

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/B/2021/36122163741409796

RIEŠENIE ÚLOH LINEÁRNEHO POGRAMOVANIA
V JAZYKU R

Aplikácia v podniku BOMAX Slovakia, s. r. o.

Bakalárska práca

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

RIEŠENIE ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA
V JAZYKU R

Aplikácia v podniku BOMAX Slovakia, s. r. o.

Bakalárska práca

Študijný program:

Manažérske rozhodovanie

Študijný odbor:

Ekonómia a manažment

Školiace pracovisko:

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Školiteľ:

Ing. Mário Pčolár

Bratislava 2021

Michal Ďurčík



Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Michal Ďurčík
Študijný program: manažérske rozhodovanie (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: ekonómia a manažment
Typ záverečnej práce: Bakalárska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Riešenie úloh lineárneho programovania v jazyku R - aplikácia v podniku BOMAX Slovakia s.r.o.

Anotácia: Cieľom bakalárskej práce bude poukázať na možnosti využitia prostredia RStudio pre potreby riešenia vybraných problémov lineárneho programovania.

Vedúci: Ing. Mário Pčolár
Katedra: KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI
Vedúci katedry: prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Dátum zadania: 19.03.2020

Dátum schválenia: 23.03.2020
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum :

.....

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel pod'akovať všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri spracúvaní bakalárskej práce. Osobitné pod'akovanie by som chcel venovať môjmu vedúcemu práce Ing. Márioovi Pčolárovi za užitočné rady, podnety a usmernenia pri písaní bakalárskej práce. Ďalej by som sa chcel pod'akovať spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. za ústretovosť, trpezlivosť, ochotu pri získavaní a poskytovaní dát potrebných pri písaní záverečnej práce. V neposlednom rade by som sa chcel pod'akovať mojim rodičom, ktorí mi štúdium umožnili a neustále ma podporovali.

Abstrakt

ĎURČÍK, Michal: *Riešenie úloh lineárneho programovania v jazyku R – Aplikácia v podniku BOMAX Slovakia, s. r. o.* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: Ing., Mário Pčolár, - Bratislava: FHI EU, 2021, 52 s.

Cieľom záverečnej práce je praktická aplikácia úloh z problematiky lineárneho programovania určených na optimalizáciu výrobného procesu, vzhľadom na ohraničenia vzácných, mnohokrát ťažko dostupných, materiálových či nemateriálových výrobných zdrojov v podniku fungujúcom v podmienkach trhovými ekonomikami a ich riešenie prostredníctvom programovacieho jazyka R.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol a obsahuje 6 grafov, 10 tabuliek a 7 obrázkov. Prvá kapitola je venovaná úvodu do problematiky, historickým štádiám jej vývoja a jej teoretickému zadefinovaniu. V ďalšej kapitole je vymedzený hlavný cieľ práce a jednotlivé čiastkové ciele nevyhnutné na jeho dosiahnutie. Tretia kapitola obsahuje teoretické vysvetlenie použitých metód skúmania potrebných na riešenie danej problematiky. Záverečná kapitola sa zaoberá opisom skúmaného objektu, formuláciou úlohy lineárneho programovania, jej riešením pomocou programovacieho jazyka R, analýzou získaných výsledkov a ich interpretáciou v strojárskom podniku BOMAX Slovakia, s. r. o.

Kľúčové slová:

operačná analýza, optimalizácia, lineárne programovanie, programovací jazyk R, lpSolve

Abstract

ĎURČÍK, Michal: *Solving linear programming problems in R – Application in the company BOMAX Slovakia, s. r. o.* – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Operations research and Econometrics. – Supervisor of the Bachelor thesis: Ing., Mário Pčolár, - Bratislava: FHI EU, 2021, number of pages 52.

The aim of the thesis is a practical application of linear programming problems designed for the optimization of the production process, in regard to limitations of scarce, often not easily accessible material and non-material production resources in a company based on market economy conditions. The problems are solved by means of the programming language R.

The thesis is divided into four chapters and contains six graphs, ten charts and seven pictures. The first chapter introduces the issue, presents historical stages of its development and its theoretical definition. In the following chapter, the main goal of the thesis is defined, and individual partial goals necessary for reaching the main goal are described. The third chapter contains a theoretical explanation of research methods essential for solving the given/specific problems. The final chapter is dedicated to describing the research object, defining the linear programming problems, presenting the solution by means of the programming language R, giving the analysis of gained results and their interpretation in the engineering company BOMAX Slovakia, s. r. o.

Key words

operations research, optimization, linear programming, programming language R, lpSolve

Obsah

Zoznam ilustrácií a zoznam tabuliek	9
Úvod	10
1 Súčasný stav riešenej problematiky.....	11
1.1 Operačný výskum	11
1.1.1 <i>História operačného výskumu</i>	<i>11</i>
1.1.2 <i>Teoretické vymedzenie operačného výskumu</i>	<i>12</i>
1.1.3 <i>Matematické programovanie.....</i>	<i>13</i>
1.1.4 <i>Lineárne programovanie.....</i>	<i>14</i>
1.2 Programovací jazyk R.....	17
1.2.1 <i>Riešenie úloh lineárneho programovania v jazyku R.....</i>	<i>17</i>
1.2.2 <i>Lp_solve</i>	<i>18</i>
2 Cieľ práce.....	19
3 Metodika práce a metódy skúmania.....	20
3.1 Lineárne programovanie	20
3.1.1 <i>Všeobecná formulácia úlohy lineárneho programovania</i>	<i>20</i>
3.1.2 <i>Dualita v úlohách lineárneho programovania.....</i>	<i>23</i>
3.2 Celočíselné lineárne programovanie	26
3.3 <i>Riešenie úloh lineárneho programovania v jazyku R</i>	<i>26</i>
3.3.1 <i>lpSolve</i>	<i>27</i>
4 Výsledky práce a diskusia.....	29
4.1 Charakteristika spoločnosti	29
4.2 Získavanie údajov	30
4.3 Charakteristika výrobného procesu.....	30
4.4 Optimalizácia výrobného procesu.....	39
4.4.1 <i>Formulácia úlohy lineárneho programovania</i>	<i>39</i>
4.4.2 <i>Riešenie úlohy lineárneho programovania v jazyku R.....</i>	<i>41</i>
4.4.3 <i>Získanie celočíselného riešenia.....</i>	<i>45</i>
4.5 Interpretácia a analýza získaných výsledkov	46
Záver	49
Zoznam použitej literatúry	51

Zoznam ilustrácií a zoznam tabuliek

OBRÁZOK 1 – OPTIMALIZAČNÉ KRITÉRIÁ	15
OBRÁZOK 2 – OHRANIČUJÚCE PODMIENKY	16
OBRÁZOK 3 – FORMULÁCIA ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA V JAZYKU R.....	42
OBRÁZOK 4 – VÝSTUP Z JAZYKA R.....	43
OBRÁZOK 5 – VÝPOČET VEKTORA VYUŽITÝCH ZDROJOV	44
OBRÁZOK 6 – VÝSTUP Z VÝPOČTU VEKTORA VYUŽITÝCH ZDROJOV	44
OBRÁZOK 7 – VÝPOČET VEKTORA DOPLNKOVÝCH PREMENNÝCH S*	45
TABUĽKA 1 – SCHÉMA ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA.....	22
TABUĽKA 2 – VÝROBNÉ ZDROJE PODNIKU BOMAX SLOVAKIA, S. R. O.....	30
TABUĽKA 3 – MESAČNÝ DISPONIBILNÝ PRACOVNÝ ČAS.....	32
TABUĽKA 4 – DISPONIBILNÉ MNOŽSTVO VÝROBNÝCH PROCESOV	32
TABUĽKA 5 – SPOTREBA MATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU DRAPÁKU	33
TABUĽKA 6 – SPOTREBA MATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU ŠTIEPACIEHO KUŽELA	34
TABUĽKA 7 – SPOTREBA MATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU KUŽELOVEJ ŠTIEPAČKY	35
TABUĽKA 8 – MATERIÁLOVÉ ZDROJE NA VÝROBU ČELNÉHO NAKLADAČA.....	37
TABUĽKA 9 – SPOTREBA MATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU HYDRAULICKÉHO NAVIJAKU	38
TABUĽKA 10 – SPOTREBA MATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU RÝCHLOUPÍNAČA	39
GRAF 1 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU DRAPÁKU	34
GRAF 2 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU ŠTIEPACIEHO KUŽELA	35
GRAF 3 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU KUŽELOVEJ ŠTIEPAČKY	36
GRAF 4 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU ČELNÉHO NAKLADAČA	37
GRAF 5 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU HYDRAULICKÉHO NAVIJAKU	38
GRAF 6 – SPOTREBA NEMATERIÁLOVÝCH ZDROJOV NA VÝROBU RÝCHLOUPÍNAČA.....	39

Úvod

Každá spoločnosť sa v súčasnej dobe usiluje o maximalizáciu zisku, čo je v podmienkach trhových ekonomík stále náročnejšie. Počet ľudí na planéte sa zvyšuje, čoraz väčšie množstvo ľudí zažíva blahobyt, spotreba neustále rastie, no disponibilné množstvo prírodných vzácných zdrojov sa znižuje. V podmienkach narastajúcej informatizácie je vstup nových firiem do odvetví relatívne jednoduchý. Veľké množstvo firiem v odvetví znamená veľkú konkurenciu, čo vedie k tomu, že ceny v podmienkach trhových ekonomík sú pre firmu dané a bez značnej konkurenčnej výhody je spoločnosť odsúdená akceptovať cenu stanovenú trhovým mechanizmom. Spoločnosť preto nemôže navyšovať zisk zvyšovaním cien produkcie.

