

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
NÁRODOHOSPODÁRSKA FAKULTA

Evidenčné číslo: 101007/I/2021/36100139018246404

Aplikácia teórie portfólia v praxi
Diplomová práca

2021

Bc. Richard Macúš

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
NÁRODOHOSPODÁRSKA FAKULTA

Aplikácia teórie portfólia v praxi
Diplomová práca

Študijný program: Bankovníctvo

Študijný odbor: Ekonómia a manažment

Školiace pracovisko: Katedra bankovníctva a medzinárodných financií

Vedúci záverečnej práce: Ing. Boris Šturc, CSc.

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som celú diplomovú prácu, vrátane všetkých príloh, vypracoval samostatne. Pri zadaní diplomovej práce som bol oboznámený s predpismi pre jej vypracovanie.

Dátum:

.....

Vlastnoručný podpis študenta

POĎAKOVANIE

Týmto spôsobom by som sa chcel srdečne poďakovať svojmu školiteľovi Ing. Borisovi Šturcovi za jeho odbornú pomoc, cenné rady, postrehy a usmernenia pri písaní tejto diplomovej práce.

ABSTRAKT

MACÚŠ, Richard: Aplikácia teórie portfólia v praxi. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Národohospodárska fakulta; Katedra bankovníctva a medzinárodných financií. – Vedúci diplomovej práce: Ing. Boris Štunc, CSc. – Bratislava: NHF EU, 2021, 74 s.

Cieľ diplomovej práce predstavuje aplikovanie modelu modernej teórie portfólia takým spôsobom, aby mali skonštruované investičné portfólia – aktívne a pasívne - potenciál dlhodobo porážať trhový priemer pri čo najoptimálnejšom pomere rizika a výnosu. Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Obsahuje dva obrázky, osem tabuliek a tridsaťjedna grafov. Prvá kapitola pojednáva o základných stavebných prvkoch modernej teórie portfólia, akými sú riziko pri investovaní, spôsoby merania tohto rizika, či vzťah jednotlivca k riziku. Ďalšia kapitola podrobne približuje mechanizmus fungovania modernej teórie portfólia. V tretej časti sa venujeme praktickej aplikácii modelu, taktiež aj v tandeme s algoritmom strojového učenia. Ostatná časť je venovaná diskusii o výsledkoch z tretej kapitoly.

Kľúčové slová: teória portfólia, optimalizácia, riziko

ABSTRACT

MACÚŠ, Richard: Application of the portfolio theory in practice. – University of Economics in Bratislava. Faculty of National Economics; Department of banking and international finance. – Master thesis supervisor: Ing. Boris Šturc, CSc. – Bratislava: NHF EU, 2021, 74 pages.

The main target of the master thesis is the application of the modern portfolio theory such that the constructed investment portfolios – active one and passive one – will be able to regularly beat the market benchmark, while keeping the most optimal ratio of risk and return. The thesis is divided to four sections. It contains two pictures, eight tables and thirtyone charts. The first chapter gives particularly attention to the basic building blocks of the modern portfolio theory, such as risk associated with investing; ways of the measurement of this risk, or the relationship between investor and risk. Next chapter illustrates in detail, how the mechanics of the modern portfolio theory works. In the third section we deploy the model, also together with the machine learning algorithm. The final section represents the discussion about results from the chapter 3.

Key words: portfolio theory, optimisation, risk

OBSAH

ZOZNAM OBRÁZKOV, TABULIEK A GRAFOV	9
ÚVOD	11
1 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY	12
1.1 Základné východiská riadenia investičného portfólia	13
1.1.1 Riziko a neistota pri investovaní.....	15
1.1.1.1 Typy rizík.....	16
1.1.1.2 Vzťah jednotlivca k riziku	19
1.1.1.3 Meranie rizika	23
1.1.2 Základné druhy stratégií riadenia investičného portfólia	28
1.2 Teória portfólia.....	30
1.2.1 Základné predpoklady	31
1.2.2 Mechanizmus MPT – prípad dvoch aktív	32
1.2.3 Mechanizmus MPT – prípad viacerých aktív.....	33
1.2.4 Model oceňovania kapitálových aktív (CAPM)	37
1.2.5 Optimalizácia portfólia pri alternatívnom meraní rizika prostredníctvom TVaR	37
2 CIELE A METODIKA PRÁCE	39
2.1 Výber aktív	40
2.2 Výber premenných	45
2.2.1 Fundamentálne ukazovatele	46
2.2.2 Štatistické ukazovatele	48
2.3 Výber modelu.....	50
2.3.1 Klasifikačné stromy a Random Forest	51
2.4 Priebeh experimentu.....	53
3 VÝSLEDKY PRÁCE.....	55
3.1 Optimalizácia pasívneho portfólia	55
3.2 Optimalizácia aktívneho portfólia	60
3.2.1 Implementácia modelu	62
3.2.2 Výsledky aktívneho portfólia	67
4 DISKUSIA.....	71
ZÁVER	72
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY.....	73

ZOZNAM OBRÁZKOV, TABULIEK A GRAFOV

Zoznam obrázkov:

Obrázok 1 klasifikačný strom	51
Obrázok 2 random forest	53

Zoznam tabuliek:

Tabuľka 1 parametre aktív	43
Tabuľka 2 korelácie aktív	44
Tabuľka 3 korelácie premenných	50
Tabuľka 4 porovnanie pasívneho portfólia a SPY	57
Tabuľka 5 matica klasifikačných chýb	63
Tabuľka 6 matica klasifikačných chýb na verifikačnom sete	65
Tabuľka 7 matica klasifikačných chýb na validačnom sete	65
Tabuľka 8 porovnanie aktívneho portfólia a SPY	67

Zoznam grafov:

Graf 1 ECDF výnosov indexu S&P 500	14
Graf 2 funkcie užitočnosti	22
Graf 3 indiferenčné krivky	23
Graf 4 Beta distribúcia	25
Graf 5 Vplyv diverzifikácie na riziko portfólia	27
Graf 6 MTP – prípad dvoch aktív	33
Graf 7 Efektívna hranica	35
Graf 8 efektívna hranica a risk free aktívum	36
Graf 9 dlhopisové spready	47
Graf 10 mesačné zmeny PMI a manufaktúrnych objednávok	48
Graf 11 YoY, QoQ, MoM výnosov indexu S&P 500	48
Graf 12 počet mesiacov pohybu ceny v jednom smere	49
Graf 13 váhy aktív	55
Graf 14 modifikované váhy	56
Graf 15 empirická efektívna hranica	57
Graf 16 distribúcie výnosov na verifikačnom a validačnom sete	58
Graf 17 vývoj výnosov pasívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete	58
Graf 18 vývoj indexov pasívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete	59
Graf 19 vývoj výnosov pasívneho portfólia a SPY na validačnom sete	59
Graf 20 vývoj indexov pasívneho portfólia a SPY na validačnom sete	60

Graf 21 vývoj portfólií s rôznym pomerom dlhopisov.....	61
Graf 22 optimálne aktívne portfólio vs SPY	61
Graf 23 optimálne váhy dlhopisov	62
Graf 24 významnosť premenných	64
Graf 25 významnosť premenných v novom modeli.....	66
Graf 26 predikcie pomeru dlhopisov.....	66
Graf 27 distribúcie výnosov aktívneho portfólia na verifikačnom a validačnom sete.....	68
Graf 28 vývoj výnosov aktívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete	68
Graf 29 vývoj indexov aktívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete.....	69
Graf 30 vývoj výnosov aktívneho portfólia a SPY na validačnom sete.....	69
Graf 31 vývoj indexov aktívneho portfólia a SPY na validačnom sete	70

ÚVOD

Spomedzi mnohých teórií v oblasti ekonómie a financií predstavuje teória portfólia jeden z najvýznamnejších prínosov do sveta riadenia aktív. Už dlhé roky slúži investorom rôzneho druhu a rozmeru pre účely zefektívnenia ich investičných stratégií. Minimalizácia rizika, ako jedného z nevyhnutných a základných prvkov investovania, je cieľom každého racionálneho jednotlivca zúčastňujúceho sa obchodovania na finančnom trhu. Je možné tvrdiť, že bez kvalitného riadenia rizika je každá aktívna investičná či obchodná burzová stratégia len márnou snahou o dosiahnutie nadpriemerného výnosu. Investori, ktorí nekladú dôraz na riadenie rizika minimálne v rovnakom rozsahu ako na dosahovanie výnosu, sú väčšinou odsúdení na neúspech.

Je zrejmé, že pokiaľ existuje množina investorov dosahujúcich rôzne úrovne výnosnosti pri rovnakej úrovni rizika s podobnými inštrumentmi, niektorí z nich nevyužívajú dostatočne potenciál aktív vo svojich portfóliach. Toto zbytočné ukracovanie sa o vyššie výnosy pri podstupovaní určitého stupňa rizika je najmä dôsledkom nekvalitného risk manažmentu. Pravdaže, môže nastať aj opačný prípad, kedy investori držiaci podobné aktíva podstupujú rôznu mieru rizika pri rovnakej úrovni výnosu. V oboch prípadoch sa otvára priestor pre optimalizáciu portfólií z hľadiska nájdenia ideálneho kompromisu medzi rizikom a výnosom. Práve teória portfólia predstavuje zásadnú metódu, prostredníctvom ktorej možno takúto optimalizáciu uskutočniť, a zvýšiť tým efektivitu investovania peňažných zdrojov. Zvýšenie efektivity sa, pravdaže, prejavuje aj na zvýšení užitočnosti investora – čo je primárnym cieľom, ktorý sa racionálny investor snaží dosiahnuť.

Samotnej aplikácii teórie portfólia predchádzajú rôzne iné činnosti, od výberu potenciálnych inštrumentov, cez analýzy rôzneho charakteru, až po finálnu selekciu aktív a načasovanie investície. Ide o skladačku, v ktorej všetky časti musia do seba čo najlepšie zapadnúť, aby sa dostavil čo najideálnejší efekt z investovaných zdrojov. Risk manažment a optimalizácia portfólia však predstavujú jeden z najpodstatnejších pilierov celej problematiky, nakoľko sme vďaka optimalizačným procesom schopní investovať nielen efektívnejšie, ale aj bezpečnejšie.

1 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Efektívna stratégia riadenia investičného portfólia a jeho rizika vytvára základný predpoklad pre generovanie pravidelných ziskov na finančných trhoch. Témou optimálneho portfólia manažmentu sa zaoberá prakticky celé spektrum investorov, od veľkých inštitucionálnych, až po bežných retailových. Je možné tvrdiť, že daná téma kombinuje základné filozofické premisy o rozhodovaní investorov na finančných trhoch s metódami pokročilej matematiky. Oblasť portfólia manažmentu sa, prirodzene, dynamicky vyvíja. Postupom času prechádzali investori od primitívnych, na čoraz sofistikovanejšie stratégie riadenia aktív. V dnešnej dobe sa na vývoji týchto stratégií podieľa v čoraz vyššej miere aj umelá inteligencia. Súčasnú najpoprednejšiu metódu riadenia aktív a rizika vo finančných inštitúciách predstavujú náročné, komplexné matematicko-štatistické modely, ktoré čoraz úspešnejšie dokážu minimalizovať pravdepodobnosť negatívnych deviácií od očakávaného výsledku¹. Svoju rolu v spôsobe riadenia portfólia samozrejme zohráva aj regulácia. Nakoľko je finančný systém chrbtovou kosťou ekonomiky, je žiadúce, aby boli modely portfólia a risk manažmentu bánk aspoň do určitej miery regulované zo strany dozorovacích správnych orgánov, aby nebol finančný systém vystavený príliš veľkému riziku a predišlo sa tak podobným udalostiam ako nastali v roku 2008. Svetové hospodárstvo totiž kolabovalo v tom čase vo vysokej miere práve pre katastrofálny risk manažment bánk. V súčasnosti existuje mnoho metód a stratégií riadenia aktív a rizika, pričom Moderná teória portfólia patrí medzi najznámejšie. Na jej základe možno konštruovať z rôznych tried aktív portfólia s optimálnym pomerom rizika a výnosu, vďaka čomu je investor spôsobilý maximalizovať svoju užitočnosť².

¹ NOVICK, Barbara a kol. Artificial intelligence and machine learning in asset management. [online]. 2019. 9 p. [cit. 13. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.blackrock.com/corporate/literature/whitepaper/viewpoint-artificial-intelligence-machine-learning-asset-management-october-2019.pdf>

² GARCIA, Theresa – BORREGO, Daniel. Markowitz efficient frontier and capital market line – evidence from the portuguese stock market. [online]. In: EJMS, vol. 22, no 1. Lisbon : ISEG, 2017. [cit. 14. 10. 2020]. ISSN 2183-4172. Dostupné na: https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/13948/1/3_EJMSVol22Issue1.2017_3-23.pdf

1.1 Základné východiská riadenia investičného portfólia

V súvislosti s riadením investičného portfólia je nevyhnutné pripomenúť základné princípy a faktory, ktorými je tvorba investičných rozhodnutí ovplyvňovaná. Rovnako tak je dôležité spomenúť aj rozsah možností investora v súvislosti s rôznymi druhmi investičných aktív a stratégií, prostredníctvom ktorých je investor spôsobilý dosahovať požadovanú mieru výnosu pri danej miere rizika. Pokiaľ ide o základné prvky determinujúce investičné rozhodnutia, sú nimi:

- a) Požadovaný výnos:** investori nakupujú a predávajú investičné aktíva s cieľom výnosu. Výnos predstavuje odmenu pre investora za vzdanie sa likvidity na určitý čas a podstúpenie rizika spočívajúceho v prípade nepriaznivého výsledku realizovanej investície. Výnosom sa rozumie tak zisk dosiahnutý z úrokov alebo dividend, ako aj kapitálový výnos z kurzového rozdielu medzi nákupnou a predajnou cenou aktíva³:

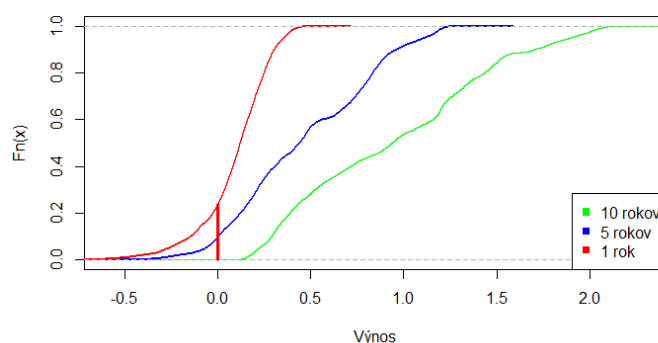
$$R_{t,T} = \frac{(P_T - P_t) + \sum CF_{t,T}}{P_t} * 100$$

- b) Riziko:** predstavuje variabilitu možných výsledkov investičného rozhodnutia, predovšetkým variabilitu nepriaznivejších výsledkov, ako je očakávaný výsledok. V súvislosti s investovaním je nepriaznivým výsledkom nielen skutočná strata, ale aj alternatívny zisk, ktorý by investor dosiahol v prípade, keby svoje zdroje alokoval do iného inštrumentu s obdobnými vlastnosťami. Je však potrebné podotknúť, že bez kurzového rizika (volatility) by neexistovala ani možnosť kapitálového výnosu. Práve volatilita je z veľkej časti dôvodom, prečo je za normálnych okolností vzťah medzi rizikom a potenciálnym výnosom pozitívny.
- c) Čas:** je dôležitým determinantom tvorby investičného rozhodnutia. Zvolená investičná stratégia či nástroj vo veľkej miere závisí od dĺžky obdobia, počas ktorého je investor ochotný mať svoje zdroje viazané vo finančných inštrumentoch. V súčasnosti je investor spôsobilý generovať výnosy v časovom horizonte od desiatok rokov, až po zlomky sekúnd (High frequency trading). Je dôležité poznamenať, že čím je investičný horizont kratší, tým viac sa s investovaním spája

³ CFA Institute. CFA Institute Investment Foundations Program. 3rd Ed., vol. 1, 2018. 418 s. ISBN 1946442747.

prvok nepredikovateľnej náhodnej udalosti⁴. Z dlhodobého hľadiska je však trendová zložka vývoja ceny väčšiny aktív rastúca, nakoľko kopíruje ekonomický cyklus a rast⁵. Investor má zároveň možnosť inkasovať pravidelný výnos v podobe úrokov či dividend. Z týchto dôvodov pravdepodobnosť negatívneho výnosu vo vzťahu k dĺžke investičného horizontu v prípade vysoko diverzifikovaného portfólia klesá prakticky k nule:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (P(R_{t,T} \leq 0)) = 0$$



Graf 1 ECDF výnosov indexu S&P 500

Zdroj: Vlastná tvorba

Na grafe vyššie sú znázornené empirické distribučné funkcie výnosov amerického akciového indexu S&P 500 dosahovaných v priebehu ročných, 5 ročných a 10 ročných investičných horizontov (merané na základe denných údajov od roku 1970). Je možné vidieť, že čím je investičný horizont kratší, tým vyššiu hodnotu nadobúda empirická distribučná funkcia v bode 0.

- d) Likvidita:** Likvidita predstavuje čas, v rámci ktorého je investor spôsobilý zameniť investičné aktíva vo svojom portfóliu za hotové peniaze s tým, aby bola hodnota aktíva ovplyvnená transakciou v čo najmenšom rozsahu. Prirodzenou snahou investora je dosahovanie čo možno najvyššej úrovne likvidity svojho

⁴ Is day trading a good idea?. [online]. 2020. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.summitwealthgroup.com/blog/is-day-trading-a-good-idea>

⁵ MIJOT, Éric. Long cycles and the asset markets. [online] Amundi discussion papers series, 2015. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://research-center.amundi.com/page/Publications/Discussion-Paper/2015/Long-cycles-and-the-asset-markets>

portfólia⁶. Z finančných nástrojov, ktoré sa vyznačujú rovnakou mierou rizika a generujú rovnaký cash flow, je viac oceňovaný ten nástroj, ktorý sa vyznačuje vyššou mierou likvidity. V tejto súvislosti hovoríme o *likvidnej prémii*, ktorú investor platí za istotu, že bude môcť dané aktívum dostatočne rýchlo predať za adekvátnu cenu v rôznych trhových podmienkach⁷.

Cieľom investora je zostaviť také investičné portfólio, ktoré dosahuje čo najlepšie parametre vyššie uvedených ukazovateľov. To znamená, že investor hľadá portfólio, ktoré mu zabezpečí čo najvyšší výnos v čo najkratšom čase pri minimálnom riziku a maximálnej likvidite. Problém však predstavuje skutočnosť, že jednotlivé parametre, resp. ciele sú si navzájom konkurenčné. Takýto trade-off medzi výnosom, rizikom a likviditou investície sa nazýva tzv. magický trojuholník.

1.1.1 Riziko a neistota pri investovaní

Riziko predstavuje jednu zo zásadných a neodmysliteľných súčastí investovania na finančných trhoch. Je možné tvrdiť, že každá jedna investícia podlieha určitému typu rizika, resp. niekoľkým typom rizík naraz. Dokonca aj tzv. risk-free investície, ako napríklad nákup depozitných certifikátov či termnovaný vklad, sa spájajú s istou mierou rizika⁸. Ako bolo spomenuté, riziko predstavuje neistotu ohľadom možných nepriaznivých výsledkov investície. V tomto momente je však potrebné oddeliť význam samotného slova neistota od slova riziko. Oba pojmy predstavujú variabilitu možných budúcich výsledkov, pričom však v prípade rizika je možné priradiť týmto výsledkom pravdepodobnosti na základe historických dát a následne vypočítať očakávaný výsledok a varianciu, prípadne aplikovať rôzne metódy na meranie rizika a dôsledkov. V prípade neistoty niečo podobné možné nie je. Neistota môže byť subjektívna alebo objektívna, zatiaľ čo riziko je možné kvantifikáciou objektivizovať. V prípade objektívnej neistoty je reč o náhodnosti určitých prvkoch a procesoch, ktorých vývoj nie je možné spoľahlivo odhadnúť ani s pomocou všetkých informácií o daných procesoch. Pokiaľ ide o subjektívnu neistotu, prekážkou pri

⁶ DALTON, Austin. Introduction of investments and portfolio management. [online]. 2016. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://silo.tips/download/chapter-1-introduction-of-investments-and-portfolio-management#>

⁷ HAYES, Adam. Liquidity. [online]. 2021. [cit. 23. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/l/liquidity.asp>

⁸ The Reality of Investment Risk. [online]. 2021. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.finra.org/investors/learn-to-invest/key-investing-concepts/reality-investment-risk>

spoľahlivom odhade vývoja daného javu, resp. procesu, je relatívny nedostatok informácií alebo skúseností súvisiacich s týmto javom.

Napriek tomu, že riziko a neistota sa spájajú predovšetkým s množinou negatívnych odchýliek od očakávaného výsledku, je dôležité pripomenúť, že podobne ako pri iných podnikateľských rizikách, aj pri investovaní na finančných trhoch platí medzi mierou rizika a potenciálnym výnosom priama úmera, pričom spôsob, akými sú rôzne kategórie rizík riadené, má zásadný dopad na výsledok investície⁹.

1.1.1.1 Typy rizík

Ako bolo naznačené, v súvislosti s investovaním na finančných trhoch je možné rozlišovať viacero druhov rizík, pričom každé z nich si vyžaduje odlišný prístup v procese jeho riadenia. Za najvyššie deliace kritérium je možné považovať rozdelenie rizika na:

- a) **systemové**: predstavuje varianciu výnosov jednotlivých aktív vzniknutú v dôsledku exogénnych faktorov pôsobiacich na finančný trh ako celok. Exogénnymi faktormi sú predovšetkým makroekonomické, menovopolitické, politické alebo prírodné javy a vplyvy. Za všeobecný nástroj merania systémového rizika je považovaný beta koeficient, ktorý určuje citlivosť zmeny ceny určitého aktíva na zmenu ceny trhového portfólia. Z uvedeného vyplýva, že tento druh rizika nie je možné spoľahlivo neutralizovať iba prostredníctvom diverzifikácie investície medzi viacero aktív, nakoľko systémové riziko ovplyvňuje každé z týchto aktív podobným spôsobom. Do istej miery je jeho zníženie však možné pomocou diverzifikácie medzi jednotlivými druhmi aktív v portfóliu. Typický príklad predstavuje diverzifikácia investície medzi akcie a dlhopisy – pokým v období zvýšenej neistoty a rizika ocenenie rizikovejších akcií zvyčajne klesá, ocenenie vládnych dlhopisov ako relatívne vysoko bezpečnej investície rastie.
- b) **nesystemové**: tento druh rizika vyplýva z faktorov, ktoré sú špecifické iba pre konkrétne aktívum. Môže sa označovať aj ako jedinečné, pričom sa spája s konkrétnou spoločnosťou, ktorá dané aktívum emitovala, či sektorom, ktorého spoločnosti patria do portfólia podielového fondu. Jedinečné riziko je na rozdiel od systémového rizika možné znížiť prostredníctvom diverzifikácie aj v rámci triedy

⁹ Základné pojmy a poznatky o riadení rizika a zvlášť o riadení úverového rizika. [online] In: Finančné trhy, roč. 17, č. 9. Bratislava : Derivat, s. r. o, 2004. [cit. 24. 10. 2020]. ISSN 1336 – 5711. Dostupné na: <http://www.derivat.sk/index.php?PageID=272>

aktív podobného druhu, vyznačujúcimi sa podobnými vlastnosťami, avšak inými špecifickými rizikami. Vďaka diverzifikácii je možné kompenzovať negatívnu varianciu jedného aktíva pozitívnou varianciou iného aktíva. Nesystémové riziko predstavuje spolu so systémovým rizikom celkovú varianciu daného aktíva¹⁰.

