky. – Vedúci diplomovej práce: doc. Ing. Peter Bednár, PhD. – Bratislava: FHI, 2016, 90 s.

Práca je zameraná na problematiku výberu kompromisnej varianty v podmienkach neurčitosti za predpokladu fuzzy hodnotenia variant. Na agregáciu dielčích fuzzy hodnotení sa v súlade so zadaním práce využíva skupina metód založená na váženom súčte a to metóda váženého súčtu a metóda bázičného variantu.

Na usporiadanie agregovaných fuzzy čísiel boli vybrané metódy fuzzy max order, metóda preferencie medzi dvoma fuzzy číslami a porovnanie pomocou číselného indexu. Vyhodnotenie týchto metód usporiadania fuzzy čísiel, ako aj poukázanie na ich nedostatky a výhody je uvedené v závere práce. Tá je rozdelená do troch kapitol, ktoré sa postupne venujú teoretickým základom viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti a popisu fuzzy množín a fuzzy čísiel, formulácii cieľov práce ako aj vyššie uvedeným metódam viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti. Teoretické závery práce sú ilustrované na konkrétnej rozhodovacej situácii.

Kľúčové slová:

viackriteriálne rozhodovanie, neurčitosť, fuzzy čísla, usporiadanie fuzzy čísiel.

ABSTRACT

POLÁK, Milan: *Fuzzy methods in multicriterial decision tasks.*- University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Applied Informatics. – Supervisor: doc. Ing. Peter Bednár, PhD. – Bratislava: FHI, 2016, 90 p.

The diploma thesis focuses on the issue of selecting a compromise variant in conditions of uncertainty using fuzzy numbers. To aggregate the partial fuzzy evaluations, the group of methods based on the weighted sum, specifically the weighted sum method and the method of basic variant are used, in line with the work assignment.

To compare the aggregated fuzzy numbers these methods were chosen - fuzzy max order, possibilistic variation order between two fuzzy numbers and comparison using a numeric index. The evaluation of these methods of fuzzy numbers ranking, as well as identification of their shortcomings and benefits are provided at the end of this work. The thesis itself is divided into three chapters, which systematically focus on the theoretical basis of multicriteria decision making under uncertainty and description of fuzzy sets and fuzzy numbers, formulation of the goals of the work and on the abovementioned methods of multicriteria decision making under uncertainty. The theoretical conclusions of the work are illustrated by the specific decision-making situation.

Key words:

multicriteria decision making, uncertainty, fuzzy numbers, ranking of fuzzy numbers

Obsah

Úvod	10
1.1 Viackriteriálne rozhodovanie	12
1.1.1 Kritériá, váhy kritérií.....	12
1.1.2 Metódy výberu kompromisnej varianty.....	13
1.1.3 Metóda váženého súčtu.....	14
1.1.4 Metóda bázičného variantu.....	15
1.1.5 Rozhodovanie za neurčitosti.....	16
1.2 Fuzzy množiny	17
1.2.1 Definícia fuzzy množiny	19
1.3 Základné pojmy súvisiace s fuzzy množinami.....	20
1.3.1 Nosič, jadro, výška a α -rez fuzzy množiny. Normálna fuzzy množina	20
1.3.2 Veta o reprezentácii, princíp rozšírenia	21
1.3.3 Operácie na fuzzy množinách. Rovnosť a inklúzia fuzzy množín	22
1.3.4 Fuzzy relácie	25
1.4 Fuzzy čísla.....	26
1.4.1 Triedy fuzzy čísiel	27
1.4.2 Výpočty s fuzzy číslami.....	29
1.4.3 Metrika definovaná na fuzzy číslach	31
1.4.4 Usporiadanie fuzzy čísiel	32
2 Cieľ práce a použité metódy	35
3 Výsledky práce a diskusia.....	37
3.1 Metóda váženého súčtu	37
3.1.1 Metóda váženého súčtu: normalizácia fuzzy čísiel	37
3.1.2 Metóda bázičného variantu: normalizácia fuzzy čísiel.....	39
3.1.2 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení.....	40
3.3 Porovnanie fuzzy čísiel	42
3.4.1 Usporiadanie fuzzy čísiel podľa číselnej charakteristiky	42
3.4.2 Fuzzy max order	48
3.4.3 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami.....	51
3.5 Vzorový príklad: metóda váženého súčtu.....	53
3.5.1 Porovnanie fuzzy čísiel využitím metódy fuzzy max order	60
3.5.2 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami.....	64

3.5.3 Porovnanie fuzzy čísiel využitím číselného indexu	66
3.6 Vzorový príklad: metóda bázičkého variantu.....	70
3.6.1 Porovnanie fuzzy čísiel využitím metódy fuzzy max order	73
3.6.2 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami.....	76
3.6.3 Porovnanie fuzzy čísiel využitím číselného indexu	78
3.7 Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov	82
3.7.1 Porovnanie pomocou číselného indexu.....	83
3.7.2 Porovnanie pomocou metódy fuzzy max order	83
3.7.3 Porovnanie pomocou relácie preferencie fuzzy čísiel	83
Záver	85
Zoznam použitej literatúry	86

Úvod

Schopnosť správne sa rozhodovať patrí medzi najdôležitejšie zručnosti človeka, ktoré môže získať. V prípade jednoduchých problémov je možné správne sa rozhodnúť na základe intuície alebo skúseností človeka. S pribúdajúcimi alternatívami a kritériami, ktoré treba brať pri rozhodovaní do úvahy, sa tieto situácie môžu ľahko stať veľmi zložité. Pri dôležitých situáciách, napríklad v prípade manažérskych rozhodnutí, môže mať nesprávne rozhodnutie ďalekosiahle negatívne dôsledky.

Okrem pridávania počtu alternatív a kritérií, podľa ktorých je potrebné sa rozhodnúť, rozhodovacia úlohu môžu skomplikovať aj ďalšie okolnosti – neúplné, nepresné alebo vágne hodnotenia jednotlivých alternatív, ktoré sú v praxi veľmi časté. Týmto problémom sa zaoberal matematik Lofti A. Zadeh, ktorý v šesťdesiatych rokoch minulého storočia navrhol aparát fuzzy množín, ktorý slúži na modelovanie neurčitosti. Zo začiatku bol tento spôsob vyjadrenia neurčitosti vnímaný skepticky, avšak postupom času sa začal rozširovať, hlavne v krajinách ako Japonsko, Južná Kórea alebo Čína.^[30] Práva tieto krajiny dnes patria k popredným lídrom ako vo výskume fuzzy množín a fuzzy logiky, tak aj k zavádzaniu fuzzy logiky do praxe.

Jednou z najznámejších aplikácií fuzzy logiky do praxe je operačný systém ovládania metra v japonskom meste Sundai, ktorý bol zavedený už v roku 1988. Vďaka zavedeniu takéhoto fuzzy systému bola zvýšená presnosť zastavovania vlakových súprav, plynulejšie brzdenie a hlavne znížené náklady na prevádzku metra vďaka nižšiemu odberu elektrickej energie^[28]. Hmatateľnejšou aplikáciou fuzzy logiky v praxi je automobilový priemysel. Napríklad automatická prevodovka auta, ktorá sa dokáže prispôbiť charakteru jazdy vodiča. Pri športovejšom type jazdy je motor vytáčaný do vyšších otáčok a naopak, pri menej temperamentnom štýle jazdy automatická prevodovka preraduje pri nižších otáčkach a tak šetrí napríklad spotrebu paliva a znižuje hlučnosť automobilu.^[28] Ďalším príkladom je systém ABS alebo brzdový systém pre zmiernenie následku havárie, CMS, ktorý vyvinula firma Honda.

Ďalšie aplikácie fuzzy logiky sa dajú nájsť napríklad v domácnosti v podobe domácich spotrebičov, ako mikrovlnná trúba, práčka, sušička či umývačka riadu. Tiež automatická klíma či vykurovanie sú dobrým príkladom využitia fuzzy logiky v každodennom živote.^[30] Svoje správanie vyhodnocujú napríklad na základe aktuálnej teploty, vonkajšej teploty, počasia alebo krátkodobej prítomnosti viacerých osôb v jednej

miestnosti. Vďaka týmto vlastnostiam sú efektívnejšie, presnejšie a spotrebovávajú menej energie.

Nemenej podstatnou sférou, ktorú zasiahol rozmach fuzzy uvažovania je svet financií, kde je využívaný hlavne vo forme expertných systémov. Tieto expertné systémy majú za úlohu podporovať rozhodovanie v komplikovaných situáciách, ktoré by človeku zabrali veľa času. Vhodným príkladom je systém na vyhodnocovanie kreditného rizika, ktorý musí brať do úvahy veľmi veľké množstvo faktorov v reálnom čase, aby tak dokázal posúdiť kredibilitu potenciálneho zákazníka. Ďalším príkladom môže byť výber dodávateľa služby alebo produktu či napríklad analýza portfólia pri investovaní financií.^[28]

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V tejto kapitole je opísaná charakteristika viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti aj s popisom vybraných metód na výber kompromisnej varianty. Ďalej sú tu opísané základy fuzzy množín a fuzzy čísiel, operácie a relácie medzi nimi a uvedené možné spôsoby porovnania alebo usporiadania fuzzy čísiel.

1.1 Viackriteriálne rozhodovanie

Rozhodovanie možno chápať ako proces výberu optimálnej, respektíve kompromisnej varianty z danej množiny variant, ktoré sú ohodnotené podľa jedného alebo viacero kritérií. Varianty sú možné riešenia, ktoré vedú k naplneniu cieľov rozhodovacieho problému. Kritériá potom predstavujú určité hľadiská, podľa ktorých sú všetky uvažované alternatívy hodnotené. V prípade, ak by stačilo na výber kompromisnej varianty posudzovať jednotlivé alternatívy len podľa jedného kritéria, išlo by o veľmi ľahkú úlohu a v zásade by stačilo len zoradiť varianty podľa hodnotenia daného kritéria a vybrať tú s najlepším hodnotením. V praxi ale rozhodovanie prebieha na základe viacero kritérií a je potrebné ich všetky brať do úvahy. Týmto procesom výberu kompromisnej varianty podľa viacero kritérií sa zaoberá viackriteriálne rozhodovanie a ponúka k tomu sadu metód.^[26 s10-12]

1.1.1 Kritériá, váhy kritérií

Kritériá, na základe ktorých sú dané varianty úlohy viackriteriálneho rozhodovania posudzované, musia spĺňať nasledovné podmienky: ^[27 s.8]

- kritérium musí byť interpretovateľné,
- kritériá musia byť od seba navzájom nezávislé,
- kritériá musia byť kvantitatívneho charakteru. V prípade, ak sú kritériá kvalitatívneho charakteru, je potrebné zaviesť hodnotiacu stupnicu a daným výrazom priradiť kvantitatívne hodnoty.

Kritériá možno podľa charakteru rozdeliť na maximalizačné a minimalizačné. Pri maximalizačných kritériách je lepšie podľa daného kritéria ohodnotená tá varianta, ktorá má vyššie hodnotenie. Naopak, pri minimalizačných kritériách je lepšie hodnotená tá varianta, ktorá má nižšie hodnotenie. Ak je to možné, je vhodné v úlohách viackriteriálneho rozhodovania všade použiť maximalizačné kritériá. V prípade, ak to

možné nie je, tak takéto hodnotenia následne vhodnou metódou pretransformovať z minimalizačných na maximalizačné.

Váhy kritérií vyjadrujú dôležitosť, respektíve vzájomnú preferenciu medzi jednotlivými kritériami. Normované váhy kritérií, nazývané aj koeficienty významnosti, sú také reálne čísla $v_1, v_2, \dots, v_n$, pre ktoré platí^[32]

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1.$$

Podľa toho, aké informácie sú k dispozícii ohľadom týchto preferencií existujú 3 skupiny metód stanovenia váh kritérií – ordinálne, kardinálne a bez dodatočných informácií ohľadom preferencií.^[27]

V prípade, ak nie sú k dispozícii žiadne informácie ohľadom preferencií medzi kritériami, váhy sú stanovené pomocou jednoduchého vzorca $v_i = \frac{1}{n}$. Inak povedané, všetky váhy budú rovnaké a teda žiadne kritérium nie je preferované pred iným.

Ordinálne informácie udávajú poradie dôležitosti jednotlivých kritérií, teda osoba, ktorá je zodpovedná za stanovenie preferencií jednotlivých kritérií je schopná určiť vzájomné preferencie medzi každou dvojicou kritérií a usporiadať ich. V takomto prípade je možné stanoviť váhy kritérií napríklad pomocou Fullеровho trojuholníka alebo pomocou metódy poradia.

Ak je rozhodovateľ schopný aj stanoviť konkrétnu mieru preferencií medzi jednotlivými kritériami, teda vie povedať o koľko je jedno kritérium dôležitejšie ako druhé a vie to kvantifikovať, ide o kardinálne informácie. Medzi metódy stanovenie váh pri kardinálnych informáciách o kritériách patrí napríklad metóda párového porovnania alebo Saatyho metóda.

1.1.2 Metódy výberu kompromisnej varianty

Viackriteriálne rozhodovanie ako vedecký odbor poskytuje širokú škálu metód, ktoré slúžia na výber kompromisnej varianty z množiny možných variant v úlohe viackriteriálneho rozhodovania. Aj keď sa toto delenie môže líšiť v závislosti od autora, vo všeobecnosti je možné tieto metódy rozdeliť podľa toho, akú úroveň preferencií medzi jednotlivými kritériami požadujú.^[27 s.10]

- Metódy, ktoré nevyžadujú informáciu o preferenciách medzi kritériami
 - o bodovacia metóda,

- o metóda poradia.
- Metódy vyžadujúce aspiračnú úroveň kritérií
 - o metóda PRIAM,
 - o disjunktívny prístup,
 - o konjunktívny prístup.
- Metódy vyžadujúce ordinálnu informáciu o kritériách
 - o metóda ORESTE,
 - o lexikografická metóda.
- Metódy vyžadujúce kardinálnu informáciu o kritériách
 - o metódy založené na váženom súčte
 - metódy založené na využití nelineárnych funkcií úžitku
 - metóda váženého súčtu,
 - metóda bázičného variantu
 - o metódy založené na vzdialenosti od ideálneho variantu
 - metóda TOPSIS
 - o metódy založené na analýze preferenčných vzťahoch
 - metóda PROMETHEE,
 - metóda ELECTRE,
 - metóda AGREPREF,
 - metóda AHP.

Na účely tejto práce bola vybraná skupina metód založených na váženom súčte – metóda váženého súčtu a metóda bázičného variantu. Dôvodom na výber týchto metód je ich jednoduchosť, možnosť jednoduchého aplikovania na agregáciu fuzzy čísiel a ich široké využitie v praxi, nakoľko patria medzi najstaršie a zároveň najčastejšie používané metódy v oblasti viackritériálneho rozhodovania.^[32] Tieto metódy sú bližšie opísané v nasledujúcej kapitole.

1.1.3 Metóda váženého súčtu

Metóda váženého súčtu vychádza z princípu maximalizácie úžitku, na ktorej je založená normalizácia jednotlivých hodnotení alternatív. Celkové hodnotenie uvažovaných alternatív je po normalizácii jednotlivých hodnotení a za predpokladu, že sú určené váhy jednotlivých kritérií vypočítané vzorcom[41]

$$u(x_{ij}) = \sum_{j=1}^m v_j u_{ij}.$$

kde m predstavuje počet dielčích cieľov, teda v našom prípade počet uvažovaných alternatív, $v_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m v_j = 1$, sú normované váhy priradené kritériám a u_{ij} , $j = 1, 2, \dots, m$, je hodnotenie uvažovanej alternatívy podľa stanovených kritérií.

Normalizácia čiastkových hodnotení alternatív prebieha tak, že najlepšej hodnote je priradená hodnota 1 a naopak, najhoršej hodnote je priradená 0. Spojením týchto dvoch bodov na súradnicovej sústave potom dostaneme úsečku, ktorá predstavuje zobrazenie lineárnych čiastkových hodnotení daných alternatív podľa zvolených kritérií. Stanovenie normalizovaných hodnôt je dané nasledovným vzorcom:^[42]

$$u_j(x_j) = \frac{x_j - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

kde u_j je normalizovaná hodnota varianty podľa j -teho kritéria

x_j je čiastkové ohodnotenie varianty podľa j -teho kritéria

$x_j^{\min}$ predstavuje najhoršiu hodnotu podľa j -teho kritéria

$x_j^{\max}$ predstavuje najlepšiu hodnotu podľa j -teho kritéria

Uvedený výpočet je platný v prípade maximalizačných kritérií. Ak by sme uvažovali o minimalizačných kritériách, je potrebné zmeniť najlepšiu a najhoršiu hodnotu, keďže v takýchto úlohách je najlepšia hodnota tá, ktorá má najnižšie ohodnotenie. Druhou možnosťou je previesť minimalizačné kritériá na maximalizačné, napríklad vzťahom

$$x_{ij} = \max(x_{ij}) - x_{ij}.$$

Po vypočítaní všetkých normovaných hodnotení alternatív podľa uvažovaných kritérií a následnej agregácii týchto čiastkových hodnotení, sú celkové hodnotenia alternatív usporiadané zostupne, pričom varianta s najlepším ohodnotením je považovaná za kompromisnú variantu.

1.1.4 Metóda bázičého variantu

Rovnako ako metóda váženého súčtu, aj metóda bázičého variantu je založená na rovnakom výpočte celkového hodnotenia alternatív, ktoré je dané vzorcom:

$$u(x_{ij}) = \sum_{j=1}^m v_j u_{ij}.$$

Jediným rozdielom medzi týmito dvoma metódami je v spôsobe normalizácie čiastkových hodnotení alternatív podľa zvolených kritérií. Normalizované hodnotenia sa pri využití metódy bázičského variantu vypočítajú podľa vzorca:^[42]

$$u_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^b}{x_j^a - x_j^b},$$

kde u_{ij} je normalizovaná hodnota varianty podľa j -teho kritéria

x_j je čiastkové ohodnotenie varianty podľa j -teho kritéria

x_j^b predstavuje bázičskú hodnotu podľa j -teho kritéria.

Ako bázičská hodnota môže byť v podstate zvolená akákoľvek hodnota. V praxi sa ako bázičská hodnota často využíva najlepšie hodnotenie danej varianty podľa uvažovaného kritéria. Výhodou tejto voľby je fakt, že všetky normované hodnotenia budú patriť do uzavretého intervalu od 0 po 1. Využitie najlepšieho hodnotenia ale nie je podmienkou a použiť sa dá napríklad aj priemerná či ideálna hodnota.

Tak isto ako v prípade metódy váženého súčtu, tak aj v prípade metódy bázičského variantu sa po agregácii parciálnych hodnotení tieto agregované hodnotenia usporiadajú od najlepšej po najhoršiu, pričom varianta s najlepším ohodnotením je považovaná za kompromisnú variantu.

1.1.5 Rozhodovanie za neurčitosti

Neurčitosť v úlohách viackriteriálneho rozhodovania vyplýva z nedostatku informácií, ktoré majú viesť k hodnoteniu alternatív alebo z vágneho popisu tohoto hodnotenia, kedy nie je k dispozícii explicitne daná hodnota. Takýmto prípadom môže byť napríklad slovné hodnotenie, ktoré opisuje určitý stav z reálneho sveta, napríklad pri výbere vhodnej destinácie na letnú dovolenku – menšie mestečko pri nie príliš preplnenej pláži s dostatkom atrakcií a dostupným nočným životom alebo intervalové hodnotenie alternatívy, napríklad pri investičných projektoch kde nie je možné presne vyčíslieť potenciálny zisk, ale je možné ho odhadnúť určitým intervalom v ktorom sa bude s najväčšou pravdepodobnosťou nachádzať.

Ako bolo uvedené v predošlom odstavci, v reálnom živote sa bežne stretávame s rozhodovacími situáciami, kedy jednotlivé hodnotenia alternatív podľa daných kritérií nie

sú popísané explicitne, ale vágne, prípadne nejaké hodnotenie chýba. V takomto prípade je potrebné neurčitost' vyjadriť aj v úlohách viackriteriálneho rozhodovania, aby bolo možné jednotlivé alternatívy ohodnotiť a následne porovnať. V podmienkach neurčitosti existuje niekoľko spôsobov, ako vyjadriť neurčitost' pri hodnotení jednotlivých variant – pomocou intervalovej analýzy, aplikácie pravdepodobnostných metód alebo fuzzy hodnotení. Tak isto existujú aj napríklad metódy rough množín alebo Dempster-Shaferova teória.

Intervalová analýza vychádza z myšlienky nahradenia jednotlivých kvantitatívnych údajov intervalovým odhadom – teda namiesto hodnotenia x je kritériu priradené hodnotenie v intervale (a,b) , respektíve v uzavretom intervale $\langle a,b \rangle$. Pri intervalovej analýze je každému prvku v intervale priradená rovnaká dôležitosť, nedáva teda priestor na rozlišovanie medzi rôznymi druhmi neurčitosti, čo patrí medzi hlavné nevýhody tejto metódy.^[14 s.10]

Pravdepodobnostné metódy, kam možno zaradiť napríklad Bayesovský prístup pracuje na princípe, že splnenie určitého predpokladu podporuje daný záver, respektíve hypotézu. Aj keď je táto metóda veľmi dobre definovaná a spracovaná, pracuje so silnými predpokladmi, ktoré nemusia byť vždy najvhodnejšie pri práci s neurčitost'ou.

Ako posledná metóda opísaná v tejto práci je spomínané fuzzy hodnotenie alternatív, ktoré ponúka zovšeobecnenie pojmu množiny a je podrobne spracované v nasledujúcich kapitolách tejto práce.

1.2 Fuzzy množiny

V matematike, podľa teórie klasických množín je množina definovaná ako súhrn dobre rozlíšiteľných entít, pričom nezáleží na ich usporiadaní a poradí. Množina je definovaná buď vymenovaním prvkov, definovaním vlastností, ktoré musí prvok spĺňať aby patril do množiny alebo uvedením charakteristickej funkcie množiny A .^[1]

Definícia 1.1 Charakteristická funkcia množiny A je definovaná nasledovným vzťahom:

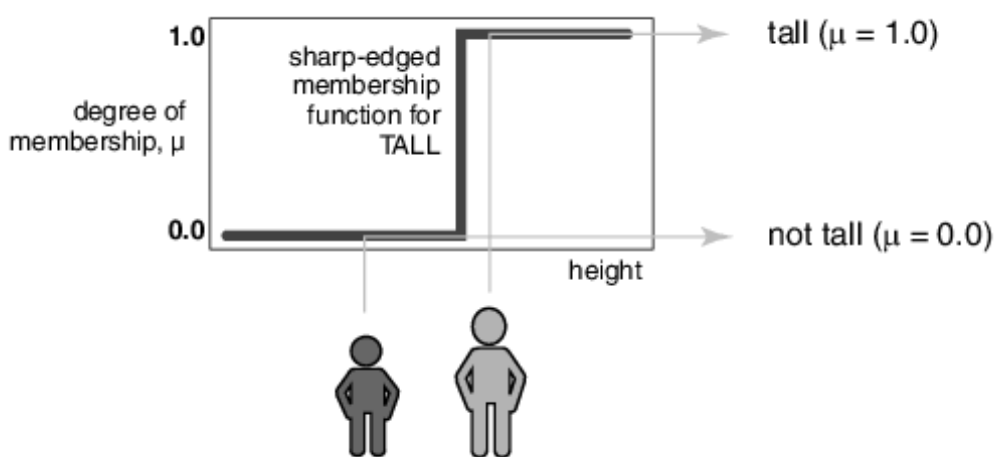
$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

O akejkol'vek entite sa teda dá prehlásiť, či je prvkom danej množiny alebo nie. Túto príslušnosť vyjadruje funkcia príslušnosti množiny, ktorá nadobúda hodnoty v intervale $\langle 0,1 \rangle$ a označuje sa μ . Tieto hodnoty vyjadrujú, nakoľko je prvok prvkom danej množiny.

Pri klasických množinách nadobúda funkcia príslušnosti hodnoty buď 0, keď objekt nie je prvkom množiny alebo 1, keď objekt je prvkom množiny.

Toto funguje, ak sa zaoberáme binárnymi operáciami alebo matematikou. Už menej to funguje v reálnom svete. Napríklad, ak by sme chceli definovať množinu vysokých mužov, podmienka by mohla znieť asi takto: Ak muž meria 185 cm alebo viac, je považovaný za vysokého. Z uvedenej podmienky je zrejmé, že muž vysoký 184 cm za vysokého považovaný nebude, ale muž s výškou 185 cm áno, pričom takto malý, centimetrový rozdiel nie je rozpoznateľný. Funkcia príslušnosti z príkladu by graficky mohla vyzeráť takto:

Obr. 1 Funkcia príslušnosti klasických množín



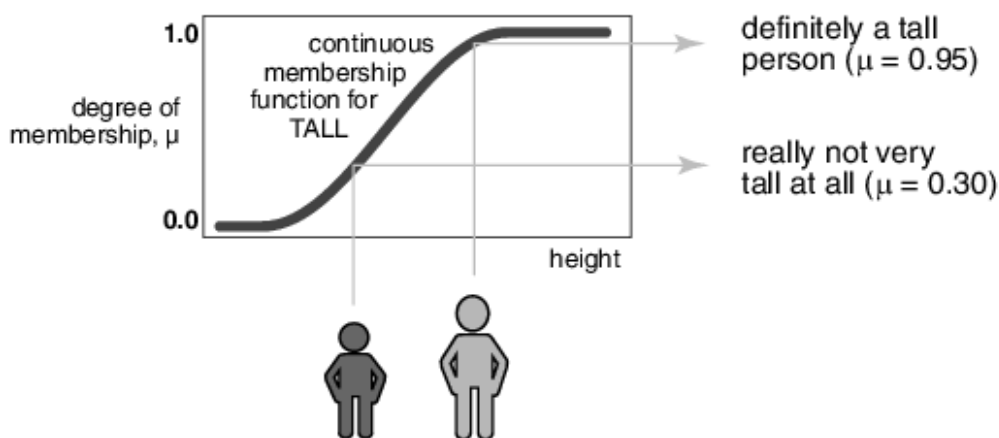
Zdroj: [4]

Na obrázku vidno znázornenú funkciu príslušnosti aj s príkladom dvoch osôb, pričom jedna je považovaná za vysokú (tall) a funkcia príslušnosti $\mu = 1$ a druhá nie je vysoká (not tall) a funkcia príslušnosti μ je rovná nule. Tak isto vidno hranicu, od akej výšky je človek považovaný za vysokého.

Fuzzy množiny tento problém klasických množín odstraňujú, pretože ich funkcia príslušnosti je kontinuálna a môže nadobúdať akúkoľvek hodnotu na uzavretom intervale od 0 po 1. Nula reprezentuje úplné nesplnenie podmienky a naopak, 1 reprezentuje úplné splnenie podmienky. Všetky hodnoty medzi 0 a 1 hovoria o tom, nakoľko prvok danú podmienku spĺňa.

Vyššie uvedený príklad s výškou osoby by pomocou fuzzy množiny mohol byť graficky reprezentovaný takto:

Obr.2 Funkcia príslušnosti fuzzy množín



Zdroj: [4]

Ako vidno na obrázku Obr.2, funkcia príslušnosti nadobúda hodnoty podľa toho, nakoľko je podľa nastaveného kritéria splnená podmienka, či osoba je alebo nie je vysoká. Muž vysoký 184 cm, ktorý pri klasických množinách za vysokého považovaný nebol, nadobúda pri takejto funkcii príslušnosti hodnotu $A(184) = 0.95$, čo oveľa presnejšie odzrkadľuje reálny stav.

1.2.1 Definícia fuzzy množiny

Prvú definíciu fuzzy množín zaviedol azerbajdžanský profesor a matematik Lofti A. Zadeh, ktorý publikoval svoju prácu s názvom *Fuzzy Sets*, v preklade Fuzzy Množiny v roku 1965. Definícia fuzzy množiny podľa A.Zadeha znie:^[1]

Definícia 1.1 Nech U je neprázdna množina bodov – univerzum - a x prvkom danej množiny. Potom fuzzy množina A definovaná na univerze U je množina, ktorá je vyjadrená týmto zápisom:

$$\mu_A = U \rightarrow \langle 0,1 \rangle,$$

kde $\mu_A(x)$ je stupeň príslušnosti prvku x k fuzzy množine A pre každé x patriace do univerza U .

Poznámka 1.1 V literatúre sa kvôli zjednodušeniu zápisu môžeme tiež stretnúť s označením $A(\cdot)$ pre funkciu príslušnosti a $A(x)$ pre stupeň príslušnosti prvku x .

Poznámka 1.2 Táto definícia fuzzy množiny v podstate generalizuje klasickú definíciu množiny. Inak povedané, klasická množina je podmnožina fuzzy množiny.

Poznámka 1.3 Systém všetkých fuzzy množín definovaných na univerze U je označovaný ako $\mathcal{F}(U)$ a teda fakt, že A je fuzzy množina definovaná na univerze U je možné vyjadriť zápisom $A \in \mathcal{F}(U)$.

1.3 Základné pojmy súvisiace s fuzzy množinami

Táto kapitola popisuje základné pojmy súvisiace s fuzzy množinami, ktoré je potrebné poznať pred ďalšou prácou s nimi. Tiež sú tu opísané operácie definované na fuzzy množinách.

1.3.1 Nosič, jadro, výška a α -rez fuzzy množiny. Normálna fuzzy množina

Pojmy uvedené v tejto kapitole sú dôležité pre popis fuzzy množín. Po zavedení jednotlivých definícií uvádzame obrázok, na ktorom sú uvedené pojmy graficky znázornené.