Firma teda musí hľadať iné spôsoby maximalizácie zisku ako zvyšovanie cien. Najúčinnějšíou metódou maximalizácie zisku je optimalizácia výrobného procesu a zefektívnenie využívania vzácných zdrojov, čím spoločnosť prakticky minimalizuje náklady. V súčasnosti je teda na mieste otázka minimalizácie nákladov.

V dnešnej dobe existuje nespočetné množstvo nástrojov, ktoré umožňujú spoločnostiam optimalizovať ich výrobné procesy. S vyvinutím výpočtových zariadení sa tieto nástroje stali ešte dostupnejšie pre širokú verejnosť. Riešenie problémov, ktoré v minulosti boli považované za takmer nemožné, je dnes otázka len niekoľkých sekúnd. Napriek tomu, že vývoj počítačov zaznamenáva progres, stále však vieme prostredníctvom počítačov exaktne vyriešiť len príklady s určitou obťažnosťou. No ak nedokážeme daný príklad vyriešiť exaktne, existuje veľká pravdepodobnosť, že je možné získať pomerne presné riešenie pomocou rôznych heuristik.

K najpoužívanejším metódam, ktoré umožňujú riešenie optimalizačných úloh, patria metódy matematického programovania. Matematické programovanie umožňuje nájsť najlepšie prípustné riešenie zo všetkých možných riešení, pričom za prípustné riešenie považujeme každé riešenie, ktoré spĺňa ohraničujúce podmienky. Medzi najčastejšie ohraničujúce podmienky patria materiálové ohraničenia, ohraničenia výrobných kapacít či ohraničenia pracovných síl. Lineárne programovanie možno považovať za podmnožinu matematického programovania. Odlišuje sa tým, že účelové funkcie, ako aj štruktúrne ohraničenia, sú v prípade lineárneho programovania v lineárnom tvare.

1 Súčasný stav riešenej problematiky

1.1 Operačný výskum

Od začiatku priemyselnej revolúcie firmy neustále rástli a vznikali z nich veľké korporácie. Tomuto trendu veľkou mierou dopomohla deľba práce a segmentácia manažmentu v týchto organizáciách. Obrovský nárast firiem priniesol so sebou aj určité problémy, ktoré bolo treba riešiť.

Jedným z problémov bolo delenie organizácií do viacerých oddelení. Každé takéto oddelenie má určité ciele, ktoré sa usiluje naplniť. Veľakrát sa z takýchto oddelení stávali relatívne autonómne segmenty a pri snahe naplniť ich stanovené ciele prehliadali fakt, či sa tieto ciele zhodujú s cieľom spoločnosti ako celku. Čo je dobré pre časť, neznamená, že bude dobré pre celok.

Ďalším problémom bola narastajúca zložitosť a komplexnosť jednotlivých výrobných oddelení. S narastajúcou náročnosťou efektívne alokovať dostupné zdroje pre jednotlivé výrobné oddelenia, rástla potreba implementácie matematických metód. Otázka preto znela: „Ako najefektívnejšie rozdeliť vzácne zdroje medzi jednotlivé výroby, aby profit z ich zapojenia bol pre organizáciu ako celok maximálny?“

1.1.1 História operačného výskumu

Operačný výskum je relatívne nová a stále formulujúca sa veda. Korene operačného výskumu môžeme badať už počas druhej svetovej vojny. Z dôvodu prebiehajúcich bojov bolo veľmi dôležité rýchlo a efektívne alokovať vzácne zdroje a prijímať významné rozhodnutia potrebné pri rôznych vojenských operáciách. Preto vojnový manažment Veľkej Británie a Spojených štátov amerických povolal veľké množstvo vedcov, aby aplikovali vedecký postoj pri prijímaní dôležitých strategických rozhodnutí o vojnových operáciách. Tieto sformované tímy vedcov boli v skutočnosti prvými tímami operačných výskumníkov. Vďaka vyvinutiu efektívnych metód využitia novovynájdových radarov boli tieto tímy kľúčové nielen pri víťazstve Anglicka v leteckej bitke o Britániu, ale aj pri víťazstve v bitke o severný Atlantik.

Po skončení vojny z dôvodu veľkej úspešnosti rástol záujem o aplikáciu podobných metód operačného výskumu pri vojenských operáciách a takisto mimo vojenského sektora. Po vojne nasledoval prudký priemyselný rozmach, ktorý spôsobil nárast v zložitosti a špecializácii štruktúr organizácií. Narastajúci počet podnikových riaditeľov, manažérov a

obchodníkov si začali uvedomovať, že je nevyhnuté zapojiť vedecký postoj v riadení a optimalizovaní spoločností.

Do začiatku päťdesiatych rokov dvadsiateho storočia sa už metódy operačného výskumu využívali v mnohých firmách, v priemysle či dokonca vo vláde. Jednou z metód bola napríklad simplexová metóda vyvinutá Georgom Danzigom v roku 1947. Mnohé metódy, dnes považované za základné nástroje operačného výskumu, ako napríklad: lineárne programovanie, dynamické programovanie, teória riadenia či teória zásob, boli pomerne dobre rozvinuté už na konci päťdesiatych rokov dvadsiateho storočia.

Obrovským impulzom pre ešte väčší a omnoho rýchlejší rozmach operačného výskumu bola počítačová revolúcia. Existencia počítačov umožnila riešiť oveľa zložitejšie problémy, vďaka svojej schopnosti zrealizovať nespočetné množstvo výpočtov v relatívne krátkom čase. Znamenalo to obrovský prevrat, keďže doposiaľ bez existencie počítačov bolo možné riešiť len veľmi jednoduché, obmedzené príklady. Problémy z reálneho sveta boli mnohokrát oveľa zložitejšie na riešenie, než bolo doposiaľ možné riešiť bez pomoci výpočtovej techniky.

Záujem o operačný výskum vzrástol ešte viac s vynájdením osobného počítača. Vďaka osobným počítačom bolo riešenie náročných problémov operačného výskumu dostupnejšie pre širšie spektrum záujemcov. Od toho momentu rozvoj a záujem o implementáciu metód operačného výskumu neustále rastie. V dnešnej dobe už takmer každý človek vlastní osobný počítač, ktorý je schopný riešiť pomerne náročné príklady.¹

1.1.2 Teoretické vymedzenie operačného výskumu

*„Operačný výskum môžeme definovať ako vednú disciplínu, ktorej predmetom skúmania je štúdium a analýza operácií a procesov, ktoré prebiehajú alebo sú plánované v určitej organizačnej jednotke (podnik, závod, dielňa...), pričom štúdium a analýza týchto operácií sa najčastejšie uskutočňuje pomocou matematického modelovania.“*²Operačný výskum na prijímanie jednotlivých rozhodnutí využíva matematické modely.

Matematický model je matematická reprezentácia skutočnosti, ktorá je potrebná na prijatie rozhodnutia alebo na lepšie porozumenie skúmanej skutočnosti. Matematické

¹HILLIER, Frederick S. - LIEBERMAN, Gerald J. Introduction to Operations Research. 9. vyd. New York : McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. 1047 s. ISBN 978-0-07-337629-5

²HRABLIK-CHOVANCOVÁ, Henrieta - SAKÁL, Peter. Operačná analýza : časť 1. Trnava : AlumniPress, 2011. s. 5. ISBN 978-80-8096-151-0

modely sú dnes využívané v rôznych oblastiach, ako napríklad: plánovanie, ekonomická analýza či riadenie. Na riešenie úloh operačnej analýzy sa dnes používajú rôzne druhy modelov a metód. Medzi základné metódy operačnej analýzy patria:

- matematické programovanie,
- teória zásob,
- teória obnovy a spoľahlivosti,
- aplikácie teórie grafov,
- teória hier,
- teória hromadnej obsluhy,
- úlohy optimálneho priradovania,
- a mnohé ďalšie.

