

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra matematiky

ZÁVEREČNÁ PRÁCA

Určitý integrál a jeho ekonomické využitie

Študent:

Vladimíra Prítelová

Vedúci záverečnej práce:

František Slaninka, Mgr.

Bratislava 2009

Podakovanie

Ďakujem môjmu konzultantovi, Mgr. Františkovi Slaninkovi za cenné rady a podnety, ktoré mi poskytoval počas tvorby tejto práce.

Vyhlásenie

Vyhlasujem, že som záverečnú prácu vypracovala samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, máj 2009

.....

Obsah	strana
Úvod.....	4
1 Integrálny počet.....	5
1.1 História.....	5
1.2 Definícia určitého integrálu.....	6
1.3 Geometrický význam určitého integrálu.....	10
1.4 Vlastnosti určitého integrálu.....	11
1.5 Výpočet určitého integrálu.....	15
2 Ekonomické využitie určitého integrálu.....	17
2.1 Spotrebiteľský prebytok.....	17
2.2 Podnikateľský prebytok.....	20
2.3 Marginálna analýza.....	25
2.4 Stredná hodnota ekonomických funkcií.....	26
2.5 Celkový príjem.....	28
2.6. Počiatočná hodnota vkladu pri danej hustote toku príjmu.....	29
2.7 Matematický softvér.....	31
Záver.....	33
Zoznam použitej literatúry.....	34

Úvod

V súčasnosti sme svedkami rastúceho významu matematiky v našej spoločnosti a jej dôležitosť v budúcnosti pri rozširovaní automatizácie výroby a zdokonaľovaní vedeckého riadenia hospodárstva ešte vzrastie.

Nie vždy bola ekonomická teória tak matematicky podložená ako dnes, počas posledných sto rokov stále viac rástol význam používania matematických metód. Ekonomika, fyzika a mnohé ďalšie vedy boli matematizované až počas svojho vývoja, v duchu Kantovho výroku : „ *Každá veda je natoľko vedou, koľko je v nej matematiky.*“¹

Cieľom záverečnej práce je charakterizovať určitý integrál ako matematickú metódu, ktorá odкрýva, prehľbuje a zovšeobecňuje ekonomické javy a procesy, ale aj preveruje získané poznatky a reaguje na potreby teórie a praxe.

Určitý integrál nachádza svoje uplatnenie vo väčšine prípadov v oblasti technických, prírodovedných a ekonomických disciplín. Mnohé praktické úlohy súvisia s určením takej primitívnej funkcie k danej funkcii, ktorá má určité požadované vlastnosti, napríklad: určenie obsahu rovinných útvarov, objem a povrch telies, statické momenty a ťažisko útvarov, momenty zotrvačnosti, dĺžka krivky, diskontná hodnota príjmov za určitý počet rokov, priemerný stav zásob, spotrebiteľský a podnikateľský prebytok, stredná hodnota celkových nákladov a celkových príjmov.

Záverečná práca je rozčlenená na dve kapitoly. Prvá kapitola obsahuje stručný prehľad histórie integrálneho počtu. Určitý integrál definujem pomocou Riemannovej definície. V jednotlivých podkapitolách objasňujem geometrický význam určitého integrálu, jeho vlastnosti a metódy výpočtu.

Druhá kapitola je obsahovo zameraná na ekonomické využitie určitého integrálu. V príkladoch z ekonomickej praxe definujem a určujem spotrebiteľský a podnikateľský prebytok, strednú hodnotu celkových nákladov, celkových príjmov, počiatočnú hodnotu vkladu pri danej hustote toku príjmu. Vlastnosti určitého integrálu využívam v marginálnej analýze pri výpočte celkových nákladov. V závere druhej kapitoly uvádzam najpoužívanejší matematický softvér určený na riešenie širokého okruhu matematických problémov.

¹ Felder, B. - Homburg, S. : Makro ekonomika a nová ekonomika. Bratislava : ELITA, 1995, str.347.

1 Integrálny počet

1.1 História

Rozvoj matematiky možno rozdeliť na niekoľko období. Matematici 17. a 18. storočia sústredovali svoju pozornosť na otázky funkčných závislostí, nekonečných procesov, limit, nekonečne malých veličín a ich podielu. Najznámejšou udalosťou v rozvoji matematiky tohto obdobia je objav diferenciálneho a integrálneho počtu, ktorý tvorí jadro matematickej analýzy.

Pojem integrálu vznikol z techník na počítanie kvadrátúr a kubatúr tzn. úloh na výpočet obsahov a objemov geometrických útvarov. Predstava telies zložených z tenkých plôšok a výpočet objemu skladaním týchto plôšok je blízka predstave integrálu, ako sumy tvorenej nekonečným počtom zložiek.

Zrod analytickej geometrie, ktorý je spojený s menom francúzskeho matematika a filozofa R. Descarta (1596-1650), zvládnutie pojmu funkčnej závislosti premenných veličín, jednoduchá symbolika a vhodná súradnicová sústava zvýšili prehľadnosť problematiky a umožnili prejsť od kvadrátúr útvarov definovaných geometricky ku kvadrátúram útvarov ohraničených grafmi funkcií.

Tento vývin doviedli objavy anglického fyzika I. Newtona (1642-1727) a nemeckého filozofa a matematika G.W.Leibniza (1646-1716). Obaja Newton i Leibnitz uskutočnili svoj objav nezávisle od seba. Newton objavil základy diferenciálneho a integrálneho počtu v rokoch 1665-1666 a publikoval svoje výsledky až po Leibnitzovi, ktorý svoj objav uskutočnil v rokoch 1673-1676 a publikoval v rokoch 1684-1686. Newton objavil ideu počítat obsahy pod krivkou pomocou primitívnej funkcie. Leibniz zaviedol pojem funkcie a vytvoril symboliku, v ktorej je diferenciál dx explicitne vyjadrený. To umožnilo problém integrovania premeniť na formálny kalkul, ktorý môžeme použiť na výpočet plochy pod krivkou.

V roku 1755 zavádza L.Euler (1707-1783) mnoho všeobecnejší pojem funkcie. Funkcia už nie je výraz vytvorený z premenných a konštánt, ale ľubovoľná závislosť medzi veličinami. V roku 1821 vydal Cauchy (1789-1857) učebnicu Cours d'analyse, ktorá sa stala medzníkom v dejinách matematickej analýzy. Cauchy vytvoril teóriu integrálu pre spojité funkcie na uzavretom intervale. Jeho teóriu bolo možné rozšíriť na funkcie po častiach spojité, čo boli najvšeobecnejšie funkcie používané matematikmi tej doby.

Nemecký matematik B. Riemann (1826-1866) vynechal požiadavku spojitosti, ktorou Cauchy začínal svoju definíciu. Namiesto toho Riemann vytvoril priamo integrálny súčet bez toho, aby o funkcii čokoľvek vopred predpokladal. V prípade že táto suma má limitu, nazval ju integrálom, tzn. z existencie limity urobil podmienku. Aj keď je Riemannov integrál pre niektoré teoretické úlohy menej vhodný, je to jedna z najjednoduchších definícií integrálu. Niektoré z týchto technických ťažkostí sa dajú vyriešiť Riemannovým-Stieltjesovým integrálom a väčšina z nich Lebesgueovým integrálom.²

1.2 Definícia určitého integrálu

K zavedeniu pojmu určitého integrálu viedla matematikov myšlienka určiť obsah rovinného útvaru ako súčtu „nekonečne malých“ obdĺžnikov, na ktoré tento útvar rozdelíme. Každý rovinný útvar možno rozložiť na určitý počet krivkových lichobežníkov, jeho obsah možno vyjadriť ako algebraický súčet obsahov krivkových lichobežníkov, ktoré vytvárajú tento útvar. Pomocou obsahov mnohoúhelníka môžeme určiť obsah ľubovoľného rovinného útvaru. Definícia určitého integrálu pochádza od nemeckého matematika B. Riemanna, preto tento integrál nazývame Riemannovým integrálom. Niekedy sa používa názov Cauchyho-Riemannov integrál, pretože Cauchy definoval uvedený integrál ešte pred Riemannom, avšak iba pre spojitú funkciu.