Definícia 1.2 Jadrom $Ker A$ fuzzy množiny A na univerze U nazývame ostrú množinu, pre ktorú platí, že:^[2]

$$Ker A = \{x \in U; A(x) = 1\}.$$

Definícia 1.3 Nosičom $Supp A$ fuzzy množiny A na univerze U rozumieme ostrú množinu, pre ktorú platí, že:^[2]

$$Supp A = \{x \in U; A(x) > 0\}.$$

Definícia 1.4 Výška $hgt(A)$ fuzzy množiny A je definovaná nasledujúcim zápisom:^[2]

$$hgt(A) = \sup A(x).$$

Definícia 1.5 α -rezom fuzzy množiny A na univerze U nazývame ostrú množinu, ktorá je definovaná takto:^[2]

$$A_\alpha = \{x \in U; A(x) \geq \alpha\}.$$

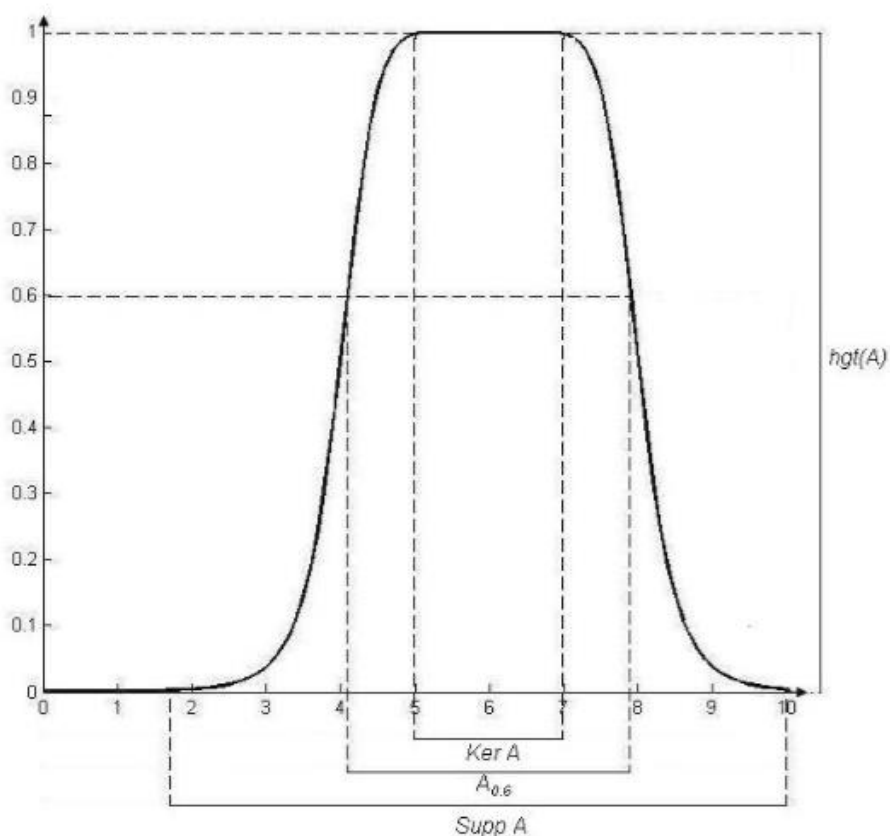
Definícia 1.6 Pod pojmom normálna fuzzy množina rozumieme takú fuzzy množinu, pre ktorú platí, že: ^[2]

$$\text{Ker } A \neq \emptyset.$$

V opačnom prípade sa fuzzy množina nazýva subnormálna.

Poznámka 1.4 Ak je fuzzy množina normálna, potom $\text{hgt}(A) = 1$, pričom opak vo všeobecnosti neplatí.

Obr.3 Vlastnosti fuzzy množiny



Zdroj: [33]

Na *Obr.3* možno vidieť graficky znázornené jadro fuzzy množiny $\text{Ker } A$, 0.6 -rez, nosič fuzzy množiny $\text{Supp } A$ a tak isto jej výšku, $\text{hgt}(A)$.

1.3.2 Veta o reprezentácii, princíp rozšírenia

Rola α -rezov v teórii fuzzy množín je významná hlavne tým, že každá fuzzy množina je jednoznačne určená systémom svojich α -rezov. Keďže α -rezy reprezentujúce

fuzzy množinu sú klasickými množinami, veľa vlastností vyplývajúcich z klasickej teórie množín sú na fuzzy množiny zovšeobecnené takým spôsobom, že fuzzy množina splňuje danú vlastnosť, ak každý jej α -rez pre $\alpha > 0$ splňuje túto vlastnosť ako klasická množina.

Definícia 1.7 Nech A je fuzzy množina definovaná na univerze U . Potom pre každé $x \in U$ platí

$$A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1 \rangle; x \in A_\alpha\}$$

Dôkaz tejto definície vid' [34 s.48].

Poznámka 1.5 Princíp rozšírenia poskytuje všeobecný návod, ako rozšíriť zobrazenie pre prvky z dvoch univerz na zobrazenie definované pre fuzzy množiny na týchto univerzách. Tento princíp je dôležitý z dôvodu ďalšieho využitia v práci, napríklad pre operácie váženého priemeru fuzzy čísiel a tiež pri definícii usporiadania fuzzy čísiel.

Definícia 1.8 Fuzzifikáciou zobrazenia $f : U \rightarrow V$ rozumieme zobrazenie^[5]

$$f_F : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V),$$

ktoré každej množine $A \in \mathcal{F}(U)$ priraduje fuzzy množinu $f_F(A) \in \mathcal{F}(V)$ s funkciou príslušnosti definovanou pre každé $y \in V$ práve vzťahom

$$f_F(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(x); f(x) = y, x \in U\}, \\ 0, \text{ ak neexistuje žiadne } x \in U \text{ také, že } f(x) = y \end{cases}$$

Poznámka 1.6 Princíp rozšírenia je založený na myšlienke, že vo fuzzifikovanom zobrazení f_F sa body daného univerza U zobrazujú spolu so svojimi stupňami príslušnosti k uvažovanej fuzzy množine A . Ak má bod z univerza V viacero vzorov, potom uvažujeme len o tom, ktorý má najväčší stupeň príslušnosti. Ak potrebujeme fuzzifikovať n -árnu operáciu definovanú na univerze U na n -árnu operáciu $\mathcal{F}(U)$ - napríklad v prípade spomínaného priemeru fuzzy čísiel – bude použitá všeobecnejšia definícia princípu rozšírenia, vid' [13 s.18].

1.3.3 Operácie na fuzzy množinách. Rovnosť a inklúzia fuzzy množín

Pred definovaním operácií na fuzzy množinách je potrebné najprv definovať binárnu operáciu.

Definícia 1.9 Binárna operácia $T: \langle 0,1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0,1 \rangle$, ktorá sa nazýva t -norma, ak pre všetky $a, b, c \in \langle 0,1 \rangle$ spĺňa nasledujúce vlastnosti:^[13]

- Komutativnosť
 - $T(a,b) = T(b,a)$
- Asociativita
 - $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$
- Monotónnosť
 - $a \leq b \Rightarrow (T(a,c) \leq T(b,c))$
- Ohraničenosť
 - $T(a,1) = T(1,a) = a$

Definícia 1.10 Binárna operácia $S: \langle 0,1 \rangle^2 \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ sa nazýva t-konorma, ak spĺňa prvé tri podmienky definície t-normy a zároveň pre všetky $a \in \langle 0,1 \rangle$ spĺňa nasledujúcu podmienku ohraničenosti:^[6]

$$S(a, 0) = a$$

T-konorma S je duálna k danej t-norme T , ak pre všetky $a, b \in \langle 0,1 \rangle$ platí

$$S(a, b) = 1 - [T((1 - a), (1 - b))]$$

Poznámka 1.7 Najvýznamnejšími t-normami sú:^[19]

- minimum ($\min\{a,b\}$),
- súčin (ab),
- Lukasiewiczova konjunkcia ($\max\{0, (a + b - 1)\}$),

a k nim prislúchajúce duálne t-konormy:

- maximum ($\max\{a,b\}$),
- pravdepodobnostný súčet ($a + b - ab$),
- Lukasiewiczova disjunkcia ($\min\{1, (a + b)\}$).

Po zavedení vlastností fuzzy množín uvádzame definície základných operácií definovaných na fuzzy množinách. Nech A a B sú dve fuzzy množiny, teda nech platí:

$$A = \{(x, A(x)); x \in U\}$$

$$B = \{(x, B(x)); x \in U\}$$

Definícia 1.11 Pod pojmom zjednotenie dvoch fuzzy množín rozumieme:^[7]

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}, \text{ pre všetky } x \in U$$

Poznámka 1.8 Operáciu maxima vieme nahradiť vhodnou t-konormou, ktorá je duálna k t-norme použitej pri definícii zjednotenia dvoch fuzzy množín. ^[7]

$$(A \cup_L B)(x) = \min\{1, (A(x) + B(x))\} \text{ pre všetky } x \in U$$

Definícia 1.12 Prienikom dvoch fuzzy množín rozumieme: ^[7]

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}, \text{ pre všetky } x \in U$$

Poznámka 1.9 V prípade prieniku dvoch fuzzy množín je možné nahradiť operáciu minima inou vhodnou t-normou, napríklad: ^[7]

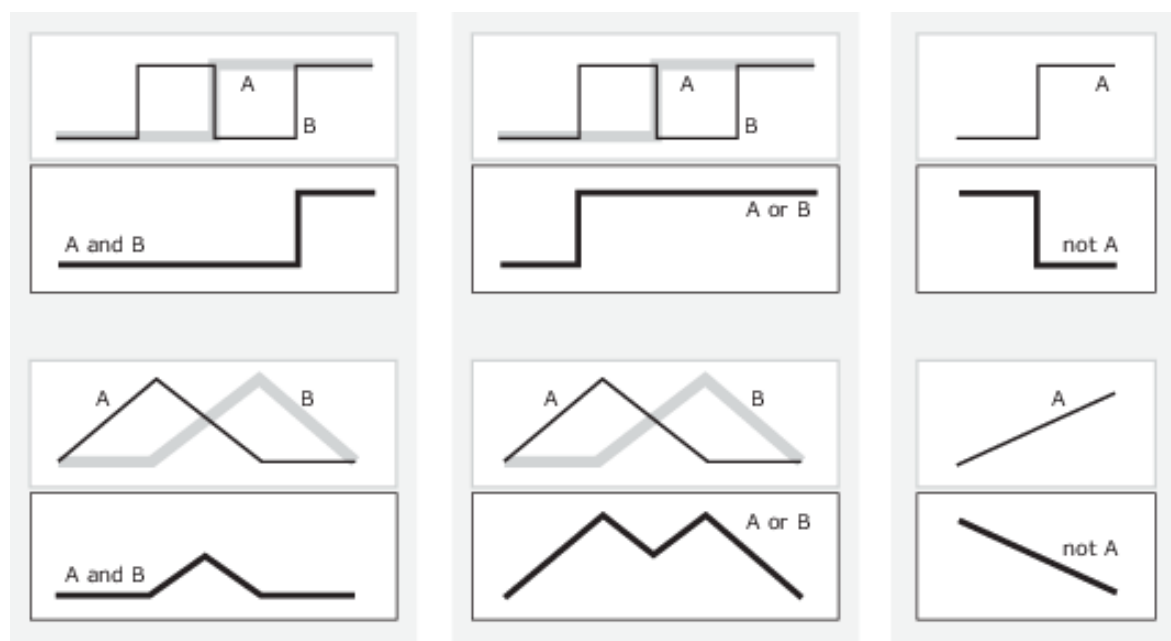
$$(A \cap_L B)(x) = \max\{0, (A(x) + B(x) - 1)\} \text{ pre všetky } x \in U$$

Definícia 1.13 Doplnok fuzzy množín: ^[7]

$$\neg A(x) = 1 - A(x), \text{ pre všetky } x \in U$$

Všetky tieto tri operácie na fuzzy množinách sú dobre graficky znázornené na nasledujúcom obrázku aj spolu s porovnaním týchto operácií definovaných na klasických množinách. V prvom riadku sú uvedené operácie klasickej teórie množín, v druhom potom operácie s fuzzy množinami. V prvom stĺpci je znázornený prienik, v druhom zjednotenie a v poslednom doplnok množiny.

Obr. 4 Znázornenie operácií na množinách



Zdroj: [4]

Pre kompletnosť uvádzame aj definície rovnosti a inklúzie fuzzy množín.

Definícia 1.14 Fuzzy množiny A a B definované na univerze U sú si rovné, ak platí^[8]

$$A(x) = B(x) \text{ pre všetky } x \in U$$

Definícia 1.15 Fuzzy množina A je podmnožinou fuzzy množiny B , za podmienky definovania fuzzy množín A aj B na tom istom univerze U , ak^[8]

$$A(x) \leq B(x) \text{ pre všetky } x \in U$$

1.3.4 Fuzzy relácie

V prípade, ak je žiaduce popísať neurčitý vzájomný vzťah medzi prvkami jedného alebo viac univerz, je potrebné definovať fuzzy relácie, ktoré na toto slúžia.

Definícia 1.16 Nech $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Potom pod pojmom n -árna fuzzy relácia rozumieme ľubovoľnú fuzzy množinu R definovanú na tomto univerze U .^[13]

Poznámka 1.10 Stupeň príslušnosti $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyjadruje mieru vzťahu R medzi prvkami n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Medzi špeciálny prípad fuzzy relácie patrí karteziánsky súčin, ktorého opis aj definíciu možno nájsť v [13 s.21]. V [13 s.22] je taktiež uvedená definícia operácie skladania fuzzy relácií.

Medzi najvýznamnejšie fuzzy relácie patria binárne fuzzy relácie definované na $U \times U$, ako napríklad fuzzifikácia klasických relácií usporiadanie alebo ekvivalencie, teda rovnosti.

Definícia 1.17 Nech R je binárna fuzzy relácia definovaná na $U \times U$. Potom fuzzy relácia R je^[15]

- reflexívna, ak platí

$$\text{pre všetky } x \in U : R(x, x) = 1$$

- symetrická, ak platí

$$\text{pre všetky } x, y \in U : R(x, y) = R(y, x)$$

- antisymetrická, ak platí

$$\text{pre všetky } x, y \in U : (R(x, y) > 0) \wedge (R(y, x) > 0) \Rightarrow x = y$$

- tranzitívna, ak platí

pre všetky $x, z \in U : R(x, z) \geq \sup_{y \in U} \{\min\{R(y, z)\}\}$

- úplná, ak platí

pre všetky $x, y \in U : (R(x, y) > 0) \vee (R(y, x) > 0)$

Definícia 1.18 Fuzzy ekvivalencia je taká binárna fuzzy relácia R na $U \times U$, ktorá je tranzitívna, reflexívna a symetrická.^[33]

Definícia 1.19 Čiastočné fuzzy usporiadanie je taká binárna fuzzy relácia R na $U \times U$, ktorá je zároveň reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Ak je takáto binárna fuzzy relácia navyše aj úplná, ide o lineárne fuzzy usporiadanie.^[33]

1.4 Fuzzy čísla

Fuzzy čísla su špeciálnym prípadom fuzzy množín definovaných na množine reálnych čísel, ktorými vieme reprezentovať určitú mieru neurčitosti. V prípade viackriteriálneho rozhodovania môže ísť o nepresné výsledky meraní alebo neurčité expertne zadané hodnoty hodnotenia jednotlivých kritérií alebo variant.

Definícia 1.20 Fuzzy číslom sa nazýva taká fuzzy množina C definovaná na množine reálnych čísel R , pre ktorú musí platiť:^[7]

- C je normálna fuzzy množina
- α -rezy C_α predstavujú pre všetky $\alpha \in (0, 1)$ uzavreté intervaly
- Nosič $\text{Supp } C$ je ohraničený

Poznámka 1.11 Pre účely tejto práce sa obmedzíme na také fuzzy čísla, pre ktoré je definovaná funkcia príslušnosti na uzavretom intervale $\langle A, B \rangle$. Tieto fuzzy čísla síce sú definované na celej množine reálnych čísel, ale všade mimo intervalu $\langle A, B \rangle$ sú nulové. Výhodou takto definovaných fuzzy čísel je, že môžeme abstrahovať od tretej podmienky definície fuzzy čísla, pretože nosič fuzzy čísla je za každých podmienok ohraničený práve intervalom $\langle A, B \rangle$.

Definícia 1.21 Fuzzy množina C je fuzzy číslom vtedy a len vtedy, ak existujú také reálne čísla x_1, x_2, x_3 a x_4 , pre ktoré platí $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ tak, že pre funkciu príslušnosti $C(\cdot)$ takýchto fuzzy čísel platí:

$$C(x) = \begin{cases} L(x) & \text{pre } x \in (-\infty, x_2) \\ 1 & \text{pre } x \in \langle x_2, x_3 \rangle \\ P(x) & \text{pre } x \in (x_3, \infty) \end{cases}$$

kde funkcia $L: (-\infty, x_2) \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je neklesajúca, spojitá sprava a platí pre ňu $L(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, x_1)$, funkcia $P: (x_3, \infty) \rightarrow \langle 0,1 \rangle$ je nerastúca, spojitá zľava a platí pre ňu $P(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, x_4)$.

1.4.1 Triedy fuzzy čísiel

Podľa charakteru svojich ľavých a pravých častí sa fuzzy čísla delia na lineárne, kvadratické a po častiach spojité lineárne fuzzy čísla^[13]. Pri riešení úlohy viackriteriálneho rozhodovania by mala byť použitá čo najjednoduchšia trieda fuzzy čísiel definovaná na uzavretom intervale $\langle A, B \rangle$. Na jednej strane toto pravidlo vyplýva z prirodzenej ľudskej snahy čo najviac si zjednodušiť daný problém, na strane druhej ide aj o fakt, že málokedy je zadávateľ fuzzy hodnotenia schopný poskytnúť presnejšie hodnotenie ako pomocou štvorice bodov $(x_1,0),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0)$, kde $A \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq B$. Čísla z intervalu $\langle x_2, x_3 \rangle$ reprezentujú hodnoty, kde sa hodnotenie určite môže pohybovať a naopak, čísla mimo intervalu (x_1, x_4) znamenajú hodnoty, ktorých výskyt je podľa zadávateľa zanedbateľná. Najjednoduchším typom podľa charakteru svojich ľavých a pravých častí je fuzzy číslo lineárne.

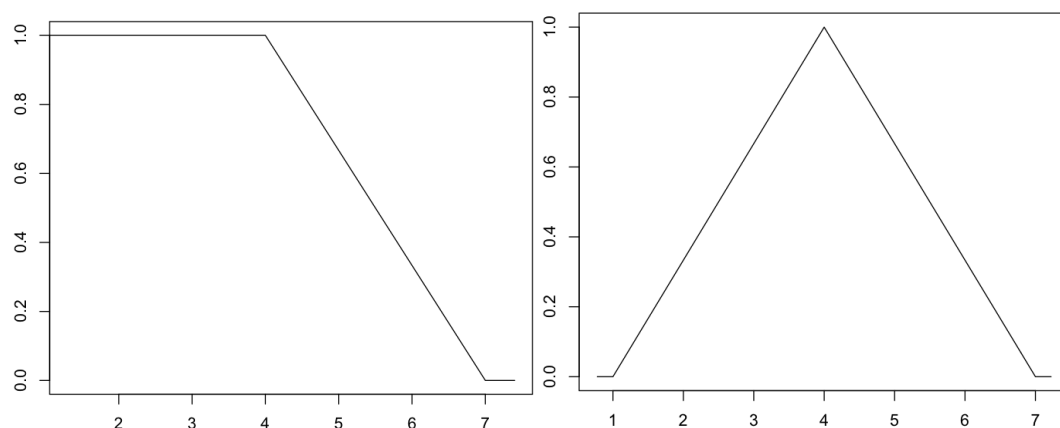
Definícia 1.21 Lineárnym fuzzy číslom na intervale $\langle A, B \rangle$ určeným štvoricou bodov $(x_1,0),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0)$, kde $A \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq B$ je fuzzy číslo C , ktorého funkcia príslušnosti definovaná parametrami x_1, x_2, x_3 a x_4 má takýto tvar:^[36]

$$\forall x \in \langle A, B \rangle : C(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{pre } x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & \text{pre } x_2 \leq x < x_3 \\ \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} & \text{pre } x_3 \leq x < x_4 \\ 0 & \text{pre } x_4 < x \end{cases}$$

Podľa tvaru sa lineárne fuzzy čísla delia na

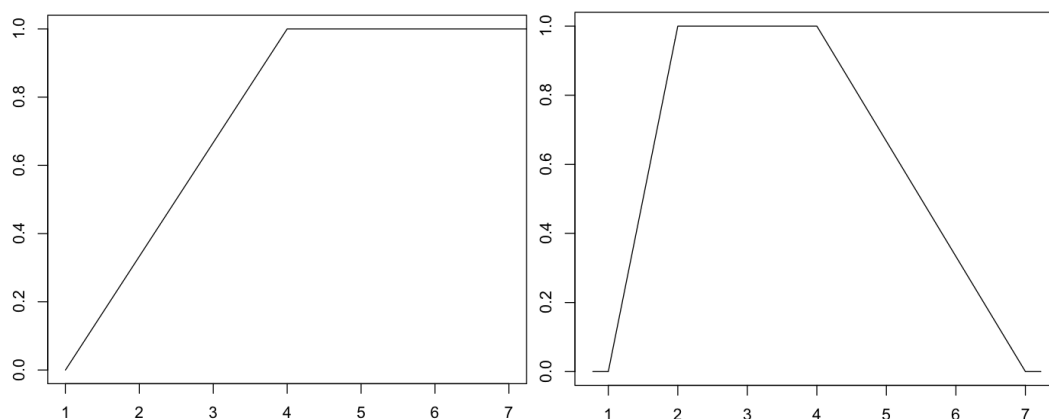
- lichobežníkové,
- trojuholníkové, keď $x_2 = x_3$,
- typ S, keď $x_3 = x_4$,
- typ Z, keď $x_1 = x_2$

Obr. 5 Typy lineárneho fuzzy čísla: typ Z (vľavo), trojuholníkové (vpravo)



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 6 Typy lineárneho fuzzy čísla: typ S (vľavo), lichobežníkové (vpravo)



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Tiež existuje niekoľko ďalších špeciálnych typov lineárnych fuzzy čísiel. Ak $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, ide o číslo reálne. Ak $x_1 = x_2 \neq x_3 = x_4$, hovoríme o uzavretom intervale.

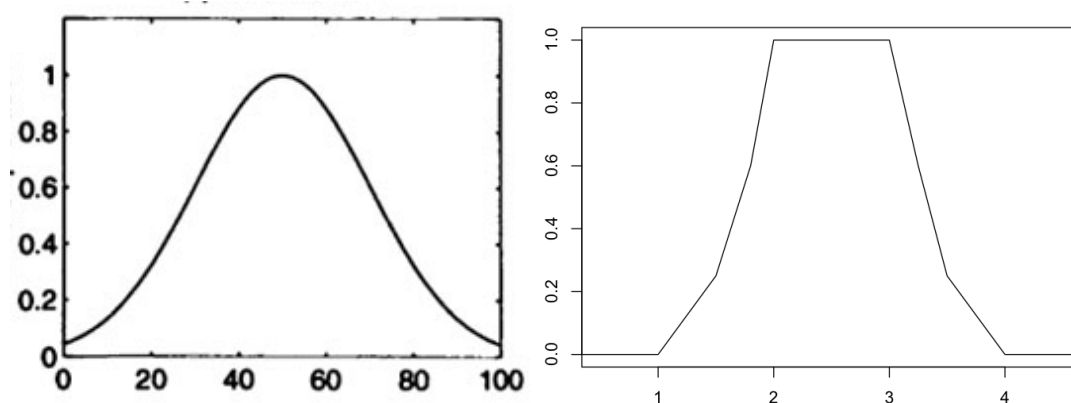
Ďalším pomerne rozšíreným a ľahko použiteľným typom fuzzy čísla sú fuzzy čísla kvadratické. Na definovanie ich funkcie príslušnosti netreba viacej informácií ako pri lineárnych fuzzy číslach.

Definícia 1.22 Kvadratickým fuzzy číslom na intervale $\langle A, B \rangle$ určeným štvoricou bodov $(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0)$, kde $A \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq B$ je fuzzy číslo C , ktorého funkcia príslušnosti definovaná parametrami x_1, x_2, x_3 a x_4 má takýto tvar:^[36]

$$\forall x \in \langle A, B \rangle : C(x_1 x_2 x_3 x_4) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < x_1 \\ \frac{2(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} & \text{pre } x_1 \leq x < \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 1 - \frac{2(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^2} & \text{pre } \frac{x_1 + x_2}{2} \leq x < x_2 \\ 1 & \text{pre } x_2 \leq x \leq x_3 \\ 1 - \frac{2(x - x_3)^2}{(x_4 - x_3)^2} & \text{pre } x_3 < x \leq \frac{x_3 + x_4}{2} \\ \frac{2(x_4 - x)^2}{(x_4 - x_3)^2} & \text{pre } \frac{x_3 + x_4}{2} < x \leq x_4 \\ 0 & \text{pre } x_4 < x \end{cases}$$

Pri niektorých výpočtoch s fuzzy číslami potrebnými pri riešení úloh viackriteriálneho rozhodovania nemusí výsledné fuzzy číslo patriť do rovnakej triedy fuzzy čísiel ako zadané vstupné fuzzy čísla. V takomto prípade je možné výsledné fuzzy číslo aproximovať kvadratickým alebo lineárnym fuzzy číslom, presnejšia aproximácia je ale pomocou po častiach lineárneho fuzzy čísla. Tieto fuzzy čísla sú vhodné pri používaní aritmetických výpočtov a operácií, ako napríklad meranie vzdialenosti dvoch fuzzy čísiel.

Obr.8 Kvadratické fuzzy číslo (vľavo), po častiach lineárne fuzzy číslo (vpravo)



Zdroj: [35, vlastné spracovanie]

Funkciu príslušnosti ako aj detailnejší opis po častiach lineárneho fuzzy čísla je možné nájsť napríklad v [13 s.26-27].

1.4.2 Výpočty s fuzzy číslami

Vďaka princípu rozšírenia, ktorý bol uvedený v predchádzajúcich kapitolách vieme definovať výpočty s fuzzy číslami, ktoré z tohto princípu vychádzajú, keďže hovorí o tom, ako zobrazenie definované na všetkých reálnych číslach $\mathbb{R}$ zovšeobecniť na zobrazenia,

ktoré sú definované na $\mathcal{F}(R)$. Táto kapitola sa venuje opisu výpočtu váženého priemeru fuzzy čísiel, kedy váhy sú reálne čísla, pričom abstrahuje od ostatných výpočtov definovaných na fuzzy číslach, ako je napríklad dosadzovanie fuzzy čísla do ostrej funkcie.

V nasledujúcej definícii uvádzame špeciálny prípad princípu rozšírenia, z ktorého budú vychádzať ďalšie definície a tvrdenia v tejto kapitole.

Definícia 1.23 Nech je dané fuzzy číslo C definované na intervale $\langle A, B \rangle$ a funkcia $f : \langle A, B \rangle \rightarrow R$. Potom odpovedajúca fuzzy hodnota $f_F(C)$ má funkciu príslušnosti pre každé $y \in R$ vzťahom^[34]

$$f_F(C)(y) = \begin{cases} \sup\{C(x); f(x) = y, x \in \langle A, B \rangle\}, \\ 0, \text{ ak neexistuje } x \in \langle A, B \rangle \text{ pre ktoré platí, že } f(x) = y. \end{cases}$$

Definícia 1.24 Nech C je fuzzy číslo definované na $\langle A, B \rangle$ a $f : \langle A, B \rangle \rightarrow R$ je spojitá funkcia. Potom fuzzy množina $f_F(C)$, teda obraz fuzzy čísla C vo fuzzifikácii f_F zobrazenia f v zmysle princípu rozšírenia je fuzzy číslom a pre každé $\alpha \in (0,1)$ platí

$$f_F(C)_\alpha = f(C_\alpha) = \langle \min_{x \in C_\alpha} f(x), \max_{x \in C_\alpha} f(x) \rangle.$$

Dôkaz tohto tvrdenia viď [36 s.38].

Poznámka 1.12 Predchádzajúce tvrdenie zaručuje, že výsledná vypočítaná fuzzy funkčná hodnota bude opäť fuzzy číslom.

Definícia 1.23 Nech sú dané fuzzy čísla $C^1, C^2, \dots, C^m$ definované na uzavretom intervale $\langle A, B \rangle$ a reálne čísla $v_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$, pre ktoré platí $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 1$. Potom funkcia príslušnosti fuzzy čísla

$$C = \sum_{j=1}^m v_j C^j$$

nazývaného vážený priemer fuzzy čísiel $C^1, C^2, \dots, C^m$ s váhami $v_1, v_2, \dots, v_m$, je pre každé $y \in \langle A, B \rangle$ definovaná vzťahom^[13]

$$C(y) = \sup\{\min\{C^1(x_1), \dots, C^m(x_m)\}; y = \sum_{j=1}^m v_j x_j, x_j \in \langle A, B \rangle, j = 1, \dots, m\}.$$

Poznámka 1.13 Takto definovaná operácia váženého priemeru fuzzy čísiel s reálnymi váhami predstavuje fuzzifikáciu operácie váženého priemeru reálnych čísiel v zmysle definície princípu rozšírenia.

1.4.3 Metrika definovaná na fuzzy číslach

Metrika dvoch fuzzy čísiel vyjadruje vzdialenosť medzi týmito číslami, čo je pri riešení úloh viackriteriálneho rozhodovania využiteľné dvoma spôsobmi. Jeden z nich je založený na tom, že je stanovená ideálna varianta, ktorá plne spĺňa určené kritériá na výber varianty optimálnej. Takto je možné získať vzdialenosti medzi jednotlivými fuzzy hodnoteniami variant od ideálnej varianty a teda je možné fuzzy hodnotenia usporiadať a určiť, ktorá je najbližšie k ideálnej variante. Druhá možnosť ako využiť vzdialenosť medzi dvoma fuzzy číslami je využiť ju pri aproximácii vypočítaného fuzzy hodnotenia varianty fuzzy číslom zo zadanej škály. Táto škála môže byť vytvorená napríklad z fuzzy čísiel predstavujúcich jazykové hodnotenia a teda výsledné fuzzy hodnotenie bude aproximované takým fuzzy číslom zo zadanej škály, ku ktorému je najbližšie a teda ho najlepšie charakterizuje.

Pred definovaním metriky fuzzy čísiel je potrebné zaviesť pojem pseudoinverzie monotónnej funkcie.

Definícia 1.24 Nech je daná neklesajúca funkcia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$, ktorá nie je konštantou. Potom pseudoinverznou funkciou tejto funkcie definovanej na intervale $\langle c, d \rangle$ je funkcia $f^{-1}: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ definovaná pre každé $y \in \langle c, d \rangle$ takto:^[2]

- Ak existuje $x \in \langle a, b \rangle$ také, že $f(x) < y$, tak

$$f^{-1}(y) = \sup\{x; f(x) < y, x \in \langle a, b \rangle\}.$$

- Ak neexistuje také $x \in \langle a, b \rangle$ také, že $f(x) < y$, tak

$$f^{-1}(y) = a.$$

Nech je daná nerastúca funkcia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$, ktorá nie je konštantou. Potom pseudoinverziou tejto funkcie na intervale $\langle c, d \rangle$ považujeme funkciu $f^{-1}: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ definovanú pre $y \in \langle c, d \rangle$ takýmto predpisom:

- Ak existuje také $x \in \langle c, d \rangle$, že $\square(x) < y$, tak

$$f^{-1}(y) = \inf\{x; f(x) < y, x \in \langle a, b \rangle\},$$

- Ak neexistuje také $x \in \langle c, d \rangle$, že $\square(x) < y$, tak potom

$$f^{-1}(y) = b.$$

Poznámka 1.14 V prípade, že $a = b$, teda keď $f(a) = f(b) = y^*$, $y^* \in \langle c, d \rangle$ je možné pseudoinverziu na intervale $\langle c, d \rangle$ definovať tak, že pre ľubovoľnú hodnotu $y^* \in \langle a, b \rangle$ je pseudoinverzia f^{-1} definovaná pre každé $y \in \langle c, d \rangle$ takýmto predpisom

$$f^{-1}(y) = a = b.$$

Poznámka 1.15 Podľa definície pseudoinverzie je možné definovať ľavú a pravú časť fuzzy čísla C_L a C_P , ktorá je uvedená v [13 s.39].