1.1.3 Matematické programovanie

Matematické programovanie patrí medzi základné metódy operačnej analýzy. Transformovaním reálnych ekonomických procesov do matematických modelov dokáže riešiť veľké množstvo rôznych optimalizačných úloh. Umožňuje nám nájsť riešenie z množiny prípustných riešení, ktoré je z hľadiska formulovaného cieľa najefektívnejšie. Prípustné riešenia sú tie riešenia, ktoré spĺňajú všetky ohraničujúce podmienky.³ Na sformovaní matematického programovania sa podieľali hlavne G. B. Danzig, W. W. Cooper, A. Charnes, S. I. Gass, T. L. Saaty a ďalší.

Z hľadiska charakteru funkcií môžeme deliť úlohy matematického programovania týmto spôsobom:

- úlohy lineárneho programovania (všetky funkcie, ktoré sa v lineárnom modeli nachádzajú, sú v lineárnom tvare),
- úlohy nelineárneho programovania (aspoň jedna z funkcií matematického modelu nie je v lineárnom tvare). Tieto úlohy ďalej delíme na:
 - úlohy kvadratického programovania,
 - úlohy konvexného programovania,
 - úlohy lomeného programovania.³

³HRABLIK-CHOVANCOVÁ, Henrieta - SAKÁL, Peter. Operačná analýza : časť 1. Trnava : AlumniPress, 2011. 242 s. ISBN 978-80-8096-151-0

1.1.4 Lineárne programovanie

Lineárne programovanie patrí medzi základné a najviac používané metódy operačnej analýzy, ktoré umožňuje transformovať problémy reálneho sveta do matematických modelov. „*Vývoj lineárneho programovania sa radí medzi najdôležitejšie vedecké pokroky polovice 20. storočia.*“⁴Dnes je to štandardne používaný nástroj, ktorý pomohol ušetriť mnohým, už aj pomerne rozvinutým spoločnostiam, milióny eur. Čoraz viac táto metóda operačného výskumu nachádza uplatnenie aj v iných ako priemyselných odvetviach nášho života. „*Veľkú časť kapacity všetkých vedeckých výpočtov na počítačoch zaberajú práve výpočty lineárneho programovania.*“⁴

Lineárne programovanie používa na opísanie určitého problému matematický model. Lineárny znamená, že všetky funkcie v tomto modeli musia byť lineárne. Lineárne programovanie môžeme teda považovať za podmnožinu matematického programovania. Slovo programovanie neznamená počítačové programovanie. Programovanie je v tomto prípade synonymom k slovu plánovať. Z toho vyplýva, že lineárne programovanie zahŕňa plánovanie určitých aktivít za účelom dosiahnutia optimálneho výsledku. Optimálny výsledok je výsledok, ktorý najlepšie a najefektívnejšie spĺňa požadovaný cieľ zo všetkých možných alternatív a je v súlade s matematickým modelom.⁵

Napriek tomu, že efektívna alokácia vzácnych prírodných zdrojov je najčastejší príklad uplatnenia lineárneho programovania, existuje veľké množstvo ďalších veľmi dôležitých oblastí uplatnenia tejto metódy operačnej analýzy. Medzi ďalšie aplikácie lineárneho programovania môžeme zaradiť optimálne využitie počtu pracovníkov, optimálny výber výrobného programu, optimálne využitie časového fondu strojov a zariadení, finančných a investičných prostriedkov a podobne.

Úloha lineárneho programovania sa snaží nájsť také hodnoty rozhodujúcich premenných, ktoré optimalizujú (maximalizujú alebo minimalizujú) účelovú funkciu z množiny všetkých hodnôt rozhodujúcich premenných, ktoré spĺňajú dané ohraničujúce podmienky. Typická úloha lineárneho programovania sa skladá z nasledujúcich zložiek:

- účelová funkcia/účelové funkcie,

⁴HILLIER, Frederick S. - LIEBERMAN, Gerald J. Introduction to Operations Research. 9. vyd. New York : McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. s. 23. ISBN 978-0-07-337629-5

⁵HILLIER, Frederick S. - LIEBERMAN, Gerald J. Introduction to Operations Research. 9. vyd. New York : McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. 1047 s. ISBN 978-0-07-337629-5

- rozhodovacie premenné,
- ohraničujúce podmienky.⁶

Funkcia, ktorú sa snažíme maximalizovať alebo minimalizovať sa v úlohách lineárneho programovania nazýva účelová funkcia. Prostredníctvom tejto funkcie sa vyjadruje kritérium optimálnosti. Na základe tohto kritéria sa vyberá najlepšie riešenie zo všetkých prípustných. Toto kritérium by malo preto byť výstižné a malo by presne vyjadrovať určený cieľ. Veľakrát sa podnik usiluje o dosiahnutie viacerých cieľov. Takéto úlohy sa nazývajú úlohy viackriteriálnej optimalizácie. V takom prípade sa formulujú úlohy lineárneho programovania s viacerými účelovými funkciami, kde každá účelová funkcia vystihuje iný cieľ. Pri formulácii kritéria optimálnosti úlohy lineárneho programovania v sfére výrobného podniku sa v praxi najčastejšie používajú kritériá uvedené v nasledujúcej schéme.

Obrázok 1 – Optimalizačné kritériá



Zdroj: vlastné spracovanie podľa⁷

Existuje veľké množstvo cieľov, ktoré môže spoločnosť nasledovať. Z toho dôvodu nie je možné uviesť všetky. Výber kritéria optimálnosti je pomerne náročný proces. Môže nastať taký prípad, kedy spoločnosť síce optimalizuje jedno kritérium, no ostatné

⁶WINSTON, Wayne L. - GOLDBERG, Jeffrey B. Operations Research - Applications and Algorithms. 4. vyd. Belmont : Thomson Learning, Inc., 2004. 1418 s. ISBN 0-534-52020-0

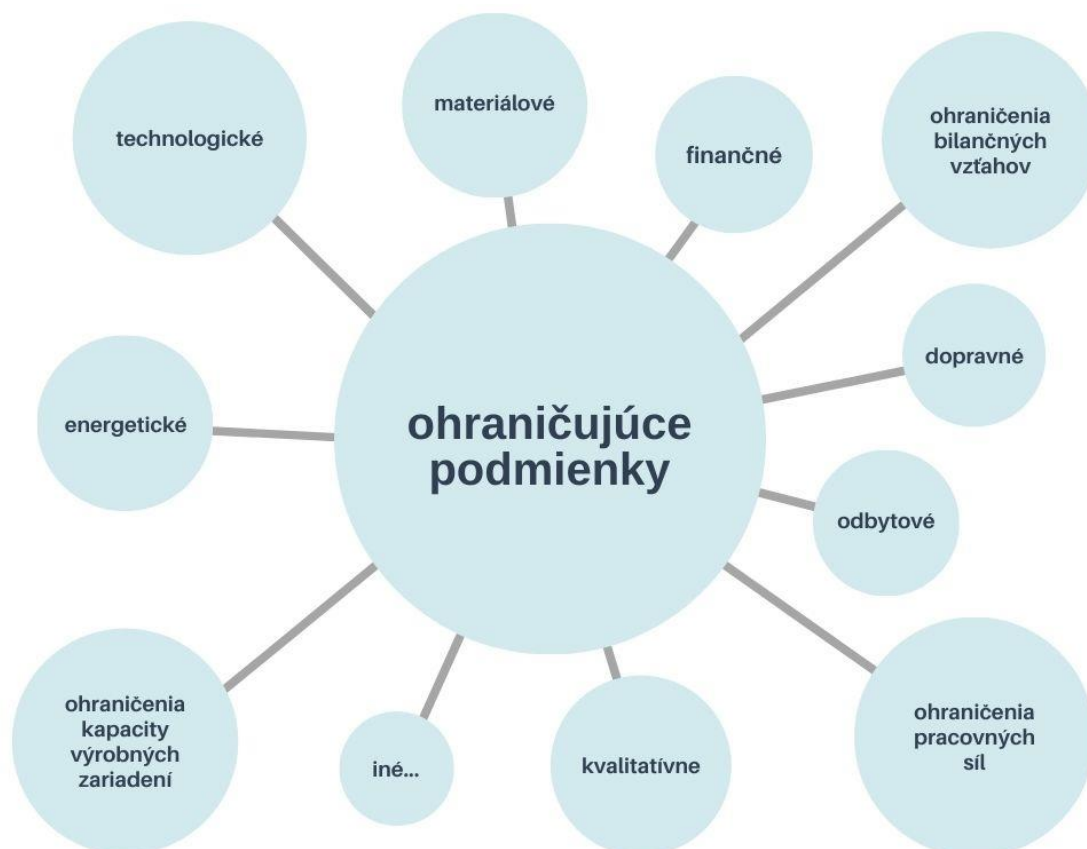
⁷BREZINA, Ivan - IVANIČOVÁ, Zlatica - PEKÁR, Juraj. Operačná analýza. Bratislava : Jura Edition, 2007. 243 s. ISBN 978-80-8078-176-7

ukazovatele nadobúdajú ekonomicky neakceptovateľné hodnoty. Výber správneho kritéria je teda nesmierne dôležitý.