Uvažujeme funkciu $f(x)$, definovanú a ohraničenú na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. Vezmime $n+1$ čísel $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

$$a = x_0 < x_1 < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1.2.1)$$

Tieto čísla $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, ktoré nazývame deliacimi bodmi intervalu $\langle a, b \rangle$ rozdelia interval $\langle a, b \rangle$ na n čiastočných intervalov:

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle.$$

Dĺžku i -teho čiastočného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ označíme Δx_i ,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

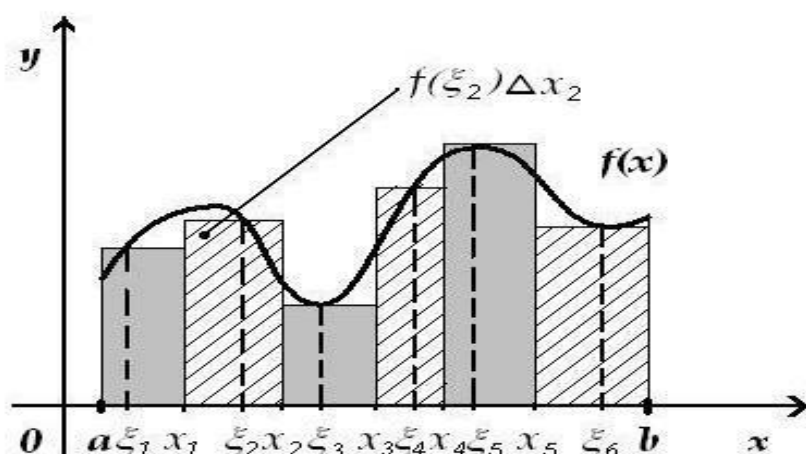
² <http://pf.ku.sk/katedry/kmat/data/konferenciasub/pdf2003/Kvasz.pdf>

Ak máme čísla $x_1, \dots, x_n$ s vlastnosťami (1.2.1), tak hovoríme, že je dané delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Pre takéto delenie budeme používať označenie D_n .

Zvoľme ľubovoľným spôsobom v každom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, číslo ξ_i , $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, a urobme súčet:

$$S_f(D_n) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1.2.2)$$

Číslo $S_f(D_n)$ nazývame integrálnym súčtom funkcie $f(x)$ pre delenie D_n intervalu $\langle a, b \rangle$ a voľbu čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Integrálny súčet $S_f(D_n)$ má v prípade, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ kladná a spojitá, názornú geometrickú interpretáciu (obrázok 1.2.1).



Obr. 1.2.1. Delenie intervalu

Označme symbolom P_0 plošný obsah rovinného obrazca O , ktorý je určený grafom funkcie $f(x)$, priamkami $x = a$, $x = b$ a x -ovou osou. Na obrázku 1.2.1 je interval $\langle a, b \rangle$ rozdelený na 6 čiastočných intervalov, t.j. $n = 6$. Integrálny súčet:

$$S_{f(D_6)} = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1.2.3)$$

určuje plošný obsah obdĺžnikov so základňami Δx_i a výškami $f(\xi_i)$. Vidíme, že integrálny súčet (1.2.3) približne určuje plošný obsah rovinného obrazca O. Je zrejmé, že integrálny súčet $S_f(D_n)$ bude tým presnejšie určovať plošný obsah rovinného obrazca O, čím bude n väčšie a čím budú dĺžky všetkých čiastočných intervalov Δx_i menšie.

Definícia 1.2.1.

Nech D_n je delenie interval $\langle a, b \rangle$. Číslo $\|D_n\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ nazývame normou delenia D_n intervalu $\langle a, b \rangle$. Ak ku každému prirodzenému číslu n vytvoríme delenie D_n intervalu $\langle a, b \rangle$, tak dostaneme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b \rangle$

Definícia 1.2.2.

Majme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b \rangle$. Hovoríme, že táto postupnosť delení je normálna, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$. Príkladom normálnej postupnosti delení intervalu $\langle a, b \rangle$ je napríklad taká postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej pre každé n rozdelíme interval $\langle a, b \rangle$ na n rovnakých čiastočných intervalov, teda dĺžka každého i-teho čiastočného interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ bude $\Delta x_i = \frac{a-b}{n}$. Z definície limity postupností plynie, že v normálnej postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ dĺžky Δx_i čiastočných intervalov $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ sa od istého prirodzeného čísla n_0 so zväčšovaním n postupne zmenšujú. Uvažujeme normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a vytvoríme ku každému deleniu D_n z tejto postupnosti integrálny súčet $S_f(D_n)$, dostaneme postupnosť integrálnych súčtov:

$$\{S_f(D_n)\}_{n=1}^{\infty} \quad (1.2.4)$$

Z definície integrálneho súčtu $S_f(D_n)$ je zrejmé, že ku každej normálnej postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme teoreticky vytvoriť nekonečne veľa postupností integrálnych súčtov $\{S_f(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ podľa toho, ako budeme voliť čísla ξ z intervalov $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$. Keďže uvažovaná postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna, tak zodpovedajúca postupnosť integrálnych súčtov (1.2.4) bude v prípade spojitej a kladnej funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ s rastúcim n od istého prirodzeného čísla n_0 stále presnejšie určovať plošný obsah rovinného

obrazca O , určeného grafom funkcie $f(x)$, priamkami $x = a$, $x = b$ a osou x -ovou. Z definície limity postupnosti plyní, že číslo A

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n), \quad (1.2.5)$$

ak existuje, určuje presný plošný obsah rovinného obrazca O . V prípade spojitaj funkcie $f(x)$ limita existuje vždy.

Definícia 1.2.3.

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná a ohraničená na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a každú ľubovoľnú voľbu čísel $\xi \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, zodpovedajúca postupnosť integrálnych súčtov $\{S_f(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ má jednu a tú istú limitu:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n), \quad (1.2.6)$$

tak číslo A nazývame určitým integrálom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme symbolom:

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

Teda platí :

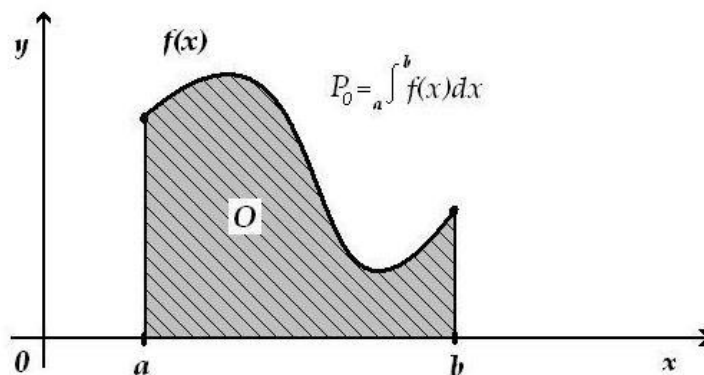
$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1.2.7)$$

Číslo a sa nazýva dolnou, číslo b hornou hranicou určitého integrálu, funkcia $f(x)$ integrovanou funkciou a x integračnou premennou. Znak $\int_a^b f(x) \, dx$ čítame „integrál od a po b , $f(x)dx$ “.

Označenie určitého integrálu symbolom $\int_a^b f(x) dx$ pochádza od francúzskeho matematika J.B.J. Fouriera (1768-1830). Existuje aj iné označenie $\int f(x)dx \left[\begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix} \right]$, ktoré používal L.Euler (1707-1783). Samotný pojem integrál (z latinského integer – celý), zaviedol J. Bernoulli (1667-1748).

1.3 Geometrický význam

Ak integrovaná funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a kladná, potom z geometrického významu integrálneho súčtu $Sf(D_n)$ a z významu limity (1.2.6) vyplýva, že určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$ určuje plošný obsah rovinného obrazca, definovaného grafom funkcie $f(x)$, priamkami $x = a$, $x = b$ a osou x-ovou, obrázok 1.3.1



Obr. 1.3.1 Plošný obsah rovinného obrazca

Avšak nie každá funkcia $f(x)$, definovaná na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervale integrovateľná. Niektoré základné kritéria, podľa ktorých posudzujeme, či funkcia je integrovateľná na intervale:

Veta 1.3.1. Nutná podmienka integrovateľnosti funkcie na intervale:

Ak funkcia $f(x)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$, tak je na tomto intervale ohraničená.

Veta 1.3.2. Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie na intervale:

Ak funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ ohraničená a na tomto intervale má konečný počet bodov nespojitosti, tak je na intervale $\langle a, b \rangle$ integrovateľná.

Veta 1.3.3. Dôsledok vety 1.3.2 :

Ak funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá, tak je na tomto intervale integrovateľná.

V ekonómii najčastejšie pracujeme s funkciami $f(x)$, ktoré sú na intervale $\langle a, b \rangle$ spojité. Dá sa dokázať, že k spojitej funkcii na intervale $\langle a, b \rangle$ určitý integrál vždy existuje.