Pokiaľ ide o ďalšie hlavné podmnožiny vyššie uvedených kategórií, systémové riziko je ďalej možné ďalej členiť napríklad na:

- **Riziko úrokovej miery** – tento druh rizika má najvýznamnejší vplyv na dlhopisový trh, prípadne iné dlhové nástroje s fixným výnosom počas doby životnosti. V dôsledku zmeny úrokovej miery dochádza bezprostredne aj k zmenám cien jednotlivých dlhových nástrojov. Nepriamo, v menšom rozsahu a s určitým oneskorením ovplyvňuje úroková miera aj ceny akcií. Podobne ako pri dlhových nástrojoch, aj pri akciách je pozorovaný väčšinou inverzný vzťah medzi zmenou úrokovej miery a cenou akcie¹¹.
- **Inflačné riziko** – reálny výnos investície predstavuje rozdiel skutočného výnosu a miery inflácie, ktorá sa prejavila v priebehu investičného horizontu. Navyše, inflácia má negatívny vplyv na ceny dlhových inštrumentov (to neplatí v prípade nástrojov, ktorých cash flow sa mení v smere zmeny cenovej hladiny – tzv. indexové obligácie), nakoľko musí byť zmena reálneho výnosu v dôsledku inflácie sprevádzaná zmenou ceny dlhopisu, aby nedošlo k zmene požadovaného výnosu. Ide tak o dôležitú makroekonomickú náhodnú premennú, ktorú investori musia zakomponovať do svojich očakávaní a analýz.
- **Riziko reinvestovania pri nižšom výnose** – spája sa s aktívami, pri ktorých je možnosť spätného reinvestovania výnosu do daného aktíva. Ide o riziko, že v čase možnosti reinvestovania cash flowu sa bude aktívum vyznačovať nižším očakávaným výnosom. Toto riziko je tým vyššie, čím dlhšia je doba splatnosti aktíva a pomerne úzko súvisí s prvým spomenutým rizikom. V prípade dlhopisov s nulovým kupónom či akcií nevyplácajúcich dividendy je toto riziko, prirodzene, nulové.

¹⁰ OBAIDULLAH, Jan. Systematic risk. [online]. 2019. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://xplains.com/305921/systematic-risk>

¹¹ HALL, Marry. How do interest rates affect the stock market?. [online]. 2020. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/investing/how-interest-rates-affect-stock-market/>

- **Menové riziko** – predstavuje varianciu hodnoty meny, v ktorej je investícia denominovaná. Môže významným spôsobom ovplyvniť výsledok investície. Toto riziko sa však dá čiastočne alebo úplne eliminovať pomocou zaistovacích derivátov. Treba poznamenať, že riziko nepriaznivého vývoja globálnej ekonomiky je do istej miery znížené v prípade investovania do aktív denominovaných v menách, ktoré sa zvyknú počas obdobia globálnej neistoty alebo dokonca recesie zhodnocovať – typickým príkladom je americký dolár ako svetová rezervná mena¹².

Je nutné dodať, že riziká zmeny cien dlhopisov, ktoré nastávajú v dôsledku zmien úrokovej miery alebo inflácie, sa týkajú výlučne investorov, ktorí nedržia daný nástroj v portfóliu do doby splatnosti. Inak jediné riziko, ktoré implikuje zmena úrokovej miery, predstavuje riziko vyššieho alternatívneho výnosu, ktorý by investori dosiahli, ak by sa rozhodli uskutočniť investíciu pri vyššom úroku. Naopak, pokiaľ investor drží v portfóliu dlhopisy, ktorých splatnosť je kratšia ako je investičný horizont, je tým zvýšené reinvestičné riziko. V čase splatnosti dlhopisov bude investor totiž nútený nakúpiť do portfólia nové obligácie, či sa mu to páči alebo nie. V prípade jedinečného rizika je možné uviesť nasledujúce príklady:

- **Obchodné riziko** – ide o mieru variability v príjmoch spoločnosti, ktorej cenné papiere investor vlastní. Tento druh rizika sa prejavuje predovšetkým na výnosoch do akcií danej spoločnosti, nakoľko veľkosť dividendy je priamo ovplyvnená výškou príjmu. To však neplatí o dlhopisových kupónoch, ktoré je spoločnosť povinná vyplatiť – z tohto dôvodu predstavuje investícia do dlhopisov spoločnosti bezpečnejšiu investíciu, akou je investícia do akcií *tej istej* spoločnosti. Podniky, ktoré sa vyznačujú relatívne nízkou variabilitou príjmov, patria predovšetkým do sektoru utilít. Ich náprotivok tvoria napríklad automobilové spoločnosti.
- **Kreditné riziko** – tento typ nesystematického rizika sa spája predovšetkým s dlhovými cennými papiermi. Predstavuje pravdepodobnosť, do akej nebude emitent spôsobilý uspokojiť svojich veriteľov. Riziko defaultu je kľúčovým determinantom úrokovej sadzby, za ktorú umiestňuje emitent cenné papiere na trh. Ako bolo spomenuté, v tomto prípade platí priama úmera medzi veľkosťou kupónu

¹² CHAVEZ-DREYFUZ, Gertrude. U.S. Dollar gains as recession looms. [online]. 2020. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://in.reuters.com/article/us-global-forex/u-s-dollar-gains-as-global-recession-looms-idUSKBN21J3T9>

a kreditným rizikom. Pri určovaní miery kreditného rizika sa investori spoliehajú predovšetkým na ratingové agentúry.

- **Riziko likvidity** – princípy rizika likvidity boli spomenuté v predchádzajúcom texte. Prirodzene, ide o nesystematické riziko, nakoľko sa spája iba s jedným, konkrétnym aktívom. Ako typický príklad málo likvidného aktíva je možné uviesť realty. Na druhej strane, najlikvidnejšie aktívum predstavujú hotové peniaze¹³.
- **Volatilita** – Podobne ako riziko likvidity, aj volatilita bola už priblížená v predošlom texte. Ide o variabilitu ceny daného aktíva v určitom časovom horizonte, resp. rýchlosť, akou aktívum mení svoju cenu. Aktíva s vysokou volatilitou sa teda pohybujú v širokých cenových pásmach¹⁴. Volatilita je absolútne kľúčovým elementom najmä pri krátkodobom tradingu, kde predstavuje zdroj rýchlych výnosov, resp. strát. V samotnej teórii portfólia, ako bude neskôr ukázané, tvoria základný zdroj rizika investície. Je možné tvrdiť, že miera volatility sa zvyšuje v období, kedy trh prechádza prudkými korekciami nadol a naopak, znižuje sa v období rastovej fázy trhu. Volatilitu je možné členiť na dva typy – historickú a implicitnú. Zatiaľ čo historická predstavuje varianciu ceny v predošlom období, implicitná určuje, akú mieru by mala nadobudnúť volatilita v budúcnosti¹⁵. Najbežnejší spôsob, akým sa investori hedžujú proti prudkým cenovým zmenám, predstavujú napríklad opcie.

1.1.1.2 Vzťah jednotlivca k riziku

V predošlej časti bolo vysvetlené riziko ako také a uvedené boli rôzne typy rizík, ktorým zvyčajne čelia investori na finančných trhoch. V tejto časti bude poukázané na spôsoby, akými sa investori v podmienkach rizika rozhodujú a potenciálny prospech vyplývajúci z ich rozhodnutí. Analýza vzťahu jednotlivca k riziku zahŕňa aplikáciu tak kvantitatívnych metód, ako aj základné psychologické a ekonomické predpoklady o konaní

¹³ 11 Investment risk you need to watch out for in your portfolio. [online]. n. d. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://myrawealth.com/insights/11-investment-risks-you-need-to-watch-out-for-in-your-portfolio>

¹⁴ ŠIROKÝ, Jan. Praktický pruvodce opčením obchodovaním. 2. vyd. Tetčice : Impossible, s.r.o, 2018. 134 s. ISBN 978-80-87673-31-7.

¹⁵ AVATRADE. What is Volatility & How it Affects You?. [online]. 2021. [cit. 27. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.avatrade.ng/education/trading-for-beginners/what-is-volatility>

a rozhodovaní jednotlivca v podmienkach rizika a neistoty¹⁶. Absolútne kľúčový pojem v tejto súvislosti predstavuje užitočnosť z podstupovania rizika.

Zvážme nasledujúcu situáciu: po každom hode mincou (o ktorej predpokladáme, že nie je falošná), po ktorom padne znak, bude jednotlivcovi pripísaná výhra $2n$, pričom n predstavuje počet hodov. V prípade, že padne hlava, hra sa končí. Nastáva otázka, akú maximálnu sumu by bol jednotlivec ochotný zaplatiť za vstup do hry? Očakávanú výhru možno vypočítať nasledovne:

$$E(w) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n * 1/2^n = 2 * \frac{1}{2} + 4 * \frac{1}{4} + 8 * \frac{1}{8} \dots = 1+1+1\dots = \infty$$

Je evidentné, že veľkosť očakávanej výhry diverguje do nekonečna. To implikuje, že jednotlivec by mal byť teoreticky ochotný zaplatiť akúkoľvek sumu za vstup do hry, každá suma totiž bude nižšia ako nekonečno. Uvedená konštrukcia predstavuje tzv. Petrohradský paradox. Podľa švajčiarskeho matematika Jakoba Bernouliho však suma, ktorú je jednotlivec ochotný zaplatiť za hru, závisí len nepriamo na očakávanej výhre, a primárny faktor predstavuje užitočnosť jednotlivca z inkasovanej dodatočnej jednotky výhry. Bernouli pre opis vzťahu medzi užitočnosťou a výškou bohatstva uvažoval jednoduchú logaritmickú funkciu (klesajúca hraničná užitočnosť) $U(w) = \ln(w)$. Potom vieme odvodiť očakávanú užitočnosť:

$$E(u) = \sum_{n=1}^{\infty} U(w) * P(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^n) * 1/2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} * \ln(2) = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 * \ln(2) = 1.39$$

Očakávaná užitočnosť v tomto prípade konverguje k hodnote 1.39. Takúto mieru užitočnosti je možné dosiahnuť pri: $\ln(w) = 1.39$, $w = 4$. Teda suma, ktorú by mal byť ochotný jednotlivec s logaritmickou funkciou užitočnosti zaplatiť za vstup do hry, predstavuje štyri peňažné jednotky¹⁷. Túto sumu je možné nazývať tzv. ekvivalent istoty. Formálne je možné ekvivalent istoty zapísať ako $CE = WE(u)$. Pokiaľ by teda stál vstup do hry uvedenú sumu, jednotlivec s logaritmickou funkciou užitočnosti by bol indiferentný medzi hrou a ponechaním si istej čiastky.

Predpokladajme inú situáciu – funkcia užitočnosti jednotlivca je opäť konkávna: $U(w) = \sqrt{w}$. Tentokrát sa však jednotlivec rozhoduje v podmienkach „férovej hry“, resp. čiastka, ktorú môže vyhrať (4 p. j.), sa rovná sume, ktorú môže prehrať, pričom obe

¹⁶ JOHNSON, T. C. Utility Functions. [online]. 2007. 14 p. [cit. 27. 10. 2020]. Dostupné na: http://www.macs.hw.ac.uk/macshome/ams/msc_actsci/utility_final.pdf

¹⁷ Mathematical statistic. Chapter SEVEN – Uncertainty. [online]. 2007. p. 209-239. [cit. 28. 10. 2020]. Dostupné na: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4433666/mod_folder/intro/Cap.%2007%20NI.pdf

možnosti nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou. Vstup do hry stojí 5 p. j., teda výsledkom môže byť po absolvovaní hry celkovo buď 9, alebo 1 peňažná jednotka.

Dostávame teda:

$$E(w) = 9 * 0.5 + 1 * 0.5 = 5; E(u)_{\text{hrá}} = \sqrt{1} * 0.5 + \sqrt{9} * 0.5 = 2; E(u)_{\text{nehrá}} = \sqrt{5} = 2.24$$

$$E(u)_{\text{hrá}} < E(u)_{\text{nehrá}}^{18}$$

Z uvedeného príkladu vyplýva, že očakávaná užitočnosť jednotlivca je vyššia v prípade ponechania si istej čiastky. Jednotlivec s konkávnou funkciou užitočnosti totiž vždy odmietne férovú hru, pri ktorej sa očakávaná výhra rovná počiatočnému vkladu. V súvislosti s tvarom funkcie užitočnosti je potrebné zaviesť pojem averzia k riziku. Čím je hraničná užitočnosť jednotlivca vyššia, tým vyššiu toleranciu voči riziku bude mať. Všeobecne je možné tvrdiť, že ak $\frac{dU}{dw} > 0$, jednotlivec riziko vyhľadáva, ak $\frac{dU}{dw} < 0$, jednotlivec je rizikovo averzný, a pokiaľ $\frac{dU}{dw} = 0$, jednotlivec je voči riziku neutrálny. Pravdaže, ako bolo spomenuté, ide o teoretickú rovinu a v praxi je pomerne náročné presne definovať funkciu užitočnosti. Vyššie uvedené príklady však približne ilustrujú, ako konajú jednotlivci v podmienkach rizika a neistoty, a že toto konanie je ovplyvnené okrem očakávaného výsledku najmä individuálnym vzťahom k riziku. Ten je reflektovaný práve funkciou užitočnosti. Napriek tomu, že v praxi sa môžu vyskytnúť aj funkcie užitočnosti s rastúcou hraničnou veličinou, vo všeobecnosti sa predpokladá, že s funkciou užitočnosti sa spájajú dve základné vlastnosti:

- a) Funkcia je rastúca
- b) Konkávnosť

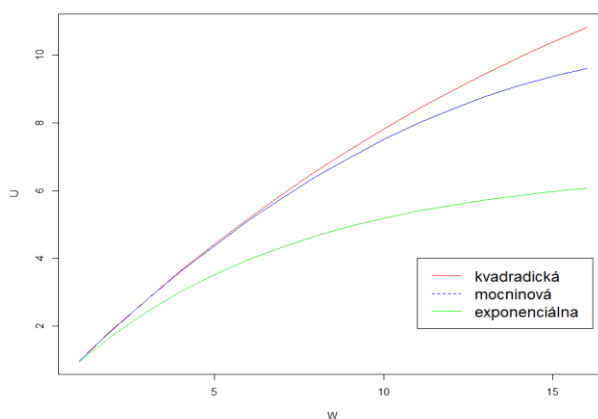
Vo väčšine prípadov sa navyše predpokladá, že funkcia je dvakrát diferencovateľná, pričom $U(w)' > 0$ a $U(w)'' < 0$. Kladná prvá derivácia predstavuje skutočnosť, že väčšie bohatstvo je preferované pred menším. Záporná druhá derivácia implikuje klesajúcu hraničnú užitočnosť.

¹⁸ NORSTAD, John. An introduction to utility theory. [online]. 1999. p. 26. [cit. 28. 10. 2020]. Dostupné na: http://hari.seshadri.com/docs/how-much-would-you-bet/norstad_utility.pdf

V praxi sa stretávame okrem spomenutej logaritmickej napríklad s nasledujúcimi funkciami užitočnosti:

1. Exponenciálna: $U(w) = \frac{1 - e^{-aw}}{a}$, $-\infty < w < \infty$
2. Mocninová: $U(w) = \frac{s^{c+1} - (s-x)^{c+1}}{(c+1)s^c}$, $s > x$
3. Kvadratická (mocninová, pričom $c = 1$): $U(w) = w - \frac{w^2}{2s}$, $s > x$ ¹⁹

Priebeh uvedených funkcií s náhodne zvolenými parametrami zobrazuje nasledujúci graf:



Graf 2 funkcie užitočnosti

Zdroj: Vlastná tvorba

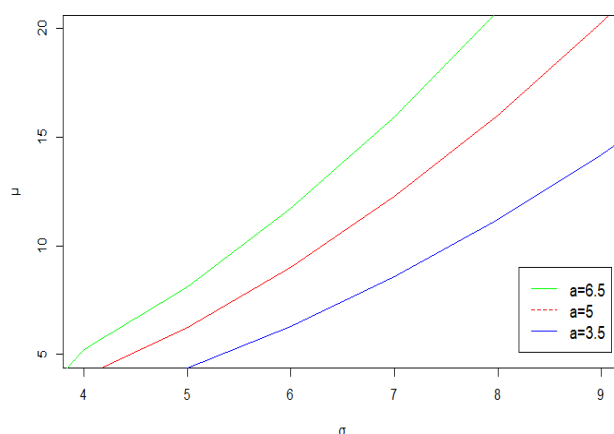
V kontexte teórie portfólia nás bude zaujímať predovšetkým očakávaná užitočnosť, ku ktorej je možné dospieť podobným spôsobom, ako vo vyššie uvedených príkladoch. Je teda potrebné poznať rozdelenie pravdepodobnosti možných výsledkov z podstúpenia rizika a funkciu celkovej užitočnosti. Potom: $E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} U(w)f(x)dw$, resp. $E(u) = \sum_{w=1}^{\infty} U(w)Pw$ v prípade diskkrétnej veličiny. Pokiaľ chceme zistiť napríklad očakávanú užitočnosť za predpokladu exponenciálnej funkcie užitočnosti a normálnej distribúcie výsledkov náhodného pokusu, použijeme vzťah:

$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-aw}}{a} * \frac{e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dw$. Po špecifických matematických úpravách je možné dospieť ku vzťahu, ktorý explicitne vyjadruje trade – off medzi očakávanou hodnotou výnosu a jeho varianciou. Práve tento výraz sa snaží jednotliviec maximalizovať berúc do

¹⁹ GERBER, Hans. Utility functions: from risk theory to finance. [online]. [cit. 28. 10. 2020]. In: NAAJ, vol. 2, no. 3, 1998. UK : Taylor and Francis ltd. p. 74-100. ISSN 1092-0277. Dostupné na: <http://www.kreienbuhl-mc.com/wp-content/uploads/2015/12/Gerber-Pafumi-1998-Nutzenfunktion-Esscher-Premium-.pdf>

úvahy parameter averzie voči riziku a : $E(u) = \mu - \frac{a\sigma^2}{2}$. Uvedený vzťah označujeme ako tzv. mean – variance, a v samotnej teórii portfólia má kľúčové využitie (hoci je naivné vždy predpokladať normálnu distribúciu výnosov, predovšetkým na akciovom trhu, vzhľadom na dlhé konce distribúcie) ²¹.

Na grafe nižšie môžeme pozorovať spôsob, akým sa mení požadovaná úroveň očakávaného výnosu pri danej úrovni variancie tak, aby očakávaná užitočnosť ostala nezmenená pri rôznych mierach parametra a :



Graf 3 indifferenčné krivky
Zdroj: vlastná tvorba

V tejto súvislosti hovoríme o indifferenčných krivkách, ktoré vyjadrujú všetky rôzne kombinácie rizika a očakávaného výnosu, medzi ktorými je jednotlivec indiferentný.

1.1.1.3 Meranie rizika

Jedným z kľúčových determinantov úspešného riadenia rizika predstavuje aplikovanie vhodných metód na jeho kvantifikáciu. Prirodzene, meranie rôznych druhov rizík si vyžaduje v určitej miere rôzne prístupy, pričom niektoré typy rizík môže byť pomerne náročné vyhodnocovať matematicky (napr. politické riziko). Odlišné metódy merania rizika sa vyznačujú rôznymi výhodami a nevýhodami, a taktiež charakterom informácie, ktorú podávajú o rizikovitosti investície. Týchto metód môže byť skutočne pomerne veľa, pričom finančné inštitúcie neustále vyvíjajú nové, za účelom čo

²⁰ Mean Variance Utility. [online]. n. d. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.tau.ac.il/~spiegel/teaching/corpfm/mean-variance.pdf>

²¹ Returns with the Laplace Distribution. [online]. University of Notre dame : paper. n. d. 4 p. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1906/1906.10325.pdf>

najvernejšieho a najpresnejšieho zobrazovania miery rizika. Vo všeobecnosti je možné tvrdiť, že pokiaľ má byť určitá metóda merania rizika (ρ) považovaná za relevantnú, mala by spĺňať axiómy koherentnosti (existujú však aj výnimky z tohto pravidla). Týmito axiómami sú:

- a) **Normalizácia:** hovorí, že riziko ničoho (žiadnej investície) sa rovná nule: $\rho(0) = 0$
- b) **Monotónnosť:** pokiaľ platí $P_1 > P_2$ pre všetky možné výsledky daných dvoch portfólií, potom $\rho(P_1) < \rho(P_2)$. Inými slovami, portfólio, ktoré má za každých okolností vyšší výnos ako iné portfólio, sa vyznačuje nižšou mierou rizika ako toto iné portfólio.
- c) **Subaditivita:** uvažujme opäť dve rôzne portfólia. Pre ich rizikovosť následne platí, že $\rho(P_1) + \rho(P_2) > \rho(P_1 + P_2)$. Uvedená axióma poukazuje na skutočnosť, že miera rizikovosti by mala byť nižšia v prípade spojenia dvoch portfólií do jedného (princíp diverzifikácie), ako v prípade súčtu mier rizík samostatne stojacich portfólií. Treba poznamenať, že táto axióma neplatí v prípade metódy Value at Risk.
- d) **Pozitívna homogenita:** pre každú konštantu $c \geq 0$ je možné tvrdiť, že $\rho(cP) = c\rho(P)$. Teda, miera rizika portfólia sa zvyšuje úmerne jeho rozsahu.
- e) **Prekladová invariancia:** v prípade, že do rizikového portfólia bude pridaná bezriziková zložka, rizikovosť portfólia bude znížená práve o výnos tejto bezrizikovej zložky, teda $\rho(P + R_f) = \rho(P) - R_f$.

Ako bolo spomenuté, v praxi sa môžu vyskytovať rôzne typy merania rizika, pričom nie vždy sú zachované všetky uvedené podmienky. Aby však daná metóda mala zmysel, mala by minimálne spĺňať podmienky normalizácie, monotónnosti a prekladovej invariancie²². Pokiaľ ide o konkrétne príklady merania rizika, je možné uviesť nasledujúce:

1. **Štandardná odchýlka:** $\rho = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx}$ v prípade parametrickej distribúcie²³, resp. $\rho = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (X_i - EX)^2}$ v prípade empirickej distribúcie²⁴.