Premenné, ktoré sú pod našou kontrolou a ovplyvňujú výkonnosť celého modelu sa nazývajú rozhodovacie premenné. Tieto premenné sú nástrojom, pomocou ktorého sa dosahuje požadovaný cieľ (prejdená vzdialenosť, vyprodukované výrobky).⁸

Rozhodovacie premenné vo väčšine prípadov môžu nadobúdať iba určité hodnoty. Tieto obmedzenia rozhodovacích premenných sa nazývajú ohraničujúce podmienky. Existuje veľké množstvo rôznych ohraňčení, ktoré môžu byť do modelu zaradené. Najčastejšie sa v praxi vyskytujú ohraňčenia uvedené v obrázku 2.

Obrázok 2 – Ohraňčujúce podmienky



Zdroj: vlastné spracovanie podľa⁹

⁸WINSTON, Wayne L. - GOLDBERG, Jeffrey B. Operations Research - Applications and Algorithms. 4. vyd. Belmont : Thomson Learning, Inc., 2004. 1418 s. ISBN 0-534-52020-0

⁹BREZINA, Ivan - IVANIČOVÁ, Zlatica - PEKÁR, Juraj. Operačná analýza. Bratislava : Jura Edition, 2007. 243 s. ISBN 978-80-8078-176-7

1.2 Programovací jazyk R

R je programovací jazyk pôvodne určený na štatistické výpočty a ich zobrazenie. Ide o GNU projekt (projekt hromadnej spolupráce), ktorý je veľmi podobný programovaciemu jazyku S vytvorenému v Bell laboratories. R môžeme považovať za odlišnú implementáciu programovacieho jazyka S.¹⁰ Jazyk R už v základe ponúka veľké množstvo funkcionality. Súčasťou inštalácie jazyka R sú balíky, ktoré ponúkajú rôzne nástroje pre prácu s dátami. Balíky sú súbory funkcií jazyka R, údajov a kompilovaného kódu v presne definovanom formáte, ktoré sú vytvorené s cieľom pridať konkrétnu funkčnosť.¹¹ Nakoľko programovací jazyk R je GNU (general public license) projekt, tieto balíky môžu byť voľne vytvárané užívateľmi a vývojármi. Po splnení určitých požiadaviek sú nahrané na repozitár CRAN (comprehensive R archive network), odkiaľ si tieto balíky môže užívateľ voľne stiahnuť. CRAN je sieť serverov, ktoré uchovávajú identické a aktuálne verzie balíkov a dokumentácie k nim.¹²

1.2.1 Riešenie úloh lineárneho programovania v jazyku R

Existuje mnoho dostupných riešiteľov úloh lineárneho programovania. Niektoré z týchto riešiteľov sú vstavané vo väčších programoch určených na riešenie optimalizačných problémov. Niektoré z nich sú napísané ako C – knižnice, ktoré možno zavolať príkazom. Mnohé z týchto knižníc sú implementované v balíkoch programovacieho jazyka R. Väčšina z týchto riešiteľov dokáže riešiť aj úlohy celočíselného lineárneho programovania či zmiešaného celočíselného lineárneho programovania. Títo riešitelia sú implementovaní v jazyku R ako funkcie. Parametre týchto funkcií zadávame ako matice alebo ako vektory.¹³ Medzi najznámejšie knižnice používané na riešenie úloh lineárneho programovania patria:

- Lp_solve,
- GLPK,
- SYMPHONY,
- Linprog,
- iné.

¹⁰<https://www.r-project.org/about.html>

¹¹<https://www.statmethods.net/interface/packages.html>

¹²<https://cran.r-project.org/>

¹³SALLAN, Jose M. - LORDAN, Oriol - FERNANDEZ, Vicenc. Modeling and Solving Linear Programming with R. Barcelona : OmniaScience, 2015. 108 s. ISBN 978-84-944229-3-5

1.2.2 *Lp_solve*

Lp_solve je MILP (mixed integer linear programming) riešiteľ pôvodne vytvorený Michaelom Berkelaarom z Eindhoven University of Technology. Postupne prešiel viacerými modifikáciami. Súčasne sa používa verzia lp_solve 5.5. Dokáže riešiť úlohy lineárneho programovania, celočíselného lineárneho programovania, ako aj úlohy zmiešaného celočíselného lineárneho programovania. Lp_solve je implementovaný do jazyka R cez knižnice lp_solve alebo lp_solveAPI. Algoritmus riešenia je založený na revidovanej symplexovej metóde pre riešenie úloh lineárneho programovania a na metóde vetiev a hraníc (Branch and Bound method) pre riešenie úloh celočíselného lineárneho programovania. Lp_solve nie je obmedzený veľkosťou modelu.¹⁴

¹⁴<http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>

2 Cieľ práce

Hlavným cieľom práce je praktická aplikácia úloh lineárneho programovania určených na optimalizáciu výrobného procesu, vzhľadom na ohraničenia vzácnych, mnohokrát ťažko dostupných materiálových či nemateriálových výrobných zdrojov v podniku fungujúcom v podmienkach trhových ekonomík a ich riešenia prostredníctvom programovacieho jazyka R.

Okrem dosiahnutia stanoveného hlavného cieľa budeme musieť dosiahnuť skupinu čiastkových cieľov. Jedným z čiastkových cieľov je získavanie údajov. Pre praktickú aplikáciu úlohy lineárneho programovania sme si vybrali spoločnosť Bomax Slovakia, s. r. o. Údaje potrebné pre spracovanie našej práce budeme získavať prostredníctvom konzultácií s pracovníkmi a konateľmi spoločnosti, no taktiež z technických výkresov a iných relevantných zdrojov poskytnutých spoločnosťou BOMAX Slovakia, s. r. o.

Ďalším cieľom bude poznanie spoločnosti ako systému, nakoľko každý podnik funguje ako systém väzieb s jeho okolím. Pre nami riešenú problematiku je dôležité poznať všetky vzťahy a väzby s obchodnými partnermi a zákazníkmi spoločnosti.

Na základe týchto poznatkov budeme formulovať úlohu lineárneho programovania, jednotlivé štruktúrne podmienky, no aj optimalizačné kritérium spoločnosti. Formulovanú úlohu budeme riešiť prostredníctvom programovacieho jazyka R. Pre podporu rozhodovacích procesov je potrebné výsledky riešenej úlohy dobre interpretovať a dať do súvisu s praxou. Nakoľko cieľom spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. je maximalizácia zisku, budeme analyzovať, aký výrobný program by spoločnosť mala zvoliť, aby zisk zo zapojenia výrobných zdrojov bol maximálny v prípade, ak budeme rešpektovať ohraničenia materiálových a nemateriálových výrobných zdrojov, no budeme analyzovať aj možné zmeny v disponibilnom množstve jednotlivých výrobných zdrojov a aký vplyv budú tieto zmeny predstavovať pre ziskovosť podniku.

3 Metodika práce a metody skúmania

3.1 Lineárne programovanie

Lineárne programovanie môžeme považovať ako súčasť vedného odboru aplikovanej matematiky, ktorá sa zaoberá riešením optimalizačných úloh určitého charakteru. Pomocou lineárneho programovania teda hľadáme najlepšie možné riešenie spomedzi všetkých prípustných riešení, pričom za prípustné riešenie môžeme považovať riešenie, ktoré splňa všetky štruktúrne ohraničenia. Úlohy lineárneho programovania sa skladajú z lineárnej účelovej funkcie, lineárnych štruktúrnych ohraničení a z rozhodovacích premenných. Pri lineárnom programovaní je teda dôležité poznamenať, že účelová funkcia, ako aj štruktúrne ohraničenia, musia byť v lineárnom tvare. V prípade, ak by sa vyskytovali v inom ako lineárnom tvare, vtedy hovoríme o úlohách nelineárneho programovania. Za otca lineárneho programovania možno považovať prof. Danziga, ktorý vynášiel simplexovú metódu. Od jej vynájdenia sa lineárne programovanie stáva čoraz populárnejšie a využíva sa v mnohých odvetviach nášho života.

3.1.1 Všeobecná formulácia úlohy lineárneho programovania

Ako sme už uviedli, každá úloha lineárneho programovania sa skladá z lineárnej účelovej funkcie, lineárnych štruktúrnych ohraničení a z rozhodovacích premenných. Každá formulácia úlohy lineárneho programovania by mala začínať definovaním relevantných rozhodovacích premenných. Tieto premenné sú nástrojom, pomocou ktorého sa dosahuje požadovaný cieľ.