1.4 Vlastnosti určitého integrálu

V definícii určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ sme predpokladali, že pre dolnú a hornú hranicu a, b platí vzťah $a < b$. V niektorých teoretických úvahách aj konkrétnych výpočtoch však dostávame tiež integrály typu: $\int_a^b f(x) dx, a > b$; $\int_a^a f(x) dx, a = b$

Definícia 1.4.1.

1. Ak je funkcia $f(x)$ integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle, a > b$, tak platí

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (1.4.1)$$

2. Ak $f(x)$ je ľubovoľná funkcia. Pod integrálom $\int_a^a f(x) dx$ rozumieme nulovú hodnotu.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (1.4.2)$$

Veta 1.4.1. Ak funkcie $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$, potom pre ľubovoľné reálne čísla $k_1, k_2, \dots, k_m$ platí:

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_m f_m(x)] dx$$

$$= k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + k_m \int_a^b f_m(x) dx \quad (1.4.3)$$

Dôsledok vety (1.4.1): Ak funkcie $f(x), g(x)$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle$, platí

$$\int_a^b [f(x) dx + g(x) dx] = \int_a^b f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

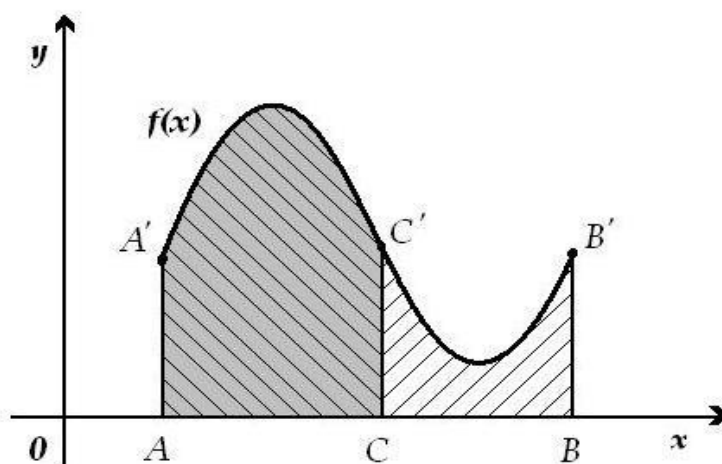
$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k - \text{konštanta}$$

Veta 1.4.2. Ak a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla a funkcia $f(x)$ je integrovateľná na intervaloch $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (1.4.4)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \quad (1.4.5)$$

Uvedené vzťahy sa pri úvahách a výpočtoch určitých integrálov často používajú. Na obrázku (1.4.1) je znázornený geometrický význam vzťahu v prípade, keď $a < c < b$ a $f(x)$ je kladná spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$.



Obr. 1.4.1 Geometrický význam vzťahu (1.4.4)

Plošné obsahy obrazcov $ABB'A'$, $ACC'A'$, $CBB'C'$ sú určené postupne určitými integrálmi $\int_a^b f dx$, $\int_a^c f dx$, $\int_c^b f dx$. Vzťah (1.4.4) potvrdzuje, že plošný obsah obrazca $ABB'A'$ sa rovná súčtu plošných obsahov obrazcov $ACC'A'$ a $CBB'C'$.

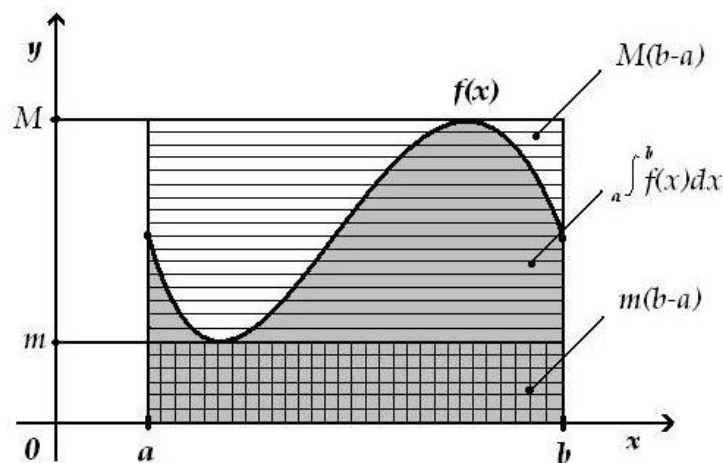
Veta 1.4.3. Ak funkcia $f(x)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \langle a, b \rangle$$

platí:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1.4.6)$$

Geometrická interpretácia vety 1.4.3. je znázornená na obrázku 1.4.2



Obr. 1.4.2 Geometrická interpretácia vety 1.4.2

Nerovnosť (1.4.6) určuje hrubý odhad určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ zhora aj zdola. Preto ju niekedy používame na približný výpočet určitého integrálu, ak nevyžadujeme väčšiu presnosť.

Veta 1.4.3. Veta o strednej hodnote.

Ak funkcia $f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom existuje číslo ξ , $\xi \in \langle a, b \rangle$, také, že platí :

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (1.4.7)$$

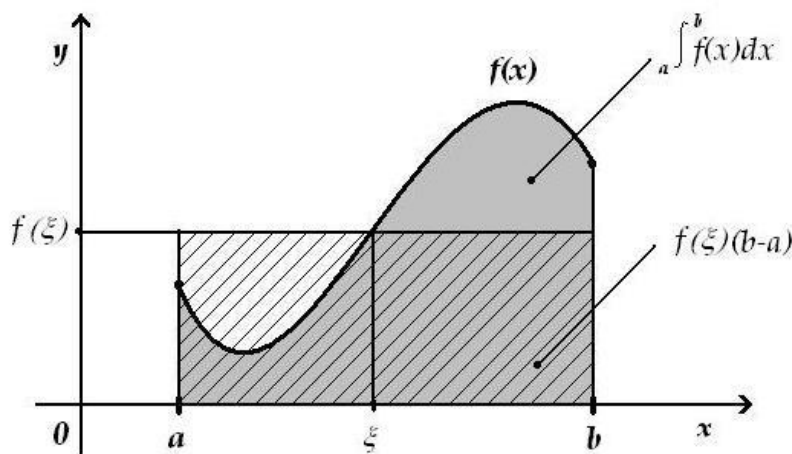
hodnotu $f(\xi)$ nazývame strednou hodnotou funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$. Geometrický význam strednej hodnoty je zrejmý zo vzťahu:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (1.4.8)$$

Zo vzťahu (1.4.8) vyplýva, že ak $f(x)$ je kladná funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, tak v tomto intervale existuje také číslo ξ , že integrál $\int_a^b f(x)dx$, čo geometricky znamená plošný

obsah rovinného útvaru O , určeného grafom funkcie $f(x)$, priamkami $x = a, x = b$ a osou x -ovou, sa rovná plošnému obsahu obdĺžnika so základňami $b - a$ a výškou $f(\xi)$ obrázok 1.4.3.

Stredná hodnota funkcie $f(x)$ je analógiou pojmu aritmetického priemeru.



Obr. 1.4.3 Geometrická interpretácia vety o strednej hodnote

1.5 Výpočet určitého integrálu

1.5.1 Newton-Leibnitzova veta

Riemannova definícia určitého integrálu je ľahko geometricky interpretovateľná. Jej nevýhodou je, že výpočet určitého integrálu podľa vzťahu (1.2.7) je príliš zložitý, pričom v niektorých prípadoch by sme daný integrál nedokázali vypočítať. Matematici Newton a Leibnitz ukázali ešte v 17. storočí dôležitý súvis medzi primitívnou funkciou $f(x)$ na intervale (a, b) a určitým integrálom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 1.5.1. Ak $f(x)$ je funkcia spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, potom funkcia:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.5.1)$$

je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, pričom na intervale (a, b) je primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, t.j. platí: $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Z vety 1.5.1. vyplýva, že ku každej spojitej funkcii $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ existuje spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, ktorá je na intervale (a, b) primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$.

Veta 1.5.2. Ak $f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$, ktorá je na intervale (a, b) primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1.5.2)$$

vzorec (1.5.2) nazývame Newton-Leibnitzova veta a zapisujeme:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Symbol na pravej strane znamená: $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Newton-Leibnitzova veta umožňuje vypočítať určitý integrál funkcie, ak poznáme jej primitívnu funkciu. Primitívna funkcia je neurčitý integrál to znamená, že určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ dokážeme vypočítať, ak budeme poznať neurčitý integrál $\int f(x)dx$. Funkcia $f(x)$, ktorá je na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a neurčitý integrál tejto funkcie:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1.5.3)$$

na intervale (a, b) . Výraz na pravej strane predstavuje všetky primitívne funkcie, pričom konkrétnu primitívnu funkciu dostaneme, ak za integračnú konštantu C vezmeme konkrétne číslo. Nakoľko integrovaná funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak každá k nej primitívna funkcia je taktiež spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$. Pri výpočte určitého integrálu pomocou Newton-Leibnitzovej vety je možné použiť ľubovoľnú primitívnu funkciu: $F(x) + C$, k funkcii $f(x)$. Pre praktické výpočty je ale najjednoduchšie zvoliť za C nulovú hodnotu.