Definícia 1.25 Nech sú dané fuzzy čísla C a D na intervale $\langle A, B \rangle$, ktorých ľavé časti sú na príslušných intervaloch $\langle x_1^C, x_2^C \rangle, \langle x_1^D, x_2^D \rangle$, definované sprava spojitými neklesajúcimi funkciami C_L, D_L a podobne pravé časti sú na príslušných intervaloch $\langle x_3^C, x_4^C \rangle, \langle x_3^D, x_4^D \rangle$ definované zľava spojitými nerastúcimi funkciami C_P, D_P . Potom vzdialenosť d medzi týmito dvoma fuzzy číslami je definovaná vzťahom^[13]

$$d(C, D) = \frac{\int_0^1 (|C_L^{-1}(y) - D_L^{-1}(y)| + |C_P^{-1}(y) - D_P^{-1}(y)|) dy}{2(B - A)},$$

kde $C_L^{-1}, D_L^{-1}, C_P^{-1}, D_P^{-1}$ sú pseudoinverzie na $\langle 0, 1 \rangle$ k odpovedajúcim funkciám C_L, D_L, C_P, D_P .

Poznámka 1.16 Uvedená funkcia výpočtu metriky fuzzy čísiel je normovanou metrikou na množine všetkých fuzzy čísiel uvedeného typu, ktoré sú definované na intervale $\langle A, B \rangle$, teda pre ľubovoľné tri tieto fuzzy čísla C, D, E platí:

- $d(C, D) \in \langle 0, 1 \rangle$,
- $d(C, D) = 0 \Leftrightarrow C = D$,
- $d(C, D) = d(D, C)$,
- $d(C, E) + d(E, D) \geq d(C, D)$.

Dôkaz tohto tvrdenia viď [13 s.40].

1.4.4 Usporiadanie fuzzy čísiel

Porovnanie fuzzy čísiel patrí medzi podstatné výskumy teórie fuzzy množín a je aplikovateľný na všetky oblasti rozhodovania – je teda podstatný aj v súvislosti s touto prácou, kde je potrebné dospieť k výberu kompromisnej varianty v úlohe viackriteriálneho rozhodovania. Na rozdiel od reálnych čísiel, pri fuzzy číslach neexistuje jednoznačná metóda, ako dve fuzzy čísla porovnať a určiť, ktoré je menšie alebo väčšie, pretože predstavujú neurčité a nejasné hodnoty a môžu sa navzájom prekrývať. Ak sa fuzzy čísla prekrývajú, nedá sa jednoznačne určiť ich poradie a teda sú absolútne neusporiadateľné.

Existuje niekoľko spôsobov, ako fuzzy čísla porovnávať a následne usporiadať, pričom každá metóda má svoje výhody a nevýhody. Pri použití jednej metódy môže vyjsť fuzzy číslo A väčšie ako fuzzy číslo B ale pri použití inej metódy môže byť tento výsledok

opačný. Z uvedeného je zrejmé, že univerzálna metóda na usporiadanie, respektíve porovnanie fuzzy čísiel neexistuje. Podľa Ramliho^[38] a Nasseriho^[39] je možné rôzne metódy usporiadania fuzzy čísiel usporiadať do niekoľkých kategórií:

- relácie preferencie
 - stupeň optimality,
 - Hamingova vzdialenosť,
 - α -rezy, fuzzy max order,
 - relácia preferencie.
- posibilitné rozdelenia fuzzy priemeru a rozptylu
- fuzzy bodovanie
 - prispôsobenie sa k optimu,
 - ľavé a pravé bodovanie,
 - plošné merania,
- lingvistické vyjadrovanie
 - intuícia,
 - lingvistická aproximácia,
- centroidné metódy
 - Yagerov index
 - Chengov index
 - Wangov index
 - Bectorov index
 - McCahonov a Leeov index
 - Chuov a Tsaov index
 - Medián

Relácie preferencie ako spôsob usporiadania fuzzy čísiel vyjadrujú, nakoľko je dané číslo preferované pred druhým. Bližšie sa metóde fuzzy max order ako aj relácii preferencie budeme venovať v ďalšej časti práce.

Centroidné metódy porovnávajú fuzzy čísla na základe vypočítanej číselnej charakteristiky. Táto skupina patrí k najmladším a rýchlo sa rozvíjajúcim, nakoľko sa autori jednotlivých indexov snažia definovať taký index, pomocou ktorého by mohli byť porovnávané všetky typy fuzzy čísiel.^[40]

Metódy fuzzy bodovania, kam patria napríklad plošné meranie alebo ľavé a pravé bodovanie je vo všeobecnosti založené buď na porovnávaní plochy, napríklad ľavej alebo pravej časti fuzzy čísla alebo vzdialenosti.^[43]

Lingvistická aproximácia vychádza z nahradenia číselných charakteristík jazykovými výrazmi. Využíva sa napríklad spolu s booleanovskou logikou, ktorá je formalizovaná pomocou fuzzy množín. Numerické hodnoty sú nahradené jazykovými výrazmi, ktoré vyjadrujú stupeň dôležitosti daného pojmu, respektíve výrazov.^[44]

2 Cieľ práce a použité metódy

Hlavným cieľom práce je využitie fuzzy metód v úlohách viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti, a to za predpokladu využitia metód založených na váženom súčte.

Na výber kompromisnej varianty je potrebné jednotlivé fuzzy hodnotenia alternatív podľa zvolených kritérií normovať, agregovať a následne usporiadať celkové hodnotenia variant od najlepšej po najhoršiu.

V súlade s uvedeným sa hlavný cieľ práce rozpadá na parciálne ciele, konkrétne:

- metódy normovania fuzzy hodnotenia alternatív podľa jednotlivých kritérií,
- problém agregácie čiastkových fuzzy hodnotení,
- výber a zhodnotenie metód usporiadania fuzzy čísiel, ktorých výsledkom je výber kompromisnej varianty.

Normalizácia fuzzy čísiel bude definovaná pomocou dvoch spomínaných metód, a to metódou váženého súčtu a metódou bázičného variantu, ktoré boli opísané v kapitolách 1.1.3 a 1.1.4. Tieto možnosti normalizácie čiastkových cieľov je potrebné upraviť tak, aby ich bolo možné použiť na fuzzy čísla.

Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení po ich normalizácii je založená na metódach váženého súčtu. Takáto agregácia bola definovaná v kapitole 1.4.2, konkrétne definícia 1.23.

Cieľom úlohy viackriteriálneho rozhodovania je výber kompromisnej varianty, respektíve usporiadanie uvažovaných variant od najlepšej po najhoršiu. Táto úloha je závislá aj od možnosti porovnať fuzzy čísla, pretože bez porovnania, respektíve usporiadania fuzzy hodnotení jednotlivých alternatív by nebolo možné vybrať kompromisnú variantu. Problémom pri využití fuzzy hodnotenia je, že na rozdiel od reálnych čísiel neponúkajú jednoznačnú metódu, ako dve fuzzy čísla navzájom porovnať. Tento problém vyplýva z faktu, že fuzzy čísla reprezentujú neisté a neurčité hodnoty, ktoré sa môžu prekrývať – v takomto prípade ich nie je možné považovať za absolútne usporiadateľné. Porovnanie fuzzy čísiel, ako jedna z častí teórie fuzzy množín, ponúka viacero metód porovnania, respektíve usporiadania fuzzy čísiel. Tieto metódy sú založené na rôznych prístupoch a môžu sa líšiť vo výsledkoch - teda pri zvolení jednej metódy môže byť fuzzy číslo považované za väčšie ako druhé a naopak, pri zvolení inej metódy môže byť táto relácia porovnania opačná.

Na účely tejto práce boli vybrané tri rôzne metódy usporiadania fuzzy čísiel, a to:

- metóda fuzzy max order,
- relácia preferencie medzi dvoma fuzzy číslami,
- porovnanie fuzzy čísiel na základe číselného indexu,

ktoré sú prezentované, použité, vyhodnotené a následne porovnané.

Výsledky dosiahnuté pri naplnení jednotlivých parciálnych cieľov sú ilustrované na vzorovom príklade.

3 Výsledky práce a diskusia

Tretia kapitola opisuje možnosti využitia fuzzy metód v úlohách viackriteriálneho hodnotenia za neurčitosti. Prvá časť je zameraná na normalizáciu a následnú agregáciu fuzzy čísiel pri využití metódy váženého súčtu a metódy bázičného variantu a následne na porovnanie, respektíve zoradenie fuzzy hodnotení jednotlivých alternatív.

Celý postup výberu kompromisnej varianty s použitím vybraných metód je následne prezentovaný na príklade.

Poznámka 3.1 Všetky použité trojuholníkové fuzzy čísla budú uvádzané notáciou $A = (a,b,c)$, ktorá vyjadruje x-ové súradnice trojuholníkového fuzzy čísla.

3.1 Metóda váženého súčtu

Metódy založené na váženom súčte sú opísané v kapitolách 1.1.3 a 1.1.4. V tejto kapitole je vysvetlená a opísaná za predpokladu využitia fuzzy čísiel na hodnotenie jednotlivých alternatív podľa zvolených kritérií. Ich využitie spočíva v agregácii fuzzy čísiel, pričom do úvahy prichádzajú dve možnosti, ktoré sa líšia len v normalizácii hodnotení:

- metódu váženého súčtu,
- metódu bázičného variantu.

Tiež existujú aj metódy založené na nelineárnej funkcii úžitku, ktoré tiež patria do skupiny metód založených na váženom súčte, ktorým sa venovať nebudeme.

Aj keď existuje viacero možností, ako agregovať fuzzy čísla, ako napríklad pomocou geometrického priemeru alebo priemeru uhlov fuzzy čísla, tieto metódy agregácie sa nedajú použiť so zvolenou metódou váženého súčtu.

3.1.1 Metóda váženého súčtu: normalizácia fuzzy čísiel

Pri využití metódy váženého súčtu je potrebné pred agregovaním jednotlivých hodnotení tieto hodnotenia znormalizovať. Normalizácia je stanovená na základe funkcie, ktorá každému hodnoteniu priradí číselnú charakteristiku z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, že najhoršej hodnote priradí 0 a naopak, najlepšej jednotku.

V prípade využitia fuzzy hodnotenia je možné využiť mierne upravený vzorec, ktorý bol uvedený v kapitole 1.2.1 aj na výpočet normovaných fuzzy čísiel. Aby to bolo možné, rovnako ako v prípade reálnych čísiel, je dopredu potrebné poznať počet variant

a ich ohodnotenia podľa zvolených kritérií. Tieto kritéria možno chápať aj tak, že vyjadrujú fuzzy hodnotenie alternatívy podľa vybraného kritéria na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, kde a predstavuje minimálnu hodnotu a b maximálnu hodnotu.

Definícia 3.1 Výpočet normalizovaného fuzzy hodnotenia je definované vzorcom:^[10]

$$\bar{x}_j(x_j) = \frac{x_j - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

kde U_j je normalizovaná hodnota fuzzy hodnotenia varianty podľa j -teho kritéria

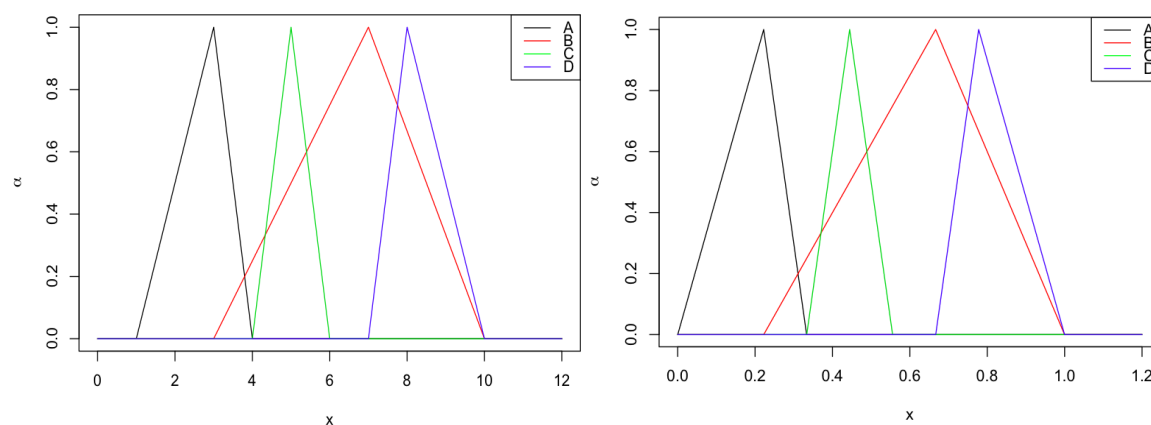
X_j je čiastkové fuzzy ohodnotenie varianty podľa j -teho kritéria

$x_j^{\min}$ predstavuje najhoršiu hodnotu podľa j -teho kritéria

$x_j^{\max}$ predstavuje najlepšiu hodnotu podľa j -teho kritéria

Uvedenú metódu prezentujeme na jednoduchom príklade. Majme stanovené štyri trojuholníkové fuzzy čísla A, B, C, D pričom $A = (1, 3, 4)$, $B = (3, 7, 10)$, $C = (4, 5, 6)$ a $D = (7, 8, 10)$ ktoré sú zobrazené na obrázku 9 vľavo. Ako hodnota $x_{\min}$ bola stanovená hodnota 1, nakoľko ide o najmenšiu hodnotu z intervalu hodnotenia a za $x_{\max}$ bola dosadená hodnota 10, keďže predstavuje maximálnu hodnotu z tohto intervalu. Potom po dosadení do vzorca dostávame tri normované fuzzy čísla takto: $A = (0, 2/9, 3/9)$, $B = (2/9, 6/9, 1)$, $C = (3/9, 4/9, 5/9)$ a $D = (6/9, 7/9, 1)$. Tieto normované fuzzy čísla sú zobrazené na obrázku 9 vpravo. Ako vidno, normalizácia zachováva ako tvar, tak aj usporiadanie fuzzy čísel na číselnej osi.

Obr.9 Normovanie fuzzy čísel A, B, C, D pomocou metódy váženého súčtu



Zdroj: [vlastné spracovanie]

3.1.2 Metóda bázičkého variantu: normalizácia fuzzy čísiel

Ďalšia možnosť, ako normovať fuzzy čísla vychádza z metódy bázičkého variantu. Podrobnejší opis bázičkého variantu možno nájsť v kapitole 1.1.4.

Definícia 3.2 V prípade rastúcich kritérií je normalizované fuzzy hodnotenie vypočítané nasledovne:^[10]

$$\bar{u}_{ij}(\bar{x}_j) = \frac{u_{ij}}{x_j^b}$$

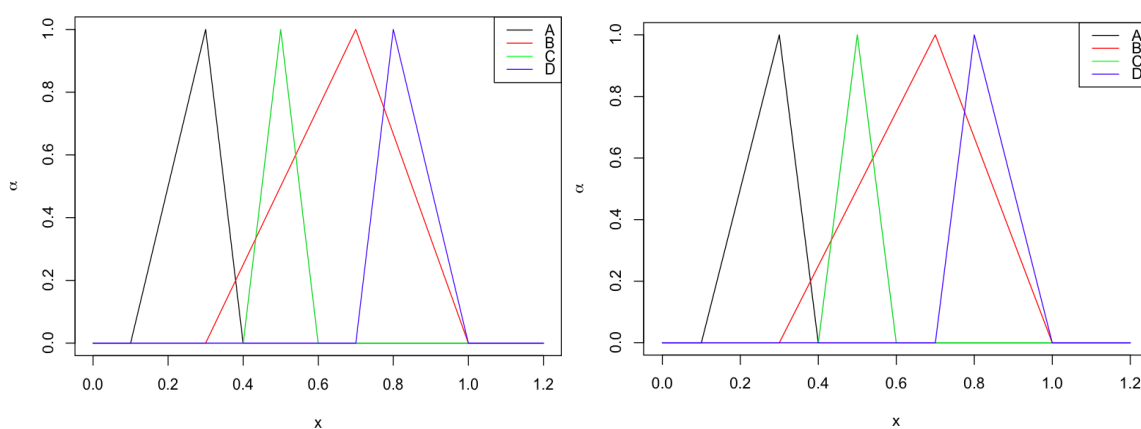
kde u_{ij} je normalizovaná hodnota fuzzy hodnotenia varianty podľa j -teho kritéria

x_j je čiastkové fuzzy ohodnotenie varianty podľa j -teho kritéria

x_j^b predstavuje bázičnú hodnotu podľa j -teho kritéria

Metódu bázičkého variantu prezentujeme na rovnakom príklade ako v prípade predošlej metódy. Majme stanovené štyri trojuholníkové fuzzy čísla A, B, C, D pričom $A = (1, 3, 4)$, $B = (3, 7, 10)$, $C = (4, 5, 6)$ a $D = (7, 8, 10)$ ktoré sú zobrazené na obrázku 10 vľavo. Ako hodnota x_j^b bola stanovená hodnota 10, teda maximálna hodnota z intervalu, na ktorom sú definované dané fuzzy čísla. Potom po dosadení do vzorca dostávame štyri normované fuzzy čísla takto: $A = (1/10, 3/10, 4/10)$, $B = (3/10, 7/10, 1)$, $C = (4/10, 5/10, 6/10)$ a $D = (7/10, 8/10, 1)$. Tieto normované fuzzy čísla sú zobrazené na obrázku 10 vpravo. Ako vidno, aj táto metóda normalizácie zachováva ako tvar, tak aj usporiadanie fuzzy čísiel na číselnej osi.

Obr.10 Normovanie fuzzy čísiel A, B, C, D pomocou metódy váženého súčtu



Zdroj: [vlastné spracovanie]

V prípade využitia metódy váženého súčtu a metódy bázičného variantu je rozdiel vo výsledných normovaných fuzzy číslach relatívne malý, avšak nemusí byť zanedbateľný. Z dôvodu preskúmania toho, aký vplyv má výber metódy normovania čiastkových fuzzy hodnotení na výsledný výber kompromisnej varianty sú v kapitole 3 prezentované obe metódy.

3.1.2 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení

Metóda váženého súčtu predstavuje základný typ agregácie fuzzy čísiel. Pred jej použitím v úlohách musia byť splnené tri základné predpoklady:

- dielčie fuzzy hodnotenia vyjadrujú stupne naplnenia parciálnych cieľov,
- cieľ vyššej úrovne musí byť rozložený do vzájomne sa neprekrývajúcich cieľov nižšej úrovne,
- váhy priradené týmto cieľom predstavujú ich podiel na agregovanom ciele.

Definícia 3.3 Všeobecný agregačný vzorec má tvar^[13]

$$U = \sum_{j=1}^m v_j U_j$$

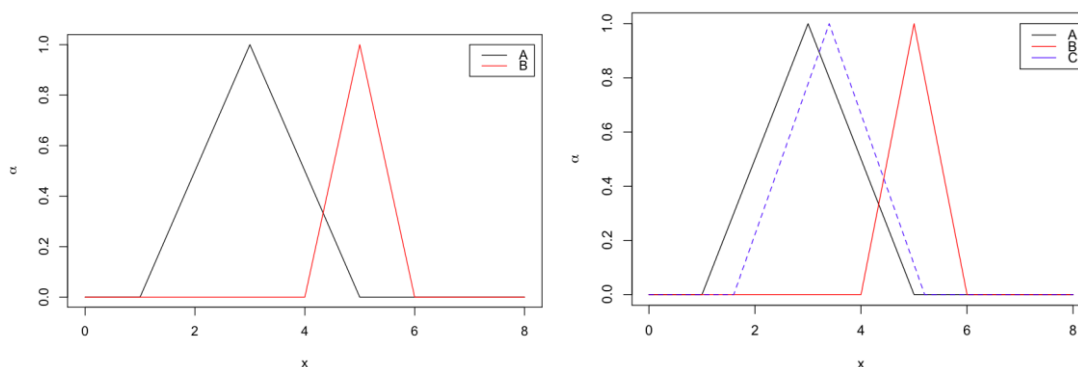
kde m predstavuje počet parciálnych cieľov, teda v našom prípade počet uvažovaných alternatív, $v_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m v_j = 1$, sú normované váhy priradené kritériám a U_j , $j = 1, 2, \dots, m$, je fuzzy hodnotenie uvažovanej alternatívy podľa stanovených kritérií.

Definícia 3.4 Majme n trojuholníkových fuzzy čísiel, každé z nich určené trojicou bodov (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) $j = 1, 2, \dots, n$. Potom hodnoty a_i, b_i, c_i , ktoré predstavujú x-ové súradnice agregovaného fuzzy čísla, respektíve hodnotenia i -tej alternatívy, určeného trojicou bodov (a_i, b_i, c_i) sú dané nasledovne:^[13]

$$a_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j, b_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j, c_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j.$$

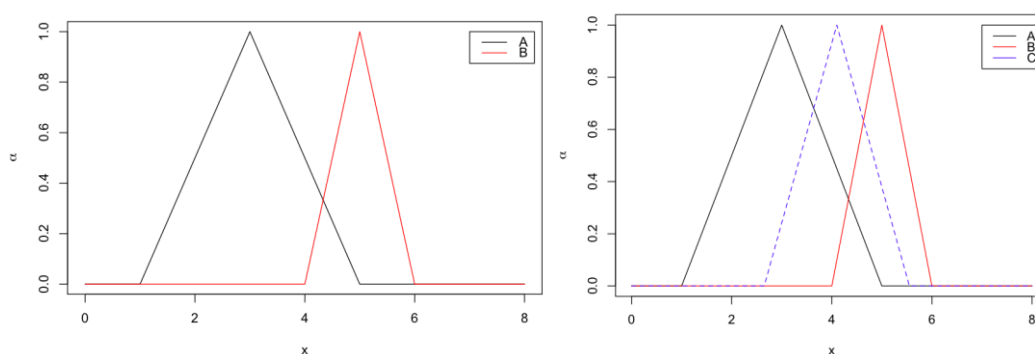
Pre lepšiu ilustráciu uvádzame príklady, na ktorých vidno vplyv váh na výslednú agregáciu fuzzy čísla. Uvedené príklady sú zobrazené na obrázku Obr.11.

Obr.11 Fuzzy číslo $A = (1,3,5)$, fuzzy číslo $B = (4,5,6)$, $w_A = 0.8$, $w_B = 0.2$ (vpravo). Fuzzy čísla A a B spolu s výsledným agregovaným fuzzy číslom $C = (1,6;3,4;5,2)$, (vpravo).



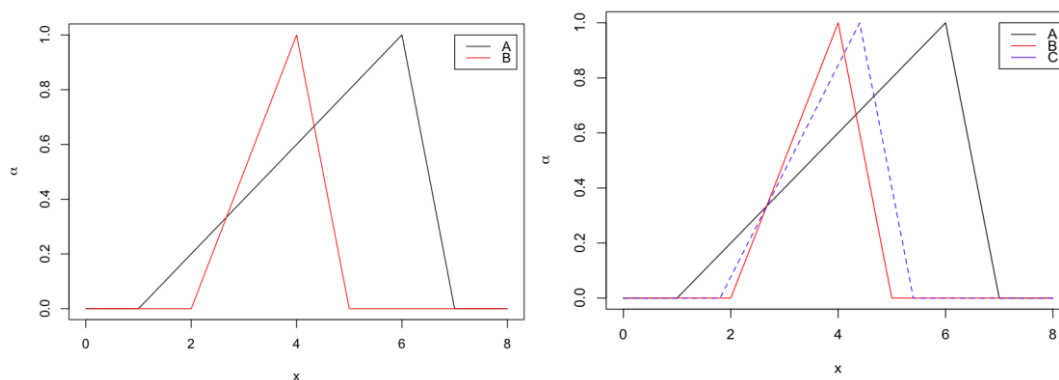
Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 12 Fuzzy číslo $A = (1,3,5)$, fuzzy číslo $B = (4,5,6)$, $w_A = 0.45$, $w_B = 0.55$. Fuzzy čísla A a B spolu s výsledným agregovaným fuzzy číslom $C = (2,65;4,1;5,55)$



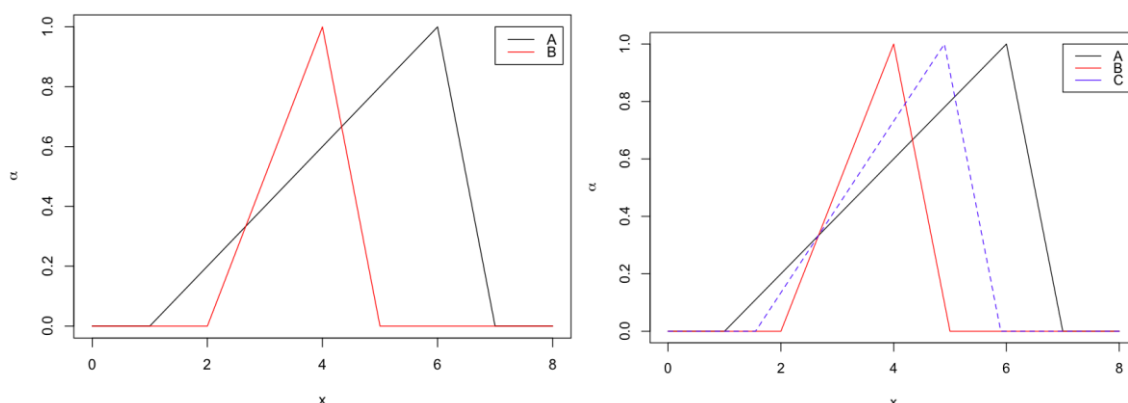
Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 13 Fuzzy číslo $A = (1,6,7)$, fuzzy číslo $B = (2,4,5)$, $w_A = 0.2$, $w_B = 0.8$. Fuzzy čísla A a B spolu s výsledným agregovaným fuzzy číslom $C = (1,8;4,4;5,5)$.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 14 Fuzzy číslo $A = (1,6,7)$, fuzzy číslo $B = (2,4,5)$, $w_A = 0.45$, $w_B = 0.55$. Fuzzy čísla A a B spolu s výsledným agregovaným fuzzy číslom $C = (1,55;4,9;5,9)$.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Ako vidno na uvedenom príklade, čím väčšia je hodnota váh pre jedno z fuzzy čísel A a B , tým viac sa výsledné, agregované fuzzy číslo C podobá a kopíruje tvar tohto fuzzy čísla.

3.3 Porovnanie fuzzy čísel

V tejto kapitole sú opísané tri vybrané metódy porovnania fuzzy čísel, ktorými sa budeme bližšie zaoberať a porovnávať ich.

Na účely tejto práce boli vybrané tri metódy porovnania fuzzy čísel – fuzzy max order, relácia preferencie medzi dvoma fuzzy číslami a číselné charakteristiky – Yagerov index, Wangov index a medián. Dôvody na výber práve týchto metód je snaha autora priblížiť základné metódy v tejto oblasti, ktoré sa stali neskôr inšpiráciou pre ďalšie metódy. Ďalším dôvodom je rôznorodosť týchto metód, keďže každá vychádza z iných predpokladov ako dve fuzzy čísla porovnávať. Ako ďalší dôvod možno uviesť aj fakt, že nebolo možné použiť metódy založené na porovnávaní vzdialeností od ideálnej varianty, nakoľko bola vybraná metóda váženého súčtu na výber kompromisnej varianty.

3.4.1 Usporiadanie fuzzy čísel podľa číselnej charakteristiky

Jeden zo spôsobov, ako porovnávať dve fuzzy čísla je pomocou číselnej charakteristiky, respektíve indexu porovnania (z anglického prekladu ranking index). Takáto číselná charakteristika reprezentuje fuzzy čísla reálnymi číselnými hodnotami, ktoré je možné jednoznačne porovnať.

Yager v roku 1980 navrhol nový spôsob porovnania dvoch fuzzy čísiel, ktorý sa stal základom novej vetvy porovnania fuzzy čísiel – centroidné metódy, ktoré sú dnes bežne využívané. Táto metóda sa nazýva Yagerov index a je základom pre desiatky ďalších centroidných metód, ktoré z nej vychádzajú.

Definícia 3.5 Yagerov index je definovaný nasledujúcim vzorcom^[17]

$$Y_A = \frac{\int_0^1 A(x)x dx}{\int_0^1 A(x) dx}.$$

Poznámka 3.1 V prípade normálnych fuzzy čísiel sa vypočítaná hodnota Y_A nazýva aj ťažiskom fuzzy čísla (z anglického Center of Gravity - COG), respektíve horizontálnou súradnicou ťažiska. Namiesto označenia Y_A sa v literatúre uvádza aj niekoľko ďalších označení, napríklad t_A .^[33]

Poznámka 3.2 V prípade lineárneho fuzzy čísla A , ktoré je určené štvoricou bodov $\langle a, b, c, d \rangle$ je možné výpočet ťažiska t_A fuzzy čísla A zjednodušiť nasledovne

$$Y_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + bc - cd}{b + c - a - d}.$$

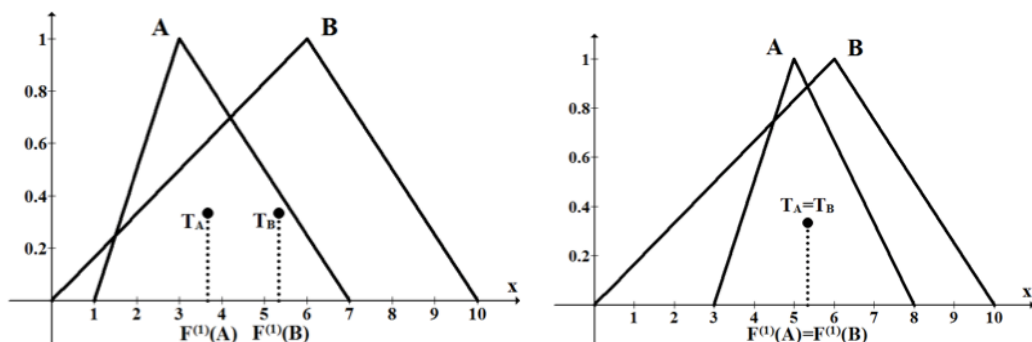
Dôkaz tohto tvrdenia je vidieť [33 s.20].

Poznámka 3.3 V prípade trojuholníkového fuzzy čísla, určeného pomocou trojice bodov (a,b,c) sa vzorec pre výpočet Yagerovho indexu, respektíve ťažiska zjednoduší na

$$t_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 - c^2 + bc - cd}{b - a}.$$

Definícia 3.6 Pri porovnaní fuzzy čísiel pomocou Yagerovho indexu, fuzzy číslo A je väčšie alebo rovné ako fuzzy číslo B , ak t_A je väčšie alebo rovné ako t_B , $A \geq_Y B$. Ak zároveň platí, že fuzzy číslo A nerovná sa fuzzy číslu B , tak fuzzy číslo A je väčšie ako fuzzy číslo B , značíme $A >_Y B$.

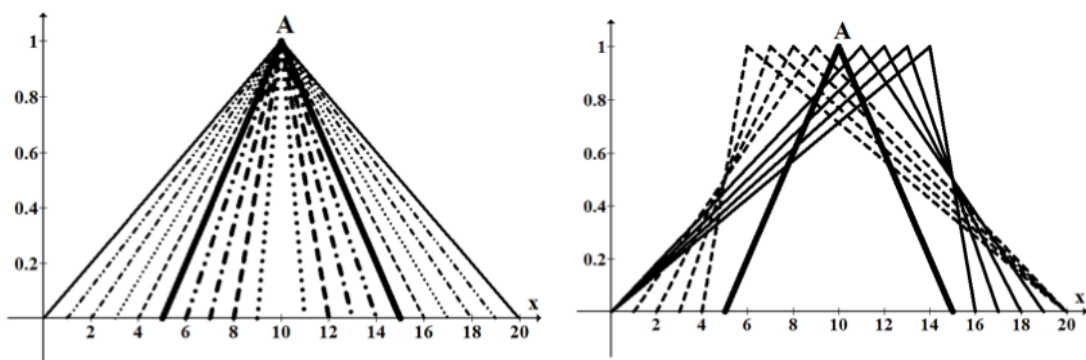
Obr.15 Porovnateľné (vľavo) a neporovnateľné (vpravo) fuzzy čísla pomocou Yagerovho indexu



Zdroj: [40]

Na Obr.15 vidno porovnanie dvoch fuzzy čísiel A a B pomocou Yagerovho indexu. Na obrázku vľavo je fuzzy číslo B vyhodnotené väčšie ako fuzzy číslo A. Na obrázku vpravo je zobrazená jedna z možných situácií, kedy nie je možné dvojicu fuzzy čísiel usporiadať pomocou Yagerovho indexu.