V každej úlohe lineárneho programovania sa usilujeme o maximalizovanie alebo minimalizovanie funkcie zloženej z rozhodovacích premenných. Táto funkcia sa nazýva účelová funkcia (kriteriálna, ekonomická, cieľová, preferenčná funkcia). Pomocou jednej alebo viacerých účelových funkcií formulujeme cieľ, ktorý chceme dosiahnuť. Naším cieľom je maximalizácia alebo minimalizácia jej hodnoty. O maximalizačných úlohách hovoríme vtedy, ak naším cieľom je dosiahnuť čo najväčšiu hodnotu účelovej funkcie (maximalizácia zisku, objemu výroby, využitia kapacity, produktivity práce a pod.). Naopak, pri minimalizačných úlohách je naším cieľom dosiahnuť čo najnižšiu hodnotu účelovej funkcie (minimalizácia nákladov, výrobného času, odpadu a pod.). Samozrejmosťou je, že v oboch prípadoch je potrebné splňať dané štruktúrne ohraničenia. V prípade viacerých účelových funkcií hovoríme o úlohe viackriteriálnej

optimalizácie. Koeficienty rozhodovacích premenných v účelovej funkcii nazývame koeficienty účelovej funkcie. Tieto koeficienty vyjadrujú, akou mierou prispieva daná rozhodovacia premenná k hodnote účelovej funkcie.

Vo väčšine prípadov môžu rozhodujúce premenné nadobúdať iba určité hodnoty. Tieto ohraničenia vo forme rovností a nerovností nazývame štruktúrne podmienky (ohraničujúce, obmedzujúce podmienky). Koeficienty rozhodovacích premenných v štruktúrnych podmienkach sa nazývajú technologické koeficienty, pretože vo väčšine prípadov reflektujú technológiu výroby jednotlivých výrobkov. Hodnoty pravej strany jednotlivých štruktúrnych podmienok sa nazývajú koeficienty pravej strany a často vyjadrujú disponibilné množstvo jednotlivých zdrojov.

Ďalšie podmienky, ktorým by malo riešenie podliehať, sú podmienky nezápornosti, v prípade potreby aj rôzne dodatočné podmienky. Podmienky nezápornosti zabezpečujú nezápornosť rozhodovacích premenných. V prípade úloh reflektujúcich reálne ekonomické procesy sú tieto podmienky veľakrát nevyhnutné (napr. nemôžeme vyrábať záporné množstvo výrobkov alebo prepravovať záporné množstvá tovarov). V rámci dodatočných podmienok možno formulovať rôzne špeciálne požiadavky na strane výstupu. Ako príklad môžeme uviesť požiadavky na obmedzenosť odbytu, požiadavky na sortiment, požiadavky na výrobu minimálneho množstva výrobkov a podobne.

Z dôvodu všeobecnej formulácie úlohy lineárneho programovania je potrebné zaviesť nasledujúce označenia:

n – počet rozhodovacích premenných,

m – počet ohraničujúcich podmienok,

k – počet účelových funkcií,

x_j – rozhodovacie premenné $j = 1, 2, \dots, n$,

f_s – reálne funkcie premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, $s = 1, 2, \dots, k$,

ktoré opisujú ciele optimalizácie,

g_i – reálne funkcie premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, $i = 1, 2, \dots, m$,

ktoré opisujú ohraničujúce podmienky,

D_j – množiny tých hodnôt reálnych čísel, ktoré môžu nadobúda premenné x_j ,

$j = 1, 2, \dots, n$.¹⁵

¹⁵BREZINA, Ivan - IVANIČOVÁ, Zlatica - PEKÁR, Juraj. Operačná analýza. Bratislava : Jura Edition, 2007. 243 s. ISBN 978-80-8078-176-7

Tabuľka 1 – Schéma úlohy lineárneho programovania

Sledované ciele	$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\dots$ $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Účelové funkcie
Podmienky	$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ $\dots$ $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$	Štruktúrne podmienky rozhodnutia
Špeciálne podmienky pre premenné	$x_j \geq 0$	Podmienky nezápornosti
	$x_j \in D_j$	Dodatočné podmienky

15

Úlohu lineárneho programovania môžeme zapísať v nasledujúcom všeobecnom tvare: maximalizujeme, resp. minimalizujeme účelovú funkciu,

$$z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

pričom rešpektujeme štruktúrne ohraničenia

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a podmienky nezápornosti,

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

kde:

c_j – koeficienty účelovej funkcie, $j = 1, 2, \dots, n$,

a_{ij} – koeficienty sústavy ohraničení, $i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$,

b_i – koeficienty pravej strany, $i = 1, 2, \dots, m$,

x_j – rozhodovacie premenné, $j = 1, 2, \dots, n$.¹⁵

Výsledkom úlohy lineárneho programovania je optimálne riešenie, ktoré extremalizuje účelovú funkciu, pričom spĺňa všetky štruktúrne ohraničenia. Prípustné riešenie je každé riešenie, ktoré spĺňa všetky štruktúrne podmienky. V prípade, ak existuje aspoň jedna štruktúrna podmienka, ktorú riešenie nespĺňa, také riešenie považujeme za

neprípustné. Ak prípustné riešenia existujú, naším cieľom je nájsť také riešenie, ktoré najlepšie spĺňa nami formulovaný cieľ. Takéto riešenie nazývame optimálne riešenie. Vo väčšine prípadov existuje iba jedno najlepšie riešenie, aj keď existujú prípady, kedy viaceré riešenia vracajú rovnakú hodnotu účelovej funkcie. Takéto riešenia sa nazývajú alternatívne riešenia. Ďalšou možnosťou je, že úloha nemá žiadne optimálne riešenie. Takýto prípad nastane vtedy, ak neexistuje žiadne prípustné riešenie alebo existuje nekonečne veľa prípustných riešení.¹⁶

3.1.2 Dualita v úlohách lineárneho programovania

Jeden z najdôležitejších konceptov lineárneho programovania je koncept duality. Tento koncept nám hovorí o tom, že každá úloha lineárneho programovania je veľmi úzko spätá s inou úlohou lineárneho programovania, ktorú nazývame duálnou. Tento vzťah duálnej úlohy a jej pôvodnej úlohy (primárnej úlohy) je veľmi dôležitý a podáva nám veľmi užitočné informácie. Jedným z kľúčových využití teórie duality je interpretácia a implementácia citlivostnej analýzy. Ako sme už spomenuli vyššie, duálna úloha nám dáva veľmi dôležité informácie, ktoré sú prospešné pre podporu rozhodovacieho procesu.

Jedna z možných interpretácií duálnej úlohy znie: Predpokladajme, že podnik dostane ponuku od iného podniku na nákup výrobných zdrojov. Tu sa dostávajú do konfliktu záujmy oboch strán. Kupujúca firma sa usiluje minimalizovať svoje náklady, a preto chce nakúpiť zdroje za čo najnižšiu možnú cenu. Predávajúca firma sa naopak snaží maximalizovať zisk, preto sa bude usilovať predat' svoje zdroje aspoň za také ceny, aby dosiahla rovnaký zisk ako v prípade realizácie vlastného výrobného procesu. Duálne premenné (rozhodovacie premenné duálnej úlohy) nám teda dávajú informácie o tom, za aké ceny je pre predávajúci podnik výhodné svoje zdroje predat', aby dosiahol aspoň taký zisk, ako by dosiahol v prípade realizácie vlastnej produkcie a kupujúci podnik bol pritom ochotný takú cenu akceptovať. Duálne premenné sa v mnohých literatúrach označujú aj pod pojmom tieňové ceny.

¹⁶WINSTON, Wayne L. - GOLDBERG, Jeffrey B. Operations Research - Applications and Algorithms. 4. vyd. Belmont : Thomson Learning, Inc., 2004. 1418 s. ISBN 0-534-52020-0

Duálne premenné tiež vyjadrujú, ako sa zmení hodnota účelovej funkcie vplyvom zmeny koeficientov pravej strany. Možno ich teda definovať ako miery deficitnosti zdrojov.¹⁷

Každá úloha lineárneho programovania sa dá transformovať na jej duálnu úlohu. Je ale potrebné dodržiavať striktné pravidlá. Ak je primárna úloha maximalizačná, jej duálna úloha bude minimalizačná, čo platí aj naopak, teda ak bude primárna úloha minimalizačná, jej duálna úloha bude maximalizačná. Na zostrojenie duálnej úlohy využívame presne tie isté parametre ako pri primárnej úlohe, iba na iných miestach.