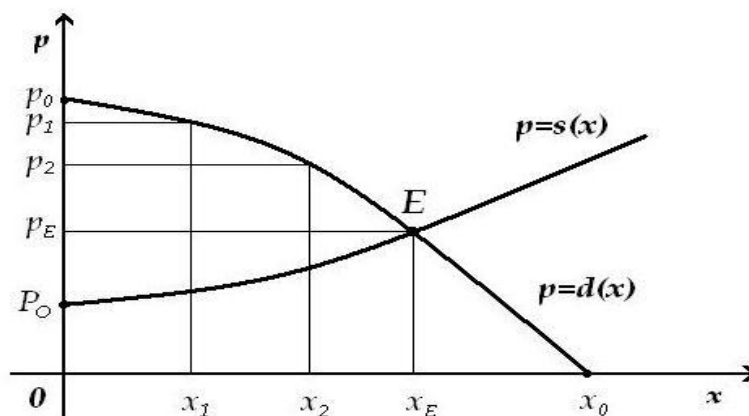
2 Ekonomické využitie určitého integrálu

2.1 Spotrebiteľský prebytok

Spotrebiteľský prebytok je hodnota (užitočnosť) tovaru mínus cena, ktorú platíme za tento tovar, vyjadruje ochotu spotrebiteľa kúpiť konkrétny výrobok za vyššiu cenu, ako je rovnovážna cena p_E . Spotrebiteľský prebytok označujeme CS (CONSUMER'S SURPLUS) a môžeme ho znázorniť ako priestor pod krivkou dopytu a nad zaplatenou cenou, až po kúpené množstvo.

Uvažujeme trh s výrobkom V, funkcia dopytu po tomto výrobku má tvar $p = d(x)$ a funkcia ponuky má tvar $p = s(x)$, pričom x znamená množstvo výrobkov. Predpokladáme, že $d(x)$ a $s(x)$ sú spojité funkcie na intervale premennej x . Vplyvom konkurenčného prostredia vznikne časom na trhu rovnováha medzi množstvom výrobku, žiadaného spotrebiteľom a množstvom tohto výrobku, vyrábaného výrobcom. Rovnováha trhu je daná rovnovážnou dvojicou p_E, x_E , pričom rovnovážna cena p_E a rovnovážne množstvo x_E sú určené priesečníkom funkcií $p = d(x)$ a $p = s(x)$.

Hoci sa výrobok predáva za rovnovážnu cenu p_E , vidíme z funkcie dopytu na obrázku 2.1.1, že medzi spotrebiteľmi sú tiež spotrebitelia, ktorí boli ochotní kúpiť výrobok aj za vyššie ceny. Môžeme teda povedať, že spotrebitelia, ktorí boli ochotní kúpiť výrobok aj za vyššie ceny, ako je rovnovážna cena p_E , ušetria istú sumu peňazí, ktorú nazývame spotrebiteľský prebytok.



Obr. 2.1.1 Spotrebiteľský prebytok

Pomocou integrálneho počtu dokážeme získať presný vzťah pre výpočet celkového spotrebiteľského prebytku CS. Rozdelíme interval $\langle 0, x_E \rangle$ na n čiastočných intervalov deliacimi bodmi:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_E$$

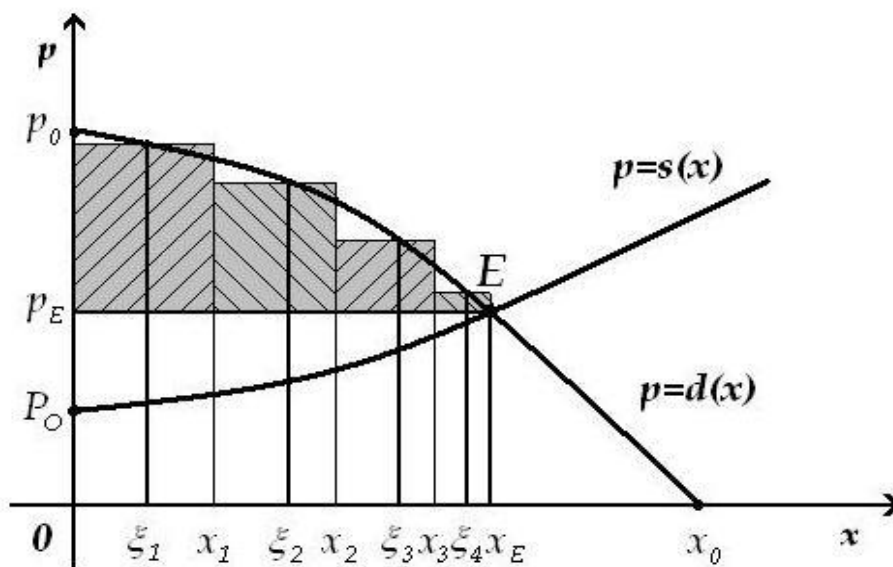
a označíme toto delenie symbolom D_n . Pre dĺžku i -teho čiastočného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ platí: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zvolíme ľubovoľným spôsobom v každom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ číslo ξ_i a urobíme súčet:

$$S_d(D_n) = \sum_{i=1}^n [d(\xi_i) - p_E] \Delta x_i$$

súčet $S_d(D_n)$ približne určuje veľkosť spotrebiteľského prebytku CS, t.j. platí:

$$CS \cong S_d(D_n) = \sum_{i=1}^n [d(\xi_i) - p_E] \Delta x_i \quad (2.1.1)$$

Geometrický význam vzťahu 2.1.1 pre $n = 4$ je znázornený na obrázku 2.1.2



Obr. 2.1.2 Geometrický význam vzťahu (2.1.1)

Chyba, ktorej sa pri výpočte CS pomocou vzťahu (2.1.1) dopustíme, bude tým menšia, čím bude väčšie n za predpokladu, že dĺžky čiastočných intervalov sa budú pri zväčšovaní n zmenšovať. Keďže podľa predpokladu je funkcia dopytu $p = D(x)$ spojitou funkciou a teda je spojitou funkciou aj funkcia $d(x) - p_E$, tak postupnosť $\{S_d(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá zodpovedá ľubovoľnej normálnej postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle 0, x_E \rangle$ konverguje k presnej hodnote spotrebiteľského prebytku CS. Platí:

$$CS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [d(\xi_i) - p_E] \Delta x_i \quad (2.1.2)$$

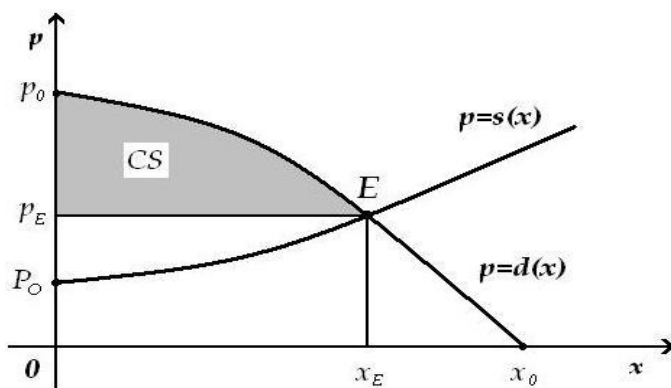
pravá strana vzťahu je určitý integrál:

$$\int_0^{x_E} [d(x) - p_E] dx = \int_0^{x_E} d(x) dx - p_E x_E \quad (2.1.3)$$

pre výpočet spotrebiteľského prebytku CS platí vzťah:

$$CS = \int_0^{x_E} d(x) dx - p_E x_E \quad (2.1.4)$$

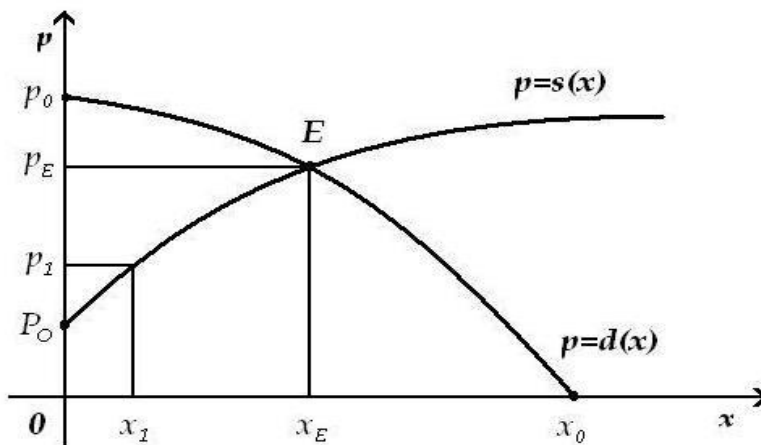
Geometricky vzťah (2.1.4) znamená plošný obsah útvaru, určeného grafom funkcie dopytu $p = d(x)$, priamkou $p = p_E$ a cenovou osou.