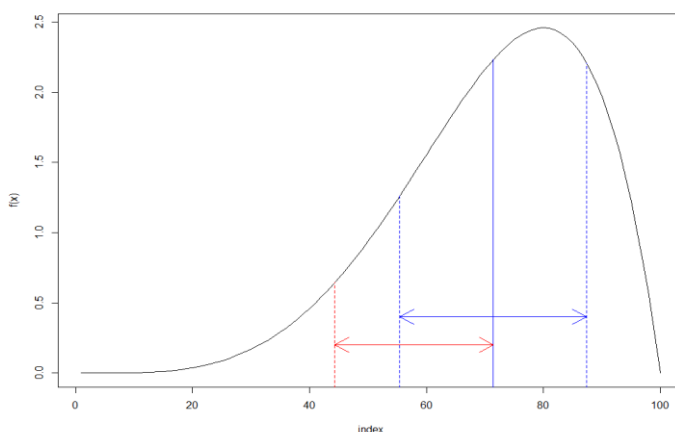
Štandardná odchýlka predstavuje azda najbežnejší spôsob, akým je možné merať

²² Coherent risk measures. [online]. n. d. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.sfu.ca/~poitras/coherent.pdf>

²³ SVIRIN, Alex. Probability density function. [online]. 2021. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.math24.net/probability-density-function/>

²⁴ CFI. Empirical rule. [online]. 2021. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/other/empirical-rule/>

riziko. Výhodou tejto metódy je jej jednoduchosť, avšak problémom je skutočnosť, že je nevyhnutné, aby náhodná premenná (napr. výnos) mala normálnu distribúciu. V opačnom prípade môže dôjsť k preceneniu (kladne zošikmená distribúcia) alebo podceneniu rizika (záporne zošikmená distribúcia). Pozitívne odchýlky od priemeru v prípade kladne zošikmenej distribúcie totiž nepredstavujú vyššiu mieru rizika, ale vyšší potenciál investície. Výpočet štandardnej odchýlky je teda možné prispôbiť pre prípad asymetrickej distribúcie tak, aby zahŕňal iba negatívne odchýlky od priemeru (tzv. downside risk)²⁵: $\rho = \frac{\int_{-\infty}^{EX} (EX-x)f(x)dx}{F_x(EX)}$. Výraz $F_x(EX)$ predstavuje hodnotu distribučnej funkcie v bode strednej hodnoty náhodnej veličiny, ide teda o podmienenú strednú hodnotu zápornej odchýlky od priemeru. Na grafe nižšie je možné pozorovať, akým spôsobom sa zmení očakávaná odchýlka od priemeru pri asymetrickej distribúcii simulovaných dát s dlhým koncom Beta (5,2), pokiaľ namiesto bežnej štandardnej odchýlky počítame spomenutý downside risk. Vidíme, že miera rizika je v tomto prípade odhadnutá konzervatívnejšie:



Graf 4 Beta distribúcia

Zdroj: Vlastná tvorba

2. **Sharpe ratio:** $\rho = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$. Ide o jednoduchý pomer rozdielu medzi očakávaným výnosom portfólia a výnosom z bezrizikového aktíva, so štandardnou odchýlkou portfólia. Podobne ako v predošlom prípade, je potrebné selektovať normálnu a asymetrickú distribúciu. Modifikáciu Sharpe ratio, v ktorej sa berie do úvahy iba záporná štandardná odchýlka, predstavuje Sortino ratio.

²⁵ SUMNICHT, Vern. Standard deviation as a measure of risk. [online]. 2009. 1 p. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://isectors.com/wp-content/uploads/2013/08/Standard-Deviation-as-Risk-Measure.pdf>

3. **Beta koeficient:** $\rho = \frac{\text{cov}(R(p), R(m))}{\sigma^2(m)}$. Ako už bolo spomenuté, beta predstavuje mieru systematického rizika. Určuje mieru citlivosti volatility aktíva na volatilitu nejakého trhového benchmarku, ktorým zvyčajne býva akciový index zahrňujúci viaceré odvetvia hospodárstva. Beta 1 znamená, že aktívum je rovnako volatilné ako benchmark; $\beta > 1$ teda logicky znamená, že aktívum (portfólio) je viac volatilné ako trh.
4. **Value at Risk (VaR):** $\rho = F^{-1}$. spolu s viacerými modifikáciami predstavuje VaR pomerne vysoko vyžívanú metódu merania rizika najmä vo finančných inštitúciách. Hodnota VaR určuje maximálnu mieru straty pri zvolenej miere spoľahlivosti za určité obdobie. Napr. ročný 95%-tný VaR 5 miliónov korún hovorí, že za rok na 95 % nevznikne strata väčšia ako 5 miliónov korún.
5. **Tail Value at Risk (TVaR):** $\rho = \frac{\int_{VaR}^{\infty} x f(x) dx}{1 - Fx(VaR)}$. Zo vzorca vyplýva, že ide o podmienenú strednú hodnotu náhodnej veličiny za predpokladu, že náhodná veličina prekročí trashhold stanovený podľa VaR²⁶. TVaR teda hovorí, čo možno očakávať od investície, pokiaľ nastane situácia, ktorá by podmienila zmenu jej hodnoty až za vopred definovanú hranicu. TVaR 10 miliónov korún pri 99 % spoľahlivosti napríklad znamená, že je možné očakávať stratu 10 miliónov korún v prípade nastatia jedného percenta najhorších možných výsledkov²⁷.

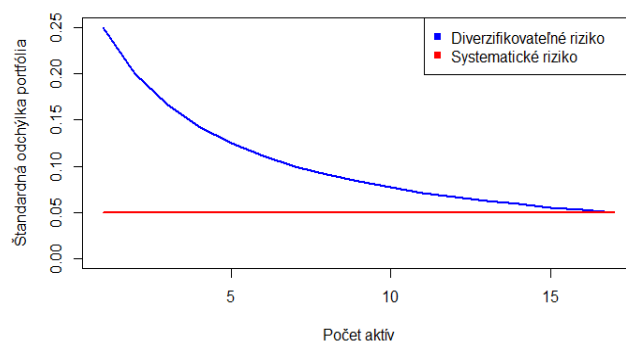
Spomedzi metód, ktorými je možné merať riziko, je v kontexte teórie portfólia najdôležitejšou štandardná odchýlka. Pokúsme sa preto overiť, do akej miery spĺňa vyššie uvedené podmienky koherentnosti:

1. **Normalizácia:** štandardná odchýlka nuly je vždy nula.
2. **Monotónnosť:** skutočnosť, že pre každý možný výsledok náhodných veličín (výnosov) platí $X > Y$, nedeterminuje nevyhnutne $\sigma_x < \sigma_y$. Preto nie je možné hovoriť, že štandardná odchýlka v absolútnom ponímaní danú axiómu uspokojuje. Avšak vždy platí $E(X) - \sigma_x > E(Y) - \sigma_y$. Z tohto hľadiska vyhovuje.

²⁶ MA, Dan. Value at risk and tail value at risk. [online]. 2017. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://actuarialmodelingtopics.wordpress.com/2017/12/28/value-at-risk-and-tail-value-at-risk/>

²⁷ SEGAL, Troy. Common methods of measurement for investment risk management. [online]. 2020. [cit. 16. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp>

3. **Subaditivita:** v prípade investovania zdrojov do aktív v rôznych pomeroch (váhach), má štandardná odchýlka súhrnného portfólia nasledujúci tvar: $\sigma_p = (\sum_{i=1}^N w^2(i) \sigma(i)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w(i) w(j) \rho(i,j) \sigma(i) \sigma(j))^{1/2}$, kde $w(i)$ označuje váhu pridelenú i -tému aktívu a výraz $\rho(i,j)$ vyjadruje koreláciu medzi aktívom i a j . portfóli²⁸. Pokiaľ je investícia rovnomerne rozdelená a korelácie nulové, dostávame $\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2(i)}{N^2}}$, pričom nakoľko sa N^2 približuje k nekonečnu rýchlejšie ako čitateľ, je možné tvrdiť, že $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(p) = 0$. Zároveň pravdaže platí $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2(i)}{N^2}} < \sum_{i=1}^N \sigma(i)$, je teda splnená podmienka pre subaditivitu²⁹. Spôsob, akým nárast počtu aktív v portfóliu redukuje riziko, ilustruje graf nižšie:



Graf 5 Vplyv diverzifikácie na riziko portfólia
Zdroj: Vlastná tvorba

Ako teda bolo spomenuté, systematické riziko nie je možné zredukovať diverzifikáciou. Pokiaľ uvažujeme jednoduchý indexový model, očakávaný výnos aktíva vyjadruje jednoduchá rovnica: $E(R) = \alpha + \beta R + e$, α je zložka výnosu nezávislá od trhového vývoja, βR je súčin beta koeficientu a očakávaného výnosu trhu a e zložka reprezentujúca práve jedinečné riziko aktíva³⁰. Ak teda

$$E(R) = \alpha + \beta R + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2(i)}{N^2}} \text{ a } N \text{ pošleme do nekonečna, vidíme, že výnos (teda aj}$$

²⁸ SMIRNOV, Yuriy. Standard deviation of portfolio. [online]. 2020. [cit. 16. 11. 2020]. Dostupné na: <http://financialmanagementpro.com/standard-deviation-of-portfolio/>

²⁹ BODIE – KANE – MARCUS. Optimal Risky Portfolios. [online]. 2014. [cit. 16. 11. 2020]. p. 33. Dostupné na: http://www.actexamdriver.com/assets/clientdocs/prod_preview/a109sm.pdf

³⁰ KAMIL, Anton. Portfolio analysis using single index model. [online]. In: WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 2., no. 1. Athens : WSEAS, 2003. [cit. 17. 11. 2020]. ISSN 2224-2880. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/266483426_Portfolio_Analysis_Using_Single_Index_Model

riziko) súboru aktív je okrem nezávislej zložky závislý ešte od trhu, a to do takej miery, akou betou sa vyznačuje dané portfólio.

4. **Pozitívna homogenita:** Predpokladajme premennú $Z = \alpha X$, ktorá vznikne napríklad v dôsledku zvýšenie rozshau toho istého aktíva. Z toho vyplýva, že $E[(Z - E[Z])^2] = E[(\alpha X - E[\alpha X])^2] = \alpha^2 \sigma_X$ a teda $\sigma_Z = \alpha \sigma_X$. Uvedená axióma je teda splnená.
5. **Prekladová invariancia:** V tomto prípade je možné vypočítať $\sigma_{X + R_f}$ spôsobom uvedeným pri overovaní subaditivity, pričom $\sigma_{R_f} = 0$, a taktiež aj $\text{corr}(X, R_f) = 0$. Uvedená axióma teda neplatí v absolútnom ponímaní priemernej odchýlky.

Je možné konštatovať, že absolútna štandardná odchýlka splnila tri z piatich axiém koherentnosti spôsobu merania rizika. Jedným dychom však treba dodať, že pokiaľ nazeráme na daný spôsob merania rizika ako na určitý bod definovaný vzdialenosťou štandardnej odchýlky od priemeru, resp. $\rho = E[X] - \sigma X$, platia všetky axiómy okrem subaditivity³¹. Bohužiaľ, v prípade štandardnej odchýlky mnohokrát ani samotná literatúra nie je jednotná v súvislosti s overovaním platnosti uvedených predpokladov.

1.1.2 Základné druhy stratégií riadenia investičného portfólia

Investovať či obchodovať na finančných trhoch je možné prostredníctvom mnohých stratégií, ktoré sa líšia mierou pravdepodobnosti úspešnosti, dĺžkou držby aktív, a inými vlastnosťami. Vo všeobecnosti možno rozdeliť všetky stratégie na dve veľké skupiny – pasívne a aktívne. To, ktorá skupina prináša lepšie výsledky, je predmetom mnohých debát, hoci porovnanie historickej výnosnosti pasívne a aktívne riadených fondov hovorí v prospech tých riadených pasívne, minimálne z dlhodobého hľadiska. Dané stratégie možno bližšie charakterizovať:

- a) **Pasívne:** v prípade tejto rodiny stratégií je dôležité si uvedomiť, že predpokladáme *efektívnosť trhu*. To znamená, že veríme, že trh v každom momente reflektuje vnútornú hodnotu aktív vzhľadom na očakávané udalosti. Potom nie je možné hovoriť o príležitosti na arbitráž, resp. dosahovať výnosy nad úroveň trhovými výnosov. Každá jedna zmena fundamentov pôsobiacich na dané aktívum totiž okamžite vedie aj k zmene ceny tohto aktíva. Nakoľko fundamenty pôsobiace na

³¹ Standard deviation is a coherent risk measure. [online]. n. d. [cit. 18. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.sfu.ca/~poitras/standard-deviation-coherent.pdf>

cenu sú náhodné udalosti, aj samotný vývoj ceny možno označiť za náhodný (stochastický) proces – tzv. random walk: $P_t = P_{t-1} + \varepsilon$. ε vo vzorci predstavuje zmenu cenu spôsobenú novou informáciou. Keďže, ako bolo spomenuté, zmenu ceny nie je možné predikovať, platí $E(P_{t+1} - P_t | \Omega_t) = 0$, pričom $\Omega_t = \{P_t, P_{t-1}, P_{t-2}, \dots\}$. Inými slovami, očakávaná zmena ceny podmienená predošlým vývojom je rovná nule. Z toho teda vyplýva, že optimálna predikcia budúcej ceny je rovná cene v súčasnom momente: $E(P_{t+1} | \Omega_t) = P_t$. Akýkoľvek pokus o dosiahnutie nadpriemerných výnosov prostredníctvom vychytávania lokálnych cenových maxim či minim je teda neefektívny³². V rámci pasívnych stratégií rozlišujeme predovšetkým:

- **Buy and hold** – čo je najjednoduchšia stratégia. Investor sa nesnaží načasovať vstup do pozície a (väčšinou) drží aktívum dlhé roky. Výber aktív je, prirodzene, podmienený rozsiahlou fundamentálnou analýzou³³.
- **Dollar cost averaging** – v tomto prípade investor neinvestuje celú sumu v jednom momente, ale investuje v menších čiastkách, v pravidelných intervaloch. Prirodzene, čím je cena aktíva nižšia, tým viac jednotiek ho za tú istú pravidelne investovanú sumu nakúpi a naopak. Táto stratégia je vhodná najmä pre malých investorov, resp. sporiteľov, ktorí si pravidelne odkladajú z výplaty určitú čiastku³⁴.

b) Aktívne: V kontraste s pasívnymi stratégiami, pri aktívnych predpokladáme, že trhy nie vždy celkom efektívne prispôbujú cenu aktíva očakávaným podmienkam. Z toho vyplýva, že na trhu majú tendenciu vyskytovať sa aktíva, ktoré sú podhodnotené, resp. nadhodnotené. To následne vytvára priestor pre zostavenie takého portfólia, ktoré má potenciál prekonať trhovú priemer. Problémom však je, že vo veľkej väčšine prípadov z dlhodobého hľadiska aktívne riadené fondy zaostávajú vo výkonnosti za tými pasívne riadenými, navyše aktívna správa je taktiež náročnejšia na výšku poplatkov. Výhodou však je napríklad aktívne riadenie rizika, v dôsledku čoho v obdobiach prudkých poklesoch trhu neutrpia investori tak devastčné straty. Aktívne stratégie možno všeobecne deliť napríklad na:

³² Efficient market hypothesis. [online]. n. d. 1 p. [cit. 02. 12. 2020]. Dostupné na: <http://homepage.ntu.edu.tw/~nankuang/EMH1.pdf>

³³ THUNE, Kent. What is the buy and hold strategy?. [online]. 2020. [cit. 03. 12. 2020]. Dostupné na: <https://www.thebalance.com/what-is-buy-and-hold-2466543>

³⁴ NAPOLETANO, E. How to invest with Dollar cost averaging. [online]. 2020. [cit. 20. 12. 2020]. ISSN 2609-1445. Dostupné na: <https://www.forbes.com/advisor/investing/dollar-cost-averaging>

- **Momentové** – fungujúce predovšetkým v krátkom období (3 – 12 mesiacov), kedy predpokladáme autokoreláciu výnosov aktíva. Zjednodušene povedané, snažíme sa „ísť s trendom“, teda otvoriť dlhú pozíciu na aktívach vykazujúcich rastúci trend a naopak, shortovať aktíva, ktoré sú v klesajúcom trende³⁵.
- **Reverzné** – stratégie fungujúce predovšetkým v dlhom období, kedy predpokladáme návrat výnosov aktíva k ich priemeru po obdobiach prudkých cenových rastov alebo poklesov. Sú presným opakom momentových stratégií, pričom investori sa snažia otvoriť dlhú pozíciu na lokálnom minime (čo je nesmierne ťažké odhadnúť) a naopak³⁶.

1.2 Teória portfólia

Riadenie aktív predstavuje zložitý proces od zvolenia investičnej stratégie, cez výber aktív, až po spôsob riadenia rizika. Z predošlých častí vieme, aké môžu byť rôzne druhy merania rizika, aj to, aký vzťah má k riziku samotný racionálne uvažujúci investor. Nastáva teda otázka, ako možno po výbere tých správnych aktív optimalizovať portfólio tak, aby bolo vyvážené z hľadiska rizika a výnosu (či už ide o pasívnu alebo aktívnu stratégiu)? S odpoveďou prišiel v roku 1952 v magazíne *Journal of Finance* držiteľ Nobelovej ceny za ekonómiu z roku 1990, a vtedajší študent finančnej matematiky, Harry Markowitz. Hoci nebola spočiatku jeho *Modernej Teórii Portfólia* prikladaná vysoká miera pozornosti, dnes je možné hovoriť, že spôsobila niečo ako revolúciu v spôsobe riadenia aktív. Na vylepšení tejto teórie sa neskôr podieľali aj univerzitní profesori James Tobin (Yale) a William Sharpe (Stanford), taktiež obaja držiteľia Nobelovej ceny za ekonómiu. Dnes túto teóriu, alebo aspoň jej určité prvky, využívajú investori rôzneho rozmeru, od veľkých inštitucionálnych, až po malých retailových. Dnes sa, prirodzene, stretávame aj s rôznymi modifikáciami *Modernej Teórie Portfólia* (ďalej len MPT), ktoré vznikli aj vďaka rozmachu výpočtových technológií³⁷ spôsobilých spracovávať vysoké objemy dát,

³⁵ RODRIGUEZ CARLOS, Juan – SBUELZ, Alessandro. Understanding and exploiting momentum in stock returns. [online]. 2005. 10 p. [cit. 21. 12. 2020]. Dostupné na: <https://www.dse.univr.it/documenti/CapitoloLibro/allegato/allegato721976.pdf>

³⁶ Richmond quantitative advisors. Mean reversion – buying fear and selling greed. [online]. 2018. [cit. 21. 12. 2020]. Dostupné na: <https://www.richmondquant.com/news/2018/11/30/using-mean-reversion-techniques-to-profit-in-volatile-markets>

³⁷ FRANCIS CLARK, Jack. *Modern Portfolio Theory*. USA : John Wiley & Sons, 2013. p. 3. ISBN 111837052X.

efektívnejšie odhadovať vstupné parametre či využívať rôzne optimalizačné metódy lineárneho a kvadratického programovania.

1.2.1 Základné predpoklady

Ako každá ekonomická teória, aj MPT je založená na určitých behaviorálnych a štatistických predpokladoch, z ktorých niektoré v realite nastávajú len zriedkavo (alebo skôr vôbec):

- Všetci investori predikujú distribúciu pravdepodobnosti výnosov aktív a ich volatilitu na rovnako dlhé časové obdobie.
- Za všeobecný spôsob merania rizika je považovaná štandardná odchýlka (volatilita). To zároveň implikuje predpoklad *normality* výnosov, keďže, ako bolo spomenuté, štandardná odchýlka môže podceňiť riziko v prípade zľava zošikmenej distribúcie.
- Investori sa snažia maximalizovať svoju exponenciálnu funkciu užitočnosti. Zo vzťahu odvodeného v časti 1.1.1.2 teda vyplýva, že očakávaná užitočnosť je podmienená očakávaným výnosom a očakávanou volatilitou.
- V rámci akejkoľvek množiny portfólií, pri danej úrovni rizika, bude investor preferovať vyšší výnos pred nižším, resp. pri danom úrovni výnosu bude investor preferovať nižšiu varianciu pred vyššou.

Spôsob merania rizika sa môže zdať mierne mätúci v prípade dlhopisov v porovnaní s tradičným „ratingovým“ meraním kreditného rizika. Hoci rating reflektuje pravdepodobnosť defaultu, táto pravdepodobnosť je pozitívne korelovaná s variabilitou výnosov emitenta, čo sa pravdaže prejavuje aj na variabilite ceny daného dlhopisu. Z toho možno usúdiť, že dlhopisy s horším ratingom majú tendenciu byť volatilnejšie a naopak.

Hoci sú uvedené predpoklady zjednodušené a v praxi ťažko nastáva ich koincidencia, na základe nich je možné z množiny dostupných aktív konštruovať portfólia, ktoré dosahujú maximálny možný výnos pripadajúci na určitú úroveň volatility, alebo také, ktoré dosahujú minimálnu volatilitu na zvolenej úrovni požadovaného výnosu³⁸. Súhrn týchto portfólií sa nazýva efektívna hranica (efficient frontier).

³⁸ FRANCIS CLARK, Jack. Modern Portfolio Theory. USA : John Wiley & Sons, 2013. p. 4. ISBN 111837052X.

1.2.2 Mechanizmus MPT – prípad dvoch aktív

Je zrejmé, že prvým nevyhnutným krokom je výpočet vstupných parametrov. Najskôr pre jednoduchosť predpokladajme portfólio zložené iba z dvoch aktív A a B. očakávaný výnos takéhoto portfólia predstavuje $E(R_p) = w_1A + (1 - w_1)B$, kde w_1 znamená váhu aktíva A v portfóliu. Výraz pre výpočet variancie portfólia uvedený v časti 1.1.1.3 vyzerá v prípade dvoch aktív nasledovne: $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_A^2 + (1-w_1)^2\sigma_B^2 + 2w_1(1-w_1)\text{cov}_{AB}$. V prípade, že $\text{cor}_{AB} < 1$ (je teda možné využiť výhody diverzifikácie), kombináciu aktív s najnižšou možnou varianciou je možné zistiť jednoducho prostredníctvom nájdenia lokálneho minima funkcie: $\frac{\partial \sigma}{\partial w_1} = 2w_1(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\text{cov}_{AB}) - 2(\sigma_B^2 - \text{cov}_{AB})$, pričom keď položíme $\frac{\partial \sigma}{\partial w_1} = 0$, dostaneme pre $w_1 = \frac{\sigma(B)^2 - \text{cov}(AB)}{\sigma(A)^2 + \sigma(B)^2 - 2\text{cov}(AB)}$. Zároveň pravdaže platí, že $w_2 = 1 - w_1$ ³⁹.

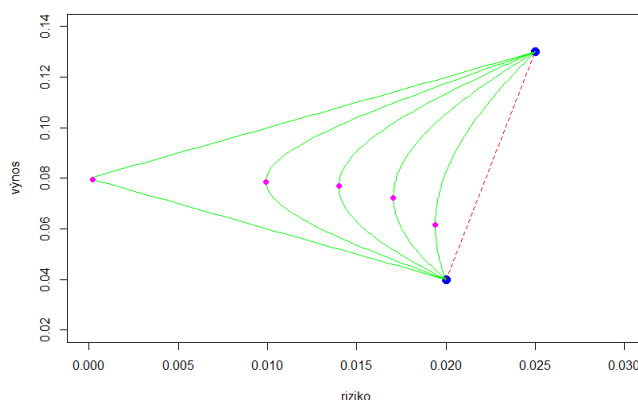
Našli sme teda optimálne váhy jednotlivých aktív v portfóliu. Avšak čo ak nastane situácia, kedy sú obe aktíva perfektne korelované? V takom prípade by mala variancia portfólia tvar $\sigma_p^2 = [w_1\sigma_A + (1-w_1)\sigma_B]^2$ a jej minimálnu hodnotu by bolo možné dosiahnuť iba ak by sme otvorili na týchto aktívach opačné pozície, keďže pohyb jedného aktíva by bol vynulovaný druhým aktívom: $w_1 = -\frac{\sigma(B)}{\sigma(A) - \sigma(B)}$. Napriek tomu, že vzorec na výpočet očakávaného výnosu koreláciu neberie do úvahy, je zrejmé, že takáto rizikovo neutrálna pozícia nemôže ani zarábať, ani prerábať (výnimkou je inkasovanie kupónov/dividend). K podobnému perfektne hedžnutému portfóliu sa vieme dopracovať aj v prípade, že by aktíva mali medzi sebou perfektne negatívnu koreláciu. Vtedy $\sigma_p^2 = [w_1\sigma_A - (1-w_1)\sigma_B]^2$ a pre dosiahnutie nulovej variancie je potrebné vyriešiť $w_1 = \frac{\sigma(B)}{\sigma(A) + \sigma(B)}$ ⁴⁰. Logicky, tentokrát na aktívach, ktoré sa hýbu do rôznych smerov a sú perfektne negatívne korelované, otvárame rovnakú pozíciu, aby bol pohyb aktíva A vyrovnaný pohybom aktíva B a naopak.