- Koeficienty účelovej funkcie primárnej úlohy sú koeficienty pravej strany duálnej úlohy.
- Koeficienty pravej strany primárnej úlohy sa transformujú do koeficientov účelovej funkcie duálnej úlohy.
- Matica technologických koeficientov primárnej úlohy je v duálnej úlohe transponovaná.¹⁸

Pravidlá pre formuláciu duálnej úlohy možno nájsť v knihe: Úvod do operačného výskumu I. (BREZINA, I. a kol. 2018)

Všeobecná formulácia duálnej úlohy k primárnej úlohe lineárneho programovania:

Primárna úloha

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad ^{17}$$

Duálna úloha

$$\min g(u) = \sum_{i=1}^m u_i b_i,$$

$$\sum_{i=1}^m u_i a_{ij} \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad ^{17}$$

Pre lepšie pochopenie duality si uvedieme základné vety o dualite. Majme vektor $\mathbf{x}$, ktorý predstavuje vektor prípustného riešenia primárnej maximalizačnej úlohy a majme vektor $\mathbf{u}$, ktorý predstavuje vektor prípustného riešenia duálnej minimalizačnej úlohy. Potom platí, že hodnota účelovej funkcie duálnej minimalizačnej úlohy bude vždy väčšia

¹⁷BREZINA, Ivan - PEKÁR, Juraj. Úvod do operačného výskumu I. Bratislava : Letra Edu, 2018. 170 s. ISBN 978-80-89962-17-4

¹⁸WINSTON, Wayne L. - GOLDBERG, Jeffrey B. Operations Research - Applications and Algorithms. 4. vyd. Belmont : Thomson Learning, Inc., 2004. 1418 s. ISBN 0-534-52020-0

alebo rovná hodnote účelovej funkcie primárnej maximalizačnej úlohy. Možno ju vyjadriť analytickým tvarom nasledovne:

$$c^T * x \leq u^T * b.$$

V prípade, že primárna úloha je minimalizačná a jej duálna úloha je maximalizačná, tak analogicky platí, že hodnota účelovej funkcie primárnej minimalizačnej úlohy bude vždy väčšia alebo rovná hodnote účelovej funkcie duálnej maximalizačnej úlohy. Platí modifikovaný vzťah:

$$c^T * x \geq u^T * b.$$

Táto veta je takisto známa pod pojmom tzv. slabá dualita.¹⁷

Majme vektor $\mathbf{x}^*$, ktorý predstavuje vektor prípustného riešenia primárnej úlohy a vektor $\mathbf{u}^*$, ktorý predstavuje vektor prípustného riešenia duálnej úlohy. Potom platí vzťah:

$$c^T * \mathbf{x}^* = (\mathbf{u}^*)^T * b.$$

Vektory $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{u}^*$ sú vektory optimálneho riešenia. Táto veta je známa aj pod pojmom tzv. silná dualita.¹⁷

Ak primárna úloha, ako aj jej duálna úloha majú prípustné riešenie, potom existujú vektory optimálneho riešenia $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{u}^*$ týchto úloh, pričom hodnoty ich účelových funkcií sa rovnajú. Ak aspoň jedna z dvojice duálnych úloh prípustné riešenie nemá, potom ani jedna z dvojice nemá optimálne riešenie.¹⁷

Veľký význam pre pochopenie ekonomickej podstaty duality má veta o komplementárnosti, ktorá znie: Majme vektor $\mathbf{x}^*$, ktorý predstavuje vektor optimálneho riešenia primárnej úlohy a vektor $\mathbf{u}^*$, ktorý predstavuje vektor optimálneho riešenia duálnej úlohy. Ak po dosadení vektora $\mathbf{x}^*$ do štruktúrnych podmienok primárnej úlohy sa i -tá nerovnica spĺňa ako ostrá,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i,$$

potom i -tá zložka vektora $\mathbf{u}^*$ sa rovná nule, teda $u_i^* = 0$. Taktiež, ak po dosadení vektory $\mathbf{u}^*$ do štruktúrnych podmienok duálnej úlohy sa j -tá nerovnica spĺňa ako ostrá,

$$\sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} > c_j,$$

potom j -tá zložka vektora $\mathbf{x}^*$ sa rovná nule, teda $x_j^* = 0$. Analogicky, ak i -tá zložka vektora duálnych premenných $\mathbf{u}^*$ je kladná, t. j. $u_i^* > 0$, potom zodpovedajúce ohraničenie primárnej úlohy sa spĺňa ako rovnosť, t. j.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i. \quad ^{17}$$

Ak j -tá zložka vektora primárnych premenných $\mathbf{x}^*$ je kladná, t. j. $x_j^* > 0$, potom zodpovedajúce ohraničenie duálnej úlohy sa spĺňa ako rovnosť, t. j.

$$\sum_{i=1}^m u_i^* a_{ij} = c_j. \quad ^{17}$$

3.2 Celočíselné lineárne programovanie

V prípade praktických aplikácií metód lineárneho programovania možno natrafiť na problém, kedy požadujeme, aby riešenie úlohy nadobúdalo iba hodnoty z množiny celých nezáporných čísel.

Tento problém možno riešiť metódou vetiev a hraníc (Branch and Bound Method). Ide o postoptimalizačný proces, ktorého náplňou je získavanie viacerých možných variant celočíselného riešenia a následne výber toho najlepšieho z hľadiska stanoveného optimalizačného kritéria.

3.3 Riešenie úloh lineárneho programovanie v jazyku R

Väčšina balíkov programovacieho jazyka R určených na riešenie úloh lineárneho programovania funguje ako funkcie, ktorých vstupné parametre sú nasledujúce:

- znaková premenná, ktorou určujeme, či je daná úloha maximalizačná alebo minimalizačná,
- vektor koeficientov účelovej funkcie,
- vektor koeficientov pravej strany,
- matica technologických koeficientov,
- vektor obsahujúci prislúchajúce znaky rovností a nerovností.¹⁹

¹⁹SALLAN, Jose M. - LORDAN, Oriol - FERNANDEZ, Vicenc. Modeling and Solving Linear Programming with R. Barcelona : OmniaScience, 2015. 108 s. ISBN 978-84-944229-3-5

3.3.1 lpSolve

V prípade riešiteľa lpSolve možno použiť aj iné parametre, ktoré ale pre nami riešenú problematiku nemajú opodstatnenie (v prípade celočíselného, zmiešaného programovania a podobne).

Funkcia balíka lpSolve má nasledujúci tvar.

$$lp(direction = „min“, objective.in, const.mat, const.dir, \\ const.rhs, compute.sens = TRUE)$$

Direction (v preklade smer) je znaková premenná, ktorou deklarujeme, či je naša úloha maximalizačná alebo minimalizačná. Môže nadobúdať dve hodnoty: “max” alebo “min”. Ide o reťazec znakov, ktorý je potrebné uvádzať v úvodzovkách.

Objective.in reprezentuje vektor koeficientov účelovej funkcie. V jazyku R deklarujeme vektor týmto spôsobom: c ($c_1, c_2, \dots, c_n$), kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ reprezentujú jednotlivé koeficienty účelovej funkcie.

Const.mat reprezentuje číselnú maticu technologických koeficientov. Každý riadok prislúcha jednému ohraničeniu a každý stĺpec prislúcha jednej premennej. V jazyku R definujeme maticu pomocou funkcie matrix, ktorej parametre sú:

- vektor dát, z ktorých maticu chceme vytvoriť,
- premenná nrow, ktorou udávame, koľko má matica obsahovať riadkov (počet stĺpcov nie je potrebné uvádzať, nakoľko funkcia si tento údaj vypočíta sama),
- premenná byrow, ktorou udávame, že je matica zadávaná po riadkoch, ak logický operátor = TRUE.

Pre lepšiu prezentáciu možno uviesť nasledujúcu maticu technologických koeficientov rozmeru 3×2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2},$$

ktorú v jazyku R deklarujeme: `matrix(c(2, 1, 2, 3, 3, 4), nrow = 3, byrow = TRUE)`.²⁰

²⁰<https://www.rdocumentation.org/packages/base/versions/3.6.2/topics/matrix>

Const.dir je vektor, ktorý obsahuje prislúchajúce znaky rovností a nerovností k jednotlivým štruktúrnym ohraničeniam. Podobne const.rhs reprezentuje číselný vektor koeficientov prevej strany.

Compute.sens je premenná, logický operátor, ktorý môže nadobúdať hodnoty TRUE alebo FALSE. Udávame ním, či chceme, aby nám funkcia vykonala analýzu citlivosti. V prípade, že analýzu citlivosti chceme, priradíme tejto premennej hodnotu TRUE.²¹

Balíček lpSolve je schopný taktiež riešiť úlohy celočíselného programovania. V prípade potreby celočíselného riešenie je možné na koniec uviesť príkaz all.int = TRUE. Premenná all.int je logický operátor primárne definovaný ako FALSE.²¹

²¹BERKELAAR, Michael. Interface to 'Lp_solve' v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs [elektronický zdroj]. 2020. 11 s. Dostupné na: <https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf>

4 Výsledky práce a diskusia

4.1 Charakteristika spoločnosti

Pre účely aplikácie metód operačnej analýzy sme si vybrali spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o., ktorá sa primárne zaoberá výrobou produktov určených na prácu s drevom, jeho ťažbou a spracovaním.