Obr. 2.1.3 Geometrický význam vzťahu (2.1.4)

2.2 Podnikateľský prebytok

Ak sa na predchádzajúcu situáciu pozrieme z pohľadu výrobcov vidíme, že výrobcovia sú pripravení vyrábať určitý výrobok v istých množstvách aj pri nižších cenách ako je rovnovážna cena p_E . Keďže sa výrobok predáva za vyššiu cenu ako je p_E , získavajú výrobcovia vyššie príjmy, ako pôvodne očakávali. Tieto dodatočné príjmy nazývame v ekonómii podnikateľským prebytkom a označujeme PS (PRODUCER'S SURPLUS).



Obr. 2.2.1 Podnikateľský prebytok

Vzťah pre výpočet podnikateľského prebytku získame podobne ako vzťah pre výpočet spotrebiteľského prebytku. Ak rozdelíme interval $\langle 0, x_E \rangle$ deliacimi bodmi

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_E$$

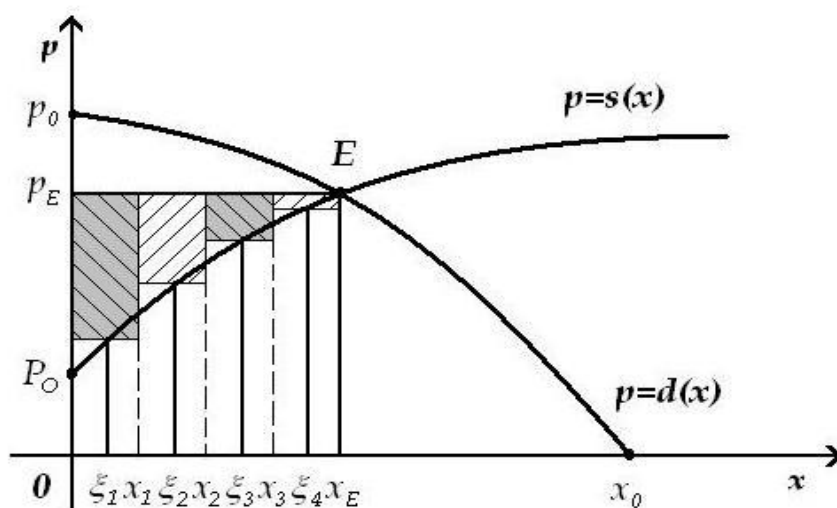
a označíme toto delenie symbolom D_n , tak súčet:

$$S_s(D_n) = \sum_{i=1}^n [p_E - s(\xi_i)] \Delta x_i$$

kde $\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, približne určuje veľkosť podnikateľského prebytku PS. Platí:

$$PS \cong S_s(D_n) = \sum_{i=1}^n [p_E - s(\xi_i)] \Delta x_i \quad (2.2.1)$$

Geometrický význam vzťahu (2.2.1) pre $n = 4$ je znázornený na obrázku 2.2.2



Obr. 2.2.2 Geometrický význam vzťahu (2.2.1)

Postupnosť súčtov $\{S_s(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ zodpovedá ľubovoľnej normálnej postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle 0, x_E \rangle$. Keďže funkcia ponuky $p = s(x)$ je spojitá a teda je spojitá aj funkcia $p_E - s(x)$, tak postupnosť konverguje k presnej hodnote podnikateľského prebytku PS. Platí:

$$PS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [p_E - s(\xi_i)] \Delta x_i \quad (2.2.2)$$

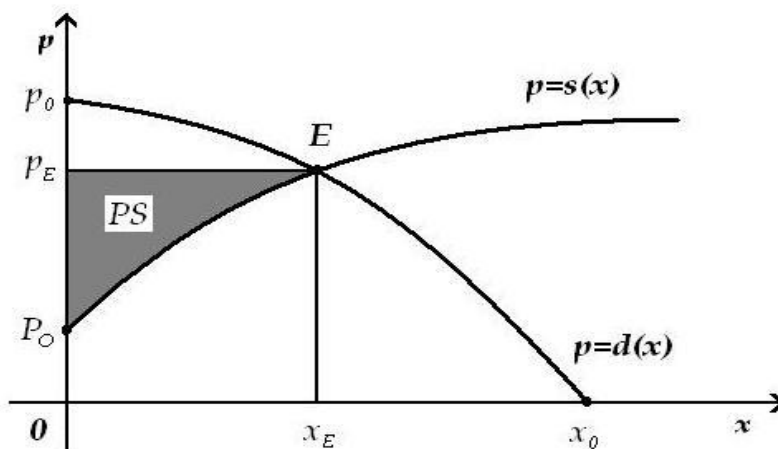
na pravej strane je určitý integrál:

$$\int_0^{x_E} [p_E - s(x)] dx = p_E x_E - \int_0^{x_E} s(x) dx \quad (2.2.3)$$

Podnikateľský prebytok určuje vzťah:

$$PS = p_E x_E - \int_0^{x_E} s(x) dx \quad (2.2.4)$$

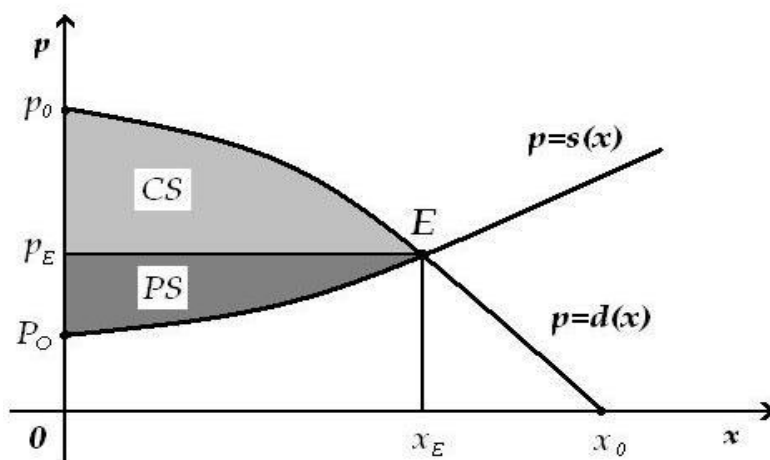
Geometrický vzťah (2.2.4) znamená plošný obsah útvaru, určeného priamkou $p = p_E$, grafom funkcie ponuky $p = s(x)$ a cenovou osou p , obrázok 2.2.3



Obr. 2.2.3 Geometrický význam vzťahu (2.2.4)

Veta 2.2.1. Ak (p_E, x_E) je rovnovážna dvojica spojitých funkcií dopytu a ponuky $p = d(x), p = s(x)$, potom spotrebiteľský prebytok CS a podnikateľský prebytok PS sú určené vzťahmi:

$$CS = \int_0^{x_E} d(x) dx - p_E x_E \quad PS = p_E x_E - \int_0^{x_E} s(x) dx \quad (2.2.5)$$

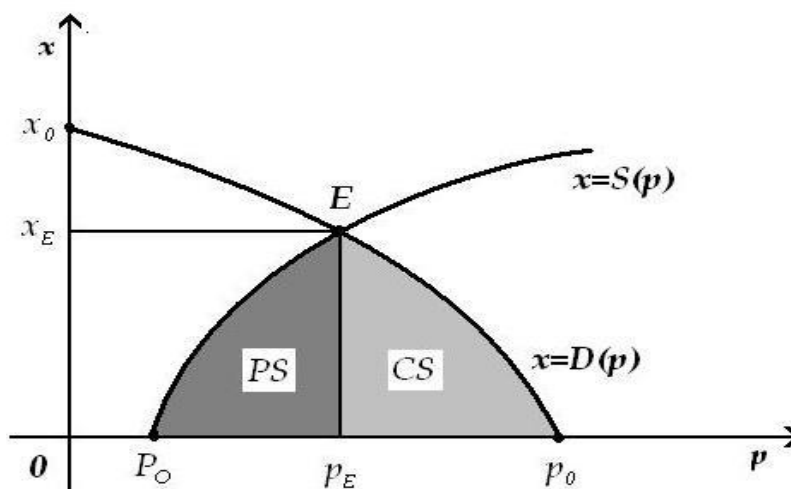


Obr. 2.2.4 Geometrická interpretácia vzťahov (2.2.5)

Uvedené vzťahy môžeme použiť len v prípade, keď funkcie dopytu a ponuky sú vyjadrené vzhľadom na množstvo x , t.j. keď sú v tvare $p = d(x), p = s(x)$.