³⁹ BODIE – KANE – MARCUS. Optimal Risky Portfolios. [online]. 2014. [cit. 16. 11. 2020]. p. 26.

Dostupné na: http://www.actexmadrivier.com/assets/clientdocs/prod_preview/a109sm.pdf

⁴⁰ tamtiež

Nasledujúci graf zobrazuje, ako sa mení množina kombinácií rizika a výnosu, ktoré možno dosiahnuť všetkými možnými portfóliami pri danej miere korelácie dvoch aktív:



Graf 6 MTP – prípad dvoch aktív

Zdroj: vlastná tvorba

Vidíme, že s klesajúcou koreláciou klesá aj najnižšia možná úroveň volatility (ružový bod), ktorú možno kombináciou aktív dosiahnuť. V prípade, že korelácia je 1, výnos a riziko sa pri zmene váh aktív hýbu po červenej priamke. Minimálna variancia je potom dosiahnutá 100-percentnou investíciou do aktíva s nižšou volatilitou.

1.2.3 Mechanizmus MPT – prípad viacerých aktív

Pokiaľ ide o optimalizáciu portfólia zloženého z dvoch aktív, nie je náročné dospieť k výpočtom ručne. S viacerými aktívami sú však výpočty zdĺhavé a ťažkopádne. Vezmime si príklad výpočtu variancie portfólia zloženého z aktív A, B a C: $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_A^2 + w_2^2\sigma_B^2 + w_3^2\sigma_C^2 + 2w_1w_2\text{cov}_{AB} + 2w_1w_3\text{cov}_{AC} + 2w_2w_3\text{cov}_{BC}$. Okrem pridania súčinu váhy a variancie je teda potrebné vypočítať aj kovariancie medzi každým párom aktív. V prípade štyroch aktív by to bolo $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$, v prípade piatich 12, atď... Vidíme, že pri veľkých počtoch aktív je potrebné využiť efektívnejšie riešenie v podobe maticových zápisov. Pravdaže, výpočet uskutočňuje za nás softvér spôsobilý vykonávať maticové operácie. V maticovej podobe je teda možné vypočítať vstupné parametre ako:

$$E(R) = (w(1) \dots w(n)) \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(n) \end{pmatrix}, \sigma_p^2 = (w(1) \dots w(n)) \begin{pmatrix} \sigma^2(1) & \dots & \text{cov}(1, n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(n, 1) & \dots & \sigma^2(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(1) \\ \vdots \\ w(n) \end{pmatrix}$$

Symbolicky môžeme zapísať $\sigma p^2 = w'Sw$, pričom S predstavuje kovariančnú maticu aktív, pričom $\sum_{w=1}^n w = 1$. V prípade, že chceme nájsť váhy aktív portfólia s minimálnou varianciou, musíme vyriešiť viazané lokálne extrém (kvôli podmienke, že súčet váh nesmie presiahnuť 1). Opäť uvidíme príklad s tromi aktívami. Lagrangeova funkcia má tvar: $L = \sigma p^2 = w_1^2\sigma_A^2 + w_2^2\sigma_B^2 + w_3^2\sigma_C^2 + 2w_1w_2\text{cov}_{AB} + 2w_1w_3\text{cov}_{AC} + 2w_2w_3\text{cov}_{BC} + \lambda(w_1 + w_2 + w_3 - 1)$,

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_A^2 + 2w_2\text{COV}_{AB} + 2w_3\text{COV}_{AC} + \lambda$$

Sústavu riešime maticovo:

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_B^2 + 2w_1\text{COV}_{AB} + 2w_3\text{COV}_{BC} + \lambda \quad \begin{pmatrix} \sigma^2(A) & \text{cov}(AB) & \text{cov}(AC) & 1 \\ \sigma^2(B) & \text{cov}(AB) & \text{cov}(BC) & 1 \\ \sigma^2(C) & \text{cov}(AC) & \text{cov}(BC) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w_1 \\ 2w_2 \\ 2w_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial w_3} = 2w_3\sigma_C^2 + 2w_1\text{COV}_{AC} + 2w_2\text{COV}_{BC} + \lambda$$

$$\text{alebo: } \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } Aw = b,$$

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + w_3 - 1$$

riešenie pre $W = A^{-1}b^{41}$

Ako bolo spomenuté, investor sa snaží nájsť buď minimálnu varianciu pre požadovanú úroveň výnosu, alebo maximálny výnos pre určitú mieru variance. Pokiaľ teda nehľadáme váhy pre portfólio s najnižšou možnou varianciou, musíme okrem súčtu váh pridať do výpočtu ešte ďalšie obmedzenie.

V prípade špecifickej úrovne požadovaného výnosu by maticový výpočet teda vyzeral nasledovne:

$$L = w'Sw + \lambda_1(w'R - R_p) + \lambda_2(w' - 1),$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w} = 2Sw + \lambda_1R + \lambda_2$$

maticová podoba:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w'R - R_p$$

$$\begin{pmatrix} 2S & R & 1 \\ R' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(p) \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ resp. } Aw = b,$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w' - 1$$

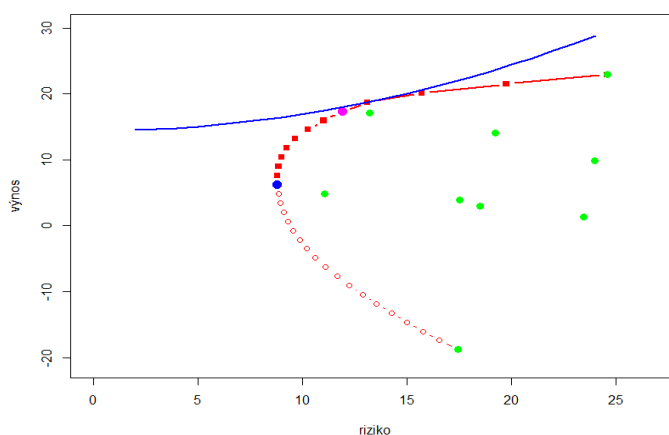
riešenie pre $w = A^{-1}b^{42}$

Podobných lagrangeových funkcií s rôznymi obmedzeniami je možné vytvoriť mnoho. Moderná teória portfólia sa tým stáva vysoko flexibilnou. Na dve funkcie je však potrebné upriamiť obzvlášť pozornosť – maximalizáciu Sharpe ratio, ktoré vjadruje pomer rizikovej prémie aktíva k jeho volatilita: $\frac{w'R - R_f}{(w'Sw)^{1/2}}$. Výraz maximalizujeme obdobným

⁴¹ Portfolio theory with matrix algebra. [online]. 2013. 8 p. [cit. 21. 12. 2020]. Dostupné na: <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfolioTheoryMatrix.pdf>

⁴² Tamtiež, str. 12

spôsobom ako v predošlých príkladoch, pričom Lagrangeova funkcia má tvar $L = (w'R - R_f)(w'Sw)^{-1/2} + \lambda(w - 1)$ ⁴³. Druhou dôležitou funkciou je funkcia maximalizujúca užitočnosť jednotlivca v prípade absencie bezrizikovej úrokovej miery a za predpokladu normality výnosov: $L = w'R - \frac{1}{2}A(w'Sw) + \lambda(w - 1)$. Celú problematiku je možné zobrazit' graficky:



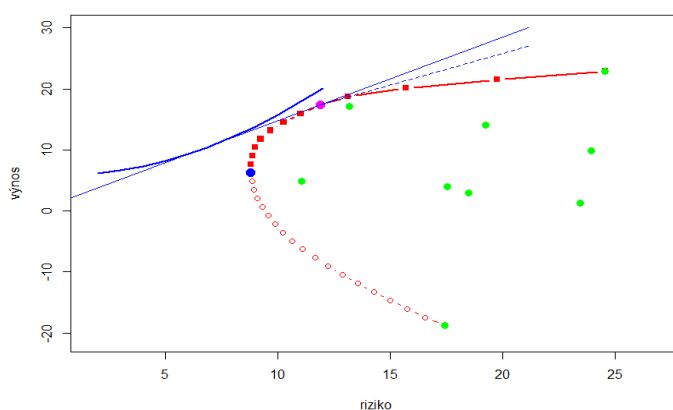
Graf 7 Efektívna hranica
Zdroj: vlastná tvorba

Na grafe môžeme vidieť riziko a výnos jednotlivých aktív (zelené body), ako aj kombinácie rizika a výnosu efektívnej hranice portfólií. Tá je zobrazená červenou hrubou krivkou. Svetlou prerušovanou krivkou je zobrazená tá časť kombinácií, ktoré síce dávajú minimálnu varianciu pri danej úrovni výnosu, avšak nespĺňajú podmienku maximalizácie výnosu pri danej úrovni volatility. Vidíme, že svetlá krivka začína od modrého bodu – práve ten znázorňuje portfólio s najnižšou možnou varianciou. Ružovou farbou je zasa znázornené tangency portfólio. No a modrá krivka dotýkajúca sa efektívnej hranice je už spomenutá indiferenčná krivka, ktorá znázorňuje, ako sa menia kombinácie rizika a výnosu pri nezmenenej miere užitočnosti. V tomto prípade bol parameter averzie voči riziku nastavený na úroveň 5, pričom optimálne portfólio z celej množiny sa vyznačovalo výnosom 18,72 % a volatilitou 13,11 %.

Doteraz sme uvažovali o optimalizácii portfólia zloženého z rizikových aktív. Ak však existuje na trhu aktívum s bezrizikovým výnosom (nulovou volatilitou), investor je spôsobilý kombinovať optimálne rizikové portfólio (s najvyšším Sharpe ratio) s bezrizikovým aktívom. Výnos portfólia má potom tvar $E(R) = R_f + w(R_p - R_f)$, funkcia

⁴³ Portfolio theory with matrix algebra. [online]. 2013. 23 p. [cit. 21. 12. 2020]. Dostupné na: <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfolioTheoryMatrix.pdf>

očakávanej užitočnosti: $R_f + w(R_p - R_f) - \frac{1}{2} A w^2 \sigma^2$ a jej maximum dostaneme, ak vyriešime pre $w = \frac{\partial U}{\partial w}$, teda $w = \frac{R(p)-R_f}{A\sigma^2}$. Každá kombinácia bezrizikového aktíva a rizikového portfólia leží na priamke, ktorú opisuje funkcia $E(R) = R_f + \frac{R(p)-R_f}{\sigma(p)} \sigma(c)$ ⁴⁴, kde $\sigma(p)$ predstavuje volatilitu rizikového portfólia a $\sigma(c)$ kompletnú volatilitu po skombinovaní s bezrizikovým aktívom. Uvedená funkcia sa nazýva Capital allocation line. Graficky:



Graf 8 efektívna hranica a risk free aktívum

Zdroj: vlastná tvorba

Na grafe môžeme pozorovať dotyk indifferenčnej krivky s capital allocation line v bode, v ktorom celkové portfólio dosahuje volatilitu 6,86 % a očakávaný výnos 10,42 %. Takéto portfólio je tvorené z 58 % rizikovým portfóliom a zo 42 % bezrizikovým aktívom. Modrá prerušovaná priamka vychádzajúca z bodu optimálneho rizikového portfólia predstavuje hypotetickú časť kombinácií rizika a výnosu, ktoré by bol investor spôsobilý dosiahnuť v prípade, že by si ešte požičiaval peniaze na investovanie do optimálneho portfólia (pákový efekt). Smernica je v tomto prípade nižšia, pretože v čitateli funkcie capital allocation line by sa od výnosu rizikového portfólia neodčítaval výnos bezrizikového aktíva, ale výška úrokovej miery, za ktorú by si investor vypožičal peniaze⁴⁵.

⁴⁴ BODIE – KANE – MARCUS. Optimal Risky Portfolios. [online]. 2014. [cit. 16. 11. 2020]. p. 26.

Dostupné na: http://www.actexmadrivier.com/assets/clientdocs/prod_preview/a109sm.pdf

⁴⁵ tamtiež

1.2.4 Model oceňovania kapitálových aktív (CAPM)

Model oceňovania kapitálových aktív (angl. capital asset pricing model) predstavuje jednoduchý a pomerne intuitívny spôsob, akým dospieť k výpočtu očakávaného výnosu z určitého aktíva. Tento očakávaný výnos je následne možné využiť ako diskontný faktor pre výpočet súčasnej hodnoty aktíva, prípadne súčasnej hodnoty očakávaného cash flow z investičného projektu. Za predpokladu, že všetci investori majú rovnaký investičný horizont a optimálne portfólia zostavujú z rovnakých aktív, je zrejme, že aj efektívna hranica a tangency portfólio budú pre každého investora rovnaké. Toto portfólio je následne možné považovať za určitý benchmark, pomocou ktorého možno odhadnúť očakávaný výnos toho ktorého aktíva. Aby tento model fungoval, je ešte potrebné, aby všetci investori zvolili rovnaké bezrizikové aktívum. CAPM model má potom tvar $E(R) = R_f + \beta(E(R)_m - R_f)$, kde $E(R)_m$ je očakávaná výnosnosť tangency portfólia a β je už spomínaný beta koeficient. Podľa daného modelu by teda mal byť výnos aktíva úmerný kovariancii tohto aktíva s optimálnym trhovým portfóliom. Výhodou tohto modelu je už spomínaná jednoduchosť. Avšak druhou stranou mince je jeho vyoká nespoľahlivosť vzhľadom na empirické testovanie. Dôvodom sú najmä teoretické zjednodušenia, ktorými sa model vyznačuje, a ktoré majú extrémne nízky potenciál nastať v realite⁴⁶.

1.2.5 Optimalizácia portfólia pri alternatívnom meraní rizika prostredníctvom TVaR

Ako bolo spomenuté, meranie rizika má vážne nedostatky v prípade asymetrickej distribúcie výnosov. Oproti tomu, VaR je mierou tzv. downside risk, teda najnegatívnejšieho výsledku ktorý možno očakávať s určitým stupňom spoľahlivosti. Avšak VaR ako metóda merania rizika nie je koherentná, nakoľko nespĺňa podmienku subaditivity. Diverzifikáciou investície medzi viacero aktív by sme tak nedospeli k nižšiemu riziku, ako to je v prípade štandardnej odchýlky. To však neplatí v prípade

⁴⁶ FAMA, F. Eugene – FRENCH, R. Kenneth. The capital asset pricing model: theory and evidence. [online]. In: Journal of Economic Perspectives. vol. 18, no. 3, 2004. USA : American economic association. p. 25-46. [cit. 21. 12. 2020]. ISSN 0895-3309. Dostupné na: <http://mba.tuck.dartmouth.edu/bespeneckbo/default/AFA611-Eckbo%20web%20site/AFA611-S6B-FamaFrench-CAPM-JEP04.pdf>

podmieneného VaR (Tail value at risk). Predpokladajme stratovú funkciu portfólia $L(w, x) = \sum_{i=1}^n w(i)x(i)$, pričom x_i je záporný výnos aktíva i a w_i je jeho váha. Funkcia hustoty pravdepodobnosti a distribučná funkcia stratovej funkcie následne závisí od distribúcie vektora x a váh, ktoré nie sú náhodnou veličinou. Podmienený VaR stratovej funkcie, ktorý možno minimalizovať pri určitom požadovanom stupni výnosu má potom zápis $TVaR = VaR + \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR}^{\infty} (L(w, x) - VaR) f(x) dx$, kde $f(x)$ je funkcia hustoty vektora výnosov (strát). Určiť hustotu pravdepodobnosti stratovej funkcie však môže byť veľmi zdĺhavé, či v niektorých prípadoch dokonca nemožné. Preto je ako alternatívu vhodné použiť modelovanie rôznych scenárov, ktoré môžu nastať v jednotlivých obdobiach počas držby portfólia: $TVaR = VaR + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=1}^T L(w, x_i) - VaR$, za predpokladu, že $L(w, x_i) - VaR > 0$. Jednotlivec má teda v tomto prípade záujem o maximalizáciu funkcie $w'R - A(VaR + \frac{1}{(1-\alpha)T} \sum_{i=1}^T L(w, x_i) - VaR)$, kde A predstavuje opäť parameter averzie voči riziku. Pravdaže, aj optimalizácia tejto funkcie môže podliehať širokej škále obmedzení, podobne ako tomu bolo pri optimalizácii variancie⁴⁷.

⁴⁷ SALAHI, Maziar – MEHRDOUST, Farsi. CVaR robust mean – CvaR portfolio optimization. [online]. London : Hindawi Publishing, 2013. 9 p. [cit. 18. 02. 2021]. ISSN 2090-5564. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/258395523_CVaR_Robust_Mean-CVaR_Portfolio_Optimization

2 Ciele a metodika práce

Vďaka optimalizáciám rôzneho charakteru sme spôsobilí vytvoriť z vybraných aktív portfólio, ktoré sa vyznačuje ideálnym pomerom výnosu a rizika. Optimalizáciu vieme vykonať pri pasívnom portfóliu na začiatku investičného horizontu, ako aj pri aktívnom portfóliu, kde optimalizácia prebieha priebežne buď v pravidelných, alebo nepravidelných intervaloch (rebalansing aktív). Cieľom diplomovej práce bude skonštruovať dve portfólia – jedno aktívne a jedno pasívne tak, aby obe prekonávali priemer akciového trhu. Zatiaľ čo pri pasívnom portfóliu jediným problémom bude zvoliť správne aktíva a podľa teórie portfólia optimalizovať váhy, pri aktívnom bude treba vyriešiť aj frekvenciu a spôsob rebalansingu.

Je všeobecne jasné, že ekonomika, aj finančné trhy sa hýbu v cykloch. Sú obdobia prosperity, na začiatku ktorých je ideálnym riešením investovať prevažnú časť majetku do akcií. Naopak, pred obdobím prudkých poklesov a rastúcej volatility sú vhodnejším riešením vládne dlhopisy, ktoré zvyknú mať v čase zvýšenej volatility negatívnu koreláciu s akciovým trhom. Avšak predikcie pohybov aktív sú veľmi náročné a bohužiaľ nie príliš spoľahlivé. Pravdaže, aj predpovede od špičkových analytikov alebo výstupy tých najprepracovanejších modelov vždy udávajú iba určitú pravdepodobnosť ďalšieho pohybu aktív. To znamená, že aktívne portfólio by malo byť za každých okolností vybalansované vzhľadom na túto pravdepodobnosť a pripravené na možné scenáre, nastávajúce s inou pravdepodobnosťou. Vždy by mal byť teda prítomný element zabezpečujúci v určitej miere hedging portfólia (čo je pravdaže možné dosiahnuť ideálne prostredníctvom zaistovacích derivátov, tie však nie sú ľahko dostupné pre väčšinu retailových obchodníkov a investorov). Práve spôsob, akým dosiahnuť optimálnu úroveň zaistenia aktívneho portfólia prostredníctvom menej volatilných dlhopisov v rôznych trhových podmienkach predstavuje ďalšiu problematiku, ktorú sa v rámci diplomovej práce pokúsime vyriešiť. Inými slovami, cieľom bude aplikovať vhodný model predikujúci optimálny pomer akcií a dlhopisov v aktívnom portfóliu na najbližšie obdobie (ktoré môže mať rôznu dĺžku), resp. optimalizácia portfólia pri podmienke zafixovania určitého pomeru dlhopisov. Je zrejmé, že miera dlhopisov v portfóliu by mala byť v určitých obdobiach dostatočná na tlmenie prudkých prepádov akcií, avšak v rastových periódach príliš vysoký pomer dlhopisov spomaľuje výnosnosť investície. Preto je žiadúce, aby sa tento pomer v čase menil. To, ako sa bude meniť, bude výsledkom viacerých ekonomických a finančných premenných a modelu, ktorý tieto premenné bude spracovávať.

2.1 Výber aktív

Výber aktív je prirodzene prvým krokom ku konštrukcii a následnej optimalizácii portfólia. Pri výbere aktív sme sa zamerali namiesto individuálnych akcií a dlhopisov na ETF fondy, nakoľko sa pri nich nie je potrebné zaoberať mikroanalýzou podniku. Taktiež sú pre retailového investora vhodnejšie na dlhodobé investovanie, keďže je tak dosiahnutá rozsiahlejšia diverzifikácia.

Keďže našim cieľom je konštrukcia portfólia, ktoré má potenciál porážať trhovú priemer (index S&P 500), zvolili sme také ETF fondy, ktoré od roku 2004 do roku 2017 (verifikačné obdobie) tento index v priemernej výnosnosti prekonávali. Každé z týchto ETF pritom reprezentovalo odlišné ekonomické odvetvie podľa Global Industry Classification Standard⁴⁸. Okrem ETF reprezentujúcich odvetvia sme pridali ešte jedno dlhopisové ETF. Pri výbere sme taktiež dbali na čo najširšie pokrytie daného trhu a zastúpenie kľúčových spoločností v odvetví. Nemenej dôležitým faktorom bola aj dostupnosť a dĺžka histórie dát o vývoji ceny danej podielovej listiny. Napokon, sme dospeli k výberu nasledovných ETF fondov:

- **iShares US Energy ETF (IYE)** – fond reprezentujúci energetický sektor. Rozložením investícií sa snaží replikovať index *Dow Jones U.S. Oil & Gas*, ktorý je zložený najmä zo spoločností ťažiacich a spracujúcich ropu a zemný plyn. Investície fondu smerujú zhruba z 90 % do akcií daného indexu a zvyšných 10 % je alokovaných v depozitných potvrdenkách naviazaných na spoločnosti v odvetví energetiky. Fond je teda diverzifikovaný iba na mikroúrovni⁴⁹. Počas verifikačného obdobia spoľahlivo prekonával benchmark S&P 500 (nemalú zásluhu na tom mala napr. aj kríza a neskôr vojna v Líbyi v roku 2011⁵⁰), avšak počas validačného obdobia pomerne výrazne zaostal.
- **Materials Select Sector SPDR Fund (XLB)** – ETF naviazané na primárny ekonomický sektor, do ktorého patria ťažiarske spoločnosti. Ide o kľúčovú časť svetovej ekonomiky. Investície tohto fondu tvoria v tomto odvetví 3 miliardy dolárov, pričom v portfóliu je zaradených 28 rôznych spoločností. Môže sa zdať, že

⁴⁸ REEVES, Jeff. 11 Top Sector ETFs to Buy. [online]. 2020. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/investing/funds/slideshows/top-sector-etfs-to-buy>

⁴⁹ iShares US Energy ETF IYE Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/equity-energy/ishares-us-energy-etf/iye>

⁵⁰ KATUSA, Marin. The Libyan Crisis: Where Are Oil Prices Going?. [online]. 2011. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.forbes.com/sites/energysource/2011/03/03/the-libyan-crisis-where-are-oil-prices-going/?sh=1eb9f9b7659f>

primárny sektor neponúka príliš veľký rastový potenciál, nakoľko sa jeho produkty nevyznačujú príliš vysokou pridanou hodnotou. Počas verifikačného obdobia bol však opak pravdou. Investori sa tiež môžu spoliehať na skutočnosť, že po určitých materiáloch bude dopyt relatívne stabilný aj počas období recesií.