Obr.16 Neporovnateľné fuzzy čísla pomocou Yagerovho indexu



Zdroj: [40]

Definícia 3.7 Podľa Wanga a kolektívu, horizontálnu súradnicu ťažiska vypočítame podľa vzorca^[11]

$$\bar{x}_0 = \frac{\int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square + \int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square + \int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square x}{\int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square + \int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square + \int_{\square} \mu_{\square}(\square) \square x}$$

a vertikálnu súradnicu ťažiska podľa vzorca

$$\square_0 = \frac{\int_0^1 \square_{\square}(\square) \square + \int_0^1 \square_{\square}(\square) \square}{\int_0^1 \square_{\square}(\square) \square + \int_0^1 \square_{\square}(\square) \square}.$$

Poznámka 3.4 V prípade lineárneho fuzzy čísla A, ktoré je určené štvoricou bodov $\langle a, b, c, d \rangle$ je možné vzorec na výpočet tohto centroidného indexu zjednodušiť na^[18]

$$\square_0 = \frac{1}{3} \left[\square + \square + \square + \square - \frac{\square - \square}{(\square + \square) - (\square + \square)} \right]$$

$$\square_0 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\square - \square}{(\square + \square) - (\square + \square)} \right].$$

Poznámka 3.5 V prípade trojuholníkového fuzzy čísla A, definovaného pomocou trojice bodov $\langle a, b, c \rangle$, je vzorec na výpočet Wangovho indexu takýto

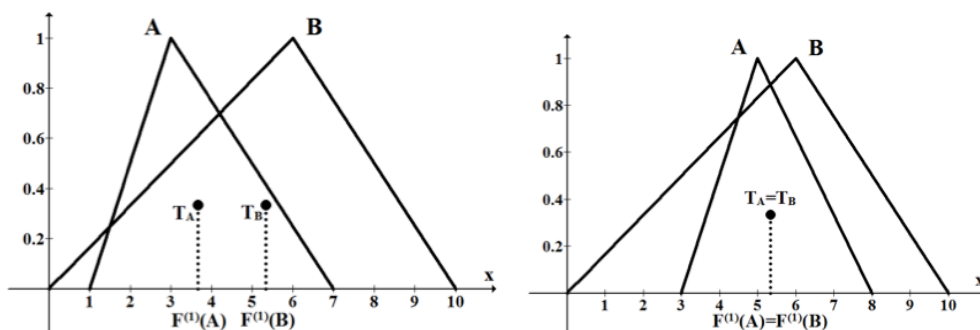
$$\square_0 = \frac{1}{3} [\square + \square + \square]$$

$$\square_0 = \frac{1}{3}$$

Poznámka 3.6 Nakoľko v prípade trojuholníkových fuzzy čísiel sú čísla porovnávané len na základe x-ovej súradnice, v ďalšom texte budeme používať označenie W_A na označenie tohto porovnávacieho indexu.

Definícia 3.8 Pri porovnaní fuzzy čísiel pomocou Wangovho indexu, fuzzy číslo A je väčšie alebo rovné ako fuzzy číslo B, ak $\square_A$ je väčšie alebo rovné ako $\square_B$, $A \geq B$. Ak zároveň platí, že fuzzy číslo A nerovná sa fuzzy číslu B, tak fuzzy číslo A je väčšie ako fuzzy číslo B, $A > B$.

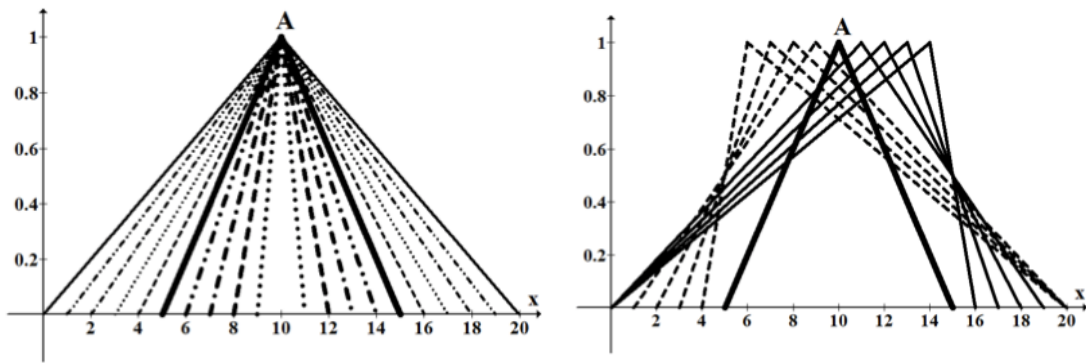
Obr.17 Porovnateľné (vľavo) a neporovnateľné (vpravo) fuzzy čísla pomocou Wangovho indexu



Zdroj: [40]

Na Obr.17 vidno porovnanie dvoch fuzzy čísiel A a B pomocou Wangovho indexu. Na obrázku vľavo je fuzzy číslo B vyhodnotené väčšie ako fuzzy číslo A. Na obrázku vpravo je zobrazená jedna z možných situácií, kedy nie je možné dvojicu fuzzy čísiel porovnať pomocou Wangovho indexu.

Obr.18 Neporovnateľné fuzzy čísla pomocou Yagerovho indexu



Zdroj: [40]

Definícia 3.9 Medián m_A fuzzy čísla A, ktoré je dané predpisom $A = \{[\underline{a}(\alpha), \bar{a}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0,1 \rangle\}$ je daný vzťahom^[21]

$$m_A = \int_0^1 \frac{\underline{a}(\alpha) + \bar{a}(\alpha)}{2} d\alpha.$$

Poznámka 3.8 Zjednodušenie výpočtu mediánu v prípade lineárnych fuzzy čísiel, kedy fuzzy číslo A je definované pomocou štvorice bodov $\langle a, b, c, d \rangle$ je možné pomocou nasledujúceho vzorca. Odvodenie viď [33 s.19].

$$m_A = \frac{a + b + c + d}{4}$$

Poznámka 3.9 V prípade trojuholníkového fuzzy čísla daného trojicou bodov $\langle a, b, c \rangle$ je vzorec na výpočet mediánu v tvare

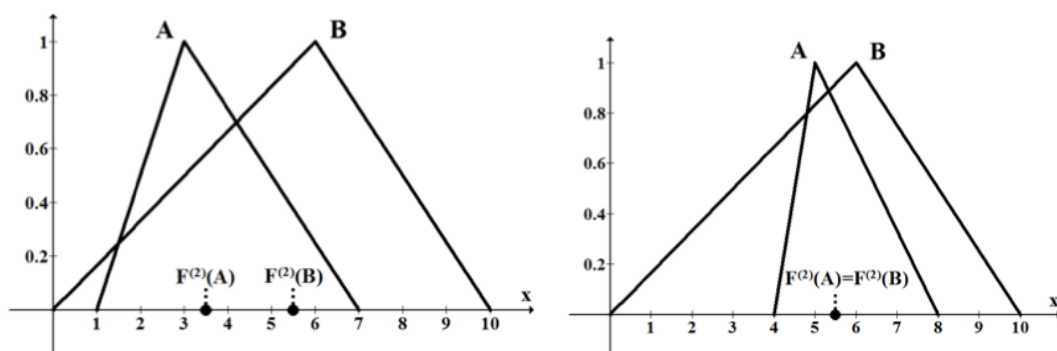
$$m_A = \frac{a + 2b + c}{4}.$$

Definícia 3.10 Tak ako aj v predošlých číselných charakteristikách, aj pri porovnaní fuzzy čísiel vzhľadom k ich mediánu, ak platí, že $m_A \geq m_B$ tak fuzzy číslo A je podľa mediánu

väčšie alebo rovné ako fuzzy číslo B, teda $A \geq_m B$. Ak zároveň platí, že fuzzy číslo A nerovná sa fuzzy číslu B, tak fuzzy číslo A je väčšie ako fuzzy číslo B, $A >_m B$.

Poznámka 3.10 V prípade použitia uvedených číselných charakteristík, teda Yagerovho indexu, Wangovho indexu alebo mediánu hovoríme o úplnej operácii usporiadania, teda všetky fuzzy čísla sú podľa uvedených číselných charakteristík usporiadateľné a teda porovnateľné. Je potrebné poznamenať, že ide o kváziusporiadanie, teda dve rôzne fuzzy čísla A a B môžu mať rovnaký Yagerov index, teda $Y_A = Y_B$ a pritom $A \neq B$. V takomto prípade platí, že $A \geq_Y B \wedge A \leq_Y B$.

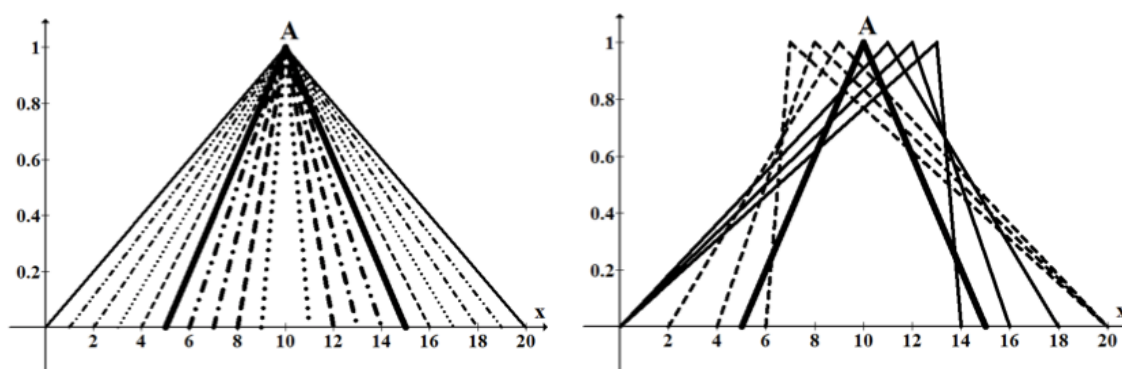
Obr.19 Porovnateľné (vľavo) a neporovnateľné (vpravo) fuzzy čísla mediánu



Zdroj: [40]

Na Obr.19 vidno porovnanie dvoch fuzzy čísiel A a B pomocou mediánu týchto fuzzy čísiel. Na obrázku vľavo je fuzzy číslo B vyhodnotené väčšie ako fuzzy číslo B. Na obrázku vpravo je zobrazená jedna z možných situácií, kedy nie je možné dvojicu fuzzy čísiel usporiadať pomocou mediánu.

Obr.20 Neporovnateľné fuzzy čísla pomocou mediánu



Zdroj: [40]

Na Obr.20 vidno všeobecné typy trojuholníkových fuzzy čísiel, ktoré sú považované za rovnaké pri porovnávaní pomocou mediánu.

3.4.2 Fuzzy max order

Medzi jednu z metód, ako porovnať dvojicu fuzzy čísiel patrí aj *Fuzzy Max Order*, ktorá vychádza z určenia maxima a minima dvoch fuzzy čísiel. Túto metódu predstavili Ramik a Raminek. [37 s.123-138]

Definícia 3.11 Nech A a B sú fuzzy čísla. Potom ich prienikom, teda infimom rozumieme fuzzy číslo $A \wedge B$, ktorého funkcia príslušnosti je definovaná takto^[11]

$$A \wedge B(z) = \sup\{\min\{A(x), B(x)\}; z = \min\{x, y\}, x, y \in R\}$$

Definícia 3.12 Nech A a B sú fuzzy čísla. Potom ich zjednotením, teda suprémom rozumieme fuzzy číslo $A \vee B$, ktorého funkcia príslušnosti je definovaná takto^[11]

$$A \vee B(z) = \sup\{\min\{A(x), B(x)\}; z = \max\{x, y\}, x, y \in R\}$$

Definícia 3.13 Nech A a B sú dve fuzzy čísla. Potom A je väčšie alebo rovné ako B , $A \geq B$, ak platí^[11]

$$A = A \vee B, \text{ respektíve } B = A \wedge B$$

Definícia 3.14 Nech A a B sú dve fuzzy čísla. Ak podľa def. 3.13 platí, že $A \geq B$, tak fuzzy číslo A je väčšie ako fuzzy číslo B , $A > B$, ak zároveň platí $A \neq B$.

Poznámka 3.15 Rovnosť medzi dvoma fuzzy číslami A a B je daná rovnosťou medzi ich funkciami príslušnosti.

Definícia 3.16 Fuzzy čísla A a B sú považované za neporovnateľné v takom prípade, $A \parallel B$, ak nenastane žiadna z nasledujúcich situácií^[12]

$$A > B, \quad A < B, \quad A = B.$$

Iný spôsob, ako sa pozeráť na metódu *fuzzy max order* je porovnanie fuzzy čísiel využitím α -rezov, ktorá vychádza z definovania relácie usporiadania na množine uzavrených intervalov.

Definícia 3.17 Uzavretý interval $\langle a, b \rangle$ je väčší alebo rovný ako uzavretý interval $\langle c, d \rangle$ vtedy, keď platí, že $a \geq c \wedge b \geq d$, značíme ako $\langle a, b \rangle \geq \langle c, d \rangle$. Ak navyše platí, že $\langle a, b \rangle \neq \langle c, d \rangle$, tak interval $\langle a, b \rangle$ je väčší ako interval $\langle c, d \rangle$, značenie symbolom $>$.^[12]

Poznámka 3.11 Takáto relácia porovnania definovaná na množine všetkých uzavretých intervalov je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, nespĺňa však podmienku úplnosti, pretože nie všetky uzavreté intervaly sú touto metódou porovnateľné – ide teda o čiastočné usporiadanie. V prípade, že pre dva intervaly $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$ platí, že $a \geq c$ a zároveň, že $b \leq d$, neplatí ani $\langle c, d \rangle \geq \langle a, b \rangle$ a ani $\langle a, b \rangle \geq \langle c, d \rangle$ a teda dané intervaly nevieme vzájomne porovnať a určiť, ktorý z nich je väčší.

Na základe definície uvedenej v predošlom odstavci a faktu, že α -rezy fuzzy čísiel sú uzavreté intervaly, je možné definovať reláciu usporiadania $\geq$ aj na množine všetkých fuzzy čísiel.

Definícia 3.18 Majme definované dve fuzzy čísla A a B , potom fuzzy číslo A je podľa α -rezov menšie alebo rovné ako fuzzy číslo B ; $A \leq_{\alpha} B$ ak platí

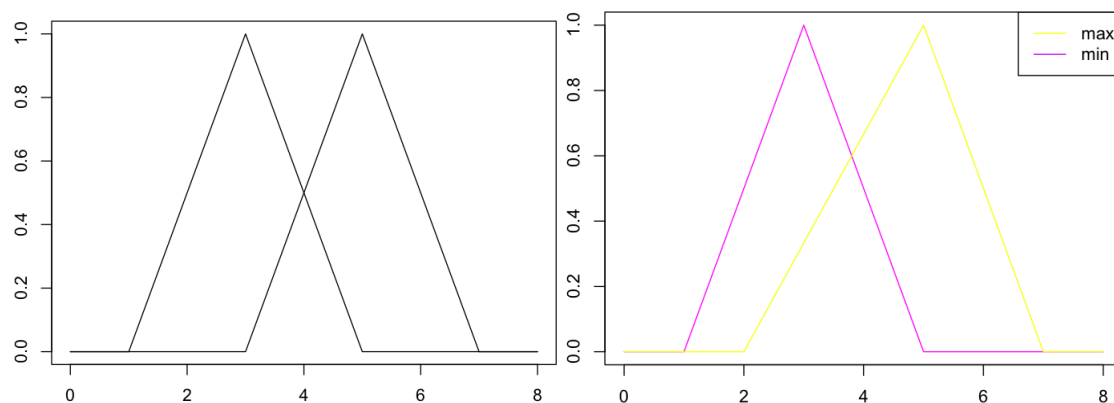
$$\text{pre všetky } \alpha \in (0, 1) : A_{\alpha} \leq B_{\alpha}.$$

Tak ako v prípade uzavretých intervalov, aj v prípade fuzzy čísiel platí, že ak navyše $A \neq B$, tak fuzzy číslo A je podľa α -rezov menšie ako fuzzy číslo B , teda $A <_{\alpha} B$.^[16]

Poznámka 3.12 V prípade reprezentovania fuzzy čísiel pomocou dvojice funkcií $A = \{[\underline{a}(\alpha), \bar{a}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ a $B = \{[\underline{b}(\alpha), \bar{b}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ potom je fuzzy číslo A väčšie rovné ako fuzzy číslo B , teda $A \geq_{\alpha} B$ vtedy, keď pre každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

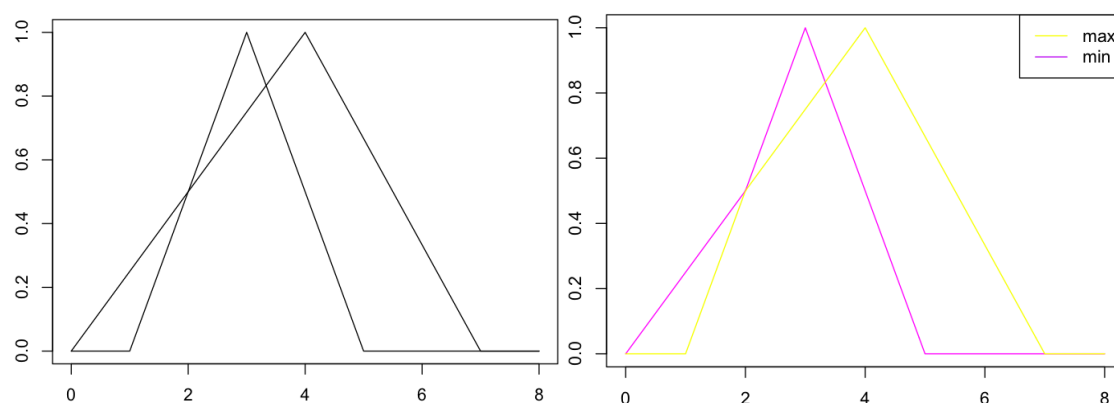
$$\underline{a}(\alpha) \geq \underline{b}(\alpha) \wedge \bar{a}(\alpha) \geq \bar{b}(\alpha).$$

Obr.21 Porovnateľné fuzzy čísla podľa metódy fuzzy max order, zobrazenie maxima a minima



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 22 Neporovnateľné fuzzy čísla podľa metódy fuzzy max order, zobrazenie maxima a minima



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Poznámka 3.13 Na obrázkoch Obr.21 a Obr.22 sú uvedené príklady, kedy sú dve fuzzy čísla zrovnateľné, respektíve nezrovnateľné. Táto vlastnosť vychádza z toho, že takto definovaná relácia porovnania dvoch fuzzy čísel je len čiastočná, teda je antisymetrická, tranzitívna a reflexívna, ale nie je úplná. Fuzzy čísla $A = \{[\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0,1 \rangle\}$ a $B = \{[\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)]; \alpha \in \langle 0,1 \rangle\}$ sú podľa α -rezov neporovnateľné, ak existuje také $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$, pre ktoré by platilo $\underline{a}(\alpha) \geq \underline{b}(\alpha) \wedge \overline{a}(\alpha) \leq \overline{b}(\alpha)$. Potom neplatí ani $A_\alpha \leq B_\alpha$ a ani $A_\alpha \geq B_\alpha$.

3.4.3 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami

Jednou z možností, ako usporiadať fuzzy čísla je pomocou definovania fuzzy relácií $\succeq, >, \sim$ na množine všetkých fuzzy čísel $\mathcal{F}_N(R)$. Pomocou týchto fuzzy relácií je možné vyjadriť stupeň ostrej alebo neostrej preferencie medzi fuzzy číslami.^[33]

Definícia 3.19 Fuzzy relácie $\succeq, >, \sim$ na množine fuzzy čísel sú definované nasledovne:^[33]

- $\succeq$ (väčšie alebo porovnateľné). Stupeň príslušnosti $A \succeq B$ značí mieru možnosti, že fuzzy číslo A je väčšie alebo porovnateľné s fuzzy číslom B .
- $>$ (väčšie). Stupeň príslušnosti $A > B$ značí mieru možnosti, že fuzzy číslo A je väčšie ako fuzzy číslo B .
- $\sim$ (porovnateľné). Stupeň príslušnosti $A \sim B$ značí mieru možnosti, že fuzzy číslo A je porovnateľné s fuzzy číslom B .

Definícia 3.20 Nech A a B sú dve fuzzy čísla, potom A je väčšie alebo porovnateľné s B so stupňom preferencie^[33]

$$A \succeq B = \sup\{\min\{A(x), B(x)\} ; x \geq y, x, y \in R\}$$

Poznámka 3.14 V prípade fuzzy relácie $\succeq$ platí, že je zjednotením fuzzy relácií $>$ a $\sim$, v praxi teda stačí popísať vzťah medzi fuzzy číslami A a B .

Poznámka 3.15 Pre fuzzy čísla A a B vždy platí, že $(A > B) \vee (B > A) = 1$, pričom obidva prípady môžu nastať aj súčasne.

Definícia 3.21 A je väčšie ako B so stupňom preferencie^[16]

$$A > B = \sup\{\min\{A(x), B(x)\} ; x \geq y, x, y \in R\}$$

Poznámka 3.16 Fuzzy relácia $>$ je na množine $\mathcal{F}_N(R)$ úplná, teda je možné ňou porovnať všetky fuzzy čísla. Nie je symetrická, pretože $A > B$ a $B > A$ môžu dať rôzny výsledok, nie je reflexívna, pretože existuje také fuzzy číslo A také, že $A > A \neq 1$, nie je ani antisymetrická, nakoľko z $A > B$ a $B > A$ nevyplýva, že fuzzy čísla A a B sú rovnaké. Taktiež nie je tranzitívna, pretože nemusí platiť $(A > B) \geq \min\{A > B, B > C\}$.^[13]

Definícia 3.22 A je porovnateľné s B so stupňom preferencie^[16]

$$A \sim B = \sup\{\min\{A(x), B(x)\}; x \in R\}$$

Poznámka 3.17 Na množine všetkých fuzzy čísiel $\mathcal{F}_N(R)$ je relácia $\sim$ reflexívna a symetrická. Zároveň táto relácia nie je tranzitívna, pretože neplatí vzťah $A \sim C \geq \min\{A \sim B, B \sim C\}$, nie je úplná, pretože nemusí platiť pre všetky fuzzy čísla A a B vzťah $(A \sim B > 0) \vee (B \sim A > 0)$ a ani antisymetrická, pretože z $A \sim B = B \sim A$ nevyplýva, že $A = B$.

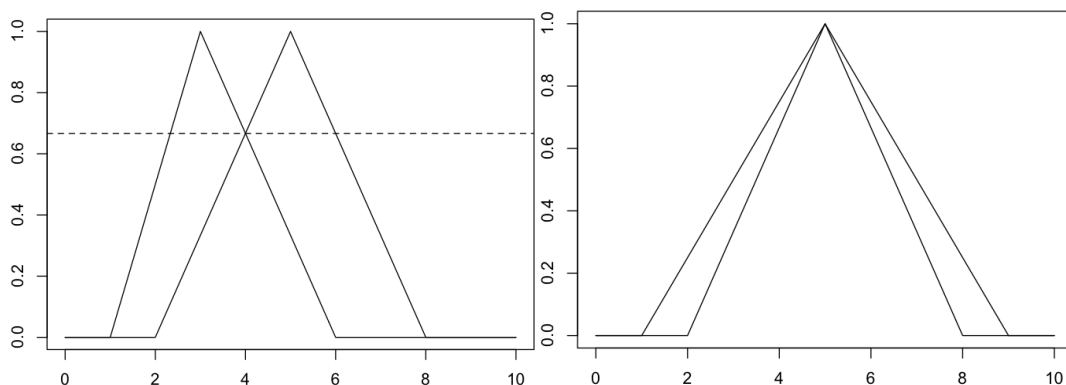
Poznámka 3.18 Z uvedených vlastností fuzzy relácií $>$ a $\sim$ a z faktu, že fuzzy relácia $\geq$ je ich zjednotením vyplýva, že $\geq$ je reflexívna a úplná. Takto definované fuzzy relácie nie sú ani fuzzy ekvivalenciou a ani fuzzy usporiadaním, keďže nespĺňajú podmienku tranzitivity a relácie $\geq$ a $>$ nie sú ani symetrické. Preto je potrebné definovať takú fuzzy reláciu, ktorá by všetky tieto podmienky spĺňala a zároveň by vychádzala z uvedených fuzzy relácií.

Definícia 3.23 Nech A a B sú dve fuzzy čísla. Potom povieme, že A je väčšie alebo rovné ako B na základe fuzzy relácie $\geq$, teda $A \geq B$ v takom prípade, ak platí^[33]

$$(A \geq B - B \geq A) \geq 0.$$

V prípade platnosti ostrej nerovnosti je fuzzy číslo A väčšie ako fuzzy číslo B na základe fuzzy relácie $\geq$. Takto definovaná relácia spĺňa podmienky reflexivity, tranzitivity aj úplnosti, dôkaz vid' [33 s.29] a teda ide o kváziusporiadanie fuzzy čísiel.

Obr.23 Porovnateľné (vľavo) a neporovnateľné(vpravo) fuzzy čísla pomocou stanovenej relácie preferencie



Zdroj: [vlastné spracovanie]

3.5 Vzorový príklad: metóda váženého súčtu

Spomenuté fuzzy metódy prezentujeme na komplexnom príklade, na základe ktorého budú následne porovnané jednotlivé metódy a ich vplyv na výber kompromisnej varianty. V tomto príklade uvažujeme o využití metódy váženého súčtu na výpočet normovaných fuzzy hodnotení jednotlivých alternatív podľa zvolených kritérií.

Zadanie príkladu:

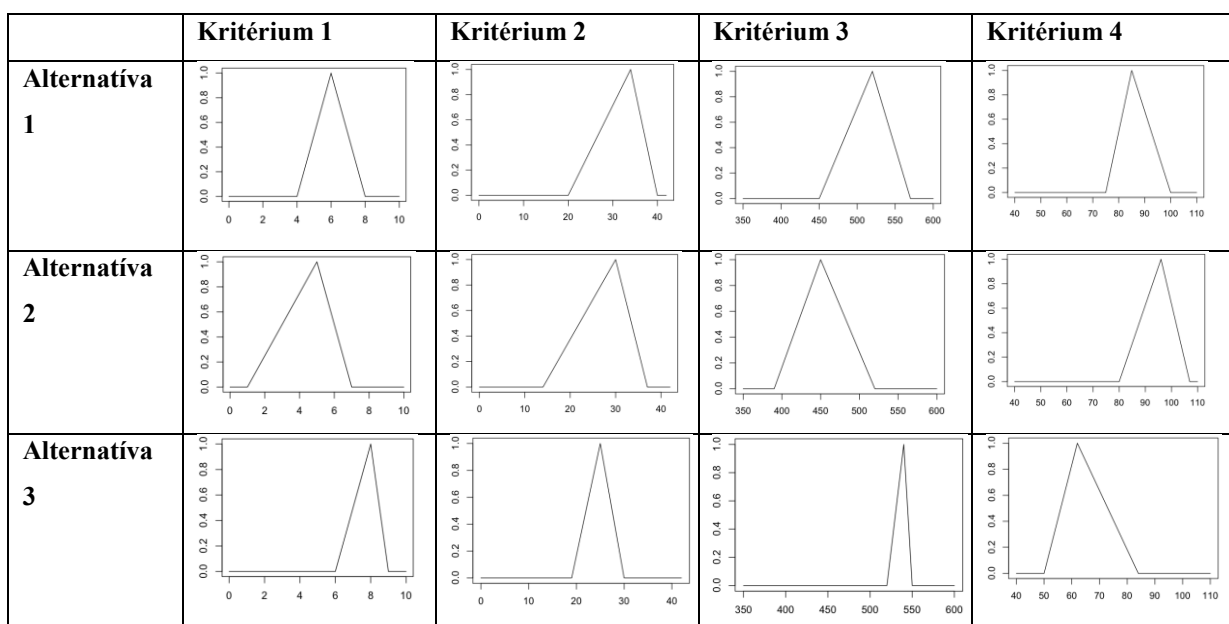
Majme rozhodovaciu situáciu, kedy uvažujeme o štyroch možných alternatívach, ktoré sú hodnotené podľa štyroch kritérií s rôznymi váhami. Fuzzy hodnotenie jednotlivých alternatív podľa daných kritérií je uvedené v *Tab.1*, kde sú jednotlivé trojuholníkové fuzzy čísla uvedené v tvare $A = (a,b,c)$ a následne sú tieto fuzzy hodnotenia zobrazené v *Tab. 2*.

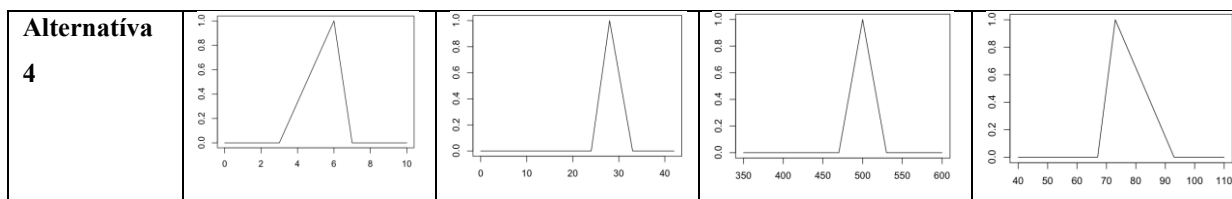
Tab.1 Fuzzy hodnotenia alternatív podľa zvolených kritérií

Váhy	$v_1 = 0.10$	$v_2 = 0.45$	$v_3 = 0.25$	$v_4 = 0.20$
	Kritérium 1	Kritérium 2	Kritérium 3	Kritérium 4
Alternatíva 1	$A_1 = (4,6,8)$	$B_1 = (20,34,40)$	$C_1 = (450,520,570)$	$D_1 = (75,85,100)$
Alternatíva 2	$A_2 = (1,5,7)$	$B_2 = (14,30,37)$	$C_2 = (390,450,520)$	$D_2 = (80,96,107)$
Alternatíva 3	$A_3 = (6,8,9)$	$B_3 = (19,25,30)$	$C_3 = (520,540,550)$	$D_3 = (50,62,84)$
Alternatíva 4	$A_4 = (3,6,7)$	$B_4 = (24,28,33)$	$C_4 = (470,500,530)$	$D_4 = (67,73,93)$

Zdroj [vlastné spracovanie]

Tab.2 Grafické zobrazenie fuzzy hodnotení





Všetky fuzzy čísla pre dané kritérium sú zobrazované na rovnakej x-ovej osi, aby bolo vidno reálne rozdiely medzi nimi.