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. je malá rodinná firma so sídlom v obci Vrbovce, ktorá bola založená zápisom do obchodného registra dňa 8. 12. 2010. Nakoľko sa ide o pomerne malú firmu, jej organizačná štruktúra je veľmi jednoduchá. Spoločnosť vlastní manželia Malíkovci. Obaja sú rovnocenní spoločníci, ktorí sa podieľajú na fungovaní spoločnosti rovnakým dielom. Základné imanie spoločnosti je 5000 €, pričom každý z manželov Malíkovcov vlastní presnú polovicu, t. j. 2500 €. Obaja taktiež pôsobia ako konatelia spoločnosti. Za rok 2019 dosiahla firma BOMAX Slovakia, s. r. o. tržby vo výške 526 858 € a zisk vo výške 2662 €. ²² Spoločnosť zamestnáva 12 pracovníkov.

„Vďaka neustálym rozvíjaním a získavaním bohatých skúseností spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. v súčasnosti disponuje technológiami a kvalifikovaným tímom ľudí, čo je kľúčové pre výrobu výrobkov vysokej kvality. Aj napriek nestálosti trhu a vysokej konkurencii sa spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. stále rozrastá a upevňuje si svoju pozíciu nielen na Slovenskom trhu, ale vo väčšej miere hlavne na zahraničnom trhu, kde sa kladie vysoký dôraz na kvalitu prevedenia, funkčnosť a v neposlednom rade i vzhľad produktov.“ ²³ Dlhodobým cieľom podniku v podmienkach trhových ekonomík je maximalizácia zisku. Inak to nie je ani v prípade firmy BOMAX Slovakia, s. r. o. Jedným z možných spôsobov, ako tento cieľ dosiahnuť, je optimalizácia výrobných procesov.

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. sa zaoberá výrobou produktov určených na prácu s drevom, jeho ťažbou a spracovaním. Do jej portfólia patria drapáky rôznych výkonností a veľkostí, štiepacie kužele, kuželové štiepačky, rýchchloupínače, čelné nakladače rôznych vyhotovení a hydraulické navijaky. Firma BOMAX Slovakia, s. r. o. sa primárne zameriava na distribúciu svojich výrobkov do zahraničia, nakoľko disponuje viacerými komparatívnymi výhodami. Hlavnou komparatívnou výhodou je cena práce, čo sa v nemalej miere premietne do ceny výrobkov. Spoločnosť dokáže vyrobiť tieto výrobky

²² <https://finstat.sk/45916519>

²³ <http://www.bomaxslovakia.sk/sk/>

pri nižších nákladoch v porovnaní s krajinami, do ktorých exportuje, nakoľko sa tieto výrobky vyznačujú vysokou mierou prácnosti. Medzi krajiny distribúcie výrobkov patria Švédsko, Nemecko a v menšej miere aj Česko či Slovensko. Spoločnosť disponuje výrobnou halou s rozlohou 1200 m² a skladoom s kapacitou 99 m².

4.2 Získavanie údajov

Údaje potrebné na optimalizáciu výrobného procesu sme získavali dôkladným pozorovaním, meraním a zisťovaním. Pri získavaní dát sme čerpali z účtovnej závierky, technických výkresov, vnútropodnikovej databázy a exaktných odhadov konateľov, zamestnancov a technológov s dlhoročnými skúsenosťami v rámci strojárkej výroby. Všetky získané údaje dôkladne zobrazujú skutočné výrobné technológie spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o.

4.3 Charakteristika výrobného procesu

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. na výrobu svojich produktov používa výrobné zdroje prehľadne zaznamenané v tabuľke 2. Všetky množstvá udané v tabuľke sú uvedené za časovú jednotku jeden mesiac. Pre použitie časovej jednotky 1 mesiac sme sa rozhodli z dôvodu, pretože spoločnosť funguje na základe mesačných objednávok a využitie menších časových jednotiek by nemalo veľký význam. Spoločnosť taktiež nerealizuje veľké objemy produkcie a z dôvodu minimalizácie nákladov je pre podnik výhodnejšie nakupovať materiálne zdroje vo väčších množstvách a zriedkavejšie.

Tabuľka 2 – Výrobné zdroje podniku BOMAX Slovakia, s. r. o.

Zdroje	Operátor	Množstvo	Merná jednotka
Farba	≥	0	liter
Materiál z plazmy	≤	10000	kilogram
Hutný materiál	≥	0	kilogram
Hydraulický materiál	≤	700	kilogram
Spojovací materiál	≥	0	kilogram
Hydromotor	≥	10	ks
Zváranie	≤	480	hodina
Sústruženie	≤	320	hodina
Frézovanie	≤	320	hodina
Pieskovanie	≤	160	hodina
Lakovanie	≤	160	hodina
Montáž	≤	160	hodina
Finančné zdroje	≤	50000	euro

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Jedným zo základných materiálových zdrojov podniku je materiál z plazmy. Z tohto materiálu sa vyrába jadro takmer každého výrobku spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. Využíva sa na výrobu obalov a základných konštrukcií, na ktoré sa následne prichytávajú ďalšie komponenty. Podnik tieto výrobky obstaráva outsourcingom, nakoľko prevádzka plazmy predstavuje veľké priestorové požiadavky. Dodávateľ, ktorý zabezpečuje obrábanie materiálu plazmou, taktiež materiál ohýba. Ide o veľké železné platne hrúbky 3 až 15 milimetrov, z ktorých sa najskôr vyrežú požadované tvary a následne sa ohýbajú do požadovanej formy. Produkt v takejto podobe predstavuje hotový komponent pripravený na dlhšie obrábanie vo firme BOMAX Slovakia, s. r. o. Nakoľko dodávateľ disponuje iba obmedzenými kapacitami, je schopný dodávať tento materiál v maximálnom množstve 10 ton za mesiac.

Rovnako ako materiál z plazmy spoločnosť využíva na výrobu konštrukcií aj hutný materiál, no v nemalej miere je využitý aj na výrobu funkčných komponentov. Tento materiál je odoberaný od viacerých dodávateľov. Dodávatelia sú schopní dodávať také veľké množstvá tohto materiálu, že spoločnosť by ich svojimi disponibilnými výrobnými kapacitami nebola schopná využiť, preto môžeme považovať disponibilné množstvo tohto materiálu za neobmedzené.

Ďalším z kľúčových surovín podniku je hydraulický materiál. Do tohto materiálu zahŕňame všetky gumičky, hadice, puzdrá a manžety nevyhnutné na výrobu hydraulických piestov, ktoré si podnik vyrába sám a ktoré sú neskôr potrebné na výrobu hydraulických výrobkov. Spoločnosť je do značnej miery limitovaná dodávateľom hydraulického materiálu, nakoľko dokážte dodať za mesiac maximálne 700 kilogramov.

Pre potreby kompletizácie jednotlivých výrobkov spoločnosť používa spojovací materiál. Sem patria skrutky, matice, podložky, laná a mnohé ďalšie suroviny potrebné pre kompletizáciu a montáž produktov. Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. disponuje viacerými dodávateľmi tohto zdroja, a preto pre jej výrobný potenciál možno považovať disponibilné množstvo tohto materiálu za neobmedzené. Rovnako to je aj v prípade farieb, kde má spoločnosť viacerých dodávateľov, a preto taktiež považujeme disponibilné množstvo tejto suroviny za neobmedzené. Pri výrobe produktov je použitá rovnaká farba. Mení sa iba odtieň farby v závislosti od komponentu.

Ďalej spoločnosť využíva na výrobu niektorých výrobkov hydromotor. Ide o už hotový funkčný komponent, ktorý spoločnosť obstaráva od dodávateľa. Nakoľko ide

o značne špecifický komponent, dodávateľ vyžaduje minimálny nákup v počte kusov 10 hydromotorov.

Na výrobu produktov spoločnosť využíva aj nemateriálne výrobné zdroje, čím sú jednotlivé výrobné procesy. Disponibilné množstvo výrobných procesov je dané disponibilným množstvom pracovníkov ovládajúcich jednotlivé výrobné procesy. Prepočet disponibilného množstva týchto procesov je prehľadne uvedený v tabuľkách 3 a 4.