- **Industrial Select Sector SPDR Fund (XLI)** – tento podielový fond sa sústreďuje na investície do odvetvia priemyslu. Spoločnosti v tomto odvetví su v podstate spracovateľmi surových materiálov vyťažených spoločnosťami v primárnom sektore. S 11 miliardami USD pod správou patrí tento fond medzi najväčšie ETF investujúce do tejto oblasti. Najvýznamnejšie tituly v portfóliu tvoria napr. spoločnosti Boeing a Caterpillar.
- **Consumer Discret Sel Sect SPDR (XLY)** – ETF investujúce do odvetvia spotrebiteľských tovarov a služieb. Je potrebné podotknúť, že v tomto prípade nejde o nevyhnutné statky, ale o statky, ktoré si spotrebiteľia kupujú, iba ak im to umožňuje ich príjem (po anglicky sa toto odvetvie nazýva *consumer discretionary*)⁵¹. Pokiaľ ide o investičnú stratégiu, tá je podobne ako v predošlých prípadoch, pasívna. Fond sa snaží replikovať index *Consumer Discretionary Select Sector*, pričom minimálne 95 % investícií smeruje do akcií zaradených do tohto indexu. Index obsahuje napr. akcie hotelov, reštaurácií, textilných spoločností, spoločností vyrábajúce luxusné produkty atď...⁵²
- **Consumer Staples Select Sector SPDR (XLP)** – fond zameriavajúci sa na odvetvie príbuzné tomu predchádzajúcemu – ibaže v tomto prípade ide o statky, ktoré sú pre spotrebiteľa nevyhnutné a na pravidelnej báze ich musí dopĺňať. Po anglicky sa tomuto odvetviu hovorí *consumer staples*. Investičná stratégia fondu je v mnohom podobná ako v predchádzajúcom prípade, pričom replikovaný index predstavuje *Consumer Staples Select Sector*. Tento index tvoria akcie spoločností pôsobiacich napr. v oblasti spracovaní potravy, výroby alkoholu a tabaku, domácich potrieb atď...⁵³

⁵¹ Reviewed by SCOTT, Gordon. Consumer Discretionary. [online]. 2020. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/c/consumer-discretionary.asp>

⁵² Consumer Discret Sel Sect SPDR® ETF XLY Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/consumer-cyclical/consumer-discret-sel-sect-spdr-etf/xly>

⁵³ Consumer Staples Select Sector SPDR® ETF. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/consumer-defensive/consumer-staples-select-sector-spdr-etf/xlp>

- **Health Care Select Sector SPDR (XLV)** – ETF reprezentujúce farmaceutický priemysel. O tomto odvetví je možné uvažovať ako o kombinácii rastu a zároveň relatívneho bezpečia v čase recesie – dopyt po farmaceutických výrobkoch nie je príliš elastický. Inflácia v tomto sektore však zvykne vysoko prekonávať priemer. Podobne, aj nami vybrané ETF prekonáva akciový benchmark minimálne na verifikačnej perióde. Medzi najvýznamnejšie akcie v portfóliu patria napr Pfizer alebo United Health Group.
- **Technology Select Sector SPDR (XLK)** – ako napovedá názov fondu, ide o ETF sústredujúce sa na technologický sektor. Sektor tradične dynamicky rastúci a vytvárajúci finčné bubliny. Zaradením tohto ETF do svojho portfólia investor značne zvyšuje pravdepodobnosť, že jeho výnos presiahne trhovú priemer. Pokiaľ ide o investičnú stratégiu, ETF sa v ničom nelíši od predošlých fondov. Pasívny spôsob investovania je založený na replikácii rovnomenného indexu⁵⁴.
- **Utilities Select Sector SPDR (XLU)** – ETF zamerané na sektor utilít, ktorý je tradične považovaný za necyklický (aj keď to nie je celkom tak). Každopádne môžeme tvrdiť, že dopyt po type produktov zabezpečovaných týmto odvetvím má určitý stabilný základ. Problémom však môže byť v niektorých prípadoch prísna regulácia spoločností. Pokiaľ ide o samotný fond, nemá v portfóliu zastúpený príliš vysoký počet akcií, avšak každá zo spoločností je regionálnym monopolom v Spojených Štátoch. Najvýznamnejšou položkou v portfóliu sú akcie firmy Dominion Energy.
- **SPDR S&P 500 ETF Trust** – ide o jeden z najznámejších ETF fondov na svete. Ako napovedá jeho názov, ide o fond replikujúci index S&P 500, teda náš benchmark, ktorý sa pokúsime prekonať. Výkonnosť našich skonštruovaných portfólií je potrebné porovnávať voči ETF a nie priamo voči indexu najmä z dôvodu poplatkov, ktoré sa v určitej miere odzrkadlia na cene podielovej listiny. Pravdaže, aj samotný investor nemá inú možnosť nákupu daného indexu, jedine prostredníctvom ETF⁵⁵.

⁵⁴ Technology Select Sector SPDR® ETF XLK Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/technology/technology-select-sector-spdr-etf/xlk>

⁵⁵ SPDR® S&P 500 ETF Trust SPY Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/large-blend/spdr-s-p-500-etf-trust/spy>

- **iShares 20+ Year Treasury Bond ETF** – dlhopisová zložka našich portfólií bude zabezpečená práve prostredníctvom uvedeného fondu. Prirodzene, ide o pasívne riadený fond, ktorého cieľom je čo najbližšie replikovať ICE U.S. Treasury 20+ Year Bond Index. V tomto indexe sú zastúpené vládne dlhopisy so splatnosťou dlhšou ako 20 rokov, môžeme teda povedať, že ich dĺžka a citlivosť na pohyb úrokovej miery je pomerne vysoká. To znamená, že na zaistenie aktívneho portfólia v čase vysokej volatility na akciovom trhu je potrebný menší objem podielových listín tohto fondu, keďže ich cenové pohyby sú dostatočne prudké. Fond investuje minimálne 90 % majetku do podkladového indexu a minimálne 95 % investícií tvoria investície do amerických dlhopisov⁵⁶.

Treba spomenúť, že cenu, ktorú sme brali do úvahy pri každom fonde, predstavuje tzv. adjusted close, teda cenu, ktorá je upravená vzhľadom na dividendy a štiepenie podielových listín. Vďaka tomu vieme získať najvernejší možný obraz o očakávanom výnose a variabilite výnosnosti jednotlivých fondov (vychádzajúc čisto z historických údajov ceny). Nasledujúca tabuľka zobrazuje kľúčové údaje vypočítané na verifikačnej perióde o očakávanom výnose a riziku jednotlivých ETF fondov:

Tabuľka 1 parametre aktív

Zdroj: Vlastná tvorba

ETF	E(R)	σ	Sharpe r.	VaR 0.95	β
TLT	0.068	0.102	0.627	-0.104	-0.22
SPY	0.080	0.167	0.453	-0.322	0.99
IYE	0.091	0.232	0.374	-0.366	0.95
XLB	0.084	0.209	0.380	-0.455	1.14
XLI	0.092	0.205	0.427	-0.418	1.18
XLK	0.089	0.169	0.503	-0.298	0.93
XLP	0.098	0.096	0.978	-0.129	0.51
XLU	0.102	0.146	0.672	-0.277	0.69
XLV	0.087	0.139	0.593	-0.156	0.71
XLY	0.097	0.192	0.481	-0.286	1.04

⁵⁶ iShares 20+ Year Treasury Bond ETF TLT Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/long-government/ishares-20-year-treasury-bond-etf/tlt>

Pokiaľ ide o výpočet sharpe ratio, za bezrizikovú úrokovú mieru bol považovaný výnos zo štátnych pokladničných poukážok s mesačnou splatnosťou, ktorý k dátumu 31. 12. 2017 činil 0,44 %⁵⁷. S miernym sklamaním musíme konštatovať, že zo všetkých aktív ani jediné nemalo Sharpe ratio väčšie ako 1. Pokiaľ ide o VaR, najnižším spomedzi akciových fondov sa vyznačuje XLP. Podobne, aj beta koeficient získaný regresiou voči indexu S&P 500 je najoptimálnejší v tomto prípade. Môžeme taktiež vidieť, že jediné aktívum, ktoré sa vyznačuje negatívnou betou je dlhopisový TLT. Táto skutočnosť vytvára predpoklad, že dané aktívum je spôsobilé do istej miery zaistiť akciové portfólio.

Pri konštrukcii portfólia z daných aktív nás zaujíma ešte jeden kľúčový ukazovateľ – korelácia medzi aktívami. Tie nám zobrazuje korelačná matica:

Tabuľka 2 korelácie aktív
Zdroj: Vlastná tvorba

	TLT	SPY	IYE	XLB	XLI	XLK	XLP	XLU	XLV	XLY
TLT	1.00	-0.37	-0.30	-0.43	-0.40	-0.28	-0.22	0.01	-0.29	-0.38
SPY	-0.37	1.00	0.69	0.92	0.97	0.94	0.90	0.79	0.86	0.92
IYE	-0.30	0.69	1.00	0.82	0.75	0.56	0.51	0.73	0.41	0.45
XLB	-0.43	0.92	0.82	1.00	0.94	0.86	0.79	0.76	0.69	0.76
XLI	-0.40	0.97	0.75	0.94	1.00	0.88	0.86	0.77	0.76	0.86
XLK	-0.28	0.94	0.56	0.86	0.88	1.00	0.84	0.71	0.80	0.87
XLP	-0.22	0.90	0.51	0.79	0.86	0.84	1.00	0.73	0.84	0.85
XLU	0.01	0.79	0.73	0.76	0.77	0.71	0.73	1.00	0.59	0.61
XLV	-0.29	0.86	0.41	0.69	0.76	0.80	0.84	0.59	1.00	0.84
XLY	-0.38	0.92	0.45	0.76	0.86	0.87	0.85	0.61	0.84	1.00

Opäť vidíme, že takmer všetky aktíva s výnimkou XLU majú negatívnu koreláciu s dlhopisovým ETF, pričom najnižšiu koreláciu majú medzi sebou TLT a XLB (ťažba materiálov). Naopak, najvyššiu koreláciu môžeme pozorovať medzi fondmi XLB a XLI (ak nepočítame SPY, keďže toto do portfólia nebudeme zaraďovať), čo nie je nijak prekvapivé, keďže, ako bolo spomenuté, ide o fondy zamerané na priamo prepojené ekonomické odvetvia.

⁵⁷ U.S. DEPARTMENT OF TREASURY. Daily Treasury Yield Curve Rates. [online]. 2021. [cit. 21. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/TextView.aspx?data=yieldYear&year=2016>

2.2 Výber premenných

Zrejme najzložitejšou časťou konštrukcie automatizovaného aktívneho portfólia je výber premenných, ktoré predikujú optimálny pomer akcií a dlhopisov v aktívnom portfóliu. V našom prípade ide o predikciu na najbližší mesiac. Ako bolo spomenuté, cena má tendenciu inkorporovať všetky dostupné informácie o očakávanom ekonomickom vývoji – cenu teda nie je možné v takomto prípade spoľahlivo predikovať. Navyše, finančné trhy vždy reagujú na akúkoľvek informáciu ako prvé (akciový trh je považovaný za predstihový ekonomický indikátor⁵⁸), pričom správy a informácie nie je možné kvantifikovať a spracovať prostredníctvom modelu. Z týchto dôvodov sa javí výber tých správnych premenných ako problematický. Počet premenných, ktoré by sme mohli brať do úvahy je tiež obrovský. V našej práci sme sa obmedzili na 6 fundamentálnych a 6 štatistických premenných, pričom 2 z fundamentálnych premenných sú zahrnuté v indexe finančných podmienok ANFCI (adjusted national financial conditions index), konštruovaným Chicagským FEDom. Tento index je meradlom podmienok na americkom peňažnom a kapitálovom trhu, pričom v ňom absentujú na rozdiel od indexu NFCI premenné, ktoré sú vysoko korelované s reálnym ekonomickým vývojom (takto je možné získať izolovaný pohľad na situáciu na finančnom trhu)⁵⁹. Pri výbere našich premenných sme kládli dôraz najmä na váhu daného indikátora v spomenutom indexe, ale taktiež aj na dostupnosť dát.

Okrem finančných indikátorov, resp. indikátorov sentimentu investorov sme zahrnuli do modelu aj dva významné predstihové makroekonomické indikátory, ktoré predikujú zmeny nastávajúce v reálnej ekonomike. Premenné sú navyše doplnené o základné štatistické ukazovatele indexu S&P 500, nakoľko tento index zahŕňa väčšinu akcií v našich portfóliach. V obdobiach vysokej volatility akciového trhu sa taktiež rapídne zvyšuje korelácia akcií s trhom, preto nemá veľký význam zahrnúť štatistické ukazovatele každého nášho ETF zvlášť. Výber premenných teda vyzerá nasledovne:

a) Fundamentálne:

I. Ukazovatele sentimentu investorov:

1. Index spreadov korporátnych dlhopisov

⁵⁸ DUGGAN, Wayne. What Does It Mean That The Stock Market Is A Leading Economic Indicator?. [online]. 2020. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://finance.yahoo.com/news/does-mean-stock-market-leading-205002941.html>

⁵⁹ CHICAGOFED. National Financial Conditions Index (NFCI). [online]. 2021. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.chicagofed.org/publications/nfci/index>

2. Rozdiel 5 ročných vládnych dlhopisov a FED funds
3. TED spread
4. Index volatility VIX

II. Predstihové makroukazovatele:

1. Nové objednávky tovarov dlhodobej spotreby
2. PMI index

b) Štatistické:

1. Medziročné zmeny
2. Kvartálne zmeny
3. Mesačné zmeny
4. Pomer ceny a 30 mesačného kľzavého priemeru
5. Indikátor RSI
6. Počet mesiacov pohybu ceny v jednom smere

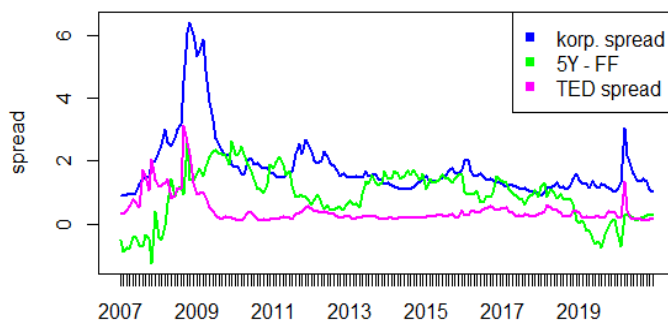
2.2.1 *Fundamentálne ukazovatele*

Pokiaľ ide o index spreadov korporátnych dlhopisov, ten je vypočítaný ako vážený priemer rozdielov medzi korporátnymi dlhopismi s príslušnou splatnosťou a výnosovou krivkou vládnych dlhopisov. Je potrebné dodať, že tieto rozdiely sú ešte dodatočne upravené vzhľadom na skutočnosť, či sa s cenným papierom spája aj opčná povinnosť (tá zvyšuje riziko očakávaného cash flowu). Za relevantné pre výpočet indexu sa v tomto prípade považujú dlhopisy v investičnom pásme (rating BBB a lepšie). Váhu prirodzene predstavuje trhovú kapitalizácia daných dlhopisov⁶⁰.

Nakoľko výnos z korporátnych dlhopisov reflektuje riziko ohľadom budúceho ekonomického vývoja, v čase, kedy sa toto riziko zvyšuje (očakávanie recesie), zvyšuje sa aj hodnota spomínaného indexu. Podobným mechanizmom funguje aj rozdiel medzi výnosom z 5 ročných vládnych dlhopismi a efektívnou sadzbou na depozitá uložené vo

⁶⁰ FRED. ICE BofA US Corporate Index Option-Adjusted Spread. [online]. 2021. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A0CM>

FEDe, ktorá je považovaná za úplne bezriziková⁶¹. Rovnako tak aj TED spread, ktorý predstavuje rozdiel 3 mesačného USD LIBOR a výnosu 3 mesačných štátnych pokladničných poukázok⁶². Vývoj jednotlivých spreadov môžeme pozorovať na grafe:



Graf 9 dlhopisové spready

Zdroj: vlastná tvorba

Je možné vidieť, že úroveň jednotlivých spreadov má tendenciu prudko vzrásť v obdobiach zvýšeného rizika (roky 2008, 2020) a naopak. Okrem dlhopisových spreadov použijeme ešte jeden indikátor sentimentu investorov – index volatility VIX, prezývaný aj index strachu. Ide o 30 dňovú očakávanú volatilitu (štandardnú odchýlku) indexu S&P 500, odvodenú od pohybov cien opcií⁶³. Prirodzene, čím je hodnota indexu vyššia, tým väčšie riziko podstupujeme, ak sa rozhodneme investovať do akcií. Problémom však je (ako obyčajne), že ani tento ukazovateľ v drvivej väčšine prípadov nereaguje dostatočne skoro, ale hýbe sa v tandeme s trhom – keď trh padá, VIX rastie – čo neumožňuje spoľahlivo identifikovať body zvratu po nastatí prudkých korekcií. Rovnako tak nedokáže spoľahlivo pred týmito korekciami varovať.

Zvyšné fundamentálne premenné predstavujú, na rozdiel od ukazovateľov sentimentu investorov, makroekonomické predstihové indikátory. Obe zvolené premenné majú zastúpenie v Leading economic index, teda v indexe predstihových indikátorov konštruovaným orgánom Conference Board. Index PMI (Purchasing managers index) je založený na empirickom prieskume vrcholových manažérov vybraných spoločností

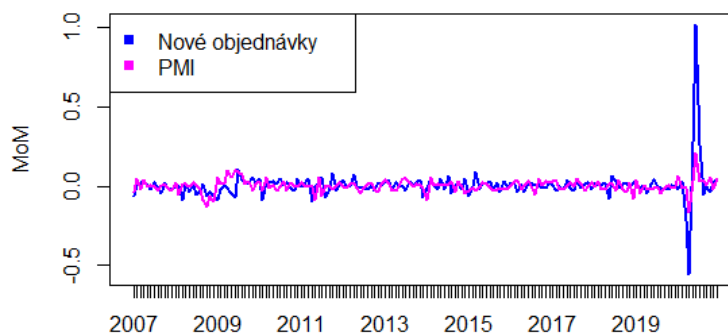
⁶¹ FRED. 5-Year Treasury Constant Maturity Minus Federal Funds Rate. [online]. 2021a. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/T5YFF>

⁶² FRED. TED Spread. [online]. 2021b. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/TEDRATE>

⁶³ SMITH, Lisa. Tracking Volatility. [online]. 2020. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/articles/active-trading/070213/tracking-volatility-how-vix-calculated.asp>

ohľadom očakávaných obchodných podmienok na trhu. Podľa prieskumu možno zistiť, či top manažéri očakávajú zlepšenie, zhoršenie, alebo stagnáciu trhového prostredia.

Mesačné zmeny oboch makroukazovateľov:

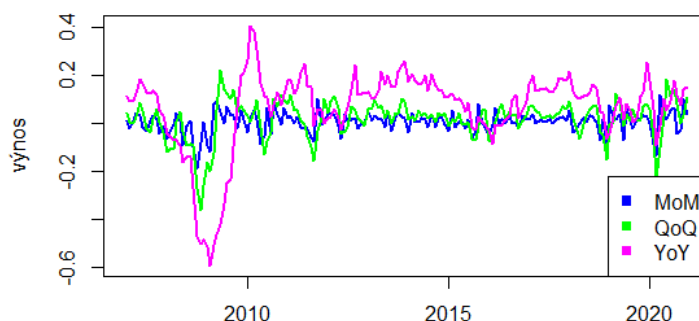


Graf 10 mesačné zmeny PMI a manufaktúrnych objednávok

Zdroj: vlastná tvorba

2.2.2 Štatistické ukazovatele

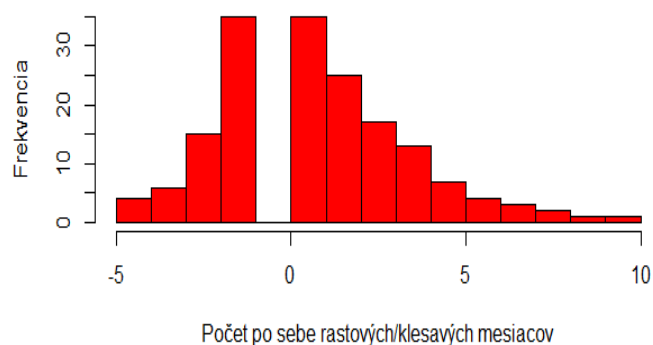
Štatistické indikátory indexu S&P 500, ktoré budú zaradené do modelu popri fundamentálnych premenných, boli vyberané na základe úvahy autora a vizuálnej kontroly – pri ich výbere sme sa neriadili nijakým odporúčaním. Očakávame totiž, že lepšie pomôžu identifikovať body zvratu, prípadne momentum akciového trhu, a tým prispieť k lepšej identifikácii optimálneho pomeru dlhopisov v portfóliu. Graf ročných, kvartálnych a mesačných zmien ceny indexu S&P 500:



Graf 11 YoY, QoQ, MoM výnosov indexu S&P 500

Zdroj: vlastná tvorba

Okrem uvedených zmien cien uvažujeme ešte s jednoduchým pomerom ceny a 30 mesačného kľzavého priemeru, s počtom mesiacom kedy sa cena hýbe v rovnakom smere a s indikátorom RSI. Ten je vypočítaný ako $RSI = 100 - \frac{100}{1 + \frac{priem.rast}{priem.strata}} 64$, pričom zvyčajnou periódou za ktorú sa meria priemerný rast/strata je 14 predošlých období (v našom prípade 14 mesiacov). Vo všeobecnosti možno tvrdiť, že ak je hodnota indikátora väčšia ako 70, trh je prekúpený a pokiaľ je menšia ako 30, trh je vypredaný a možno očakávať korekciu do opačného smeru. Podobný reverzný indikátor by mohol predstavovať aj počet mesiacov, kedy sa cena hýbe v jednom smere – z distribúcie pravdepodobnosti vieme zistiť objektívnu pravdepodobnosť, či bude cena najbližší mesiac rásť alebo klesať (pravdaže, zisťovanie tejto distribúcie na rôznych časových radoch nám prinesie rôzne výsledky). Distribúcia pravdepodobnosti počtu po sebe rastúcich/klesavých mesiacov vyzerá nasledovne:



*Graf 12 počet mesiacov pohybu ceny v jednom smere
Zdroj: vlastná tvorba*

Vidíme, že histogram má nulovú frekvenciu v bode nula – čo je pochopiteľné, keďže sa ani raz nestalo, že by v priebehu mesiaca akciový trh nespravil žiadny pohyb.