Ak sú funkcie ponuky a dopytu vyjadrené vzhľadom na cenu p , t.j. keď sú v tvare $x = D(p), 0 \leq p \leq p_0, x = S(p), p \geq P_0$, obrázok 2.2.5, využijeme poznatok, že funkcie dopytu $p = d(x)$ a $x = D(p)$ a taktiež funkcie ponuky $p = s(x)$ a $x = S(p)$ sú vo vzájomnom inverznom vzťahu. Potom spotrebiteľský a podnikateľský prebytok vyjadríme vzťahmi:

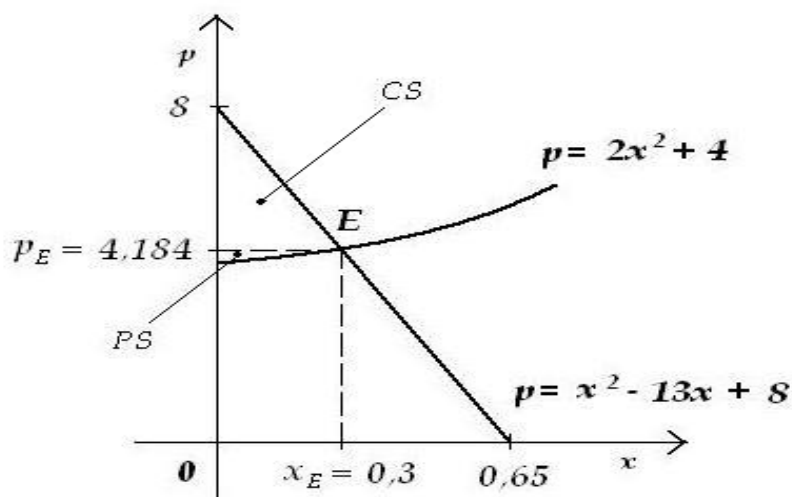
$$CS = \int_{p_E}^{p_0} D(p) dp \quad PS = \int_{P_0}^{p_E} S(p) dp \quad (2.2.6)$$



Obr. 2.2.5 Geometrická interpretácia vzťahov (2.2.6)

Príklad 2.2.1. Trhový mechanizmus je daný funkciou dopytu $(x): p = x^2 - 13x + 8$ a funkciou ponuky $s(x): p = 2x^2 + 4$. Nájďme rovnovážnu cenu a jej zodpovedajúce rovnovážne množstvo a určíme spotrebiteľský a podnikateľský prebytok.

Riešenie: Pre znázornenie grafov funkcií dopytu a ponuky je užitočné vyjadriť si tieto funkcie vo vrcholovom tvare. Vrcholový tvar funkcie dopytu je: $p + 34,25 = (x - 6,5)^2$ a funkcie ponuky: $p - 4 = 2x^2$. Grafy funkcie dopytu a ponuky sú znázornené na obrázku 2.2.6



Obr. 2.2.6 Graf funkcie dopytu a ponuky

Rovnovážnu trhovú cenu a zodpovedajúci objem produkcie určíme z rovnosti funkcie dopytu a funkcie ponuky. Trhová rovnováha sa dosahuje v bode E (ekvilibrum) a je určená súradnicami priesečníka funkcie dopytu a funkcie ponuky (p_E, x_E) . Súradnica x je riešením rovnice: $x^2 - 13x + 8 = 2x^2 + 4$, odtiaľ po úprave dostávame: $x^2 + 13x - 4 = 0$.

Riešením tejto kvadratickej rovnice sú korene. $x_1 = 0,3$ a $x_2 = -13,3$. Keďže v intervale $\langle 0; 0,65 \rangle$, obrázok 2.2.6 sa nachádza číslo $x_1 = 0,3$, tak rovnovážne množstvo je $x_E = 0,3$.

Dosadením tejto hodnoty do funkcie ponuky alebo dopytu dostaneme pre zodpovedajúcu rovnovážnu cenu hodnotu $p_E = 4,1$.

Ekonomicky interpretovateľný rovnovážny stav medzi ponukou a dopytom sa teda realizuje pre úroveň produkcie $x_E = 0,3$ a pri rovnovážnej cene $p_E = 4,18$. Na základe vzťahov 2.2.5 vypočítame spotrebiteľský a podnikateľský prebytok.

$$CS = \int_0^{x_E} d(x) dx - p_E x_E$$

$$CS = \int_0^{0,3} (x^2 - 13x + 8) dx - 4,18 * 0,3 = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0,3} - 13 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,3} + 8[x]_0^{0,3} - 1,254 =$$

$$CS \cong 0,57$$

$$PS = p_E x_E - \int_0^{x_E} s(x) dx$$

$$PS = 4,18 * 0,3 - \int_0^{0,3} (2x^2 + 4) dx = 1,254 - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{0,3} - 4[x]_0^{0,3} =$$

$$PS \cong 0,04$$

Spotrebitelia, ktorí boli ochotní kúpiť výrobok aj za vyššie ceny, ako je rovnovážna cena $p_E = 4,184$, ušetrí sumu peňazí, ktorú nazývame spotrebiteľský prebytok, jeho hodnota je 0,57 p.j. Výrobcovia, ktorí boli ochotní predávať svoje výrobky aj pri cene nižšej ako je rovnovážna cena dosiahli podnikateľský prebytok 0,04 p.j.

2.3 Marginálna analýza

Marginálna analýza sa zaoberá otázkami, či je ekonomicky výhodné zväčšiť objem činnosti. Ide vlastne o dodatočný objem činnosti pripadajúci na dodatočnú jednotku produkcie.

Hraničné náklady (Marginal Cost- MC) definujeme ako prírastok celkových nákladov, ktorý firme vznikne pri zvýšení objemu výroby o jednotku.

Hraničný príjem: (Marginal Revenue- MR) je dodatočný príjem, ktorý firma získa pri zvýšení objemu produkcie o jednotku. Môžeme ho definovať ako zmenu celkového príjmu pri zmene objemu realizovanej produkcie o jednotku.³

Z vlastností určitého integrálu vieme, že ak je funkcia f integrovateľná na intervale I a $x_1, x_2 \in I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I , tak platí :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) \quad (2.3.1)$$

$$F(x_2) = F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (2.3.2)$$

³ Lisý, J. a kol.: Ekonomika v novej ekonomike. Bratislava : IURA EDITION, 2005, str. 176.

Ak poznáme marginálne náklady MC a poznáme aj celkové náklady $TC(x_1)$ pri úrovni produkcie x_1 , tak celkové náklady pri úrovni produkcie x_2 môžeme vyjadriť:

$$TC(x_2) = TC(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} MC dx \quad (2.3.3)$$

ak $x_1 = 0$, tak $TC(0) = FC$, kde FC sú fixné náklady, tak vzťah (2.3.3) má tvar:

$$TC(x_2) = FC + \int_0^{x_2} MC dx \quad (2.3.4)$$

Podobné vzťahy platia pre funkcie celkových príjmov a zisku.

Príklad 2.3.1 Ak poznáme hodnotu celkových nákladov firmy $MC(x) = -0,3x + 200$ a poznáme náklady na výrobu 100 výrobkov $TC(100) = 15\,000$ p.j. Pomocou určitého integrálu vypočítame hodnotu celkových nákladov pri úrovni produkcie $x_2 = 200$ jednotiek produkcie.

$$TC(200) = TC(100) + \int_{100}^{200} (-0,3x + 200) dx = 15\,000 + \left[\frac{-0,3x^2}{2} + 200x \right]_{100}^{200} = 30\,500$$

Celkové náklady pre produkciu 200 výrobkov predstavujú hodnotu 30 500 p.j.

2.4 Stredná hodnota ekonomických funkcií

Strednou hodnotou funkcie $f(x)$, spojitej na intervale $\langle a, b \rangle$, rozumieme takú hodnotu funkcie $f(\xi)$, $\xi \in \langle a, b \rangle$, pre ktorú platí vzťah $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. V ekonómii sa pojem strednej hodnoty funkcie využíva najmä pri funkciách celkových nákladov a celkových príjmov.