Na obrázku *Obr. 23* vľavo sú zobrazené jednotlivé hodnotenia podľa kritéria 1, ktoré je potrebné znormovať. Vďaka zobrazeniu na jednej súradnicovej sústave vieme určiť maximálnu a minimálnu hodnotu na intervale $\langle A, B \rangle$, na ktorom sú zobrazené fuzzy čísla definované. Hodnota x_1^{min} , teda minimum podľa hodnotenia kritéria 1, je $x_j^{min} = 1$, a maximum $x_1^{max} = 9$.

Po dosadení hodnôt pre fuzzy číslo A_1 , teda hodnotenia prvej alternatívy podľa prvého kritéria do vzorca

$$\mu_{A_1}(x) = \frac{\mu_{A_1}(x) - \mu_{A_1}(x_1^{min})}{\mu_{A_1}(x_1^{max}) - \mu_{A_1}(x_1^{min})}$$

dostávame rovnice

$$\mu_1 = \frac{4 - 1}{9 - 1} = \frac{3}{8}, \quad \mu_2 = \frac{6 - 1}{9 - 1} = \frac{5}{8}, \quad \mu_3 = \frac{8 - 1}{9 - 1} = \frac{7}{8}$$

a výsledné, normované fuzzy číslo $A_1 = (3/8, 5/8, 7/8)$.

Pre fuzzy číslo A_2 rovnice na výpočet normovaných hodnôt vyzerajú takto:

$$\mu_1 = \frac{1 - 1}{9 - 1} = 0, \quad \mu_2 = \frac{5 - 1}{9 - 1} = \frac{4}{8}, \quad \mu_3 = \frac{7 - 1}{9 - 1} = \frac{6}{8}$$

a normované fuzzy číslo $A_2 = (0, 4/8, 6/8)$.

Fuzzy číslo A_3 znormujeme nasledovne

$$\mu_1 = \frac{6 - 1}{9 - 1} = \frac{5}{8}, \quad \mu_2 = \frac{8 - 1}{9 - 1} = \frac{7}{8}, \quad \mu_3 = \frac{9 - 1}{9 - 1} = 1$$

a výsledné, normované fuzzy číslo $A_3 = (5/8, 7/8, 1)$.

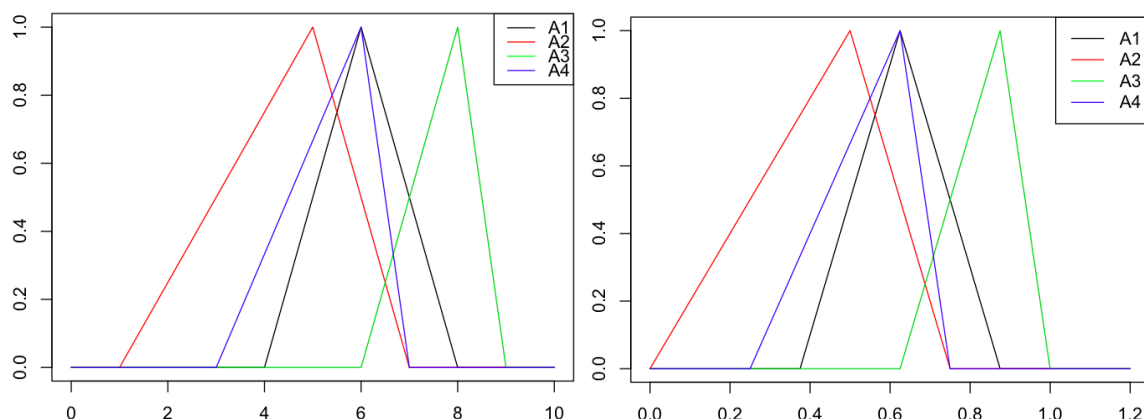
A nakoniec, fuzzy číslo A_4 po normovaní

$$\mu_1 = \frac{3 - 1}{9 - 1} = \frac{2}{8}, \quad \mu_2 = \frac{6 - 1}{9 - 1} = \frac{5}{8}, \quad \mu_3 = \frac{7 - 1}{9 - 1} = \frac{6}{8}$$

má tvar $A_3 = (2/8, 5/8, 6/8)$.

Na obrázku *Obr. 23* vpravo sú zobrazené normované fuzzy čísla A_1, A_2, A_3, A_4 . Ako vidno pri porovnaní s nenormovanými fuzzy číslami, normalizácia zachovala tvar aj poradie fuzzy čísel na číselnej osi.

Obr. 24 Hodnotenie alternatív podľa prvého kritéria, normované hodnoty



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Analogicky sme znormovali fuzzy hodnotenie podľa ostatných kritérií. V tabuľke *Tab.3* uvádzame číselné vyjadrenie znormovaných fuzzy čísel.

Tab.3 Normované fuzzy hodnotenia

Váhy	$v_1 = 0.10$	$v_2 = 0.45$	$v_3 = 0.25$	$v_4 = 0.20$
Alt/Kritérium	Kritérium 1	Kritérium 2	Kritérium 3	Kritérium 4
Alternatíva 1	$A_1 = (3/8, 5/8, 7/8)$	$B_1 = (6/26, 20/26, 1)$	$C_1 = (6/18, 13/18, 1)$	$D_1 = (25/57, 35/57, 50/57)$
Alternatíva 2	$A_2 = (0, 4/8, 6/8)$	$B_2 = (0, 16/26, 23/26)$	$C_2 = (0, 6/18, 13/18)$	$D_2 = (30/57, 46/57, 1)$
Alternatíva 3	$A_3 = (5/8, 7/8, 1)$	$B_3 = (5/26, 11/26, 16/26)$	$C_3 = (13/18, 15/18, 16/18)$	$D_3 = (0, 12/57, 34/57)$
Alternatíva 4	$A_4 = (2/8, 5/8, 6/8)$	$B_4 = (10/26, 14/26, 19/26)$	$C_4 = (8/18, 11/18, 14/18)$	$D_4 = (17/57, 23/57, 43/57)$

Zdroj: [vlastné spracovanie]

Po znormovaní jednotlivých hodnotení je potrebné tieto hodnotenia agregovať do výsledného hodnotenia alternatívy. Agregovanie pomocou váženého súčtu je definované pomocou vzorcov

$$a_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j, b_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j, c_i = \sum_{j=1}^n \square_{ij} v_j.$$

V prípade prvej alternatívy, ktorej čiastkové hodnotenia sú prezentované štvoricou fuzzy čísiel $A_1 = (3/8, 5/8, 7/8)$, $B_1 = (6/26, 20/26, 1)$, $C_1 = (6/18, 13/18, 1)$, $D_1 = (25/57, 35/57, 50/57)$ vyzerá agregácia takto:

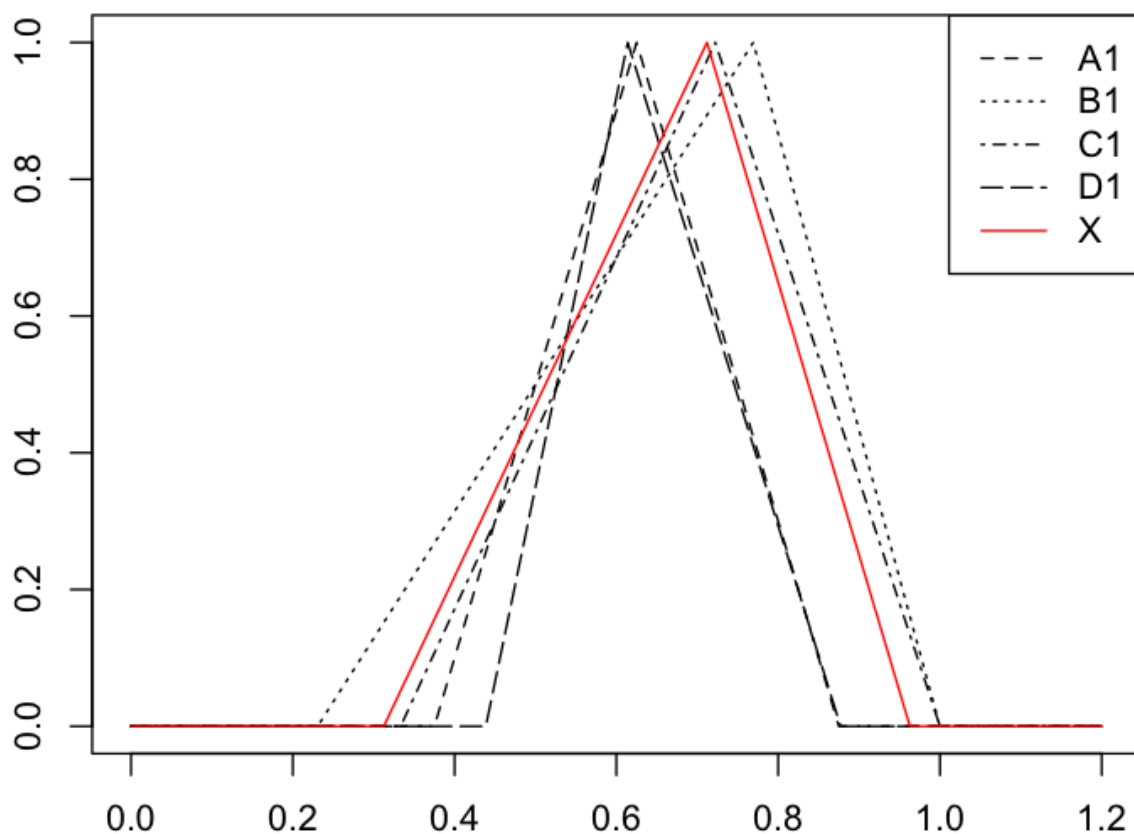
$$\square_1 = \frac{3}{8} \cdot 0,10 + \frac{6}{26} \cdot 0,45 + \frac{6}{18} \cdot 0,25 + \frac{25}{57} \cdot 0,20 = 0,3124$$

$$\square_2 = \frac{5}{8} \cdot 0,10 + \frac{20}{26} \cdot 0,45 + \frac{13}{18} \cdot 0,25 + \frac{35}{57} \cdot 0,20 = 0,7120$$

$$\square_3 = \frac{7}{8} \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,25 + \frac{50}{57} \cdot 0,20 = 0,9629$$

a agregované fuzzy číslo $X = (0,3124; 0,7120; 0,9629)$. Na obrázku Obr.24 sú zobrazené fuzzy čísla A_1 , B_1 , C_1 a D_1 spolu s výsledným agregovaným fuzzy číslom X .

Obr.25 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení prvej alternatívy



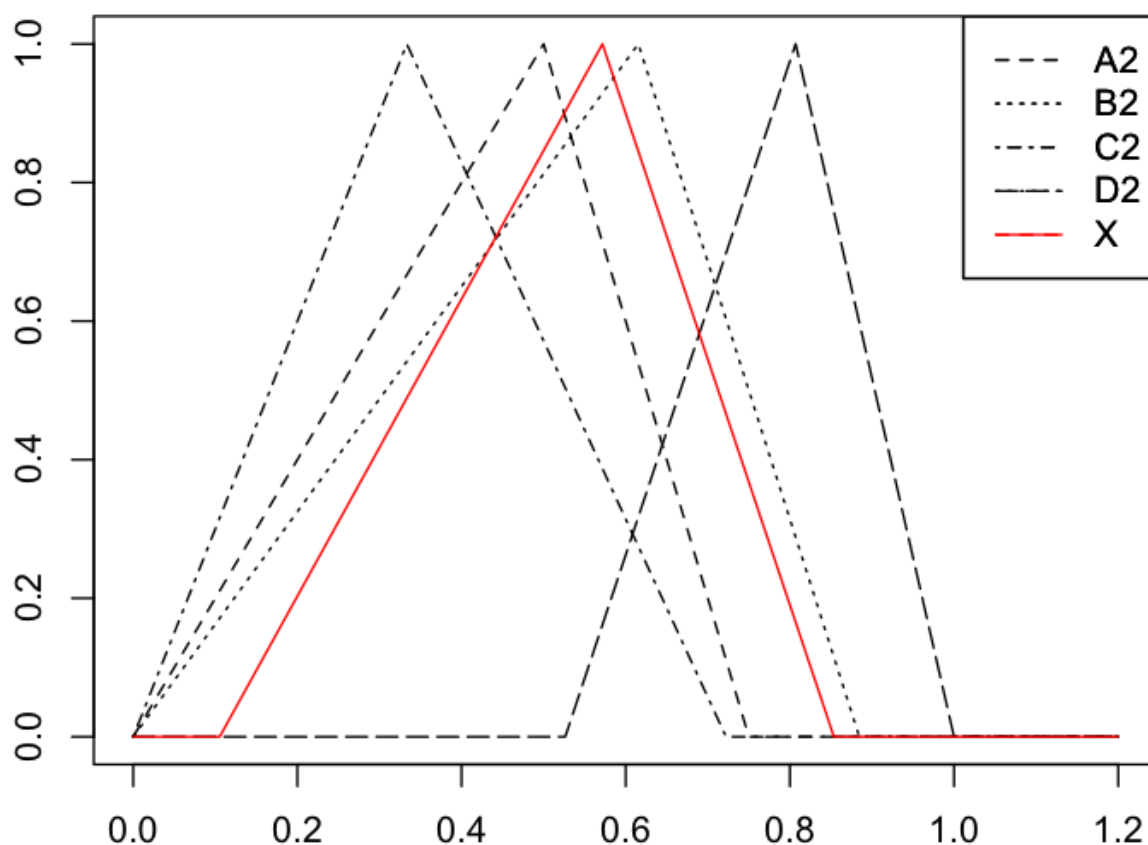
Zdroj: [vlastné spracovanie]

Agregáciu druhej alternatívy, ktorá je podľa jednotlivých kritérií ohodnotená takýmito fuzzy číslami $A_2 = (0,4/8, 6/8)$, $B_2 = (0,16/26, 23/26)$, $C_2 = (0,6/18, 13/18)$, $D_2 = (30/57, 46/57, 1)$ vypočítame takto:

$$\begin{aligned}\square_1 &= 0,0,10 + 0,0,45 + 0,0,25 + \frac{30}{57} \cdot 0,20 = 0,1053 \\ \square_2 &= \frac{4}{8} \cdot 0,10 + \frac{16}{26} \cdot 0,45 + \frac{6}{18} \cdot 0,25 + \frac{46}{57} \cdot 0,20 = 0,5717 \\ \square_3 &= \frac{6}{8} \cdot 0,10 + \frac{23}{26} \cdot 0,45 + \frac{13}{18} \cdot 0,25 + 1,0,20 = 0,8537\end{aligned}$$

Výsledkom je agregované fuzzy číslo $Y = (0,1053; 0,5717; 0,8537)$, ktoré zodpovedá celkovému hodnoteniu druhej alternatívy. Fuzzy čísla A_2 , B_2 , C_2 a D_2 spolu s agregovaným fuzzy číslom Y sú zobrazené na obrázku *Obr.25*.

Obr.26 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení druhej alternatívy



Zdroj: [vlastné spracovanie]

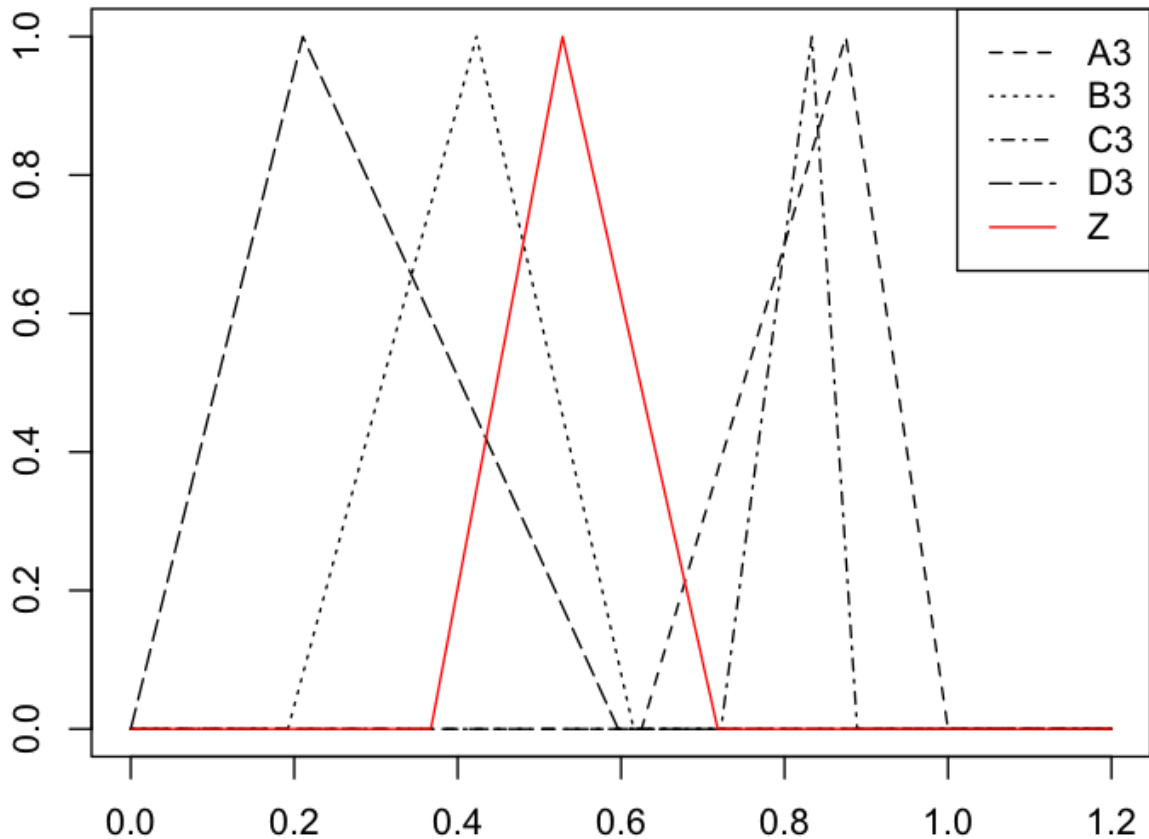
Tretia alternatíva, ktorá bola ohodnotená fuzzy číslami $A_3 = (5/8, 7/8, 1)$, $B_3 = (5/26, 11/26, 16/26)$, $C_3 = (13/18, 15/18, 16/18)$, $D_3 = (0, 12/57, 34/57)$ je agregovaná takto:

$$\begin{aligned}\square_1 &= \frac{5}{8} \cdot 0,10 + \frac{5}{26} \cdot 0,45 + \frac{13}{18} \cdot 0,25 + 0,0,20 = 0,3671 \\ \square_2 &= \frac{7}{8} \cdot 0,10 + \frac{11}{26} \cdot 0,45 + \frac{15}{18} \cdot 0,25 + \frac{12}{57} \cdot 0,20 = 0,5283\end{aligned}$$

$$\square_3 = 1.0,10 + \frac{16}{26} \cdot 0,45 + \frac{16}{18} \cdot 0,25 + \frac{34}{57} \cdot 0,20 = 0,7184$$

Celkové hodnotenie tejto alternatívy je agregované fuzzy číslo $Z = (0,3671; 0,5283; 0,7184)$, ktoré je spolu s čiastkovými hodnoteniami zobrazené na obrázku Obr. 26.

Obr.27 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení tretej alternatívy



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Poslednou, štvrtou alternatívou ohodnotenou fuzzy číslami A_4 , B_4 , C_4 a D_4 takto; $A_4 = (2/8, 5/8, 6/8)$, $B_4 = (10/26, 14/26, 19/26)$, $C_4 = (8/18, 11/18, 14/18)$, $D_4 = (17/57, 23/57, 43/57)$ agregujeme analogicky ako pri predošlých alternatívach:

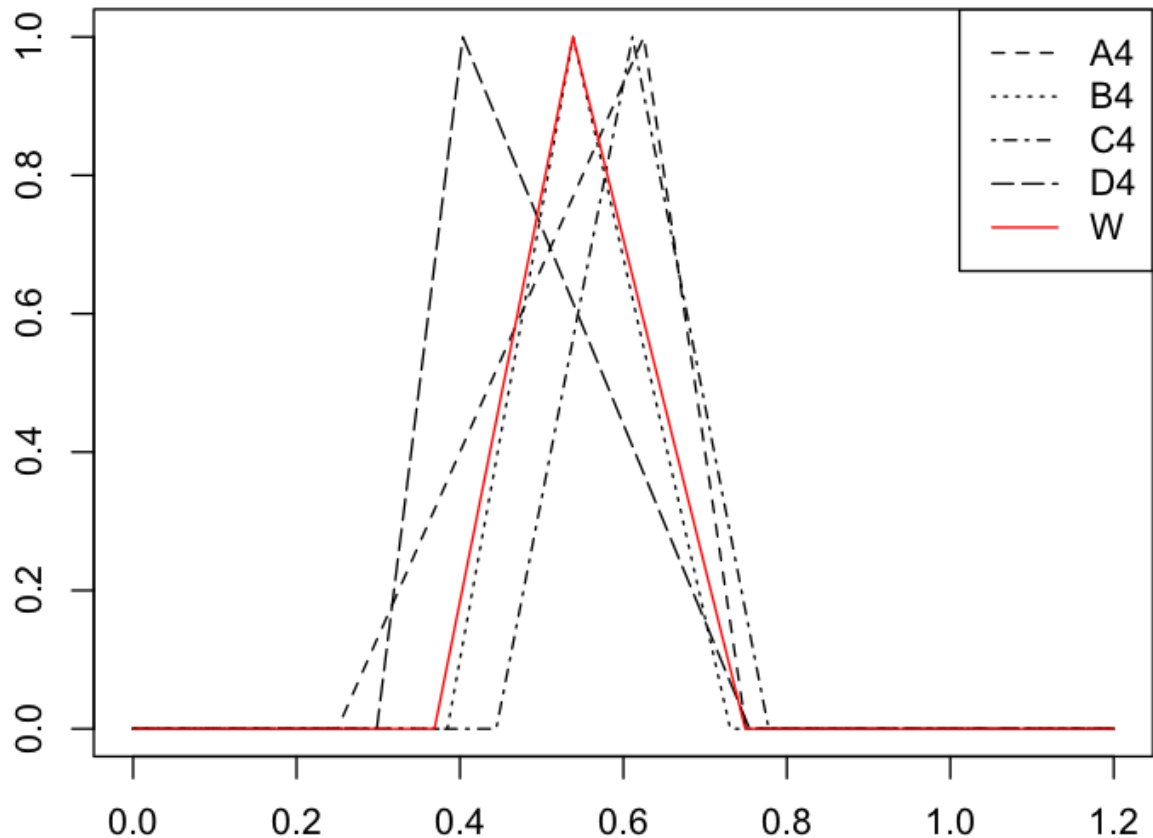
$$\square_1 = \frac{2}{8} \cdot 0,10 + \frac{10}{26} \cdot 0,45 + \frac{8}{18} \cdot 0,25 + \frac{17}{57} \cdot 0,20 = 0,3688$$

$$\square_2 = \frac{5}{8} \cdot 0,10 + \frac{14}{26} \cdot 0,45 + \frac{11}{18} \cdot 0,25 + \frac{23}{57} \cdot 0,20 = 0,5383$$

$$\square_3 = \frac{6}{8} \cdot 0,10 + \frac{19}{26} \cdot 0,45 + \frac{14}{18} \cdot 0,25 + \frac{43}{57} \cdot 0,20 = 0,7492$$

Agregáciou tejto štvorice čiastkových fuzzy hodnotení sme dostali fuzzy číslo $W = (0,3688; 0,5383; 0,7492)$. Porovnanie výsledného agregovaného fuzzy čísla s čiastkovými hodnoteniami možno vidieť na obrázku *Obr. 25*.

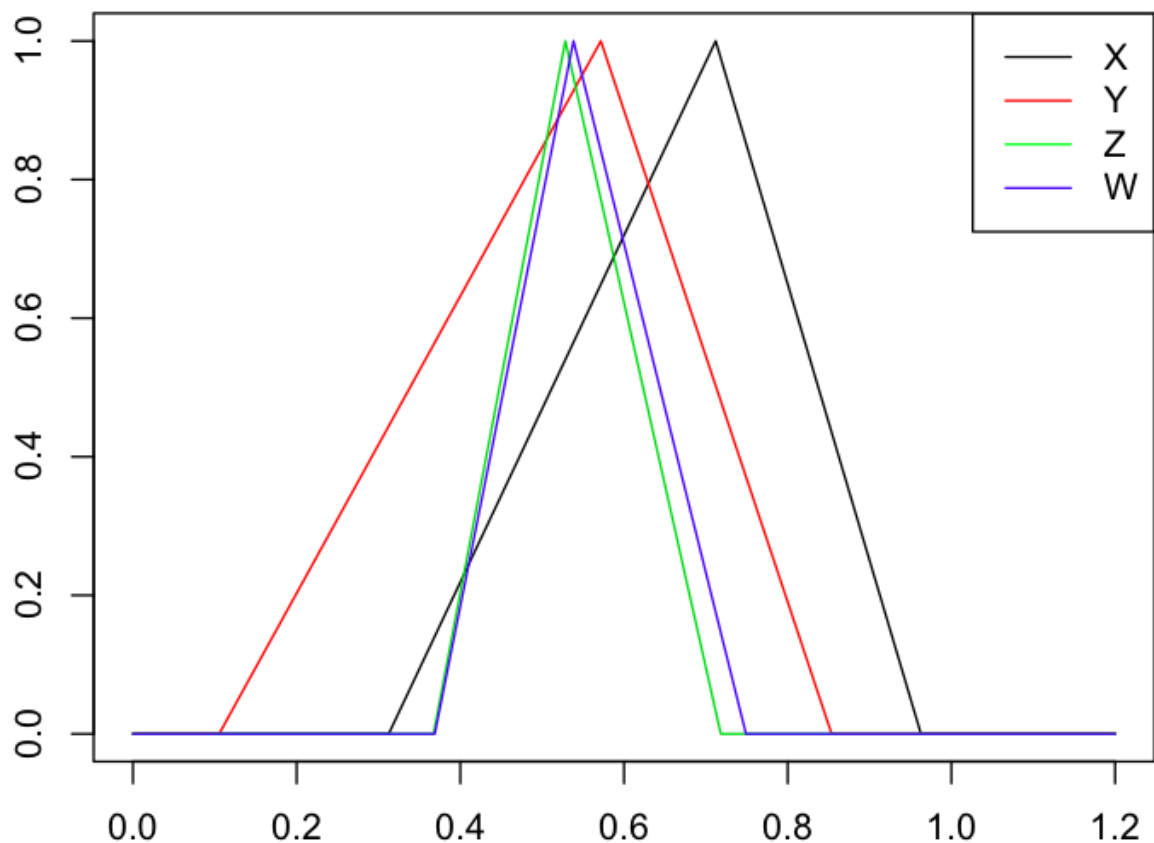
Obr.28 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení štvrtej alternatívy



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Po agregácii fuzzy hodnotení všetkých štyroch uvažovaných alternatív uvádzame obrázok *Obr.29*, ktorý zobrazuje jednotlivé agregované hodnotenia vedľa seba na jednom grafe. Alternatíva 1 je zobrazená fuzzy číslom X, alternatíva 2 fuzzy číslom Y, tretia alternatíva fuzzy číslom Z a fuzzy číslo W zobrazuje hodnotenie poslednej, štvrtej alternatívy.

Obr.29 Celkové fuzzy hodnotenia jednotlivých alternatív



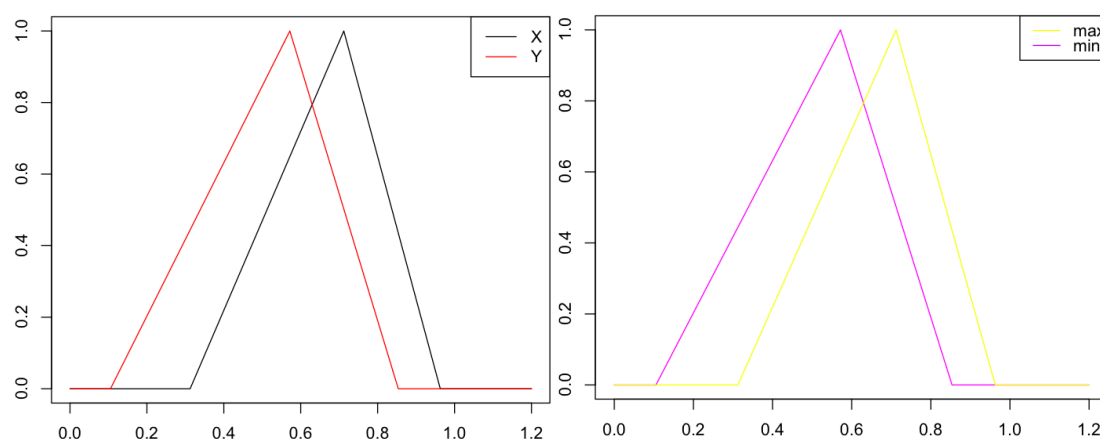
Zdroj: [vlastné spracovanie]

Na výber kompromisnej varianty z danej množiny uvažovaných variant potrebujeme zistiť, ktoré fuzzy číslo z čísiel X,Y,Z alebo W je najväčšie. Toto porovnanie je uvedené v nasledujúcich troch kapitolách rozdelených podľa spôsobu, akým je toto porovnanie definované.

3.5.1 Porovnanie fuzzy čísiel využitím metódy fuzzy max order

Pri využití metódy fuzzy max order je nutné porovnať každú dvojicu čísel. Ako bolo uvedené v kapitole 3.4.3, táto metóda je tranzitívna, takže napríklad, ak platí že $X > Y$ a zároveň $Y > Z$, tak platí aj $X > Z$, vďaka čomu vieme jednotlivé alternatívy usporiadať od najlepšej po najhoršiu.

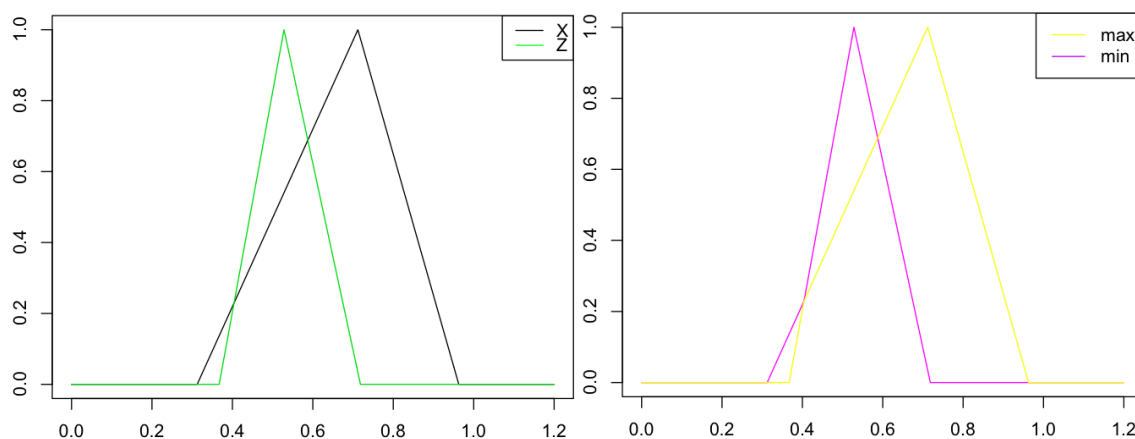
Obr. 30 Fuzzy čísla X a Y a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri porovnaní podľa metódy FMO dvoch fuzzy čísiel A a B je zrejmé, že X je väčšie ako Y , teda $X > Y$.