Napokon, nás zaujímajú ešte vzájomné vzťahy, resp. závislosti medzi všetkými zvolenými premennými.

⁶⁴ FERNANDO, Jason. Relative Strenght Index (RSI). [online]. 2020. [cit. 26. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/r/rsi.asp>

Tabuľka nižšie zobrazuje korelácie mesačných zmien (s výnimkou ročných a kvartálnych zmien S&P 500 a počtu rastúcich/klesavých mesiacov) všetkých zvolených premenných:

Tabuľka 3 korelácie premenných
Zdroj: Vlastná tvorba

	Korp. spread	5 roč. – FF	TED spread	VIX	Objed. tovarov	PMI	YoY	QoQ	MoM	Mes. po sebe	Cena/30M priem.	RSI
Korp. spread	1.00	0.01	0.73	0.45	-0.16	-0.20	-0.10	-0.46	-0.65	-0.43	-0.66	-0.64
5 roč. – FF	0.01	1.00	-0.08	0.11	-0.02	-0.07	0.04	0.03	-0.07	0.04	-0.07	-0.12
TED	0.73	-0.08	1.00	0.20	-0.14	-0.08	-0.01	-0.23	-0.30	-0.18	-0.30	-0.29
VIX	0.45	0.11	0.20	1.00	0.05	-0.12	-0.05	-0.23	-0.70	-0.35	-0.71	-0.75
Objed. tovarov	-0.16	-0.02	-0.14	0.05	1.00	0.49	0.10	0.29	0.05	0.10	0.04	0.02
PMI	-0.20	-0.07	-0.08	-0.12	0.49	1.00	0.03	0.43	0.21	0.19	0.23	0.23
YoY	-0.10	0.04	-0.01	-0.05	0.10	0.03	1.00	0.49	0.28	0.23	0.19	0.10
QoQ	-0.46	0.03	-0.23	-0.23	0.29	0.43	0.49	1.00	0.57	0.59	0.54	0.46
MoM	-0.65	-0.07	-0.30	-0.70	0.05	0.21	0.28	0.57	1.00	0.57	0.99	0.95
Mesiace po sebe	-0.43	0.04	-0.18	-0.35	0.10	0.19	0.23	0.59	0.57	1.00	0.55	0.53
Cena/30M priemer	-0.66	-0.07	-0.30	-0.71	0.04	0.23	0.19	0.54	0.99	0.55	1.00	0.96
RSI	-0.64	-0.12	-0.29	-0.75	0.02	0.23	0.10	0.46	0.95	0.53	0.96	1.00

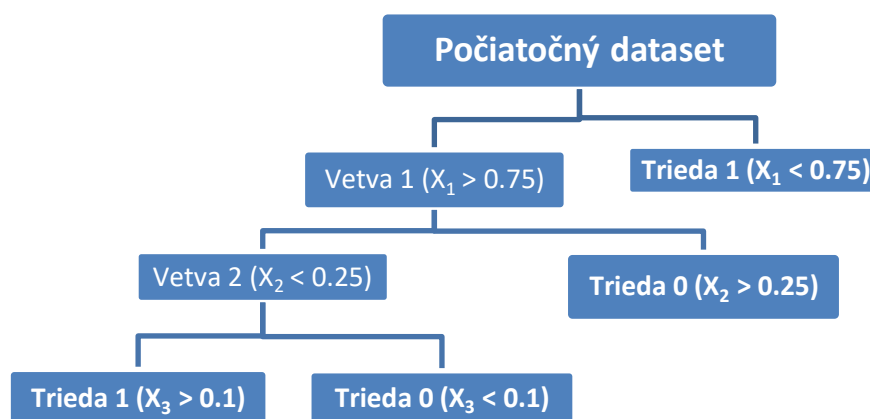
2.3 Výber modelu

Je potrebné si v prvom rade uvedomiť, že našim cieľom je identifikácia pomeru dlhopisov v portfóliu, pričom tento pomer bude diskretnou premennou. Pri optimalizácii jednotlivých aktívnych portfólií totiž pri každom z nich určíme v každom mesiaci podmienku zafixovania pomeru dlhopisov na 0.1, 0.2, 0.3....0.9, pričom v každom mesiaci vyberieme to portfólio, ktoré dosiahlo za daný mesiac najvyšší výnos. Práve pomer dlhopisov v tomto najvýnosnejšom portfóliu za každý mesiac bude predstavovať našu závislú premennú. Model by tak mal dokázať odhadnúť podľa konštalácie vstupov (našich premenných) optimálny pomer dlhopisov na najbližší mesiac. Na základe toho budeme vedieť, pri akej podmienke optimalizovať portfólio.

2.3.1 Klasifikačné stromy a Random Forest

Pri výbere klasifikačnej metódy sme brali do úvahy tak náročnosť modelu, ako aj podmienky, ktoré musia spĺňať dáta, aby sme daný model vôbec mohli aplikovať. Samozrejme, nemenej dôležitým kritériom bola presnosť, rýchlosť výpočtového algoritmu a spoľahlivosť modelu. Dá sa taktiež očakávať, že vzťahy medzi závislou premennou a nezávislými premennými nebudú mať blízko k linearite.

Keďže môžeme na korelačnej matici premenných vidieť, že medzi niektorými premennými je silná korelácia, je potrebné vybrať model ktorému multikolinearita neubližuje. Jedným z klasifikačných modelov, ktorý sa vyznačuje jednoduchosťou a nevyžaduje prakticky nijaké úpravy dát, predstavuje rozhodovací strom. Ide o viacstupňový, hierarchický model, ktorý zaraďuje závislú premennú do určitej triedy podľa miery splnenia rozhodovacích kritérií⁶⁵:



Obrázok 1 klasifikačný strom

Zdroj: Vlastná tvorba

Diagram vyššie nám znázorňuje jednoduchý binárny strom, ktorý je tvorený koreňom, rozhodovacími vetvami a listami. Každá vetva je v princípe algoritmom rozseknutý na dva ďalšie vetvy tak, aby sa po splnení/nesplnení rozhodovacieho kritéria (x je $</>$ ako hodnota jednej z premenných) a zaradení do príslušnej povetvy dosiahla čo najvyššia miera separácie binárnej závislej premennej. V zásade ide o maximalizáciu informačného zisku, ktorý sa vypočíta ako: entropia(rodíč) – priemerná entropia detí, pričom entropia = $-\sum_i P(i) \log_2 P(i)$. $P(i)$ vo vzorci označuje zlomok pozorovaní v triede

⁶⁵ CHRMULÍK, Michal. Náhľad do algoritmu rozhodovací strom. [online]. 2020. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: <https://umelainteligencia.sk/nahlad-do-algoritmu-rozhodovaci-strom/>

i v podmnožine datasetu⁶⁶. Rozhodovacie kritéria sú v jednotlivých uzloch zoradené hierarchicky od najdôležitejšieho po najmenej dôležité (kritérium, ktoré rozpolí koreň je teda najdôležitejšie). V procese klasifikácie závislej premennej následne systém postupuje postupne od koreňa až ku koncovému listu, podľa ktorého zistíme hľadanú triedu⁶⁷.

Napriek výhodám, ktorými sa rozhodovacie stromy vyznačujú, musíme bohužiaľ konštatovať, že oproti iným klasifikačným metódam (logistická regresia, lineárna diskriminačná analýza...) zaostávajú v presnosti. Taktiež majú tendenciu viesť k „pretrénovanosti“ (výborný výsledok na verifikačnom sete, ale tragický predikčný potenciál). Preto budeme využívať vylepšenie tejto stromovej klasifikačnej metódy v podobne modelu Random Forest. Ten okrem výhod, ktoré sa spájajú s klasickými stromami (nie je potrebná úprava dát, neprekáža multikolinearita...), prináša aj pomerne vysokú mieru presnosti⁶⁸.

Na rozdiel od jediného rozhodovacieho stromu, metóda random forest vytvorí týchto stromov viacero, pričom vytvoreniu ďalšieho stromu predchádza bootstrapping dát (náhodný výber pozorovaní s možným opakovaním výberu toho istého pozorovania) a selekcia premenných. Zo všetkých n premenných sa tak pri konštrukcii každého stromu použije iba náhodne vybraných x premenných. Stromy tak nie sú v rozhodovacom procese korelované. Pozorovanie je zatriedené do jednej zo skupín na základe toho, kam ho zaradí väčšina stromov⁶⁹.

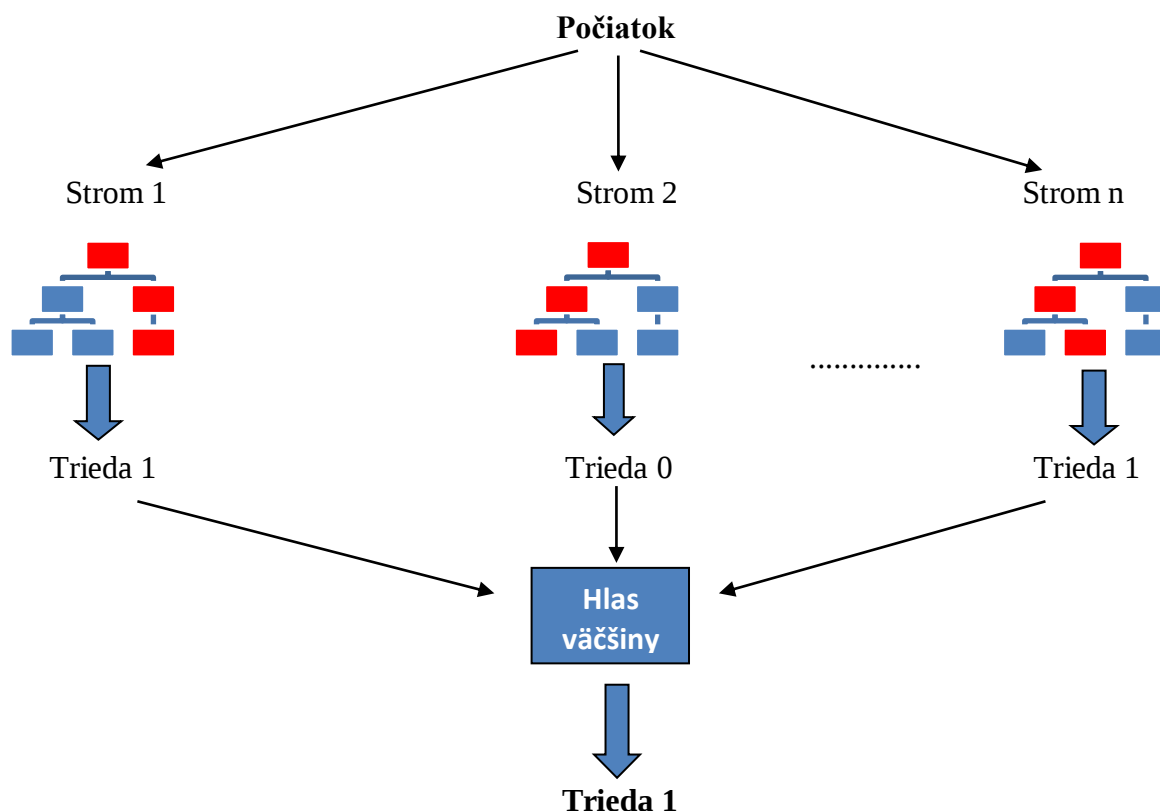
⁶⁶ CIBULA, Miroslav. Rozhodovacie stromy. [online]. 2017. [cit. 28. 02. 2020]. Dostupné na: <https://smnd.sk/mcibula/alg/DT.html>

⁶⁷ CHRMULÍK, Michal. Náhľad do algoritmu rozhodovací strom. [online]. 2020. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: <https://umelainteligencia.sk/nahlad-do-algoritmu-rozhodovaci-strom/>

⁶⁸ HUNT, Joshua. Predicting Changes in Earnings: A Walk Through a Random Forest. University of Arkansas : Fayetteville, Dissertation, 2018. [online]. 20 p. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: <https://scholarworks.uark.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4410&context=etd>

⁶⁹ tamtiež

Celý proces znázorňuje nasledujúci diagram:



Obrázok 2 random forest
Zdroj: Vlastná tvorba

2.4 Priebeh experimentu

Po výbere aktív, premenných predikujúcich zmeny v aktívnom portfóliu a výbere modelu môžeme pristúpiť k opisu celého procesu, v ktorom do seba jednotlivé časti zapadnú.

Ako bolo spomenuté, celý dataset, ktorý máme k dispozícii, bude rozdelený na dve časti – verifikačnú časť, ktorú bude tvoriť obdobie od roku 2007 do roku 2021 (do úvahy však berieme výnosy už od roku 2004, rok 2007 bude len prvým rokom, v ktorom sa prvýkrát optimalizuje aktívne portfólio, pretože na toto sú potrebné opäť historické dáta. Je tak možné tvrdiť, že verifikačná časť pri pasívnom portfólii siaha až do roku 2004); a validačnú časť, ktorá predstavuje obdobie 2017 – 2021 (koniec = 31. 12. 2020). Najskôr pristúpime ku konštrukcii pasívneho portfólia, ktoré optimalizujeme na základe medziročných výnosov získaných na mesačnej báze, na začiatku roku 2017. Pri aktívnom portfóliu bude postup zložitejší a taktiež podstatne náročnejší na výpočtový výkon.

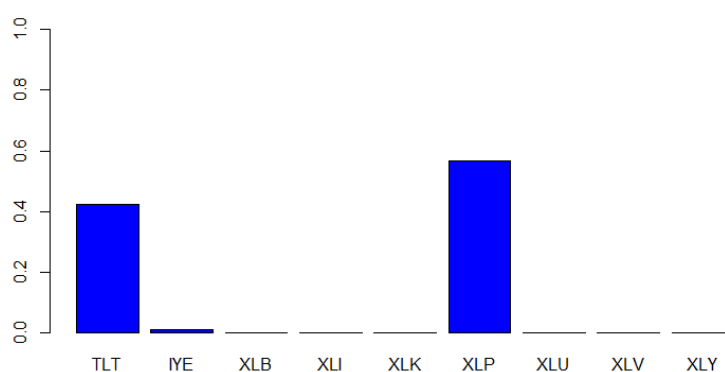
V prvom rade optimalizujeme (nájdeme maximálne Sharpe ratio) portfólia na základe medziročných výnosov za posledné tri roky (prakticky kľzáva optimalizácia) za každý mesiac od roka 2007 po rok 2017 tak, aby bola pri každom zadaná podmienka iného pomeru dlhopisov (0.1,0.2,.....,0.9). V prípade, že hľadáme maximálne Sharpe ratio, ide o maximalizáciu funkcie $(w'R - Rf) (w'Sw)^{-1/2} + \lambda(w - 1) + \lambda(wD - wp)$ kde wD predstavuje váhu dlhopisového ETF a wp je požadovaná váha tohto ETF v portfóliu. Následne z výstupu extrahujeme váhy aktív v každom mesiaci za každé portfólio a vypočítame výnos týchto portfólií v príslušnom mesiaci. Za každý mesiac potom vyberieme najvýnosnejšie portfólio a zistíme, akú váhu tvorili dlhopisy. Dostaneme tak našu závislú premennú – optimálny pomer dlhopisov v každom mesiaci. Následne na tréningovom datasete fitneme model Random Forest s našimi premennými, oneskorenými o jeden mesiac voči závislej premennej. Ďalej spravíme predikcie pomeru dlhopisov na validačnej časti datasetu a optimalizujeme portfólio pri danom predikovanom pomere opäť v každom mesiaci. Napokon porovnáme výsledky a kľúčové ukazovatele pasívneho portfólia, aktívneho portfólia a fondu SPY na validačnej časti. Celá práca bude realizovaná prostredníctvom štatistického programovacieho jazyka R.

Je potrebné dodať, že z dôvodu zjednodušenia celého procesu nebudeme brať do úvahy transakčné náklady vznikajúce pri nákupe a predaji aktív.

3 Výsledky práce

3.1 Optimalizácia pasívneho portfólia

V prvom kroku sme sa pokúsili optimalizovať pasívne portfólio na základe medziročných výnosov (meraných na mesačnej báze) od roku 2004 do roku 2017. Výsledok bol však mierne problematický, nakoľko vzhľadom na historické výnosy a volatilitu sa prideliť extrémne váhy dvom aktívam (TLT, XLP), a zvyšné aktíva mali takmer nulové zastúpenie:



Graf 13 váhy aktív

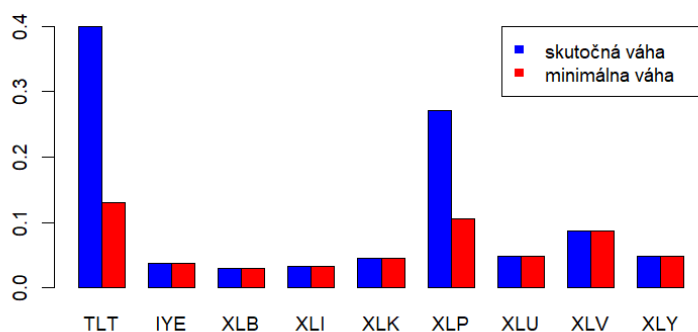
Zdroj: vlastná tvorba

Dôvodom je totiž, že pomer očakávaného výnosu a volatilita je pri týchto dvoch aktívach výrazne vyšší ako u ostatných. Navyše, dlhopisové ETF sa vyznačuje veľmi nízkou koreláciou s ostatnými aktívami. Taktiež nebol dodržaný predpoklad normality výnosov. Hoci takéto portfólio spĺňa podmienku najvyššieho možného Sharpe ratio, nedá sa hovoriť v tomto prípade o diverzifikácii. Tá, prirodzene, nie je podmienená iba počtom aktív, ale aj pomerom medzi ich váhami⁷⁰. Volatilita, na základe ktorej sú váhy určované, je totiž iba jedna zo spôsobov merania rizika. Nesmieme zabúdať na rôzne ďalšie riziká, ktoré môžu vyplývať z nedostatočnej diverzifikácie, pričom niektoré ťažko možno predikovať alebo kvantifikovať.

Teória nedáva jednoznačný návod, ako postupovať v takomto prípade. Možnými riešeniami by boli napríklad meranie rizika prostredníctvom VaR (TVaR) alebo zahrnutie

⁷⁰ De FRANCO, Carmine – MONNIER, Bruno. The diversification constraint for Minimum Variance portfolios. [online]. France : Ossiam, research paper, 2014. [online]. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: https://www.ossiam.co.uk/files/research_papers/1420536417_The_diversification_constraint_for_Minimum_Variance_portfolios-v2.pdf

vyšších momentov do optimalizácie⁷¹. My sa pokúsime problém vyriešiť jednoduchším spôsobom, prostredníctvom zadania dvoch obmedzení navyše v podobe minimálnej a maximálnej váhy pre jednotlivé aktíva. Pri určení kritéria minimálnej váhy sme využili ďalšie z meraní rizika – value at risk. Aktívu s najvyšším VaR bolo pridelená minimálna váha 3 %. Pri každom ďalšom sme postupovali jednoducho podľa vzorca $0.03 * \frac{VaR(najvyšší)}{VaR(aktívum)}$. Váhy aktív tak z časti reflektujú 2 metódy merania rizika. Maximálnu váhu každého aktíva sme určili na 40 %. Po spomenutých obmedzeniach nám vychádzajú nasledovné váhy:

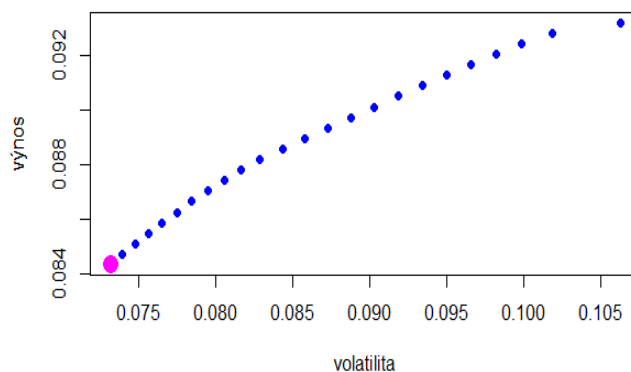


Graf 14 modifikované váhy
Zdroj: vlastná tvorba

Je zrejmé, že aktíva, ktoré nespĺňali podmienku minimálnej váhy, majú teraz váhu rovnajúcu sa tej minimálnej, keďže je to druhá najlepšia možnosť. Medzi váhami sme však aspoň čiastočne znížili extrémne nepomery, čím sme dosiahli kvalitnejšiu diverzifikáciu portfólia.

⁷¹ JONDEAU, Eric – ROCKINGER, Michael. Conditional Asset Allocation under Non-Normality: How Costly Is the Mean-Variance Criterion?. [online]. 2005. 3 p. [cit. 03. 03. 2021]. Dostupné na: https://cirano.qc.ca/realisations/grandes_conferences/methodes_econometriques/jondeau.pdf

Zaujímavosťou však je, že v tomto prípade sa portfólio s najvyšším Sharpe ratio vyznačuje aj najnižšou možnou volatilitou, ako môžeme vidieť na grafe efektívnej hranice (vyznačené ružovým bodom):



Graf 15 empirická efektívna hranica
Zdroj: vlastná tvorba

Parametre skonštruovaného portfólia vypočítané na zvlášť na verifikačnej a validačnej časti datasetu nám znázorňuje tabuľka:

Tabuľka 4 porovnanie pasívneho portfólia a SPY
Zdroj: Vlastná tvorba

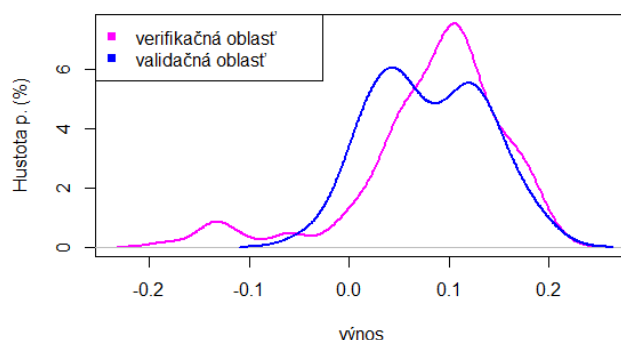
Ukazovateľ	Verifikačný set		Validačný set	
	Portfólio	SPY	Portfólio	SPY
E(R)	0.084	0.079	0.079	0.124
σ	0.073	0.167	0.055	0.072
Sharpe ratio ⁷²	1.09	0.447	1.42	1.711
VaR (0.95)	-0.072	-0.326	0.004	-0.013
β	0.346	0.992	0.181	1.004
Koef. Šikmosti	-1.355	-1.799	0.066	-0.69
Koef. Špicatosti	2.357	4.088	-0.871	0.317
P (výnos port. > výnos SPY)	0.423	NA	0.333	NA
% p. a.	7.664	7.456	10.335	15.932

Bohužiaľ, so sklamaním musíme konštatovať, že napriek výborným výsledkom portfólia na verifikačnej časti, nebolo schopné vyrovnať sa akciovému trhu na validačnej

⁷² Za bezrizikové sadzby boli zvolené výnosy z mesačných štátnych pokladničných poukázok k dňom 30. 12. 2016 (verifikačný set) a 31. 12. 2020 (validačný set).

časti. Pravdaže, ukazovatele rizika sú priaznivejšie v oboch prípadoch pri našom portfóliu. Ak však vezmeme do úvahy riziko, ktoré podstupujeme oproti očakávanému výnosu na testovacom sete, vhodnejšou investíciou je jednoznačne SPY.