Celkové náklady: (Total Cost, TC) firmy rozumieme všetky náklady, ktoré firme vzniknú v súvislosti s výrobným procesom. Firma však pri hodnotení ekonomickej úspešnosti svojho podnikania často nevenuje pozornosť celkovým nákladom, ktoré sú s výrobou spojené,

ale nákladom, ktoré jej vzniknú pri výrobe jednotky produkcie, tzv. jednotkovým, alebo priemerným nákladom.⁴

Príklad 2.4.1. Nájdeme strednú hodnotu funkcie celkových nákladov danej vzťahom $TC(x) = 12x^2 + 9$ na intervale $\langle 1,3 \rangle$ a zistíme, v ktorej hodnote ξ funkcia $TC(\xi)$ nadobúda strednú hodnotu.

Riešenie: Stredná hodnota funkcie celkových nákladov je určená vzťahom:

$$TC(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b TC(x) dx = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (12x^2 + 9) dx = \frac{1}{2} \left[12 \frac{x^3}{3} + 9x \right]_1^3 = 61$$

Zistili sme, že stredná hodnota funkcie celkových nákladov na intervale $\langle 1,3 \rangle$ je $TC(\xi) = 61$. Číslo, prípadne čísla ξ v ktorých skúmaná funkcia nadobúda svoju strednú hodnotu, nájdeme z rovnice: $12\xi^2 + 9 = 61$, $\xi = \pm 2,08$.

Z týchto čísel sa v intervale $\langle 1,3 \rangle$ nachádza len číslo $\xi_1 = 2,08$. Funkcia celkových nákladov nadobúda svoju strednú hodnotu v čísle 2,08.

Príklad 2.4.2. Vo fabrike vyrábajúcej autá, bola mesačná produkcia osobných automobilov prvé 4 mesiace 13 000 áut, a ďalších 8 mesiacov 16 000 áut. Pomocou určitého integrálu určíme aká bola stredná hodnota (priemerná hodnota) mesačnej produkcie osobných automobilov v tejto fabrike v skúmanom období.

Riešenie: Je zrejmé, že priemerná mesačná produkcia nemôže byť aritmetický priemer hodnôt 13 000 a 16 000, t.j. $\frac{13000 \cdot 4 + 16000 \cdot 8}{12} = \frac{180000}{12} = 15 000$, lebo takto by sme dostali za skúmané obdobie produkciu $14 500 \cdot 12 = 174 000$ osobných automobilov, zatiaľ čo skutočná produkcia v tomto období bola $13 000 \cdot 4 + 16 000 \cdot 8 = 52 000 + 128 000 = 180 000$ osobných automobilov. Za strednú hodnotu treba vziať taký počet automobilov, ktorý po vynásobení dvanástimi mesiacmi určí skutočnú produkciu. Teda stredná hodnota bude:

$$\frac{13 000 \cdot 4 + 16 000 \cdot 8}{12} = \frac{180 000}{12} = 15 000$$

⁴ Lisý, J. a kol. : Ekonomía v novej ekonomike. Bratislava: IURA EDITION, 2005, str. 165.

Strednú hodnotu môžeme vypočítať pomocou určitého integrálu. Funkcia $f(t)$ určuje produkciu podniku v čase t . V prípade skúmanej fabрики je produkcia $f(t)$ definovaná takto:

$$f(t) = \begin{cases} 13\,000, & t \in \langle 0, 4 \rangle \\ 16\,000, & t \in \langle 4, 12 \rangle \end{cases} \quad t - \text{mesiace}$$

Počítame určitý integrál:

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} f(t) dt = \frac{1}{12} \left(\int_0^4 13\,000 dt + \int_4^{12} 16\,000 dt \right)$$

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} f(t) dt = \frac{1}{12} [13\,000(4 - 0) + 16\,000(12 - 4)] = \frac{13\,000 \cdot 4 + 16\,000 \cdot 8}{12} = 15\,000$$

Priemerná mesačná produkcia automobilov za skúmané obdobie bola 15 000.

2.5 Celkový príjem

Celkový príjem: (Total Revenue TR) je peňažná suma, ktorú firma získa realizáciou celkového objemu svojej produkcie. Celkový príjem firmy vypočítame ako súčin ceny za jednotku produkcie a objemu vyrobenej produkcie, t.j.: $TR = P * Q$.⁵

Ak poznáme hustotu toku príjmu $f(t)$ v ľubovoľnom okamihu uvažovaného obdobia, môžeme pomocou určitého integrálu zistiť celkový príjem za isté skúmané obdobie.

Veta 2.5.1. Ak spojitá funkcia $f(t)$ určuje hustotu toku príjmu (výšku renty) v čase $t, t \in \langle T_1, T_2 \rangle$, potom celkový príjem $TR(T_1, T_2)$ za obdobie $\langle T_1, T_2 \rangle$ je určený určitým integrálom:

$$TR(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt \quad (2.5.1)$$

Príklad 2.5.1 Ak nájomník budovy platí majiteľovi budovy mesačne 800 €, potom celkový príjem majiteľa budovy od jeho nájomníka za obdobie 5 rokov bude:

$$TR = 800 \cdot 12 \text{ mesiacov} \cdot 5 \text{ rokov} = 48\,000 \text{ €}$$

⁵ Lisý, J. a kol. : Ekonomika v novej ekonomike. Bratislava: IURA EDITION, 2005, str. 174.

K rovnakému výsledku môžeme dospieť aj iným spôsobom. Majiteľ získa v každom roku čiastku $t, t = 1, 2, 3, 4, 5, t = 9\,600\text{ €}$, čo zapíšeme pomocou funkcie:

$$f(t) = 9\,600, \quad t = 1, 2, 3, 4, 5$$

funkcia $f(t)$, ktorá určuje hustotu toku príjmu v čase t (príjem za jednotku času), umožňuje vypočítať pomocou určitého integrálu celkový príjem TR za stanovené obdobie. Celkový príjem TR za obdobie 5 rokov určíme pomocou určitého integrálu:

$$TR = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 9\,600dt = 9\,600 \cdot 5 = 48\,000\text{ €}$$

Za obdobie 5 rokov, majiteľ budovy získa celkový príjem 48 000 €.

2.6 Počiatočná hodnota vkladu pri danej hustote toku príjmu

Časová hodnota peňazí výrazne ovplyvňuje rozhodovanie investorov o tom, kam voľné peňažné prostriedky vložiť. Základným princípom časovej hodnoty peňazí je, že menová jednotka má v súčasnosti väčšiu hodnotu, ako bude mať v budúcnosti. Vychádzame z predpokladu, že dočasne voľné finančné prostriedky možno investovať na finančnom trhu, kde prinášajú ďalšie výnosy. Naopak neinvestované finančné prostriedky sú znehodnocované infláciou. V praxi sa často stretávame s úlohou nájsť počiatočnú hodnotu vkladu (kapitálovej investície), ktorý by zabezpečil pri p -percentnej ročnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní príjem, zodpovedajúci dopredu stanovenej hustote toku príjmu $f(t)$.

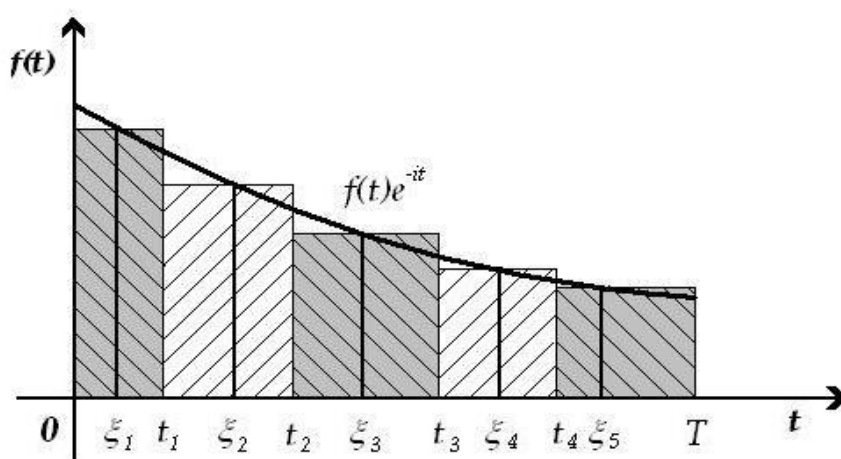
Spojité úrokovanie je proces úročenia, pri ktorom sa úrokovanie uskutočňuje v časových intervaloch blížiacich sa k nule, pre $\Delta t \rightarrow 0$, t.j. pre počet konverzií m v roku rastúcich do nekonečna. Konverzia je doba medzi dvomi nasledujúcimi výpočtami úrokov.