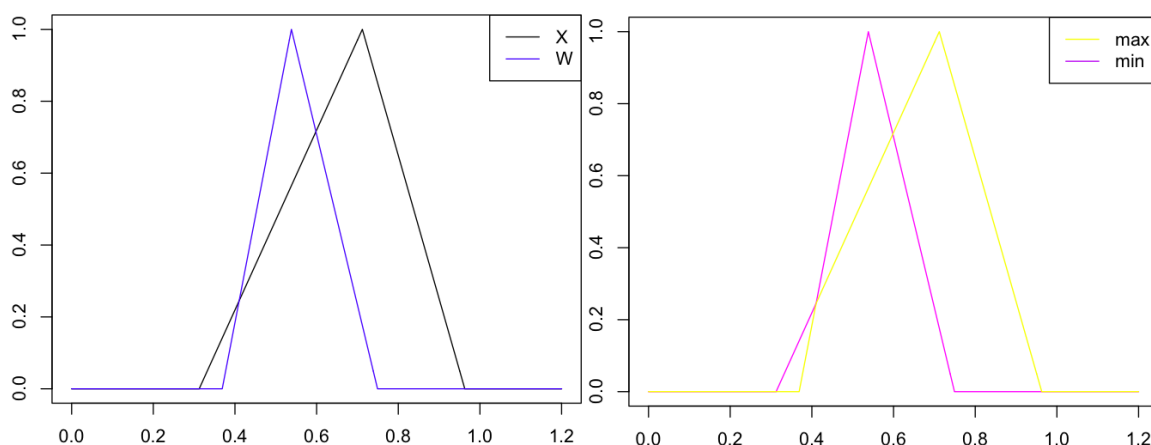
Obr.31 Fuzzy čísla X a Z a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri porovnaní fuzzy čísiel X a Z nie je možné podľa metódy FMO povedať, ktoré z tejto dvojice fuzzy čísiel je väčšie, teda $X \parallel Z$.

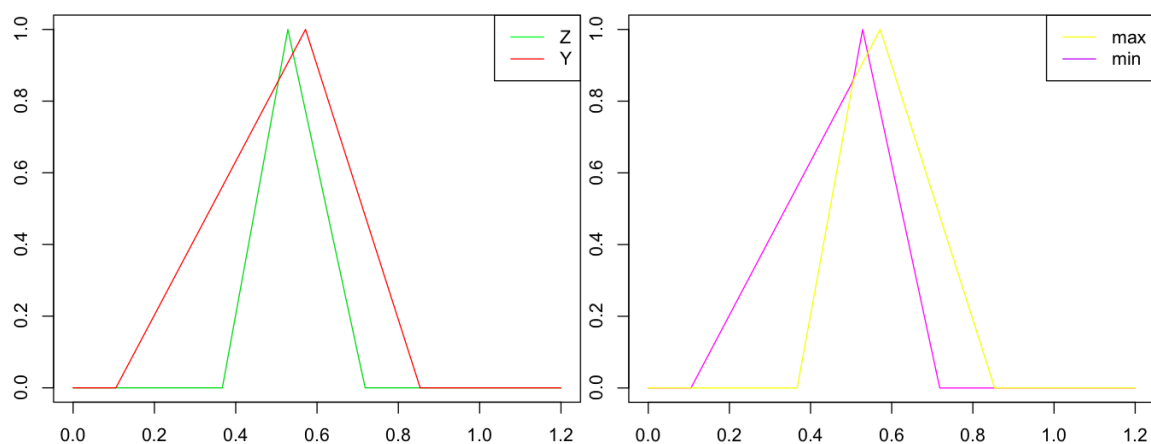
Obr.32 Fuzzy čísla X a W a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Fuzzy čísla X a W sú taktiež neporovnateľné podľa metódy FMO, teda znova nevieme určiť, ktoré z dvojice fuzzy čísiel X a W je väčšie, respektíve menšie a platí, že $X \parallel W$.

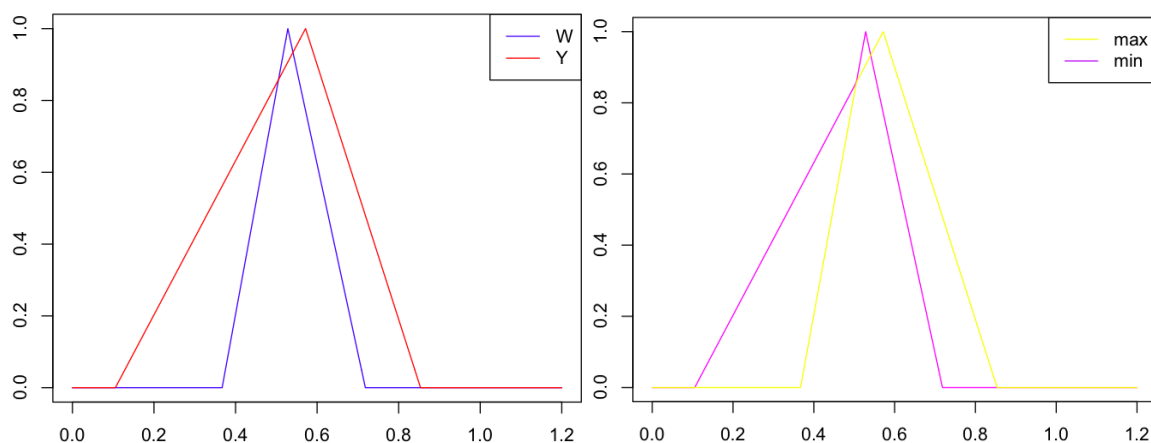
Obr. 33 Fuzzy čísla Z a Y a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

V prípade porovnania fuzzy čísiel Z a Y znova nevieme povedať, ktoré z nich je väčšie alebo menšie, teda $Z \parallel Y$.

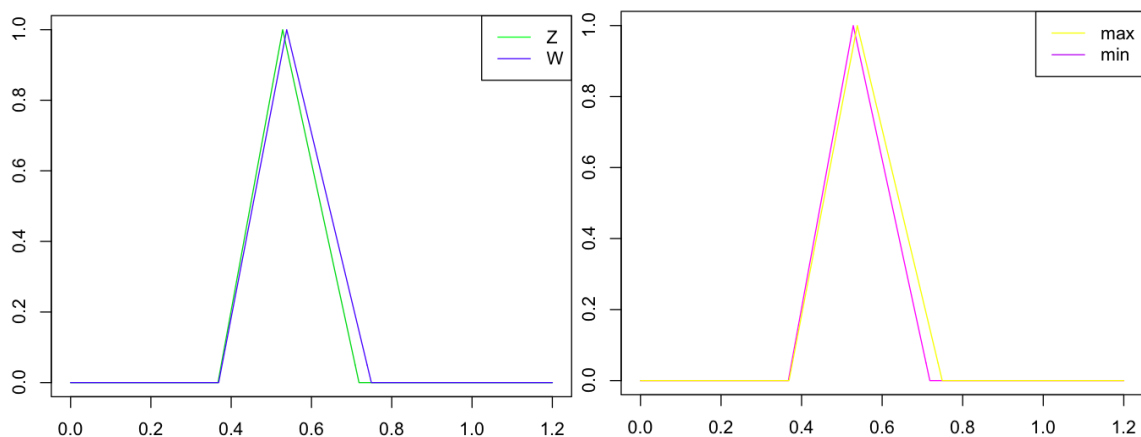
Obr. 34 Fuzzy čísla W a Y a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri porovnávaní fuzzy čísiel W a Y pomocou metódy fuzzy max order nie je možné určiť, ktoré z dvojice fuzzy čísiel je väčšie a teda platí, že $W \parallel Y$.

Obr. 35 Fuzzy čísla Z a W a Obr. X Zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri poslednej dvojici fuzzy čísiel, Z a W , nám podľa metódy FMO vyšlo, že fuzzy číslo W je väčšie ako fuzzy číslo Z , teda $W > Z$.

Pri párovom porovnaní všetkých štyroch fuzzy čísiel X, Y, Z a W , ktoré reprezentujú fuzzy hodnotenie jednotlivých alternatív pomocou metódy fuzzy max order nie je možné určiť kompromisnú variantu. Jediné dvojice fuzzy čísiel, ktoré sú podľa tejto metódy porovnateľné sú X a Y , kde $X > Y$ a W a Z , kde $W > Z$. Všetky ostatné dvojice fuzzy čísiel sú neporovnateľné, teda nebolo možné určiť, ktoré z nich je väčšie alebo menšie. Na

základe týchto informácií tak nie je možné usporiadať fuzzy čísla X, Y, W a Z od najmenšieho po najväčšie, respektíve určiť také fuzzy číslo z tejto štvorice ktoré by bolo väčšie ako všetky ostatné a teda nie je možné povedať, ktorá alternatíva je v danej úlohe najlepšia.

3.5.2 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami

Podľa zadefinovanej relácie preferencie medzi dvoma fuzzy číslami, ak platí, že

$$(A \succcurlyeq B) - (B \succcurlyeq A) \geq 0$$

tak potom fuzzy číslo A je väčšie alebo rovné ako B na základe fuzzy relácie $\succcurlyeq$, teda $A \succcurlyeq B$. V prípade, že je táto preferencia ostro väčšia ako 0, tak $A \succ B$.

Relácia preferencie pre fuzzy čísla X a Y :

- $X \succcurlyeq Y = 1$
- $Y \succcurlyeq X = 0,7942$
- $(X \succcurlyeq Y) - (Y \succcurlyeq X) = 1 - 0,7942 = 0,2058$

a teda $X \succcurlyeq Y$.

Pre fuzzy čísla X a Z platí, že

- $X \succcurlyeq Z = 1$
- $Z \succcurlyeq X = 0,6885$
- $(X \succcurlyeq Z) - (Z \succcurlyeq X) = 1 - 0,6885 = 0,3115$

a teda $X \succcurlyeq Z$.

Pre fuzzy čísla X a W platia tieto stupne preferencie

- $X \succcurlyeq W = 1$
- $W \succcurlyeq X = 0,7155$
- $(X \succcurlyeq W) - (W \succcurlyeq X) = 1 - 0,7155 = 0,2845$

a teda $X \succcurlyeq W$.

Relácia preferencie pre fuzzy hodnotenia W a Y :

- $W \succcurlyeq Y = 0,9507$
- $Y \succcurlyeq W = 1$
- $(W \succcurlyeq Y) - (Y \succcurlyeq W) = 0,9507 - 1 = -0,0493$ a teda $Y \succcurlyeq W$.

Pre fuzzy čísla Z a Y platí, že

- $Z \succcurlyeq Y = 0,9339$
- $Y \succcurlyeq Z = 1$
- $(Z \succcurlyeq Y) - (Y \succcurlyeq Z) = 1 - 0,9339 = 0,0661$

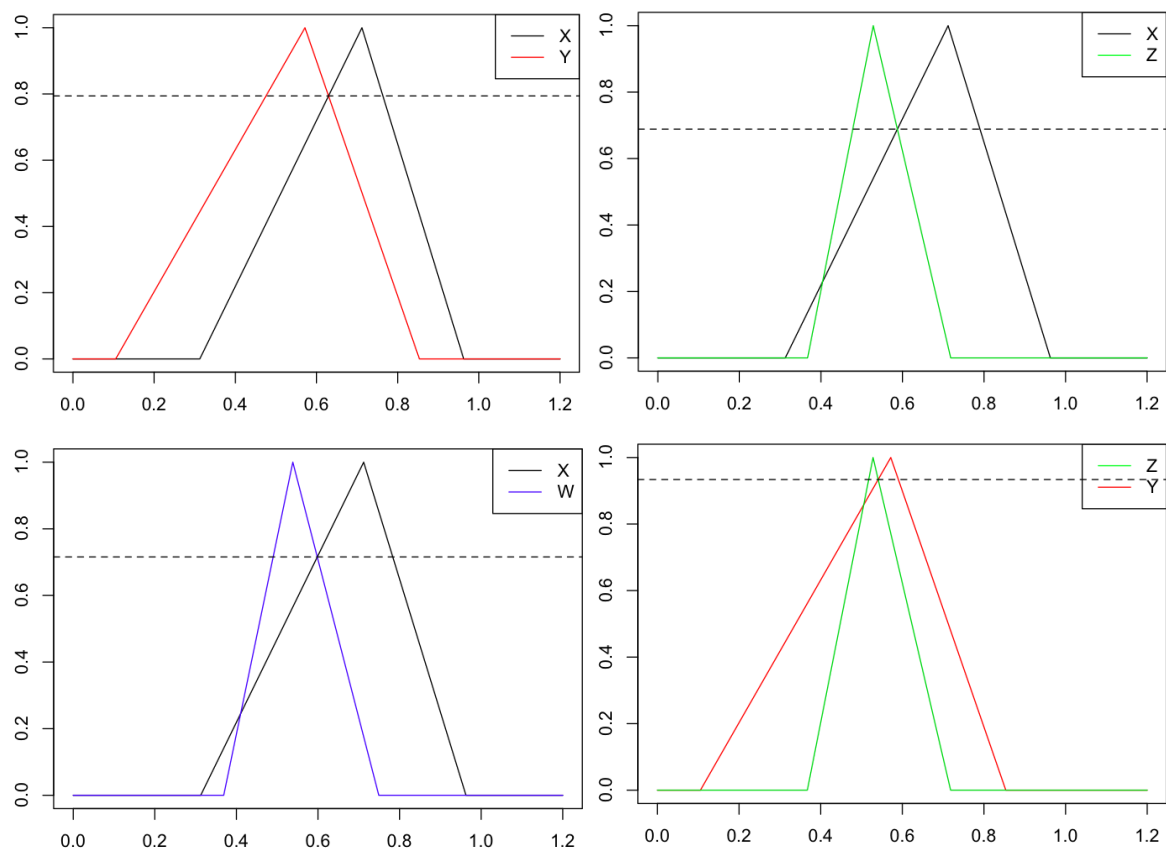
a teda $Y \geq_{\succcurlyeq} Z$.

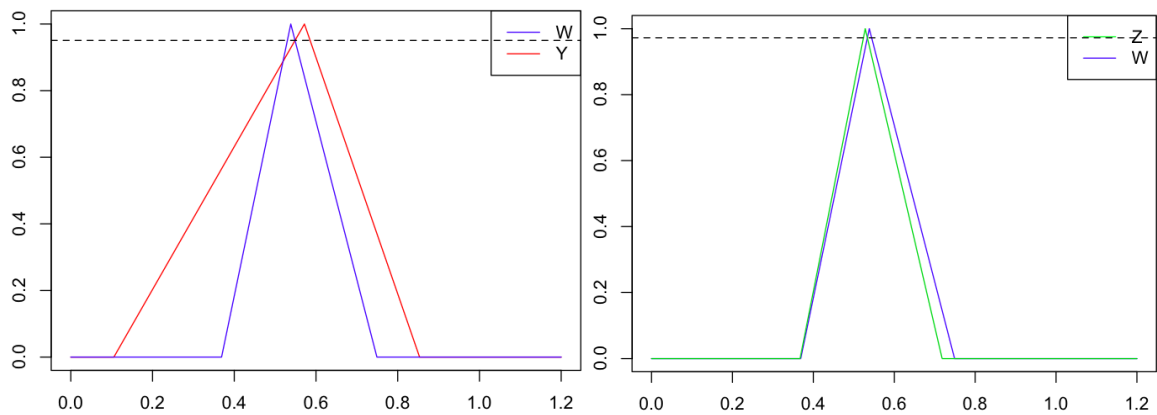
Pre fuzzy čísla X a W platia tieto stupne preferencie

- $W \succcurlyeq Z = 1$
- $Z \succcurlyeq W = 0,9722$
- $(W \succcurlyeq Z) - (Z \succcurlyeq W) = 1 - 0,9722 = 0,0278$

a teda $W \geq_{\succcurlyeq} Z$.

Obr.36 Relácia preferencie pre všetky fuzzy čísla X,Y,Z a W.





Zdroj: [vlastné spracovanie]

Výsledné usporiadanie fuzzy čísel X,Y,Z a W je teda nasledovné:

$$X \geqslant Y \geqslant W \geqslant Z,$$

a ako kompromisná alternatíva by bola zvolená alternatíva číslo 1.

3.5.3 Porovnanie fuzzy čísel využitím číselného indexu

Na výpočet Yagerovho indexu trojuholníkového fuzzy čísla slúži vzorec

$$\square_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{\square^2 - \square^2 + \square\square - \square\square}{\square - \square}.$$

Pre fuzzy číslo X je Yagerov index vypočítaný

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,9629^2 - 0,3124^2 + 0,7120 * 0,9629 - 0,7120 * 0,3124}{0,9629 - 0,3124}$$

$$\square_{\square} = 0,6624$$

Yagerov index fuzzy čísla Y

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,8537^2 - 0,1053^2 + 0,5717 * 0,8537 - 0,5717 * 0,1053}{0,8537 - 0,1053}$$

$$\square_{\square} = 0,5102$$

Výpočet Yagerovho indexu fuzzy čísla Z

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,7184^2 - 0,3671^2 + 0,5283 * 0,7184 - 0,5283 * 0,3671}{0,7184 - 0,3671}$$

$$\square_{\square} = 0,5379$$

A nakoniec, Yagerov index fuzzy čísla W

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,7492^2 - 0,3688^2 + 0,5383 * 0,7492 - 0,5383 * 0,3688}{0,7492 - 0,3688}$$

$$\square_{\square} = 0,5521$$

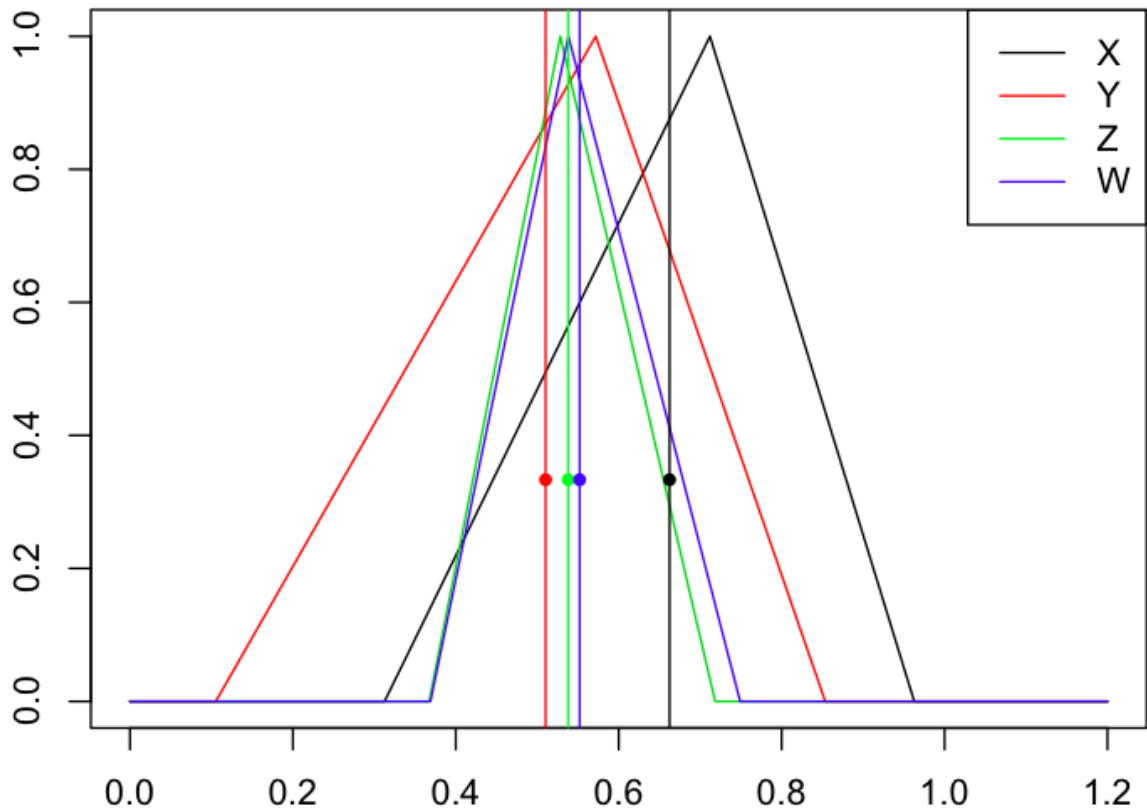
Z výpočtov Yagerovho indexu fuzzy čísel vyplýva, že

$$\square_{\square} > \square_{\square} > \square_{\square} > \square_{\square}$$

A teda, zoradenie fuzzy čísel X,Y,Z a W odpovedá zoradeniu týchto indexov

$$\square > \square > \square > \square.$$

Obr.37 Yagerov index fuzzy čísel X,Y,Z a W



Pri využití ťažiska ako indexu na zoradenie fuzzy čísel nám ako kompromisná varianta z uvažovaných variant v nami definovanej úlohe vyšla prvá varianta.

Výpočet Wangovho indexu pre trojuholníkové fuzzy čísla je definovaný pomocou nasledujúceho vzorca

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[\square + \square + \square]$$

Uvádzame výpočty Wangovho indexu pre všetky štyri fuzzy čísla X,Y,Z a W:

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,3124 + 0,7120 + 0,9629], \square_{\square} = 0,6624$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,1053 + 0,5717 + 0,8537], \square_{\square} = 0,5102$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} [0,3671 + 0,5283 + 0,7184], \square_{\square} = 0,5379$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} [0,3688 + 0,5383 + 0,7492], \square_{\square} = 0,5521$$

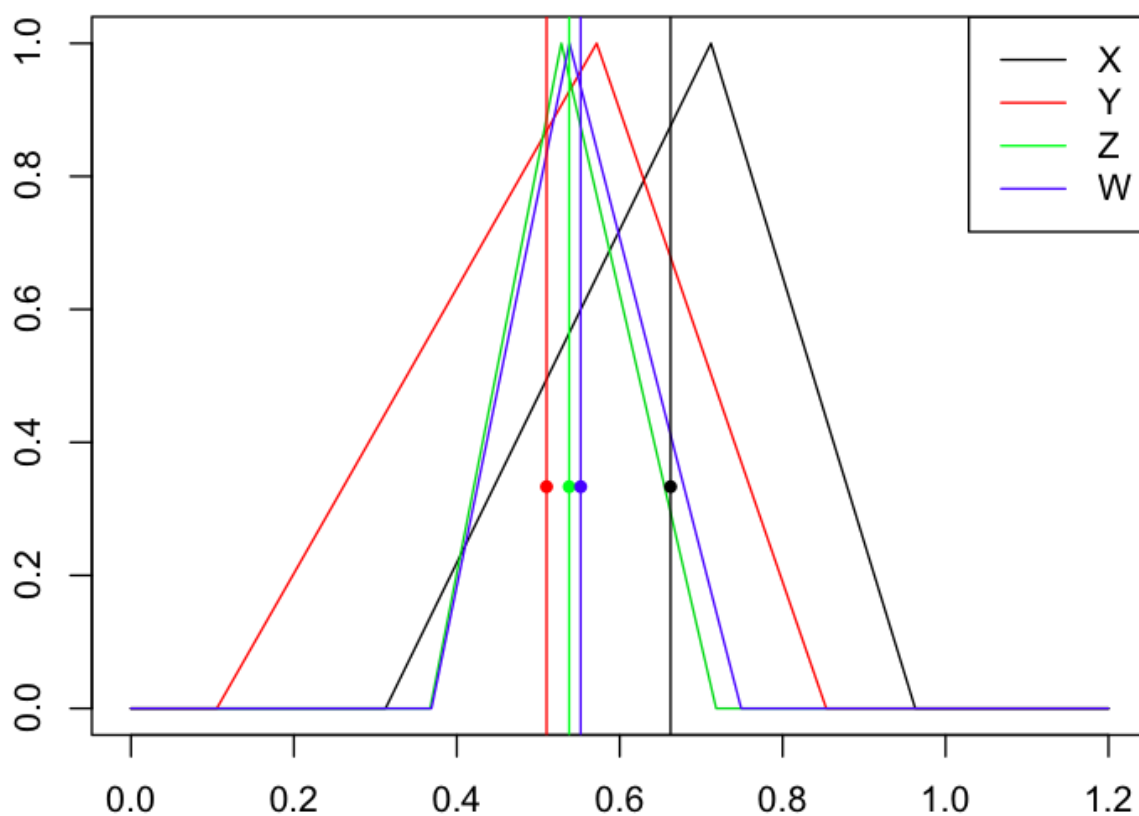
Z výpočtov Wangovho indexu fuzzy čísiel vyplýva, že

$$Y_X > Y_W > Y_Z > Y_Y$$

A teda, zoradenie fuzzy čísiel X,Y,Z a W odpovedá zoradeniu týchto indexov

$$X > W > Z > Y.$$

Obr.38 Zobrazenie Wangovho indexu



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Výpočet mediánu:

$$m_A = \frac{a + 2\square + \square}{4}$$

A teda konkrétne

$$m_{\square} = \frac{0,3124 + 2 \cdot 0,7120 + 0,9629}{4}, m_{\square} = 0,6748$$

$$m_{\square} = \frac{0,1053 + 2,0,5717 + 0,8537}{4}, m_{\square} = 0,5256$$

$$m_{\square} = \frac{0,3671 + 2,0,5283 + 0,7184}{4}, m_{\square} = 0,5355$$

$$m_{\square} = \frac{0,3688 + 2,0,5383 + 0,7492}{4}, m_{\square} = 0,5487$$

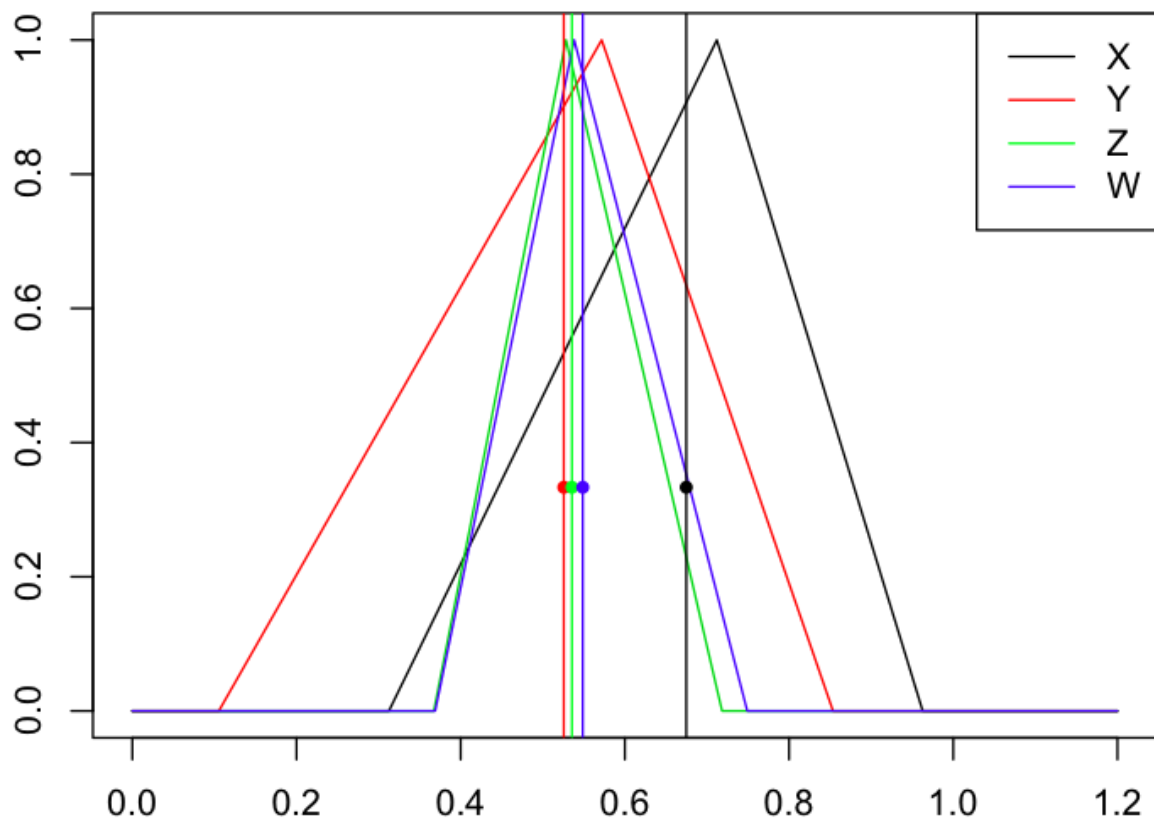
Z výpočtu mediánu indexu fuzzy čísiel vyplýva, že

$$\square_X > \square_W > \square_Z > \square_Y$$

A teda, zoradenie fuzzy čísiel X,Y,Z a W odpovedá zoradeniu mediánov týchto fuzzy čísiel:

$$X > W > Z > Y.$$

Obr.39 Zobrazenie mediánu fuzzy čísiel



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Podľa všetkých troch zvolených číselných charakteristík – Yagerovho indexu, Wangovho indexu a mediánu fuzzy čísla nám vyšlo rovnaké usporiadanie fuzzy čísiel, $X > W > Z > Y$.

3.6 Vzorový príklad: metóda bázičkého variantu

Na rovnakom zadání príkladu, ktorý bol uvedený v kapitole 3.5 uvedieme postup výberu kompromisnej varianty za predpokladu využitia metódy bázičkého variantu na výpočet normovaných fuzzy hodnotení jednotlivých alternatív podľa daných kritérií.