Pomerne výrazne sa odlišujú parametre empirických distribúcií výnosov nášho portfólia na tréningovom a testovacom sete – vidíme, že na testovacích dátach absentujú dlhé konce (zošíkmenie blízko nule), pričom výnosy sú tiež menej koncentrované okolo priemeru (ktorý je nižší ako na verifikačnom sete):



Graf 16 distribúcie výnosov na verifikačnom a validačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

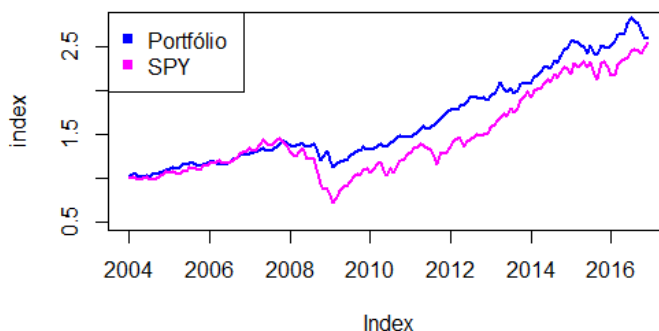
Koeficienty šikmosti a špicatosti sú však pri SPY na verifikačnom sete podstatne extrémnejšie ako u nášho portfólia. Na nasledujúcom grafe môžeme pozorovať porovnanie výnosov nášho portfólia a fondu SPY počas tréningového obdobia:



Graf 17 vývoj výnosov pasívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

Aj bez hlbšej analýzy, na základe vizuálneho posúdenia vidíme, že výnosy SPY sú nielen podstatne volatilnejšie, ale vyznačujú sa aj oveľa vzdialenejšími zápornými

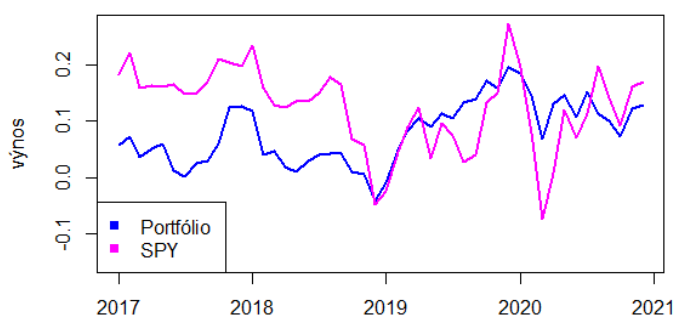
hodnotami od svojho priemeru. Je možné tvrdiť, že práve prepád trhu v roku 2008 je kľúčovým dôvodom, prečo naše portfólio porazilo SPY – v momente, keď sa trhy zotavili, portfólio štartovalo z oveľa vyššej pozície, pričom vyššie tempá rastu trhu ho už poraziť do roku 2017 nedokázali:



Graf 18 vývoj indexov pasívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

Graf vyššie zobrazuje vývoj indexov, ktorých začiatkové úrovne predstavuje hodnota 1. Vidíme teda, že dlhopisy nielen zohrali svoju úlohu ako hedgingového aktíva vynikajúco, ale nebránili portfóliu ani v ďalšom dynamickom raste (svoj podiel má na tom iste aj kvantitatívne uvoľňovanie, ktoré tlačilo počas verifikačného obdobia cenu dlhopisov nekompromisne nahor⁷³).

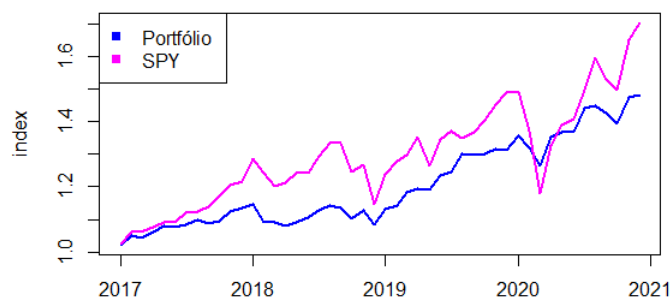
Problém však nastáva na validačnom sete, kedy volatilita bola síce stále nižšia ako v prípade SPY, výnosnosť však bola už prinízka:



Graf 19 vývoj výnosov pasívneho portfólia a SPY na validačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

⁷³ AMADEO, Kimberly. Explaining Quantitative Easing (QE)?. [online]. 2021. [cit. 04. 03. 2021]. Dostupné na: <https://www.thebalance.com/what-is-quantitative-easing-definition-and-explanation-3305881>

Azda jediným pozitívom bol v tomto prípade podstatne nižší prepád spôsobený pandémiou koronavírusu, ako v prípade SPY. Slabšiu výnosnosť a zaostávanie portfólia za trhom reflektuje pravdaže aj vývoj indexov:



Graf 20 vývoj indexov pasívneho portfólia a SPY na validačnom sete

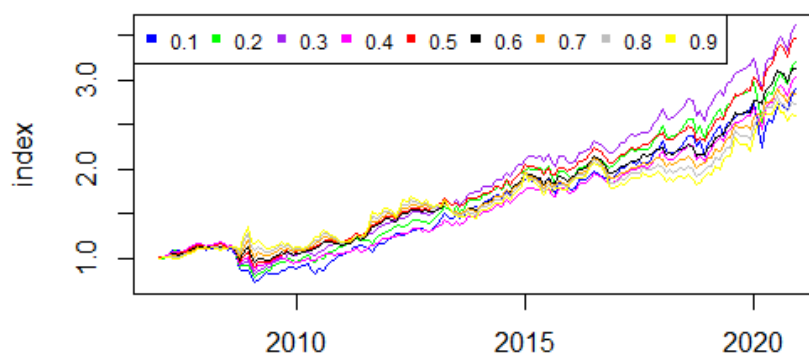
Zdroj: vlastná tvorba

S pasívnym portfóliom sme teda trh na validačnej perióde vo výnosnosti neporazili tak v absolútnych číslach, ako aj jednotky výnosu na jednotku variability. V nasledujúcej časti sa to pokúsime napraviť prostredníctvom aktívneho portfólia, ktoré bude na optimalizáciu využívať dáta z podstatne kratšieho časového radu (3 roky). To by mohlo pomôcť vyhnúť sa extrémom, teda aspoň vo väčšine prípadov.

3.2 Optimalizácia aktívneho portfólia

Pri optimalizácii aktívneho portfólia bolo najskôr potrebné zistiť výsledky portfólií s rôznym pomerom dlhopisov za každý mesiac. Graf nižšie zobrazuje vývoj týchto portfólií s pomermi dlhopisov od 0.1 po 0.9, pričom v každom mesiaci prebehla optimalizácia pri podmienke fixácie toho ktorého pomeru, ako sme spomínali v predošlom texte. Do optimalizácie boli brané do úvahy medziročné výnosy na mesačnej báze za posledné tri roky, avšak, pochopiteľne, indexy vývoja investícií sme museli vypočítať prostredníctvom mesačných vážených výnosov.

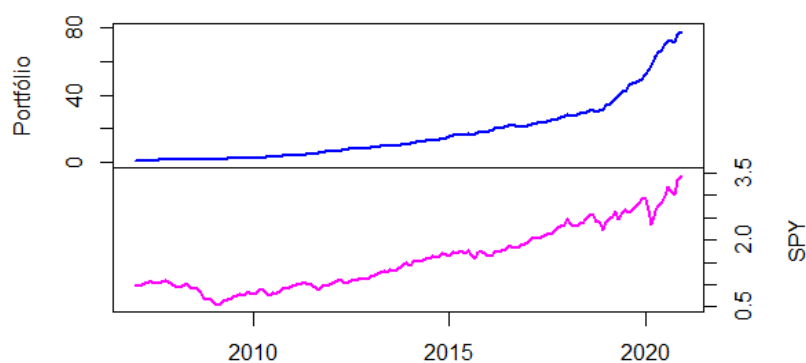
Tiež je potrebné spomenúť, že pokiaľ bola podmienka minimálneho pomeru dlhopisov stanovená na menej ako 80 %, minimálna váha zvyšných aktív bola stanovená na 3 %, pri 80 % dlhopisov to boli 2 % a pri 90 % iba jedno percento (aby bola celá vec matematicky uskutočniteľná a bola zabezpečená kvalitná diverzifikácia):



Graf 21 vývoj portfólií s rôznym pomerom dlhopisov
Zdroj: vlastná tvorba

Zaujímavé je, že podľa vyššie uvedeného spôsobu kľzavej optimalizácie, dosiahlo najlepšie výsledky portfólio, v ktorom sa pomer dlhopisov fixoval na 30 %. Inú zaujímavosť môžeme pozorovať v roku 2008 – čím vyšší bol pomer dlhopisov v portfóliach, tým vyšší nárast v tomto roku tie ktoré portfólia zaznamenali.

Pokiaľ by sme na začiatku každého mesiaca trafili taký pomer dlhopisov, ktorý bol v danom mesiaci najoptimálnejší (portfólio s týmto pomerom dosiahlo za daný mesiac najlepší výnos), graf vývoja takéhoto portfólia by vyzeral takto:

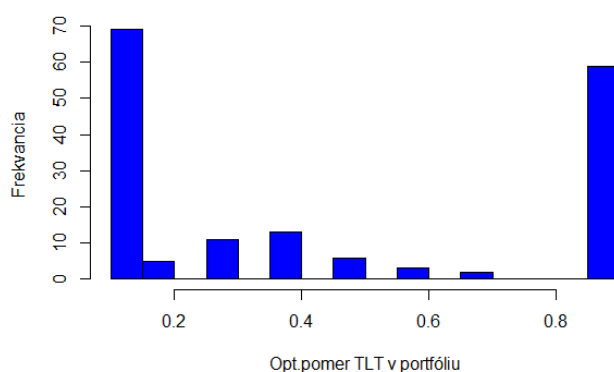


Graf 22 optimálne aktívne portfólio vs SPY
Zdroj: vlastná tvorba

Na predchádzajúcom grafe vidíme, že úrovňovo sa index vývoja SPY nemôže porovnávať s indexom portfólia. Takéto portfólio by dosahovalo výnosnosť takmer 40 % p. a. pri minimálnom VaR aj zápornej štandardnej odchýlke. Pravdepodobnosť

poklesu v určitom mesiaci je okolo 14 %, v prípade SPY cca 35 %. Bohužiaľ, takéto portfolio, ktoré je snom každého investora, je utópiou. Model, ktorý objem dlhopisov v portfóliu predikuje, by totiž musel mať nulovú chybovosť, resp. portfólio manažér by musel vedieť bezchybne odhadovať budúci vývoj. My sa však aspoň do určitej miery s našim modelom a premennými pokúsime vývoj tohto portfólia replikovať.

Pokiaľ ide o distribúciu optimálnej váhy dlhopisového ETF na tomto ideálnom portfóliu, tú nám zobrazuje nasledujúci histogram:



Graf 23 optimálne váhy dlhopisov

Zdroj: vlastná tvorba

Napriek tomu, že najvýnosnejšie z množiny portfólií bolo to, ktoré udržovalo konštantný pomer dlhopisov na 30 %, vidíme, že iba málo krát bolo zo všetkých najoptimálnejšou voľbou. V priemere však dosahovalo najvyšší výnos aj vďaka tomu, že nepodlieha záporným extrémom ako portfólio s 10 % váhou dlhopisov a zároveň nie je príliš limitované v raste. Je teda zrejmé, že model bude rozhodovať hlavne medzi pomermi 0.9 a 0.1.

3.2.1 Implementácia modelu

Najskôr sme sa pokúsili fitnúť model Random Forest na základe všetkých našich premenných. Ako sme spomínali, ide o klasifikačný model, kde sú jednotlivými triedami optimálne pomery dlhopisov (dokopy 8 tried). Počet premenných, na základe ktorých dochádza k rozčleneniu jednej vetvy stromu na ďalšie, sme nastavili na 5 (z celkového počtu 12) a celkový počet rozhodovacích stromov na 5000. Výsledky však boli katastrofálne, tzv. „out of bag error“ (klasifikačná chyba nastávajúca na tých stromoch, ktoré dané pozorovanie neobsahujú z dôvodu predchádzajúceho bootstrappingu) dosahoval

hodnotu 61,67 %. Bližší obraz o chybovosti modelu nám zobrazuje matica klasifikačných chýb:

Tabuľka 5 matica klasifikačných chýb

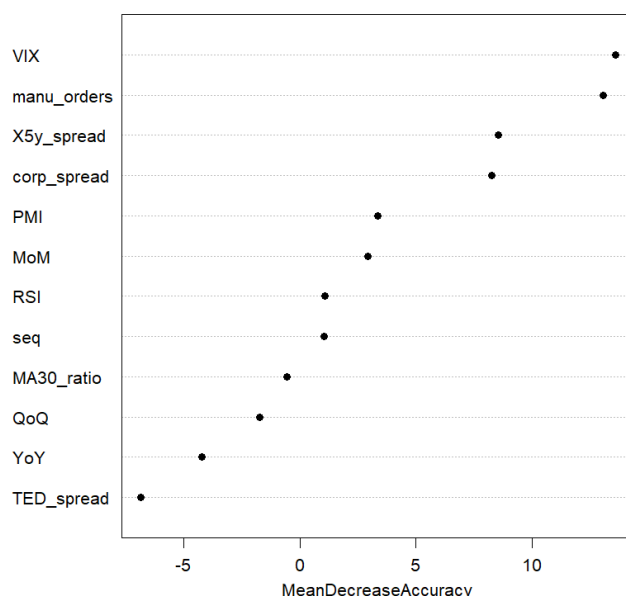
Zdroj: Vlastná tvorba

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9	Chybovosť
0.1	22	0	0	1	1	0	0	23	0.53
0.2	4	0	0	0	0	0	0	1	1
0.3	5	0	0	0	0	0	0	2	1
0.4	5	0	0	1	0	0	0	4	0.9
0.5	2	0	0	0	0	0	0	1	1
0.6	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0.7	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0.9	21	1	0	0	0	0	0	23	0.49

Riadky tejto matice predstavujú originálne triedy (ako by mali byť pozorovania klasifikované) a stĺpce predstavujú reálnu klasifikáciu pozorovaní. Napr. súradnica [0.1, 0.9] s hodnotou 23 znamená, že 23 pozorovaní, u ktorých mal byť pomer dlhopisov predikovaný na 0.1, bol chybné predikovaný na 0.9.

Môžeme vidieť, že predikcie pomerov okrem 0.1 a 0.9 sa vyznačujú 100 %-nou chybovosťou, teda ani jediný raz nedošlo k ich správnej predikcii.

Graf nižšie zobrazuje, o koľko by sa v priemere znížil počet správnych predikcií, keby došlo k vyradeniu tej ktorej premennej (skratky seq, YoY, QoQ a MoM predstavujú počet po sebe nasledujúcich mesiacov kedy sa cena indexu hýbala v jednom smere v rovnakom smere; medzироčné, kvartálne a mesačné zmeny indexu S&P 500):



Graf 24 významnosť premenných

Zdroj: vlastná tvorba

Vidíme, že pokiaľ dôjde k vyradeniu štyroch premenných, model dosiahne vyššiu mieru presnosti (zaujímavosťou je, že všetky štyri sú štatistické indikátory).

Je zrejmé, že vyše 50 %-tnú chybovosť musíme radikálne znížiť. Na matici klasifikačných chýb vidíme, že na tejto chybovosti sa podieľajú najmä nesprávne predikcie tých pomerov, ktorých správna hodnota je mimo 0.1 a 0.9. Podstatne vyššiu mieru presnosti modelu by teda malo byť možné dosiahnuť zredukovaním tried z 8 na 2 dominantné – 0.1 a 0.9. Pravdaže, takouto redukciou sa pripravíme o najlepšiu možnosť alokácie zdrojov v niektorých prípadoch, no vzhľadom na to, že ostatné triedy sú oproti 0.1 a 0.9 podstatne menej zastúpené, obeta nebude príliš vysoká. Pomery, resp závislé premenné teda upravíme tak, aby sa všetky hodnoty na intervale $<0.1, 0.5>$ nahradili hodnotou 0.1 a zvyšok 0.9.

Zmeny sme uskutočnili aj na strane nezávislých premenných. Keďže najvýznamnejšiu premennú predstavujú popri VIXe manufaktúrne objednávky, rozhodli sme sa rizikovať premenné práve o ďalšie predstihové makroekonomické indikátory – maloobchodné predaje, priemerný počet odpracovaných hodín za týždeň a inflačné očakávania na rok dopredu (všetko opäť ako mesačné zmeny, oneskorené o 1 mesiac).

Po uvedených úpravách vstupov, aj klasifikačných tried, sme sa opäť pokúsili fitnúť model. Najlepší výsledok, ktorý sme dosiahli, sa vyznačuje chybovosťou OOB 37,5 % (čo je stále veľmi vysoké číslo), pričom sme použili iba 5 zo všetkých prediktorov (počet premenných použitých pri členení vetiev sa stanovil na 3). Matica klasifikačných chýb na tréningovom sete vyzerá nasledovne:

Tabuľka 6 matica klasifikačných chýb na verifikačnom sete

Zdroj: Vlastná tvorba

	0.1	0.9	Chybovosť
0.1	54	18	0.25
0.9	27	21	0.56

Bohužiaľ, mieru chybovosti sme nedokázali zraziť pod 50 % pri predikovaní pomeru dlhopisov na úrovni 0.9.

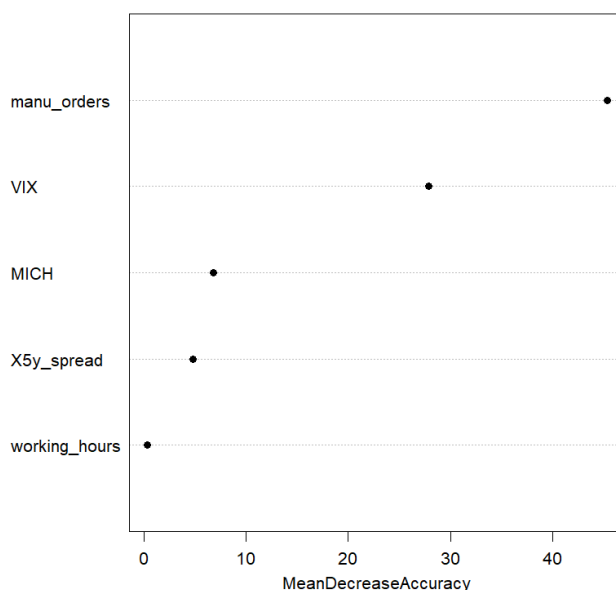
Rovnakú úroveň celkovej chybovosti 37,5 % sme s modelom doishali aj na testovom sete. Príspevky k tejto chybovosti už boli rozdelené mierne proporcionálnejšie:

Tabuľka 7 matica klasifikačných chýb na validačnom sete

Zdroj: Vlastná tvorba

	0.1	0.9	Chybovosť
0.1	22	10	0.31
0.9	8	8	0.5

Medzi prediktormi už neevidujeme nijakú premennú, ktorej vyradenie by viedlo k vyššej presnosti modelu (MICH značí inflačné očakávania):



Graf 25 významnosť premenných v novom modeli
Zdroj: vlastná tvorba

Priemerný týždenný počet odpracovaných hodín sa na prvý pohľad nezdá ako príliš užitočná premenná, avšak mierne dopomohla znížiť chybovosť na validačnom sete s tým, že neprispela k vyššej chybovosti na tréningovom sete.

Po vytvorení vhodného modelu môžeme pristúpiť k vygenerovaniu predikcií pomerov dlhopisov pre jednotlivé mesiace:



Graf 26 predikcie pomeru dlhopisov
Zdroj: vlastná tvorba

V každom mesiaci následne vyselektujeme výnos toho portfólia, ktoré obsahuje prílišný pomer dlhopisov. Máme tak všetky dáta potrebné k vyhodnoteniu parametrov aktívneho portfólia.

3.2.2 Výsledky aktívneho portfólia

Kľúčové parametre medziročných výnosov aktívneho portfólia na tréningovom, aj validačnom sete a porovnanie so SPY ilustruje tabuľka:

Tabuľka 8 porovnanie aktívneho portfólia a SPY

Zdroj: Vlastná tvorba

Ukazovateľ	Verifikačný set ⁷⁴		Validačný set	
	Portfólio	SPY	Portfólio	SPY
E(R)	0.134	0.06	0.144	0.124
σ	0.116	0.194	0.089	0.072
Sharpe ratio	1.118	0.286	1.604	1.694
VaR (0.95)	-0.045	-0.442	-0.008	-0.013
β	0.205	0.994	0.350	1.004
Koef. Šikmosti	0.290	-1.428	-0.064	-0.69
Koef. Špicatosti	-0.081	2.003	-0.871	0.317
P (výnos port. > výnos SPY)	0.564	NA	0.51	NA
% p.a.	14.294	6.867	17.123	15.932

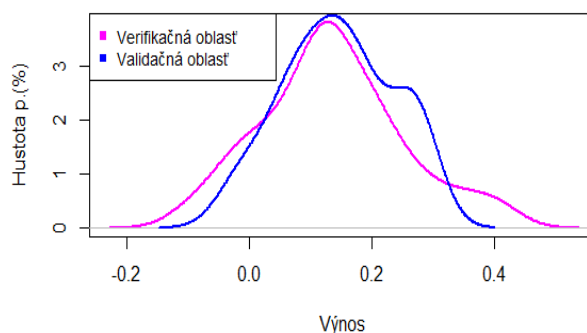
Vzhľadom na jednotlivé ukazovatele môžeme tvrdiť, že naše aktívne portfólio by bolo jednoznačne lepšou voľbou pre investora najmä na tréningovej perióde. Na testovej perióde už síce nebol rozdiel medzi portfóliom a SPY tak presvedčivý, no aj napriek pomerne vysokej nepresnosti modelu a slabšej výnosnosti väčšiny aktív sme dokázali trhový priemer poraziť.

Jediný ukazovateľ, v ktorom naše portfólio mierne zaostáva za SPY, je pomer očakávaného výnosu a volatility na validačnom sete – viac záporný koeficient šikmosti však u SPY naznačuje, že štandardná odchýlka môže riziko v tomto prípade mierne

⁷⁴ Medziročné výnosy začínali byť merané v tomto prípade až v roku 2008, keďže prvý údaj o aktívnom portfóliu máme od roku 2007.

podceňovať. Nižší výnos nášho portfólia na jednotku variability je však kompenzovaný nižšou (vyššou) hodnotou VaR.

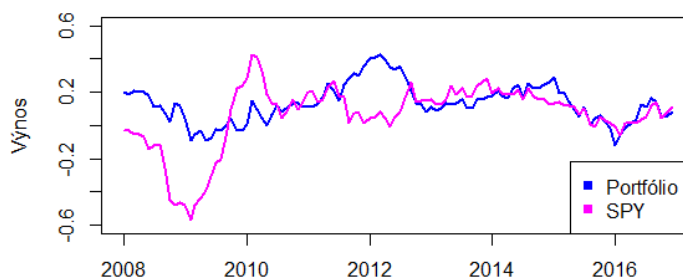
Aktívne portfólio sa okrem lepších parametrov rizika a výnosnosti oproti pasívnemu portfóliu tiež vyznačuje podstatne menej výrazným rozdielom v tvaroch distribúcií výnosov na verifikačnom a validačnom sete:



Graf 27 distribúcie výnosov aktívneho portfólia na verifikačnom a validačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

Obe distribúcie sú symetrickejšie ako v prípade pasívneho portfólia, a sú si podobné úrovňovo, aj variabilitou.