Prítomná (počiatočná) hodnota vloženého kapitálu pri spojitom úrokovaní je vyjadrená vzťahom: $K_0 = K_n \cdot e^{-\delta n}$, kde K_n je budúca hodnota kapitálu, δ je úroková sadzba, n je

úrokové obdobie. Veličinu $e^{-\delta n}$ nazývame diskontným faktorom (odúročiteľom) spojitého úrokovania. Určuje diskont z jednej peňažnej jednotky pri úrokovej intenzite δ za jeden rok.⁶

Veta 2.6.1. Počiatočná hodnota vkladu K_0 , ktorá zabezpečuje príjem, zodpovedajúci hustote toku príjmu $f(t)$ v intervale $\langle 0, T \rangle$ pri p-percentnej ročnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní, je určená vzťahom:

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) e^{-\delta \xi_j} \Delta t_j = \int_0^T f(t) e^{-\delta t} dt \quad (2.6.1)$$



Obr. 2.6.1 Geometrická interpretácia vzťahu pre $n=5$

Ak limita existuje, určuje presnú hodnotu počiatočného vkladu K_0 , zabezpečujúceho príjem v intervale $\langle 0, T \rangle$, ktorý je určený hustotou toku príjmu $f(t)$. Táto limita vždy existuje, pokiaľ uvažujeme normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle 0, T \rangle$, nakoľko hustota toku príjmu $f(t)$ je podľa predpokladu spojitá funkcia a teda je spojitou funkciou aj funkcia $f(t)e^{-\delta t}$.

⁶ Hut'ka, V. – Peller, F. : Finančná matematika v Exceli. Bratislava: IURA EDITION, 2007, str. 54.

Príklad 2.6.1 Stavebná spoločnosť sa rozhodla zakúpiť pracovný stroj, ktorého životnosť je desať rokov. Príjem z produkcie pracovného stroja za desať rokov považuje za spojitý príjmový tok odhadovaný funkciou $f(t) = 7000 + 2000t$, v tisícoch eur ročne (t – roky). Spoločnosť zaujíma veľkosť kapitálovej investície, tzn. hodnota stroja, ak predpokladaná úroková miera v budúcnosti bude 8% pri spojitom úrokovaní.

Riešenie: Pri určovaní kapitálovej investície K_0 použijeme vzťah:(2.6.1)

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_0^{10} (7000 + 2000t)e^{-0,08t} dt \\ &= 7000 \int_0^{10} e^{-0,08t} dt + 2000 \int_0^{10} te^{-0,08t} dt = 7000 \left[\frac{e^{-0,08t}}{-0,08} \right]_0^{10} \\ &\quad + 2000 \left\{ \left[t \frac{e^{-0,08t}}{-0,08} \right]_0^{10} - \frac{1}{-0,08} \left[\frac{e^{-0,08t}}{-0,08} \right]_0^{10} \right\} \\ &= -87500(e^{-0,8} - 1) - 25000[10e^{-0,8} + 12,5(e^{-0,8} - 1)] = \mathbf{107\,955\,€} \end{aligned}$$

Kapitálová investícia firmy na nákup pracovného je 107 955 €

2.7 Matematický softvér

Súčasná spoločnosť sa nachádza na vysokom stupni rozvoja vedy a techniky. Moderné technológie prenikajú do všetkých štruktúr spoločnosti. Do popredia sa preto v ostatných rokoch dostávajú informačno – komunikačné technológie, ktoré slúžia na riešenie problémov z reálneho života v rôznych oblastiach. Jednou z týchto technológií je špeciálny matematický softvér. Je to skupina programov reprezentovaná predovšetkým tzv. CAS systémami (Computer algebra systems), ktoré disponujú bohatým aparátom matematických metód.

Medzi najznámejšie profesionálne CAS systémy patrí Mathematica. Systém Mathematica zahŕňa množstvo funkcií a algoritmov z oblastí všeobecnej algebry, kombinatoriky, maticového a tenzorového počtu, štatistiky a regresnej analýzy, riešenia rovníc a ich sústav (algebraických aj diferenciálnych), diferenciálneho a integrálneho počtu a pod.

Produkt spoločnosti Texas Instruments, počítačový algebrický systém DERIVE (PAS DERIVE), sa často označuje za “matematického asistenta”. Je to výkonný a jednoducho ovládateľný softvér určený na riešenie širokého okruhu matematických problémov.

Matematický softvér Matlab je jedným z najrozšírenejších programových balíkov pre technické výpočty v mnohých oboroch. Ponúka rozsiahle využitie, obsahuje veľké množstvo funkcií a operácií.

Záver

Ekonomía je veda, ktorá skúma podstatu ekonomických síl, ktoré ovplyvňujú náš život. Zaoberá sa problémami ekonomického života, akými sú napríklad správanie spotrebiteľa a výrobcu v trhovej ekonomike. Odpovedá na otázky, ako fungujú trhy, prečo sa určité statky vyrábajú a iné nie, či výrobcovia sú nútení prispôbovať sa prániam spotrebiteľov pri raste cien na trhu, ako sa správa spotrebiteľ pri raste cien na trhu, prečo sa z viacerých investičných možností volí práve jedna konkrétna a mnohé iné.

V záverečnej práci som sa zamerala na teoretické a praktické možnosti využitia určitého integrálu pri ekonomickom rozhodovaní subjektov trhu. Oboznamujem čitateľa s históriou integrálneho počtu. Definujem určitý integrál, jeho geometrický význam, vlastnosti a metódy výpočtu.

V praktických príkladoch uvádzam výpočet spotrebiteľského a podnikateľského prebytku, ktorý účastníci trhu dosahujú pri rôznej úrovni trhovej ceny. Firmy často stoja pred rozhodnutím, či je ekonomicky výhodné zväčšiť objem činnosti a snažia sa určiť celkové náklady, ktoré vzrastú spolu s objemom produkcie. Pri hodnotení ekonomickej úspešnosti svojho podnikania venujú pozornosť nákladom, ktoré im vzniknú pri výrobe jednotky produkcie, tzv. jednotkovým, alebo priemerným nákladom. Časová hodnota peňazí výrazne ovplyvňuje rozhodovanie investorov o tom, kam voľné peňažné prostriedky vložiť, preto sa v praxi často stretávame s úlohou nájsť počiatočnú hodnotu kapitálovej investície, ktorá by zabezpečila pri danej ročnej úrokovej miere a spojitom úrokovaní príjem, zodpovedajúci dopredu stanovenej hustote toku príjmu. Na riešenie uvedených problémov využívam určitý integrál a jeho vlastnosti.

Nachádzame sa na vysokom stupni rozvoja vedy a techniky. Moderné technológie prenikajú do všetkých štruktúr spoločnosti. Jednou z týchto technológií je špeciálny matematický softvér. V závere druhej kapitoly uvádzam najpoužívanejší matematický softvér, ktorý slúži na riešenie problémov z reálneho života v rôznych oblastiach.

Penikanie matematiky do ekonomie znamená zovšeobecňovanie ekonomických javov a procesov, ale aj preverovanie získaných poznatkov a reagovanie na potreby teórie a praxe.

Zoznam použitej literatúry

- [1] FECENKO, J. – PINDA, L. : Matematika 1. Bratislava : IURA EDITION, 2006.
- [2] FELDERER, B. - HOMBURG, S. : Makro ekonomika a nová ekonomika. Bratislava : ELITA, 1995.
- [3] FENDEK, M. – FENDEKOVÁ, E. : Mikroekonomická analýza. Bratislava : IURA EDITION, 2008.
- [4] HORÁKOVÁ, G. – STAREČKOVÁ, A. : Matematika 1 Zbierka úloh. Bratislava : EKONÓM, 2005.
- [5] HUŤKA, L. a kol. : Matematika pre ekonómov 1. Bratislava : ALFA, 1984.
- [6] HUŤKA, V. – PELLER, F. : Finančná matematika v Exceli. Bratislava : JURA EDITION, 2007.
- [7] LISÝ, J. a kol. : Ekonómia v novej ekonomike. Bratislava : EKONÓMIA, 2005.
- [8] ŠALÁT, T. a kol. : Malá encyklopédia matematiky. Bratislava : OBZOR, 1967.
- [9] ŠULKA, R. – MORAVSKÝ, L. – SATKO, L. : Matematická analýza 1. Bratislava : ALFA, 1986.
- [10] ZIMKA, R. : Matematika II. Banská Bystrica : EKONÓMIA, 2002.
- [11] ZNÁM, Š. a kol. : Pohľad do dejín matematiky. Bratislava : ALFA, 1986.