Tab.4 Fuzzy hodnotenia alternatív podľa zvolených kritérií

Váhy	$v_1 = 0.10$	$v_2 = 0.45$	$v_3 = 0.25$	$v_4 = 0.20$
Alt/Kritérium	Kritérium 1	Kritérium 2	Kritérium 3	Kritérium 4
Alternatíva 1	$A_1 = (4,6,8)$	$B_1 = (20,34,40)$	$C_1 = (450,520,570)$	$D_1 = (75,85,100)$
Alternatíva 2	$A_2 = (1,5,7)$	$B_2 = (14,30,37)$	$C_2 = (390,450,520)$	$D_2 = (80,96,107)$
Alternatíva 3	$A_3 = (6,8,9)$	$B_3 = (19,25,30)$	$C_3 = (520,540,550)$	$D_3 = (50,62,84)$
Alternatíva 4	$A_4 = (3,6,7)$	$B_4 = (24,28,33)$	$C_4 = (470,500,530)$	$D_4 = (67,73,93)$

Zdroj: [vlastné spracovanie]

Vzorec na normalizáciu fuzzy čísiel metódou bázičkého variantu má tvar

$$\tilde{u}_{ij}(\tilde{x}_j) = \frac{\tilde{x}_j}{\tilde{x}_j^{\max}}$$

kde u_{ij} je normalizovaná hodnota fuzzy hodnotenia varianty podľa j -teho kritéria

X_j je čiastkové fuzzy ohodnotenie varianty podľa j -teho kritéria

$\tilde{x}_j^{\max}$ predstavuje najlepšiu hodnotu podľa j -teho kritéria

Normalizácia fuzzy čísiel podľa prvého kritéria je stanovené na základe bázičkého variantu, pričom ako bázičský variant bola zvolená maximálna hodnota z intervalu, na ktorom sa fuzzy hodnotenia podľa prvého kritéria nachádzajú.

$$\tilde{x}_1^{\max} = 9.$$

Výpočet normovaných fuzzy čísiel A_1 , A_2 , A_3 a A_4 je nasledovný

$$\tilde{u}_{11}(\tilde{x}_1) \text{ či } \tilde{u}_{12}(\tilde{x}_2): \tilde{u}_{11} = \frac{4}{9}, \tilde{u}_{12} = \frac{6}{9}, \tilde{u}_{13} = \frac{8}{9}, \tilde{u}_{14} = \left(\frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$\tilde{u}_{21}(\tilde{x}_1) \text{ či } \tilde{u}_{22}(\tilde{x}_2): \tilde{u}_{21} = \frac{1}{9}, \tilde{u}_{22} = \frac{5}{9}, \tilde{u}_{23} = \frac{7}{9}, \tilde{u}_{24} = \left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right),$$

$$\tilde{u}_{31}(\tilde{x}_1) \text{ či } \tilde{u}_{32}(\tilde{x}_2): \tilde{u}_{31} = \frac{6}{9}, \tilde{u}_{32} = \frac{8}{9}, \tilde{u}_{33} = \frac{9}{9}, \tilde{u}_{34} = \left(\frac{6}{9}, \frac{8}{9}, 1\right),$$

$$\tilde{u}_{41}(\tilde{x}_1) \text{ či } \tilde{u}_{42}(\tilde{x}_2): \tilde{u}_{41} = \frac{3}{9}, \tilde{u}_{42} = \frac{6}{9}, \tilde{u}_{43} = \frac{7}{9}, \tilde{u}_{44} = \left(\frac{3}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

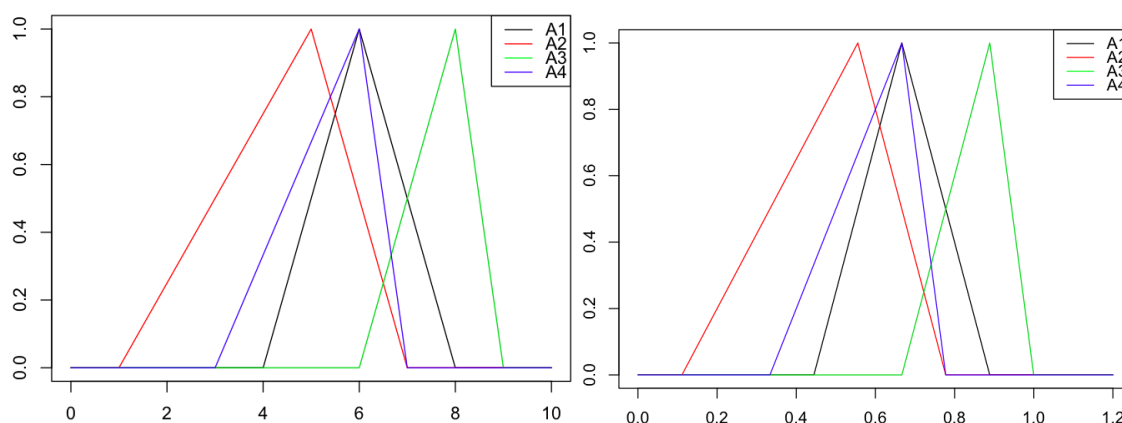
Analogicky boli vypočítané aj normované fuzzy čísla pre ostatné kritériá, zobrazené v nasledovnej tabuľke:

Tab. 5 Normované fuzzy hodnotenia

Váhy	$v_1 = 0.10$	$v_2 = 0.45$	$v_3 = 0.25$	$v_4 = 0.20$
	Kritérium 1	Kritérium 2	Kritérium 3	Kritérium 4
Alternatíva 1	$A_1 = (4/9, 6/9, 8/9)$	$B_1 = (1/2, 34/40, 1)$	$C_1 = (45/57, 52/57, 1)$	$D_1 = (75/107, 85/107, 100/107)$
Alternatíva 2	$A_2 = (1/9, 5/9, 7/9)$	$B_2 = (7/20, 3/4, 37/40)$	$C_2 = (39/57, 45/57, 52/57)$	$D_2 = (80/107, 96/107, 1)$
Alternatíva 3	$A_3 = (6/9, 8/9, 1)$	$B_3 = (19/40, 25/40, 3/4)$	$C_3 = (52/57, 54/57, 55/57)$	$D_3 = (50/107, 62/107, 84/107)$
Alternatíva 4	$A_4 = (3/9, 6/9, 7/9)$	$B_4 = (3/5, 7/10, 33/40)$	$C_4 = (47/57, 50/57, 53/57)$	$D_4 = (67/107, 73/107, 93/107)$

Zdroj: [vlastné spracovanie]

Obr. 40 Hodnotenie alternatív podľa prvého kritéria, normované fuzzy čísla



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Po znormovaní všetkých fuzzy hodnotení uvádzame postup pri agregácii fuzzy hodnotení len prvej alternatívy, nakoľko je totožný ako v prípade príkladu 1. Čiastkové fuzzy hodnotenia sú prezentované štvoricou fuzzy čísiel $A_1 = (4/9, 6/9, 8/9)$, $B_1 = (1/2, 34/40, 1)$, $C_1 = (45/57, 52/57, 1)$ a $D_1 = (75/107, 85/107, 100/107)$. Výpočet agregovaného fuzzy hodnotenia X je nasledovný:

$$\square_1 = \frac{4}{9} \cdot 0,10 + \frac{1}{2} \cdot 0,45 + \frac{45}{57} \cdot 0,25 + \frac{75}{107} \cdot 0,20 = 0,6070$$

$$\square_2 = \frac{6}{9} \cdot 0,10 + \frac{34}{40} \cdot 0,45 + \frac{52}{57} \cdot 0,25 + \frac{85}{107} \cdot 0,20 = 0,8361$$

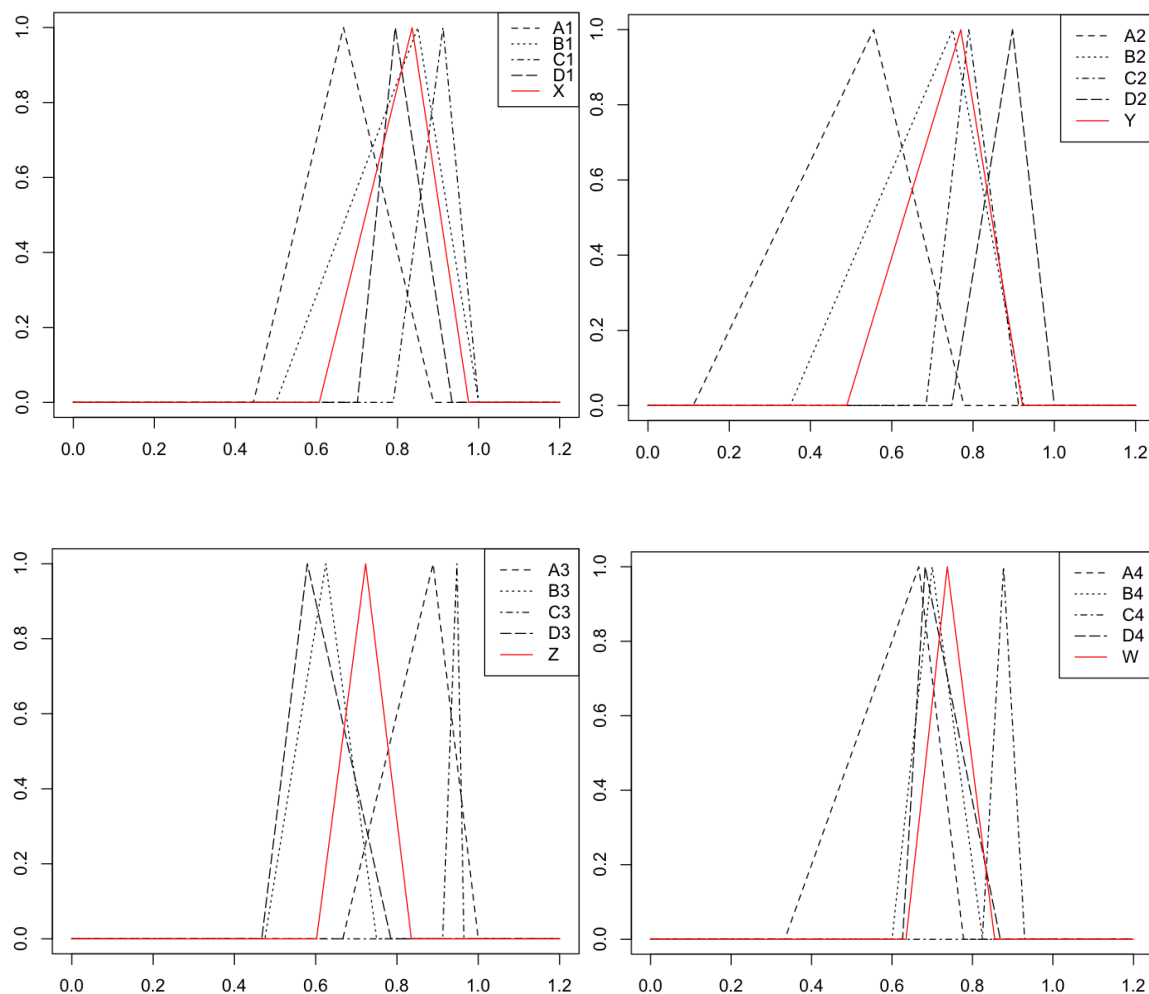
$$\square_3 = \frac{8}{9} \cdot 0,10 + 1,0 \cdot 0,45 + 1,0 \cdot 0,25 + \frac{100}{107} \cdot 0,20 = 0,9758$$

Teda $X = (0,6070; 0,8361; 0,9758)$.

Analogicky boli vypočítané aj zvyšné agregované fuzzy hodnotenia jednotlivých alternatív, Y, Z a W, pričom

- $Y = (0,4892; 0,7699; 0,9221)$
- $Z = (0,6020; 0,7229; 0,8357)$
- $W = (0,6347; 0,7374; 0,8553)$

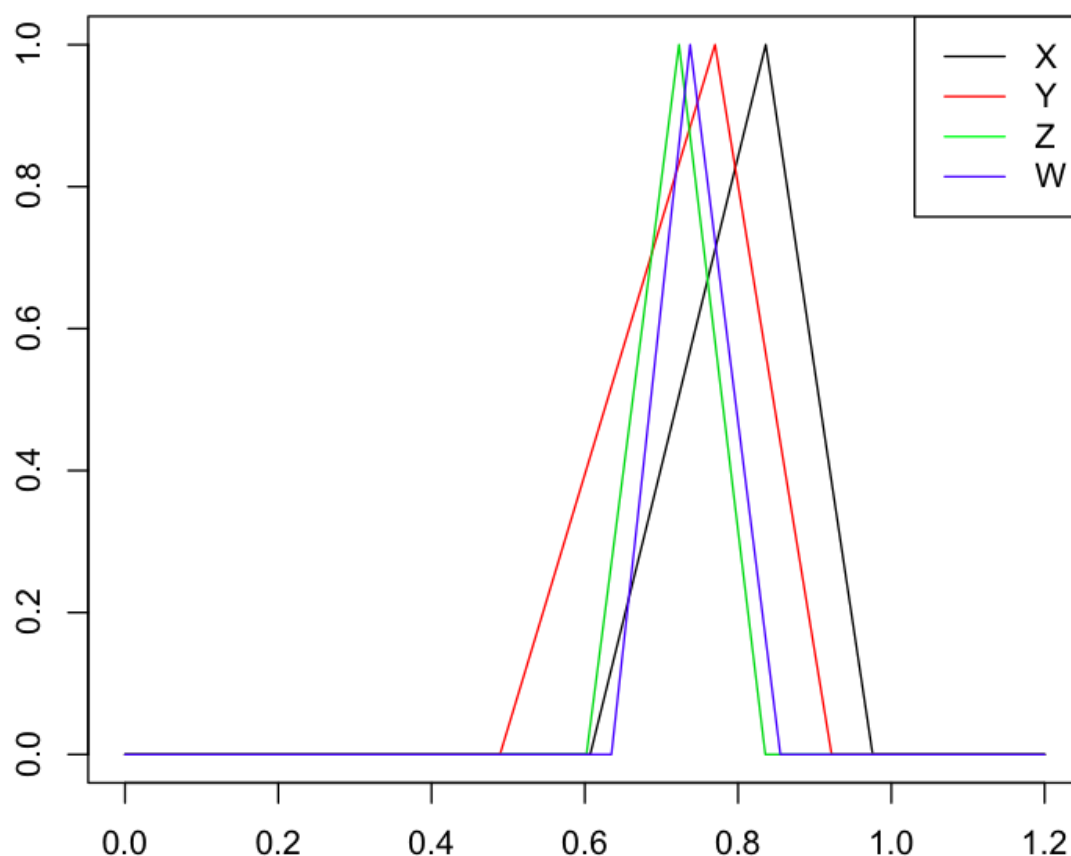
Obr. 41 Agregácia parciálnych fuzzy hodnotení alternatív



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Na nasledujúcom obrázku vidno fuzzy čísla X, Y, Z a W, ktoré predstavujú výsledné fuzzy hodnotenie uvažovaných alternatív.

Obr.42 Celkové fuzzy hodnotenie alternatív

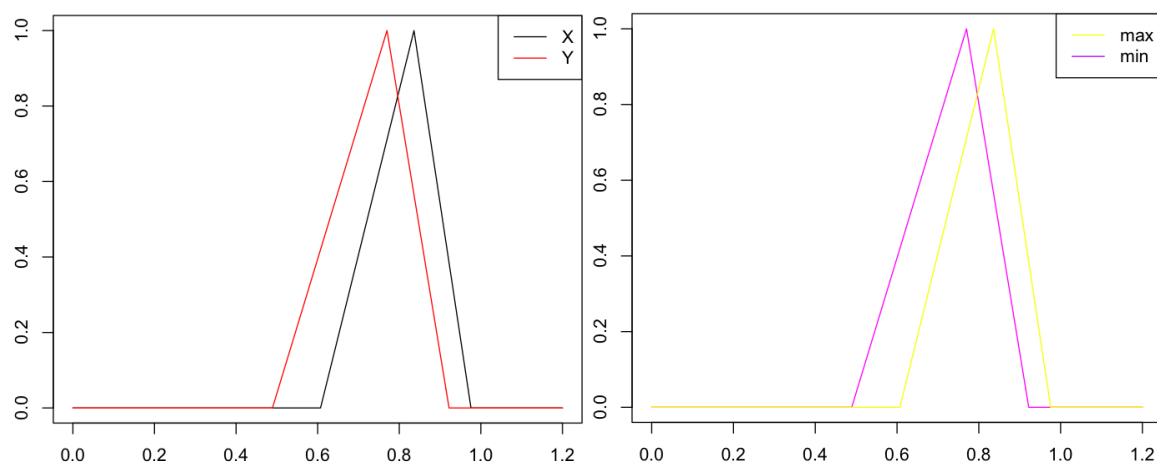


Zdroj: [vlastné spracovanie]

3.6.1 Porovnanie fuzzy čísel využitím metódy fuzzy max order

Na nasledujúcich obrázkoch vidno porovnanie každej dvojice fuzzy čísel X,Y,Z a W spolu s ich maximami a minimami. Pri každej dvojici je následne uvedené, ktoré z dvojice fuzzy čísel je považované za väčšie, menšie alebo či sú podľa metódy *fuzzy max order* považované za neporovnateľné.

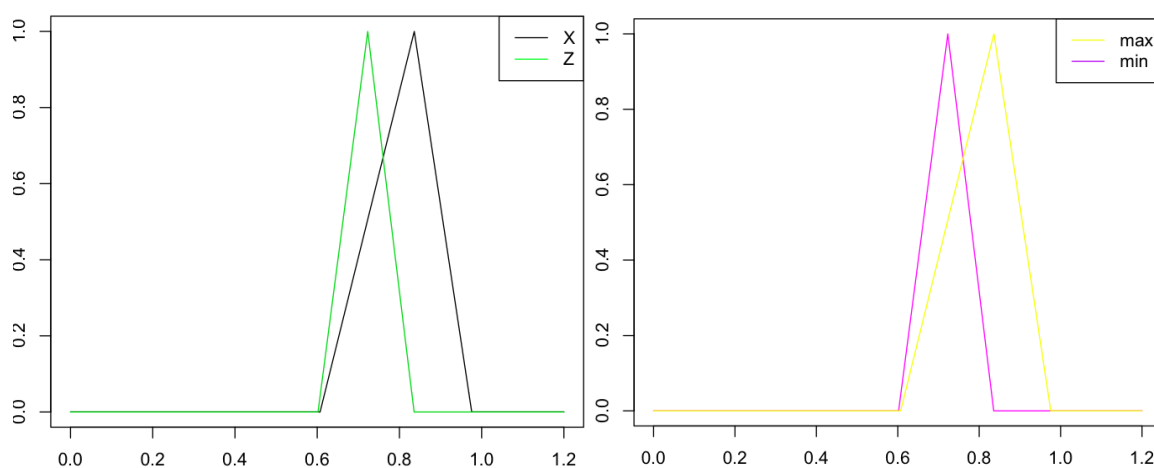
Obr. 43 Fuzzy čísla X a Y a zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Ako vidno na obrázku Obr. 43, maximum z tejto dvojice fuzzy čísiel je číslo X a teda $X > Y$.

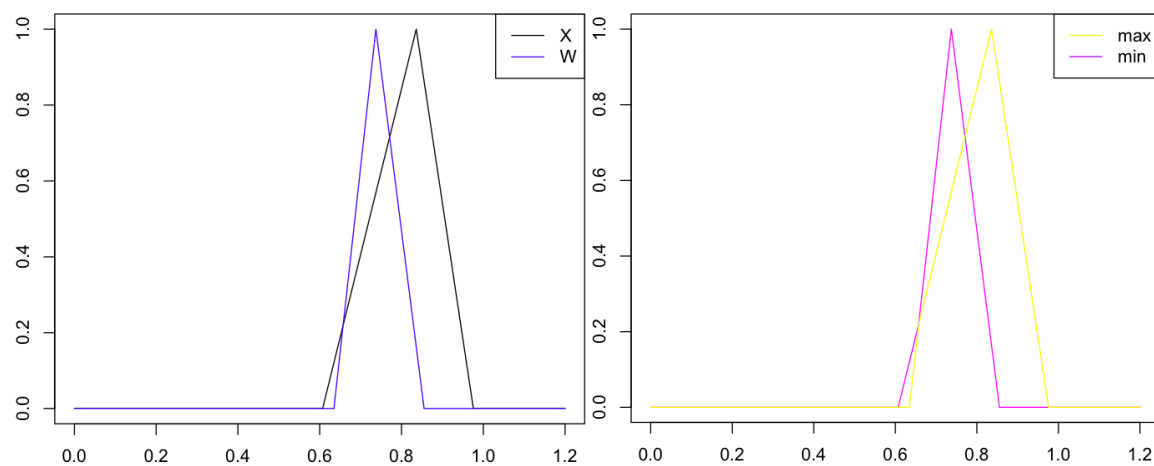
Obr. 44 Fuzzy čísla X a Z a zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri porovnaní dvojice fuzzy čísiel X a Z pomocou metódy fuzzy max order, zobrazenej na obrázkoch X a X vidno, že fuzzy číslo X je väčšie ako fuzzy číslo Z.

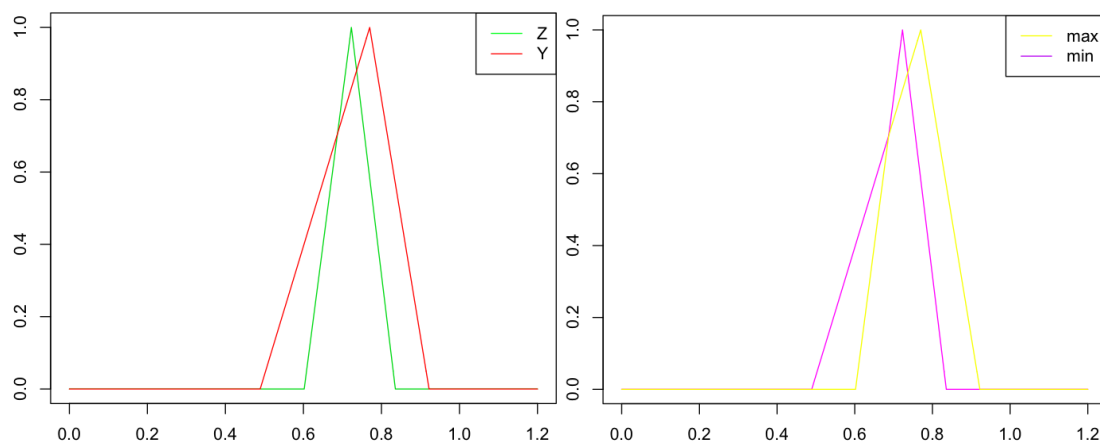
Obr.45 Fuzzy čísla X a W a zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Pri párovom porovnaní dvojice fuzzy čísel X a W metódou fuzzy max order nie je možné určiť, ktoré z tejto dvojice fuzzy čísel je väčšie alebo menšie, inak povedané, tieto dve fuzzy čísla sú vzájomne neporovnateľné.

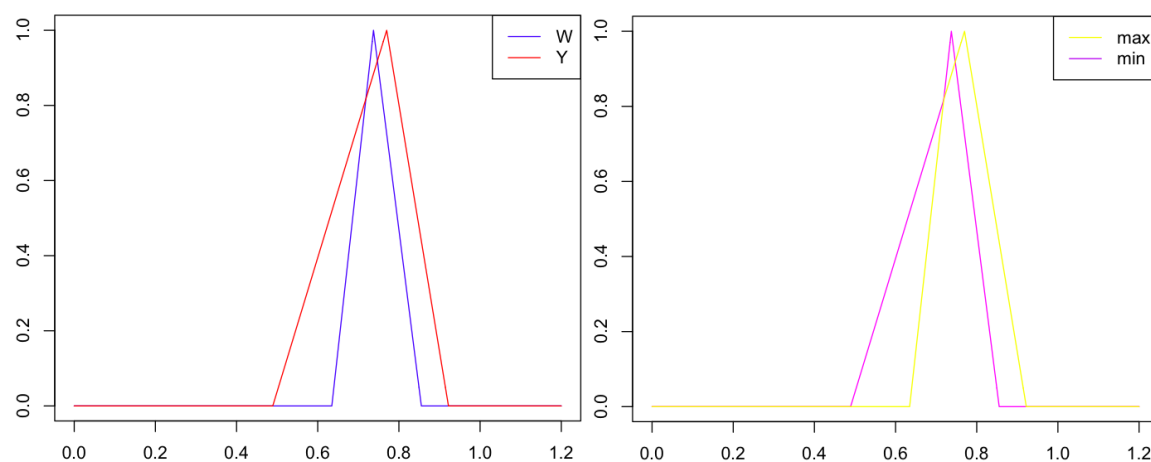
Obr. 46 Fuzzy čísla Z a Y a zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Fuzzy čísla Z a Y sú metódou fuzzy max order neporovnateľné, teda $Z \parallel Y$.

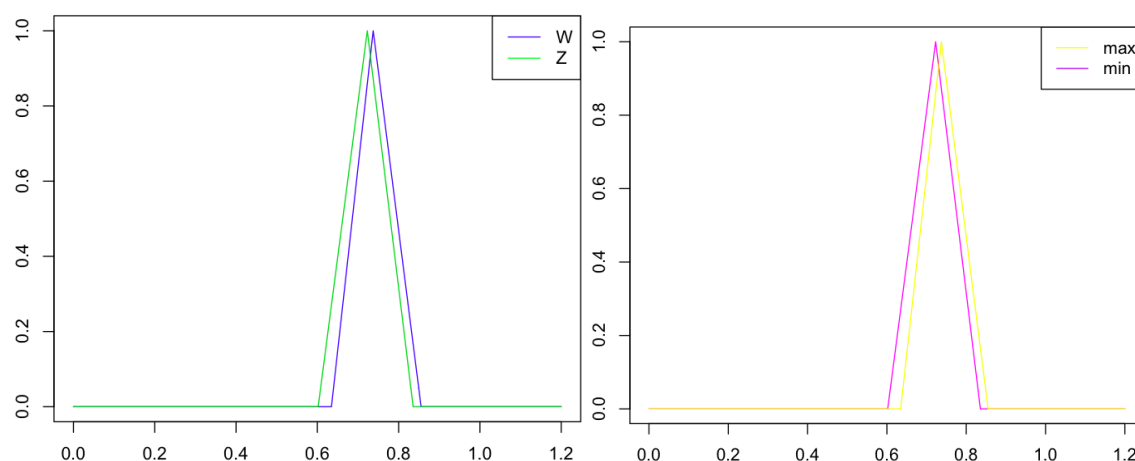
Obr. 47 Fuzzy čísla W a Y a zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Ani v prípade dvojice fuzzy čísel W a Y nie je možné povedať, ktoré z týchto dvoch čísel je väčšie, respektíve menšie.

Obr. 48 Fuzzy čísla W a Z zobrazenie maxima a minima.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Maximom z fuzzy čísiel W a Z je fuzzy číslo W a teda $W > Z$.

Pri párovom porovnaní všetkých fuzzy hodnotení pomocou metódy fuzzy max order nebolo možné až v polovici prípadov určiť, ktoré z dvojíc fuzzy čísiel je väčšie. Porovnanie dvojíc, kedy bolo možné určiť maximum, konkrétne $X > Y$, $X > Z$ a $W > Z$ neponúka dostatočné informácie potrebné na to, aby bolo možné túto štvoricu fuzzy čísiel porovnať.

3.6.2 Relácia preferencie medzi fuzzy číslami

Podľa tejto metódy, definovanej v kapitole 3.X, sú jednotlivé porovnania fuzzy čísiel nasledovné:

- $X \succcurlyeq Y = 1$
- $Y \succcurlyeq X = 0,8264$
- $(X \succcurlyeq Y) - (Y \succcurlyeq X) = 1 - 0,8264 = 0,1736$

a teda $X \succeq Y$.

- $X \succcurlyeq Z = 1$
- $Z \succcurlyeq X = 0,6689$
- $(X \succcurlyeq Z) - (Z \succcurlyeq X) = 1 - 0,6689 = 0,3311$

a teda $X \succeq Z$.

- $X \succcurlyeq W = 1$
- $W \succcurlyeq X = 0,7156$
- $(X \succcurlyeq W) - (W \succcurlyeq X) = 1 - 0,7156 = 0,2844$

a teda $X \succeq W$.

- $Y \succcurlyeq Z = 1$
- $Z \succcurlyeq Y = 0,8806$
- $(Y \succcurlyeq Z) - (Z \succcurlyeq Y) = 1 - 0,8806 = 0,1194$

a teda $Y \succeq Z$.

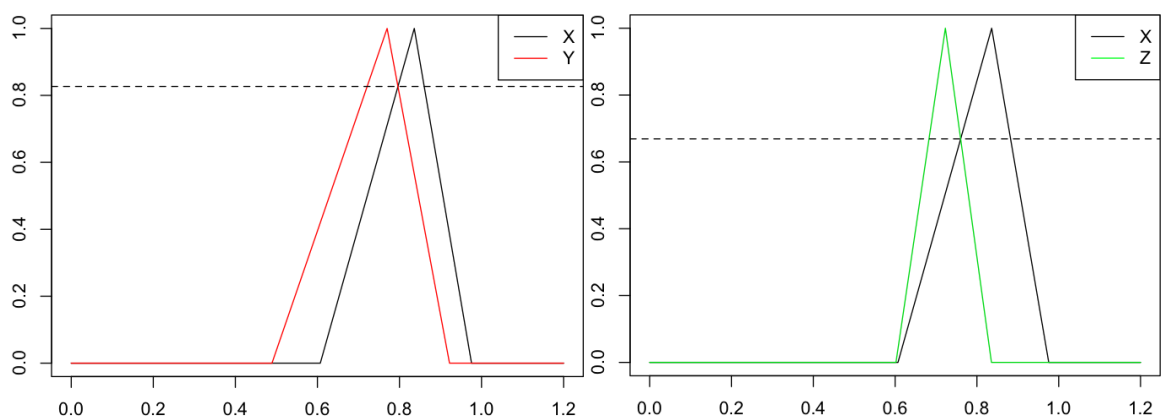
- $Y \succcurlyeq W = 1$
- $W \succcurlyeq Y = 0,9158$
- $(Y \succcurlyeq W) - (W \succcurlyeq Y) = 1 - 0,9158 = 0,0842$

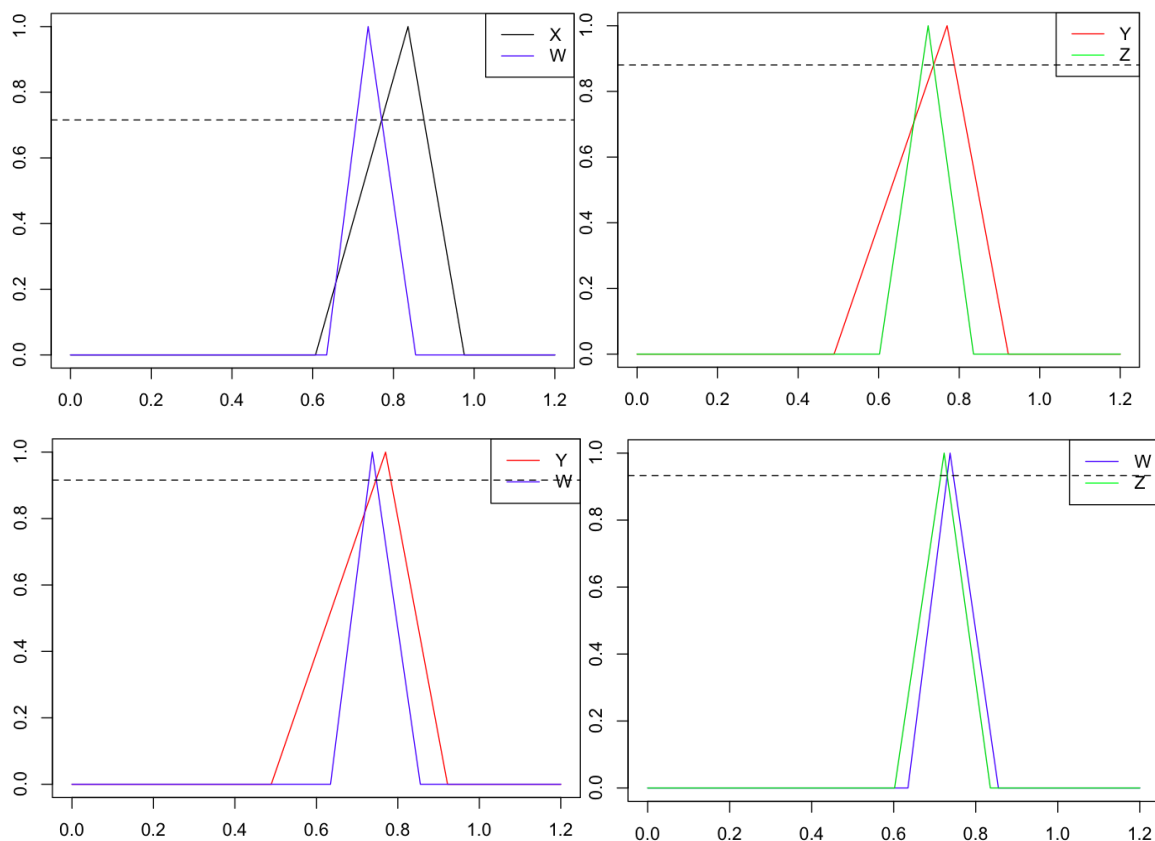
a teda $Y \succeq W$.