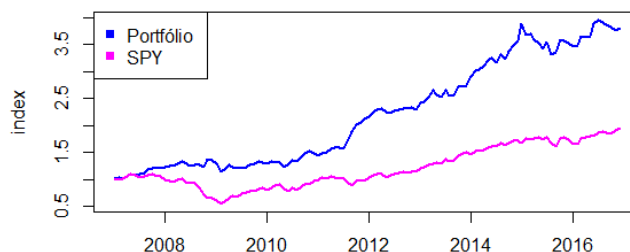
Vývoj týchto výnosov v čase a porovnanie s výnosmi SPY na verifikačnej perióde môžeme pozorovať na grafe:



Graf 28 vývoj výnosov aktívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

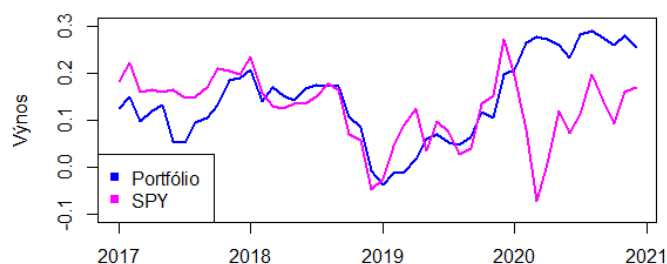
Opäť vidíme, podobne ako v prípade pasívneho portfólia, aj vývoj výnosov aktívneho portfólia je „hladší“ ako vývoj výnosov SPY a nepodlieha extrémom (v tak veľkom rozsahu). Môžeme si tiež všimnúť, že zhruba do roku 2013 podliehajú výnosy oboch aktív veľmi nízkej korelácii, ktorá sa však po tomto čase znepokojujúco zvýšila.

Výrazné rozdiely v priemerných výnosoch aj negatívnych extrémoch sú, prirodzene, reflektované aj indexmi vývoja investícií:



Graf 29 vývoj indexov aktívneho portfólia a SPY na verifikačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

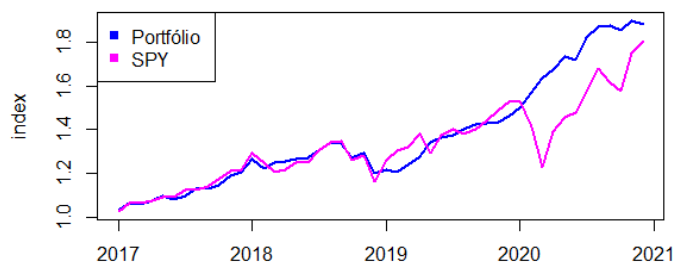
Ako sme však spomínali, hlavná previerka algoritmu riadiaceho pomer dlhopisov nastáva na validačnej perióde. Na tej vyzerá porovnanie vývoja medziročných výnosov nasledovne:



Graf 30 vývoj výnosov aktívneho portfólia a SPY na validačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

Do roku 2020 boli výnosy oboch aktív pomerne vysoko korelované, pričom úrovňovo malo SPY väčšinou prevahu. Korona kríza však poslala výnos SPY strmo nadol, zatiaľ čo náš algoritmus správne predikoval optimálnu mieru dlhopisov v aktívnom portfóliu na 90 %. Podobne teda ako v rokoch 2008 a 2009, aj teraz zohrali dlhopisy dôležitú úlohu ako nástroj na zaistenie akciového portfólia proti prudkému prepadu.

Bližší pohľad na porovnanie vývoja oboch aktív nám poskytuje graf vývoja indexov nižšie:



Graf 31 vývoj indexov aktívneho portfólia a SPY na validačnom sete
Zdroj: vlastná tvorba

Na grafe pozorujeme, ako koronakríza roztvorila nožnice medzi portfóliom a SPY, v náš prospech. Kritiku si náš algoritmus zaslúži najmä kvôli nesprávnym rozhodnutiam na konci roku 2018, kedy trhy započítavali riziká plynúce z potenciálnej obchodnej vojny medzi Čínou a USA. V tomto čase nedošlo k optimálnemu rebalansingu aktív a portfólio takmer úplne kopírovalo prepád akciového trhu.

4 Diskusia

Napriek tomu, že teória portfólia poskytuje vynikajúci teoretický základ pre optimalizáciu investičného portfólia, v praxi môže byť jej aplikácia mierne problematická, a nezaobíde sa bez zásahu ľudského faktora. V tejto súvislosti máme na mysli najmä dve úskalia – prípad, kedy výnosy aktív nepodliehajú normálnemu rozdeleniu; a skutočnosť, že očakávaný výnos a volatilita sú odhadované len na základe historických výnosov. Hoci je výhodou takéhoto prístupu jeho jednoduchosť, presvedčili sme sa, že môže viesť k príliš nízkej diverzifikácii, keďže distribúcia váh jednotlivých aktív môže byť extrémne neproporcionálna. Tu sa pravdaže otvára priestor portfólio manažérke na úvahu, akým spôsobom zasiahne do optimalizácie v podobe zedefinovania dodatočných podmienok.

Vidíme tiež, že odhad očakávaného výnosu a volatility na základe historických dát je nie príliš spoľahlivý – na verifikačnej perióde naše pasívne portfólio, samozrejme, priemer spoľahivo prekonávalo, avšak na validačnej perióde nastal problém. Čiastočne je možné znížiť riziko nesprávneho odhadu vstupných parametrov prostredníctvom pravidelného rebalansingu tak, ako sme to uskutočnili v prípade aktívneho portfólia. Odhad parametrov totiž nie je predikovaný na príliš dlhé obdobie a po uplynutí určitej časovej periódy dochádza k novému výpočtu týchto parametrov. Takýto momentum využívajúci prístup má však inú slabú stránku – pokiaľ sú periódy rebalansingu príkratke, stále vyššiu váhu dostáva aktívum, ktoré trenduje prudko nahor, čím sa investor vystavuje riziku vysokej expozície v „bublinových aktívach“. V prípade systematického prepadu trhu majú takéto aktíva tendenciu stratiť veľmi vysokú časť svojej hodnoty. Práve takýmto prepadom je možné sa vyhnúť napríklad automatickým striedaním pomeru medzi akciami a dlhopismi podľa zvolených vstupov, ako sme demonštrovali v diplomovej práci.

Aj keď sa s aplikáciou teórie portfólia v praxi spájajú určité úskalia, ukázali sme, že v tandeme s algoritmom strojového učenia dokáže priniesť pomerne zaujímavé výsledky. Dôležitá je v tomto prípade náväznosť krokov: výber aktív – definovanie podmienok optimalizácie – aplikácia modelu. Každá časť tejto skladačky má potom prirodzene vplyv na výsledok aktívneho portfólia. Pravdaže, model, ktorý sme skonštruovali v našej práci, má pomerne vysokú chybovosť, a je možné ho ďalej optimalizovať a vylepšovať. Treba dodať, že v prípade reálnej aplikácie modelu je nutné počítat aj s transakčnými nákladmi vznikajúcimi pri nákupe a predaji aktív.

Záver

Presvedčili sme sa, že moderná teória portfólia zohráva v procese riadenia aktív dôležitú úlohu, či už ide o aktívnu alebo pasívnu správu. Pravdaže, existuje mnoho možností a spôsobov aplikácie tejto ekonomickej teórie, pričom metódy optimalizácie, alebo odhadu vstupných parametrov sa neustále rozvíjajú. Aj po sedemdesiatich rokoch je tak táto teória stále do veľkej miery aplikovateľná (s istými kompromismi) a dokáže priniesť investorovi želaný efekt.

Je zrejmé, že aplikácii teórie portfólia musia predchádzať analýzy a rozhodnutia rôzneho charakteru – od makroekonomických, cez mikroanalýzu spoločností a oceňovanie, až po finálnu selekciu aktív a načasovanie investície. Aplikovanie teórie portfólia je tak už len posledným kľúčovým vyvrcholením celého procesu riadenia aktív. Pokiaľ ide o automatizovaný spôsob riadenia aktív, je prirodzene nutné zostaviť algoritmus, ktorý je určitým spôsobom s teóriou portfólia previazaný.

Myslíme si, že práve automatizovaná aktívna správa je smer, ktorým sa bude riadenie majetku ďalej v budúcnosti uberať. Tomu sa zrejme bude aj teória portfólia ďalej prispôbovať. V súčasnosti už existuje viacero programovacích jazykov obsahujúcich knižnice, prostredníctvom ktorých je možné dosiahnuť optimalizáciu portfólia rýchlo a jednoducho pri zadefinovaní rozsiahleho počtu podmienok rôzneho druhu. Dnes už teda nie je problém ani pre retailového investora implementovať teóriu portfólia do svojej automatizovanej investičnej stratégie.

Naša diplomová práca predstavuje určitý oporný bod najmä pri zostavovaní automatizovaného aktívneho portfólia. Samozrejme, celý proces od výberu aktív až po výber a kalibráciu predikčného modelu je možné vylepšiť rôznymi spôsobmi – pričom v praxi je potrebné brať do úvahy aj transakčné náklady. Metód, podľa ktorých si investori vyberajú aktíva do portfólia, je nespočetne veľa. Rovnako tak aj premenných (a ich rôznych kombinácií), ktoré majú potenciál znížiť chybovosť modelu, je obrovské množstvo. Nakoniec, aj klasifikačných modelov, ktoré rozhodujú o podmienkach minimálnej alokácie zdrojov je viacero. Nájsť najideálnejšiu kombináciu spomenutých faktorov nie je jednoduchá záležitosť, pričom v praxi si vyžaduje množstvo času a trpezlivosti. Vytvorili sme však aspoň základný fungujúci rámec, ktorý sú investori či dátoví analytici spôsobilí ďalej rozvíjať a zdokonaľovať.

Zoznam použitej literatúry

1. AMADEO, Kimberly. *Explaining Quantitative Easing (QE)?*. [online]. 2021. [cit. 04. 03. 2021]. Dostupné na: <https://www.thebalance.com/what-is-quantitative-easing-definition-and-explanation-3305881>
2. AVATRADE. *What is Volatility & How it Affects You?*. [online]. 2021. [cit. 27. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.avatrade.ng/education/trading-for-beginners/what-is-volatility>
3. BODIE – KANE – MARCUS. *Optimal Risky Portfolios*. [online]. 2014. [cit. 16. 11. 2020]. p. 25-63. Dostupné na: http://www.actexmadriver.com/assets/clientdocs/prod_preview/a109sm.pdf
4. CFA Institute. *CFA Institute Investment Foundations Program*. 3rd Ed., vol. 1, 2018. 418 s. ISBN 1946442747.
5. CFI. *Empirical rule*. [online]. 2021. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/other/empirical-rule/>
6. CIBULA, Miroslav. *Rozhodovacie stromy*. [online]. 2017. [cit. 28. 02. 2020]. Dostupné na: <https://smnd.sk/mcibula/alg/DT.html>
7. Coherent risk measures. [online]. n. d. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.sfu.ca/~poitras/coherent.pdf>
8. Consumer Discret Sel Sect SPDR® ETF XLY Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/consumer-cyclical/consumer-discret-sel-sect-spdr-etf/xly>
9. Consumer Staples Select Sector SPDR® ETF. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/consumer-defensive/consumer-staples-select-sector-spdr-etf/xlp>
10. DALTON, Austin. *Introduction of investments and portfolio management*. [online]. 2016. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://silo.tips/download/chapter-1-introduction-of-investments-and-portfolio-management#>
11. De FRANCO, Carmine – MONNIER, Bruno. The diversification constraint for Minimum Variance portfolios. [online]. France : Ossiam, research paper, 2014. [online]. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: https://www.ossiam.co.uk/files/research_papers/1420536417_The_diversification_constraint_for_Minimum_Variance_portfolios-v2.pdf

12. DUGGAN, Wayne. *What Does It Mean That The Stock Market Is A Leading Economic Indicator?*. [online]. 2020. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://finance.yahoo.com/news/does-mean-stock-market-leading-205002941.html>
13. Efficient market hypothesis. [online]. n. d. 7 p. [cit. 02. 12. 2020]. Dostupné na: <http://homepage.ntu.edu.tw/~nankuang/EMH1.pdf>
14. FAMA, F. Eugene – FRENCH, R. Kenneth. The capital asset pricing model: theory and evidence. [online]. In: *Journal of Economic Perspectives*. vol. 18, no. 3, 2004. USA : American economic association. p. 25-46. [cit. 21. 12. 2020]. ISSN 0895-3309. Dostupné na: <http://mba.tuck.dartmouth.edu/bespeneckbo/default/AFA611-Eckbo%20web%20site/AFA611-S6B-FamaFrench-CAPM-JEP04.pdf>
15. FERNANDO, Jason. *Relative Strenght Index (RSI)*. [online]. 2020. [cit. 26. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/r/rsi.asp>
16. FRANCIS CLARK, Jack. *Modern Portfolio Theory*. USA : John Wiley & Sons, 2013. 576 p. ISBN 111837052X.
17. FRED. *ICE BofA US Corporate Index Option-Adjusted Spread*. [online]. 2021. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/BAMLC0A0CM>
18. FRED. *5-Year Treasury Constant Maturity Minus Federal Funds Rate*. [online]. 2021a. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/T5YFF>
19. FRED. *TED Spread*. [online]. 2021b. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://fred.stlouisfed.org/series/TEDRATE>
20. GARCIA, Theresa – BORREGO, Daniel. Markowitz efficient frontier and capital market line – evidence from the portuguese stock market. [online]. In: *EJMS*, vol. 22, no 1. Lisbon : ISEG, 2017. [cit. 14. 10. 2020]. ISSN 2183-4172. Dostupné na: https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/13948/1/3_EJMSVol22Issue1.2017_3-23.pdf
21. GERBER, Hans. Utility functions: from risk theory to finance. [online]. [cit. 28. 10. 2020]. In: *NAAJ*, vol. 2, no. 3, 1998. UK : Taylor and Francis ltd. p. 74-100. ISSN 1092-0277. Dostupné na: <http://www.kreienbuhl-mc.com/wp-content/uploads/2015/12/Gerber-Pafumi-1998-Nutzenfunktion-Esscher-Premium-.pdf>
22. HALL, Marry. *How do interest rates affect the stock market?*. [online]. 2020. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/investing/how-interest-rates-affect-stock-market/>

23. HAYES, Adam. *Liquidity*. [online]. 2021. [cit. 23. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/l/liquidity.asp>
24. HUNT, Joshua. *Predicting Changes in Earnings: A Walk Through a Random Forest*. University of Arkansas : Fayetteville, Dissertation, 2018. [online]. 66 p. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: <https://scholarworks.uark.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4410&context=etd>
25. CHAVEZ-DREYFUZ, Gertrude. *U.S. Dollar gains as recession looms*. [online]. 2020. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://in.reuters.com/article/us-global-forex/u-s-dollar-gains-as-global-recession-looms-idUSKBN21J3T9>
26. CHICAGOFED. *National Financial Conditions Index (NFCI)*. [online]. 2021. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.chicagofed.org/publications/nfci/index>
27. CHRMULÍK, Michal. *Náhľad do algoritmu rozhodovací strom*. [online]. 2020. [cit. 28. 02. 2021]. Dostupné na: <https://umelainteligencia.sk/nahlad-do-algoritmu-rozhodovaci-strom/>
28. 11 Investment risk you need to watch out for in your portfolio. [online]. n. d. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://myrawealth.com/insights/11-investment-risks-you-need-to-watch-out-for-in-your-portfolio>
29. *Is day trading a good idea?*. [online]. 2020. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.summitwealthgroup.com/blog/is-day-trading-a-good-idea>
30. iShares 20+ Year Treasury Bond ETF TLT Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/long-government/ishares-20-year-treasury-bond-etf/tlt>
31. iShares US Energy ETF IYE Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/equity-energy/ishares-us-energy-etf/iyee>
32. JOHNSON, T. C. *Utility Functions*. [online]. 2007. 14 p. [cit. 27. 10. 2020]. Dostupné na: http://www.macs.hw.ac.uk/macshome/ams/msc_actsci/utility_final.pdf
33. JONDEAU, Eric – ROCKINGER, Michael. *Conditional Asset Allocation under Non-Normality: How Costly Is the Mean-Variance Criterion?*. [online]. 2005. 43 p. [cit. 03. 03. 2021]. Dostupné na: https://cirano.qc.ca/realisations/grandes_conferences/methodes_econometriques/jondeau.pdf

34. KAMIL, Anton. Portfolio analysis using single index model. [online]. In: *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 2., no. 1. Athens : WSEAS, 2003. [cit. 17. 11. 2020]. ISSN 2224-2880. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/266483426_Portfolio_Analysis_Using_Single_Index_Model
35. KATUSA, Marin. *The Libyan Crisis: Where Are Oil Prices Going?*. [online]. 2011. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.forbes.com/sites/energysource/2011/03/03/the-libyan-crisis-where-are-oil-prices-going/?sh=1eb9f9b7659f>
36. MA, Dan. *Value at risk and tail value at risk*. [online]. 2017. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://actuarialmodelingtopics.wordpress.com/2017/12/28/value-at-risk-and-tail-value-at-risk/>
37. Mathematical statistic. Chapter SEVEN – Uncertainty. [online]. 2007. p. 209-239. [cit. 28. 10. 2020]. Dostupné na: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4433666/mod_folder/intro/Cap.%2007%20NI.pdf
38. Mean Variance Utility. [online]. n. d. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.tau.ac.il/~spiegel/teaching/corpfm/mean-variance.pdf>
39. MIJOT, Éric. *Long cycles and the asset markets*. [online] Amundi discussion papers series, 2015. [cit. 17. 10. 2020]. Dostupné na: <https://research-center.amundi.com/page/Publications/Discussion-Paper/2015/Long-cycles-and-the-asset-markets>
40. NAPOLETANO, E. *How to invest with Dollar cost averaging*. [online]. 2020. [cit. 20. 12. 2020]. ISSN 2609-1445. Dostupné na: <https://www.forbes.com/advisor/investing/dollar-cost-averaging>
41. NORSTAD, John. An introduction to utility theory. [online]. 1999. p. 26. [cit. 28. 10. 2020]. Dostupné na: http://hari.seshadri.com/docs/how-much-would-you-bet/norstad_utility.pdf
42. NOVICK, Barbara a kol. Artificial intelligence and machine learning in asset management. [online]. 2019. 11 p. [cit. 13. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.blackrock.com/corporate/literature/whitepaper/viewpoint-artificial-intelligence-machine-learning-asset-management-october-2019.pdf>
43. OBAIDULLAH, Jan. *Systematic risk*. [online]. 2019. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://xplained.com/305921/systematic-risk>

44. Portfolio theory with matrix algebra. [online]. 2013. 37 p. [cit. 21. 12. 2020].
Dostupné na: <https://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfolioTheoryMatrix.pdf>
45. REEVES, Jeff. *11 Top Sector ETFs to Buy*. [online]. 2020. [cit. 20. 02. 2021].
Dostupné na: <https://money.usnews.com/investing/funds/slideshows/top-sector-etfs-to-buy>
46. Returns with the Laplace Distribution. [online]. University of Notre dame : paper. n. d. 5 p. [cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1906/1906.10325.pdf>
47. Reviewed by SCOTT, Gordon. *Consumer Discretionary*. [online]. 2020. [cit. 20.02.2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/terms/c/consumer-discretionary.asp>
48. Richmond quantitative advisors. Mean reversion – buying fear and selling greed. [online]. 2018. [cit. 21. 12. 2020]. Dostupné na: <https://www.richmondquant.com/news/2018/11/30/using-mean-reversion-techniques-to-profit-in-volatile-markets>
49. RODRIGUEZ CARLOS, Juan – SBUELZ, Alessandro. *Understanding and exploiting momentum in stock returns*. [online]. 2005. 39 p. [cit. 21. 12. 2020].
Dostupné na: <https://www.dse.univr.it/documenti/CapitoloLibro/allegato/allegato721976.pdf>
50. SALAHI, Maziar – MEHRDOUST, Farsihd. *CVaR robust mean – CvaR portfolio optimization*. [online]. London : Hindawi Publishing, 2013. 9 p. [cit. 18. 02. 2021].
ISSN 2090-5564. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/258395523_CVaR_Robust_Mean-CVaR_Portfolio_Optimization
51. SEGAL, Troy. *Common methods of measurement for investment risk management*. [online]. 2020. [cit. 16. 11. 2020]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/ask/answers/041415/what-are-some-common-measures-risk-used-risk-management.asp>
52. SMIRNOV, Yuriy. *Standard deviation of portfolio*. [online]. 2020. [cit. 16. 11. 2020]. Dostupné na: <http://financialmanagementpro.com/standard-deviation-of-portfolio/>
53. SMITH, Lisa. *Tracking Volatility*. [online]. 2020. [cit. 25. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.investopedia.com/articles/active-trading/070213/tracking-volatility-how-vix-calculated.asp>

54. SPDR® S&P 500 ETF Trust SPY Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021].
Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/large-blend/spdr-s-p-500-etf-trust/spy>
55. Standard deviation is a coherent risk measure. [online]. n. d. [cit. 18. 11. 2020].
Dostupné na: <https://www.sfu.ca/~poitras/standard-deviation-coherent.pdf>
56. SUMNICHT, Vern. *Standard deviation as a measure of risk*. [online]. 2009. 2 p.
[cit. 15. 11. 2020]. Dostupné na: <https://isectors.com/wp-content/uploads/2013/08/Standard-Deviation-as-Risk-Measure.pdf>
57. SVIRIN, Alex. *Probability density function*. [online]. 2021. [cit. 15. 11. 2020].
Dostupné na: <https://www.math24.net/probability-density-function/>
58. ŠIROKÝ, Jan. *Praktický průvodce opčním obchodováním*. 2. vyd. Tetčice : Impossible, s.r.o, 2018. 134 s. ISBN 978-80-87673-31-7.
59. Technology Select Sector SPDR® ETF XLK Overview. [online]. 2021. [cit. 20. 02. 2021]. Dostupné na: <https://money.usnews.com/funds/etfs/technology/technology-select-sector-spdr-etf/xlk>
60. The Reality of Investment Risk. [online]. 2021. [cit. 24. 10. 2020]. Dostupné na: <https://www.finra.org/investors/learn-to-invest/key-investing-concepts/reality-investment-risk>
61. THUNE, Kent. *What is the buy and hold strategy?*. [online]. 2020. [cit. 03. 12. 2020]. Dostupné na: <https://www.thebalance.com/what-is-buy-and-hold-2466543>
62. TOTH, W. David – JONES, Bruce. *Against the Norm: Modeling Daily Stock*. n. d.
63. U.S. DEPARTMENT OF TREASURY. *Daily Treasury Yield Curve Rates*. [online]. 2021. [cit. 21. 02. 2021]. Dostupné na: <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/TextView.aspx?data=yieldYear&year=2016>
64. Základné pojmy a poznatky o riadení rizika a zvlášť o riadení úverového rizika. [online] In: *Finančné trhy*, roč. 17, č. 9. Bratislava : Derivat, s. r. o, 2004. [cit. 24. 10. 2020]. ISSN 1336 – 5711. Dostupné na: <http://www.derivat.sk/index.php?PageID=272>