- $W \succcurlyeq Z = 1$
- $Z \succcurlyeq W = 0,9327$
- $(W \succcurlyeq Z) - (Z \succcurlyeq W) = 1 - 0,9327 = 0,0676$

a teda $X \succeq Y$.

Obr. 49 Relácia preferencie pre všetky fuzzy čísla X, Y, Z a W .





Zdroj: [vlastné spracovanie]

A teda $X \geqslant Y \geqslant W \geqslant Z$.

3.6.3 Porovnanie fuzzy čísiel využitím číselného indexu

Na výpočet Yagerovho indexu trojuholníkového fuzzy čísla slúži vzorec

$$\square_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{\square^2 - \square^2 + \square\square - \square\square}{\square - \square}.$$

Pre fuzzy číslo X je Yagerov index vypočítaný

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,9758^2 - 0,6070^2 + 0,8361 \cdot 0,9758 - 0,8361 \cdot 0,6070}{0,9758 - 0,6070}$$

$$\square_{\square} = 0,8063$$

Yagerov index fuzzy čísla Y

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,9221^2 - 0,4892^2 + 0,7699 \cdot 0,9221 - 0,7699 \cdot 0,4892}{0,9221 - 0,4892}$$

$$\square_{\square} = 0,7271$$

Výpočet Yagerovho indexu fuzzy čísla Z

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,8357^2 - 0,6020^2 + 0,7229 * 0,8357 - 0,7229 * 0,6020}{0,8357 - 0,6020}$$

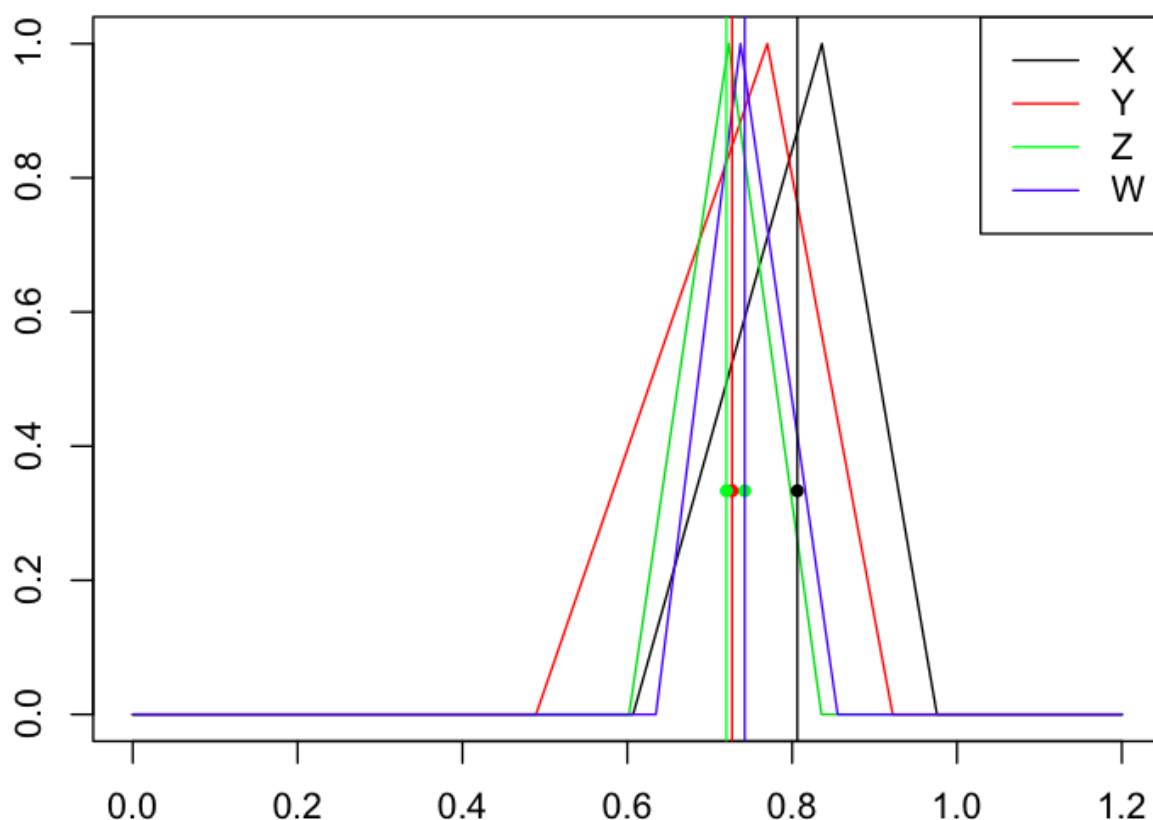
$$\square_{\square} = 0,7202$$

A nakoniec, Yagerov index fuzzy čísla W

$$\square_{\square} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,8553^2 - 0,6347^2 + 0,7374 * 0,8553 - 0,7374 * 0,6347}{0,8553 - 0,6347}$$

$$\square_{\square} = 0,7425$$

Obr. 50 Yagerov index fuzzy čísiel X,Y,Z a W



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Z výpočtov Yagerovho indexu fuzzy čísiel vyplýva, že

$$\square_{\square} > \square_{\square} > \square_{\square} > \square_{\square}$$

A teda, zoradenie fuzzy čísiel X,Y,Z a W odpovedá zoradeniu týchto indexov

$$\square > \square > \square > \square.$$

Pri využití ťažiska ako indexu na zoradenie fuzzy čísiel nám ako kompromisná varianta z uvažovaných variant v nami definovanej úlohe vyšla prvá varianta.

Výpočet Wangovho indexu pre trojuholníkové fuzzy čísla je definovaný pomocou nasledujúceho vzorca

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[\square + \square + \square]$$

Uvádzame výpočty Wangovho indexu pre všetky štyri fuzzy čísla X,Y,Z a W:

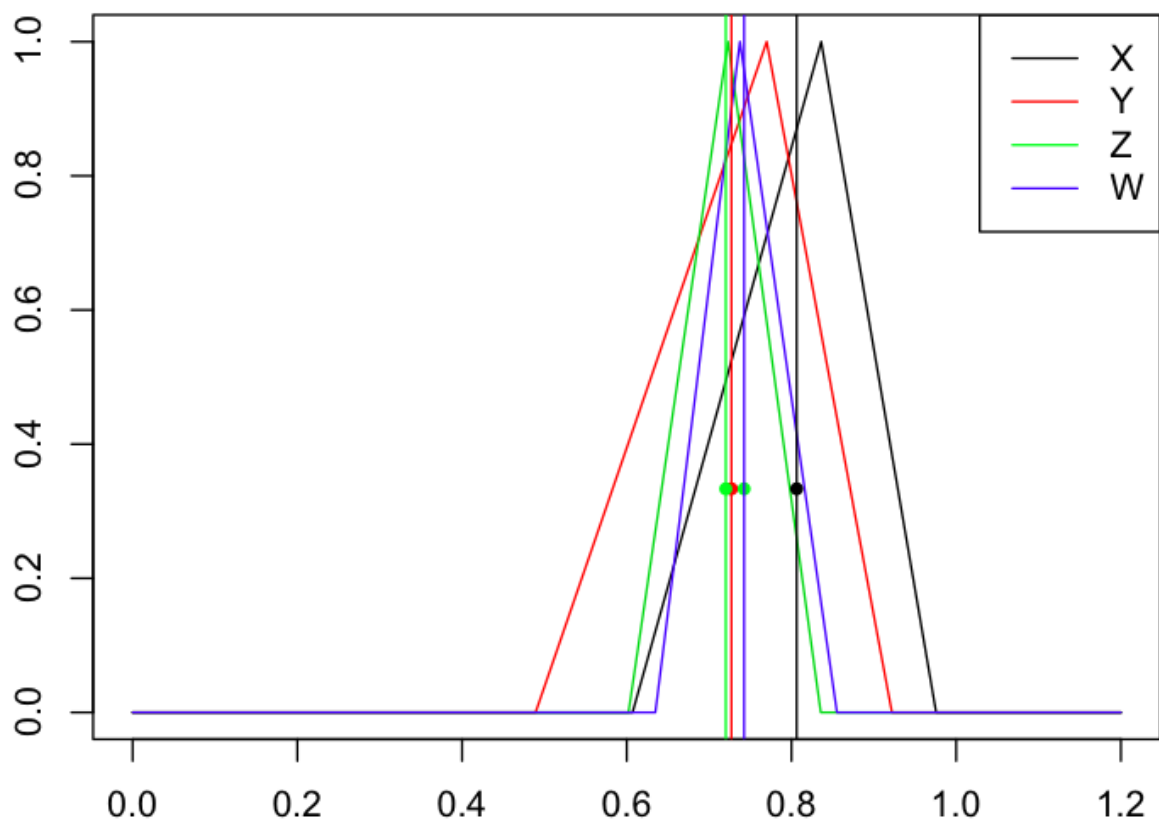
$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,6070 + 0,8361 + 0,9758], \square_{\square} = 0,8063$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,4892 + 0,7699 + 0,9221], \square_{\square} = 0,7271$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,6020 + 0,7229 + 0,8357], \square_{\square} = 0,7202$$

$$\square_{\square} = \frac{1}{3}[0,6347 + 0,7374 + 0,8553], \square_{\square} = 0,7425$$

Obr.51 Wangov index fuzzy čísiel X,Y,Z a W



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Z výpočtov Wangovho indexu fuzzy čísiel vyplýva, že

$$Y_X > Y_W > Y_{\square} > Y_{\square}$$

A teda, zoradenie fuzzy čísiel X,Y,Z a W odpovedá zoradeniu týchto indexov

$$X > W > \square > \square.$$

Výpočet mediánu:

$$m_A = \frac{a + 2\square + \square}{4}$$

A teda konkrétne

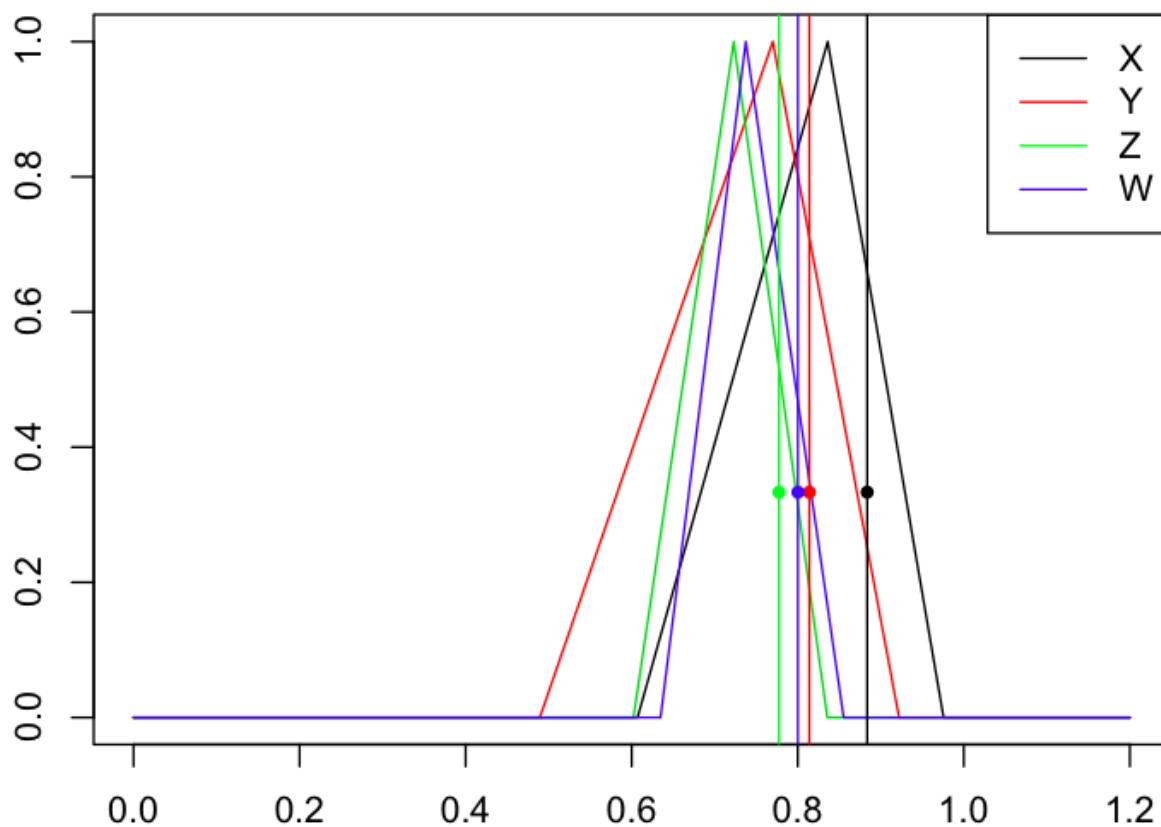
$$m_{\square} = \frac{0,6070 + 2 \cdot 0,8361 + 0,9758}{4}, m_{\square} = 0,8836$$

$$m_{\square} = \frac{0,4892 + 2 \cdot 0,7699 + 0,9221}{4}, m_{\square} = 0,8139$$

$$m_{\square} = \frac{0,6020 + 2 \cdot 0,7229 + 0,8357}{4}, m_{\square} = 0,7773$$

$$m_{\square} = \frac{0,6347 + 2 \cdot 0,7374 + 0,8553}{4}, m_{\square} = 0,8002$$

Obr.52 Medián fuzzy čísiel X,Y,Z a W.



Zdroj: [vlastné spracovanie]

Z výpočtu mediánu indexu fuzzy čísiel vyplýva, že

$$\square_X > \square_{\square} > \square_{\square} > \square_{\square}$$

A teda, zoradenie fuzzy čísiel X, Y, Z a W odpovedá zoradeniu mediánov týchto fuzzy čísiel:

$$X > \square > \square > \square.$$

Podľa Yagerovho indexu a Wangovho indexu vyšlo usporiadanie fuzzy čísiel

$$X > W > \square > \square,$$

a podľa mediánu fuzzy čísla vyšlo usporiadanie fuzzy čísiel

$$X > W > Z > Y.$$

3.7 Zhodnotenie dosiahnutých výsledkov

Pri využití metód založených na váženom súčte na výber kompromisnej varianty bolo prvou úlohou preskúmať vplyv normalizácie na výsledný výber kompromisnej varianty. Na základe výsledkov z predošlých kapitol je možné konštatovať, že tieto metódy môžu poskytnúť rôzne výsledky pri použití tej istej metódy na porovnanie dvoch fuzzy čísiel. V prezentovanej úlohe bola síce za využitia každej metódy vždy vybraná alternatíva číslo 1 ako kompromisná a teda v tomto smere boli obe metódy konzistentné. Na druhej strane je potrebné uvedomiť si, že pri inom zadaní príkladu by dané metódy nemuseli poskytnúť rovnaké výsledky. Toto konštatovanie možno podložiť tým, že výsledné agregované fuzzy hodnotenie závisí od tvaru ostatných hodnotení alternatív podľa daného kritéria a od zvolených váh a teda nie vždy musí vyjsť taký jednoznačný výsledok ako v našom prípade.

Na základe toho, že v uvedenom príklade vyšlo výsledné poradie v prípade použitia metódy váženého súčtu rovnako pri každej metóde s výnimkou fuzzy max order, na úlohy viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti v prípade využitia fuzzy hodnotenia jednotlivých alternatív by som viacej odporúchal práve túto metódu na normalizovanie jednotlivých hodnotení podľa daných kritérií. Tento rozdiel vznikol pravdepodobne tým, že v prípade metódy váženého súčtu sú normalizované parciálne hodnotenia zobrazené na uzavretom intervale 0 až 1 a v prípade metódy bázičného variantu sa môže byť tento interval rôzny. Pri voľbe za bázičky variant najlepšiu hodnotu je tento interval menší a teda jednotlivé fuzzy hodnotenia alternatív sú umiestnené bližšie k sebe.

3.7.1 Porovnanie pomocou číselného indexu

Popísané metódy porovnania fuzzy čísiel porovnávajú tieto čísla len na základe jednej vypočítanej hodnoty, čo môže viesť k strate informácií ohľadom týchto fuzzy čísiel a teda veľká množina fuzzy čísiel je podľa tejto číselnej charakteristiky považovaná za rovnaké.

Na druhej strane, pri využití týchto indexov v úlohách viackriteriálneho rozhodovania, kde sme pracovali s normovanými hodnotami fuzzy čísla je možné predpokladať, že situácia kedy sa budú dve rozdielne fuzzy čísla rovnať napríklad podľa Yagerovho indexu nie je veľmi častá. Tak isto, v praxi sa pravdepodobne stretneme aj s nelineárnymi fuzzy číslami, kedy napríklad nami použitý Wangov index zavádza aj výpočet vertikálnej súradnice tohto indexu a v prípade rovnosti podľa horizontálnej hodnoty je možné využiť aj vertikálnu súradnicu tohoto indexu.

Výhodou indexov je aj relatívna jednoduchosť použitia, pretože pre každé fuzzy číslo je postačujúce vypočítať jeden, respektíve pár vzorcov a výsledné hodnoty v tvare reálnych čísiel je už jednoduché usporiadať a vybrať tak kompromisnú variantu.

3.7.2 Porovnanie pomocou metódy fuzzy max order

Využitie metódy *fuzzy max order* v úlohách viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti neodporúčame, nakoľko ide o veľmi silný typ preferencie medzi fuzzy číslami a len relatívne malý počet fuzzy čísiel je porovnateľných použitím tejto metódy. Po znormovaní fuzzy hodnotení jednotlivých alternatív a následnej agregácii nie je veľmi pravdepodobné, aby sa fuzzy čísla neprekrývali, keďže ich zobrazenie je na intervale $\langle 0,1 \rangle$.

Zároveň, v prípade ak by sa agregované fuzzy hodnotenia jednotlivých alternatív neprekrývali, je možné použiť napr. Yagerov index a v takomto prípade dajú obe metódy rovnaké výsledky.

Ďalšou nevýhodou je potreba porovnania každej dvojice fuzzy čísiel. Pri vybraných štyroch alternatívach v tejto práci to problém síce nebol, ale v prípade viacero, niekoľko desiatok uvažovaných alternatív je toto usporiadanie časovo náročnejšie ako v prípade využitia číselnej charakteristiky.

3.7.3 Porovnanie pomocou relácie preferencie fuzzy čísiel

Na rozdiel od metódy *fuzzy max order*, táto metóda je úplná a teda je ňou možné porovnať všetky fuzzy čísla. Výsledné porovnanie dvoch fuzzy čísiel touto metódou

vlastne hovorí o tom, o koľko viac je jedno fuzzy číslo preferované pred druhým ako druhé pred prvým.

Pri použití tejto metódy je taktiež potrebné porovnať všetky dvojice fuzzy čísiel, a to dokonca dvakrát, čiže z časového hľadiska je táto metóda náročnejšia ako v prípade ďalších dvoch uvažovaných alternatívach.

Metóda porovnania fuzzy čísiel pomocou relácie preferencie poskytla rozdielne výsledky ako v prípade skúmaných číselných charakteristík. Na odporúčanie, ktorá z týchto metód je vhodnejšia na aký typ fuzzy čísiel alebo typ úlohy by však bola potrebná podrobnejšia analýza.

Záver

Cieľom práce bola problematika využitia fuzzy hodnotenia v úlohách viackriteriálneho rozhodovania za neurčitosti. Z tohto cieľa vyplynuli konkrétne čiastkové ciele:

- problém normalizácie fuzzy čísiel,
- agregácia parciálnych fuzzy hodnotení,
- výber a porovnanie metód usporiadania fuzzy čísiel, ktorých výsledkom bol výber kompromisnej varianty.

V prvej časti práce boli vysvetlené základy viackriteriálneho rozhodovania, popísané metódy výberu kompromisnej varianty založené na metóde váženého súčtu a popísané a vysvetlené fuzzy množiny a fuzzy čísla. Ďalej tu bola uvedená stručná charakteristika metód porovnania fuzzy čísiel.

Po teoretickom úvode bola opísaná a definovaná normalizácia fuzzy hodnotení využitím metódy váženého súčtu a metódy bázičného variantu. Následne bola ukázaná agregácia parciálnych fuzzy hodnotení, ktorá vychádzala z teoretických základov uvedených v prvej kapitole. Boli vysvetlené a ukázané tri vybrané metódy porovnania fuzzy čísiel:

- fuzzy max order,
- relácia preferencie dvoch fuzzy čísiel,
- porovnanie pomocou číselnej charakteristiky,

pričom sme poukázali na ich fungovanie a ukázali sme triedy fuzzy čísiel, ktoré sa danou metódou dajú, respektíve nedajú porovnať.

V záverečnej časti práce sme ukázali na vzorovom príklade celý postup výberu kompromisnej varianty využitím vybraných metód. Na základe výsledkov tejto úlohy boli ako metódy normovania fuzzy čísiel založené na metóde váženého súčtu, tak aj vybrané metódy porovnania fuzzy čísiel zhrnuté, porovnané a bolo poukázané na ich výhody a nevýhody.

Zoznam použitej literatúry

1. ZADEH, L.A. 1965. „Fuzzy Sets“ *Information and Control*. Vol 8. Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California. 1965
2. DUBOIS, D. 1980. *Fuzzy sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1980. 393 s. ISBN 978-00-809-1772-6
3. KAUFMANN A., Gupta M. 1991. *Introduction to Fuzzy Arithmetic*. Van Nostrand Reinhold Company, 1991. 384 s. ISBN 978-0442008994
4. MATHWORKS, *Foundations of Fuzzy logic* [online], [cit. 1. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<http://www.mathworks.com/help/fuzzy/foundations-of-fuzzy-logic.html?requestedDomain=www.mathworks.com>>
5. KLINGENBERG B., *Defining Fuzzy Sets* [online], [cit. 1. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<https://www.calvin.edu/~pribeiro/othrlnks/Fuzzy/fuzzysets.htm>>
6. KLINGENBERG B., *Defining Fuzzy Operations* [online], [cit. 1. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<https://www.calvin.edu/~pribeiro/othrlnks/Fuzzy/fuzzyops.htm>>
7. SCHMID, CH., *Elementary operators for fuzzy sets* [online], [cit. 2. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<http://www.atp.ruhr-uni-bochum.de/rt1/syscontrol/node118.html>>
8. ŽITNIAK J., *Reprezentácia neurčitých poznatkov a Fuzzy množiny* [online], [cit. 3. Marec 2016]. Dostupné na internete: <http://www2.fiit.stuba.sk/~kapustik/ZS/Clanky0304/zitniak/JZ.htm#_Toc55644977>
9. KRAMOSIL, I. - MICHÁLEK, J. *Fuzzy metrics and Statistical Metric Spaces* [online], [cit. 5. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<http://www.kybernetika.cz/content/1975/5/336/paper.pdf>>
10. BEDE, B. 2013. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer Heidelberg, New York. 2013. ISBN 1434-9922
11. DOROHONCEANU, B. 2002. *Comparing Fuzzy Numbers* [online], [cit. 7. Marec 2016]. Dostupné na internete: <<http://www.drdobbs.com/jvm/comparing-fuzzy-numbers/184405225>>
12. MARIN, B. – DOROHONCEANU, B. *A Simple Method for Comparing Fuzzy Numbers* [online], [cit. 13. Marec 2016]. CAIP Center, Rutgers University,

- Piscataway, NJ. Dostupné na internete: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.17.9044&rep=rep1&type=pdf>>
13. TALAŠOVÁ, J. 2003. *Fuzzy Metody Vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*. Univerzita Palackého, Olomouc. 2003. 179 s. ISBN 80-224-0614-4
 14. ČERNÝ, M. – GLUCKAUFOVÁ, D. 1987. *Vícekriteriální rozhodování za neurčitosti*. Academia, Praha. 1987. 148 s.
 15. DENG-FENG, L. 2014. *Decision and Game Theory in Management With Intuitionistic Fuzzy Sets*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2014. 444 s. ISBN 978-3-642-40711-6
 16. DE RUNZ, C. et al. 2006. *A new Method for the Comparison of two fuzzy numbers extending Fuzzy Max Order* [online], [citované 20. Marec 2016]. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Éditions EDK, Paris, France. 2006. Dostupné na internete: < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00560708> >
 17. QUOC DAT, L. – YU, V. – CHOU, S. 2012. *An Improved Ranking Method for Fuzzy Numbers Based on the Centroid-Index* [online], [citované 18. Marec 2016]. Dostupné na internete: < http://www.ijfs.org.tw/ePublication/2012_paper_3/ijfs12-3-r-7-An%20Improved%20Ranking%20Metho.pdf >
 18. MALLAK, S. 2013. *A Fuzzy Comparison Method for Particular Fuzzy Numbers* [online], [citované 3. Apríl 2016]. Palestine Technical University, Department of Applied Mathematics. Dostupné na internete: < http://jmmrc.uk.ac.ir/pdf_525_77f0bb8524f831376750f13b8ca1201e.html >
 19. TZENG, H. – HUANG, J. 2014. *Fuzzy Multiple Objective Decision Making*. CRC Press, Taylor and Francis Group, NW. 2014. 299 s. ISBN 978-1-4665-5462-7
 20. ABBASBANDY, S. – HAJJARI, T. 2009. *A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers* [online], [citované 18. Apríl 2016]. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Teheran, Iran. 2009. Dostupné na internete: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122108006238>>
 21. HAJJARI, T. *New centroid index for ordering fuzzy numbers* [online], [citované 10. Marec 2016]. Department of Mathematics, Islamic Azad University, Teheran, Iran. Dostupné na internete: <<http://mathematics.scientific-journal.com/articles/1/2.pdf>>

22. HAJJARI, T. *Ranking Indices for Fuzzy Numbers* [online], [citované 29. Marec 2016]. Department of Mathematics, Islamic Azad University, Teheran, Iran. Dostupné na internete: <<http://cdn.intechopen.com/pdfs/34447.pdf>>
23. ABBASBANDY, S. 2009. *Ranking of fuzzy numbers, some recent and new formulas* [online], [citované 3. Apríl 2016]. Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Teheran, Iran. 2009. Dostupné na internete: <
<https://pdfs.semanticscholar.org/09ce/bc3d62e3b08522aee146c25105256defc5f6.pdf>>
24. YAGHOBI, M. et. al. 2014. *Comparison of Fuzzy Numbers with Ranking Fuzzy and Real Number* [online], [citované 5. Apríl 2016]. Iran. 2014. Dostupné na internete: <
<https://www.google.sk/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwi5hJWjzbLMAhWqJMAKHShXDwEQFggaMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.isr-publications.com%2Fjms%2F726%2Fdownload-comparison-of-fuzzy-numbers-with-ranking-fuzzy-and-real-number&usg=AFQjCNG3HkpQyqDrWX7P4hzlOaHZJoWxg&sig2=Ka5EhX2RqVS0qN69-QdUmQ&bvm=bv.120853415,d.ZGg>>
25. XU, L. – YANG, J. 2001. *Introduction to Multi-Criteria Decision Making and the Evidential Reasoning Approach*. Manchester School of Management, University of Manchester Institutes of Science and Technology. 2001. 21s. ISBN 1-86115-111-X
26. BROŽOVÁ, H. – HOUŠKA, M. 2002. *Základní metody operační analýzy*. Česká zemědělská univerzita v Praze, Praha. 2002. 244 s. ISBN 80-213-0951-2
27. BROŽOVÁ, H. – HOUŠKA, M – ŠUBRT, T. 2003. *Modely pro vícekritériální rozhodování*. Credit, Praha. 2003. 178 s. ISBN 80-213-1019-7
28. GROMAN, G. 2012. *Fuzzy logika a jej aktuálne aplikácie*. Bakalárska práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Bratislava.
29. SINGH, H. et. al. 2013. *Real-Life Applications of Fuzzy Logic* [online], [citované 27. Apríl 2016]. Dostupné na internete: <
<http://www.hindawi.com/journals/afs/2013/581879/>>
30. COUPLAND, S. 2009. *Fuzzy Logic in Real World* [online], [citované 27. Apríl 2016]. Dostupné na internete: < <http://www.slideshare.net/BCSLeicester/fuzzy-logic-in-the-real-world-2326817> >

31. TRIANTAPHYLLOU, E. 2000. *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*. Dordrecht:Kluwer, 2000. ISBN 0-7923-6607-7
32. MARLER, T. – ARORA, J. 2010. *The Weighted Sum Method for Multi-Objective Optimization: New insights* [online], [citované 28. Apríl 2016]. Dostupné na internete: https://www.researchgate.net/publication/225485886_The_Weighted_Sum_Method_for_Multi-Objective_Optimization_Some_Insights
33. NOVOSÁDOVÁ, L. 2010. *Metody porovnávání fuzzy čísel*. Bakalárska práca. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká Fakulta, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky. Olomouc.
34. NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. SNTL, Praha
35. *Fuzzy Logic Membership Function* [online], [citované 10. Apríl 2016]. Dostupné na internete: <http://www.bindichen.co.uk/post/AI/fuzzy-inference-membership-function.html>
36. NOVÁK, V. *Fuzzy sets and their applications*. 1989. Adam-Hilger, Bristol. 1989
37. RAMIK, J. – RIMANEK, J. 1985. *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization*. Fuzzy Sets and Systems. 1985.
38. NASSERI, S. – SOHRABI, M. 2010. *Hadi's method and it's advantage in ranking fuzzy numbers*. Australian Journal of Basic and Applied Sciences. 2010
39. RAMLI, N. – MOHAMAD, D. 2009. *A comparative analysis of centroid methods in ranking fuzzy numbers*. European Journal of Scientific Research. 2009.
40. LADOVSKÝ, T. 2011. *Prehľad metód porovnania fuzzy čísel*. Posterus. ISSN 1338-0087
41. FISHBURN, 1967. *Weighted Sum Model*
42. FOTR a kol., 2006. *Manažerské rozhodování postupy, metody a nástroje*. EKOPRESS, Praha .2006. 409 s. ISBN 80-86929-15-9
43. WANG, Y. – LUO, Y. *Are ranking fuzzy numbers based on positive and negative ideal points* [online], [citované 22. Apríl 2016]. China. Dostupné na internete: http://ac.els-cdn.com/S0898122109005896/1-s2.0-S0898122109005896-main.pdf?_tid=9eae12e6-0dbf-11e6-9e2b-00000aacb360&acdnat=1461902913_d06d0727bd9083d56909fc045c459061
44. KRAFT, D. 1994. *An extended fuzzy linguistic approach to generalize Boolean information retrieval* [online], [citované 23. Apríl 2016]. Dostupné na internete: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1069011594900329>

45. GAGOLEWSKI, M. 2015. *A Guide to the FuzzyNumbers Package for R* [online], [citované 17. Apríla 2016]. Systems Research Institute, Polish Academy of Science. Warsaw, Poland. 2015. Dostupné na internete: <<https://cran.r-project.org/web/packages/FuzzyNumbers/vignettes/FuzzyNumbersTutorial.pdf>>