Tabuľka 3 – Mesačný disponibilný pracovný čas

Celkový počet pracovníkov v podniku (h)	10
Denný pracovný čas jedného pracovníka v podniku (h)	8
Denný pracovný čas všetkých pracovníkov v podniku (h)	80
Mesačný pracovný čas všetkých pracovníkov v podniku (h)	1600

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Tabuľka 4 – Disponibilné množstvo výrobných procesov

Proces	Pracovníci	Denný disponibilný pracovný čas (h)	Mesačný disponibilný čas (h)
Zváranie	3	24	480
Sústruženie	2	16	320
Frézovanie	2	16	320
Pieskovanie	1	8	160
Lakovanie	1	8	160
Montáž	1	8	160
Spolu	10	80	1600

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. zamestnáva 12 pracovníkov vrátane dvoch konateľov. Zvyšní desiatí pracovníci sú špecificky vyškolení na konkrétnu pracovnú činnosť, ktorú vykonávajú. Traja pracovníci vykonávajú zváranie, dvaja sústruženie, dvaja frézovanie, jeden pieskovanie, jeden lakovanie a jeden pracovník vykonáva montáž. V podniku sa pracuje na jednozmennej prevádzke, kde denný pracovný čas jedného pracovníka je 8 hodín. Spoločnosť teda disponuje 480 hodinami výrobného procesu zváranie, 320 hodinami výrobného procesu sústruženie, rovnako 320 hodinami výrobného procesu frézovanie a po 160 hodín z výrobných procesov pieskovanie, lakovanie a montáž. Je potrebné poznamenať, že výrobný proces lakovanie nezahŕňa schnutie a tvrdnutie farby.

V neposlednom rade je potrebné zvážiť aj finančné zdroje, ktoré môže podnik využiť na nákup jednotlivých výrobných zdrojov. V prípade absencie takéhoto ohraničenia by mohol vzniknúť problém pri optimalizácii výrobných procesov, nakoľko nie všetky výrobné technológie by firma mohla byť schopná realizovať vzhľadom na ich finančné

obmedzenia. Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. je schopná investovať do výroby produktov za mesiac najviac 50 000 €.

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. sa zaoberá výrobou drapákov, štiepacích kužeľov, kužeľových štiepačiek, rýchlopínačov, hydraulických navijakov a čelných nakladačov. Nakoľko spoločnosť vyrába viaceré výkonnostné vyhotovenia z každého druhu výrobku, rozhodli sme sa pre výber najpredávanejšieho variantu z každého druhu. Na výrobu výkonnejšieho variantu výrobku sa spotrebúvajú výrobné zdroje v približne rovnakom pomere, iba vo väčšom množstve.

Drapák je hydraulické zariadenie so zvierateľnými čelustami, pripojiteľné na bager, traktor alebo žeriav určené na uchopenie, dvíhanie a manipuláciu s ťažkými bremenami, no aj naberanie a premiestňovanie sypkých alebo drobných kusových materiálov. Na výrobu jedného drapáku pomocou technológií spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. je potrebné 0,49 litra farby, 52,65 kilogramov materiálu z plazmy, 12,15 kilogramov hutného materiálu, 14,09 kilogramov hydraulického materiálu a 1,62 kilogramov spojovacieho materiálu. Materiálové zdroje na výrobu drapáku sú prehľadne uvedené v tabuľke 5.

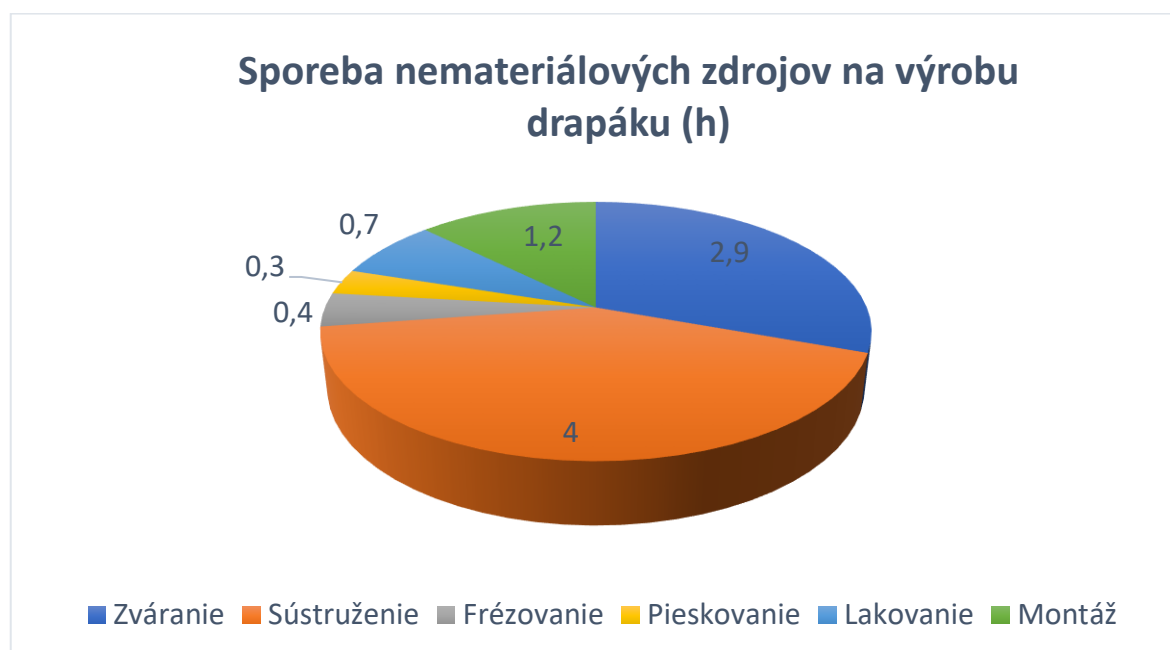
Tabuľka 5 – Spotreba materiálových zdrojov na výrobu drapáku

Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Farba	0,49	liter
Materiál z plazmy	52,65	kilogram
Hutný materiál	12,15	kilogram
Hydraulický materiál	14,09	kilogram
Spojovací materiál	1,62	kilogram

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Ide o výrobok, ktorý sa vyznačuje najväčšou prácnosťou zo všetkých výrobkov, ktoré spoločnosť vyrába. Celý výrobný proces tohto zariadenia trvá 14,3 hodiny, pričom z toho 2,9 hodín trvá proces zvarovania, 4 hodiny sústruženie, 0,4 hodiny frézovanie, 0,3 hodiny pieskovanie, 0,7 hodiny lakovanie a 1,2 hodiny montáž výrobku do konečnej podoby. Tieto nemateriálové zdroje prehľadne uvádzame v grafe 1. Z dôvodu uspokojenia odberateľov musí podnik vyprodukovať minimálne množstvo 45 kusov drapákov za mesiac. Náklady spojené s výrobou drapáku sú 413 €. Je ale potrebné poznamenať, že tieto náklady obsahujú iba priame variabilné náklady na výrobu daného výrobku. Zisk z predaja jedného drapáku je na úrovni 177 €.

Graf 1 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu drapáku



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Štiepací kužeľ je nástroj na štiepanie dreva, ktorý sa do dreva zaráva pomocou závitú. Čím viac sa zavíta, tým viac zväčšuje svoj priemer, a tým štiepe drevo. Ide o kužeľ s navítaným závitom. Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. spotrebúva na výrobu jedného štiepacieho kužeľa 25 kilogramov hutného materiálu, ktorý následne dôkladne obrába až po dosiahnutie požadovaného tvaru. Spotrebu materiálových zdrojov prehľadne uvádzame v tabuľke 6. Z nemateriálových zdrojov sa na výrobu jedného štiepacieho kužeľa spotrebúva 0,32 hodiny zvárania, 3 hodiny sústruženia a 0,32 hodiny frézovania. Tieto nemateriálové zdroje prehľadne uvádzame v grafe 2. Nakoľko nejde o výrobok vyznačujúci sa vysokým dopytom, maximálny odberateľský potenciál je 10 kusov za mesiac. V prípade výroby viacerých výrobkov tohto typu by mohol nastať problém s ich predajom. Priame variabilné náklady na výrobu jedného kusu štiepacieho kužeľa sú 270 € a zisk z jeho predaja je 80 €.

Tabuľka 6 – Spotreba materiálových zdrojov na výrobu štiepacieho kužeľa

Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Hutný materiál	25	kilogram

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Graf 2 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu štiepacieho kužela



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Kuželová štiepačka je zariadenie obsahujúce hydromotor (hydraulický motor), ktorý poháňa štiepací kužel. Kuželové štiepačky od spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. obsahujú štiepací kužel ako súčasť hotového výrobku. Na výrobu jednej kuželovej štiepačky spoločnosť spotrebúva 0,45 litra farby, 44,05 kilogramov materiálu z plazmy, 40 kilogramov hutného materiálu, 0,5 kilogramu spojovacieho materiálu a jeden hydromotor. Spotreba materiálových zdrojov na výrobu jednej kuželovej štiepačky je prehľadne uvedená v tabuľke 7.

Tabuľka 7 – Spotreba materiálových zdrojov na výrobu kuželovej štiepačky

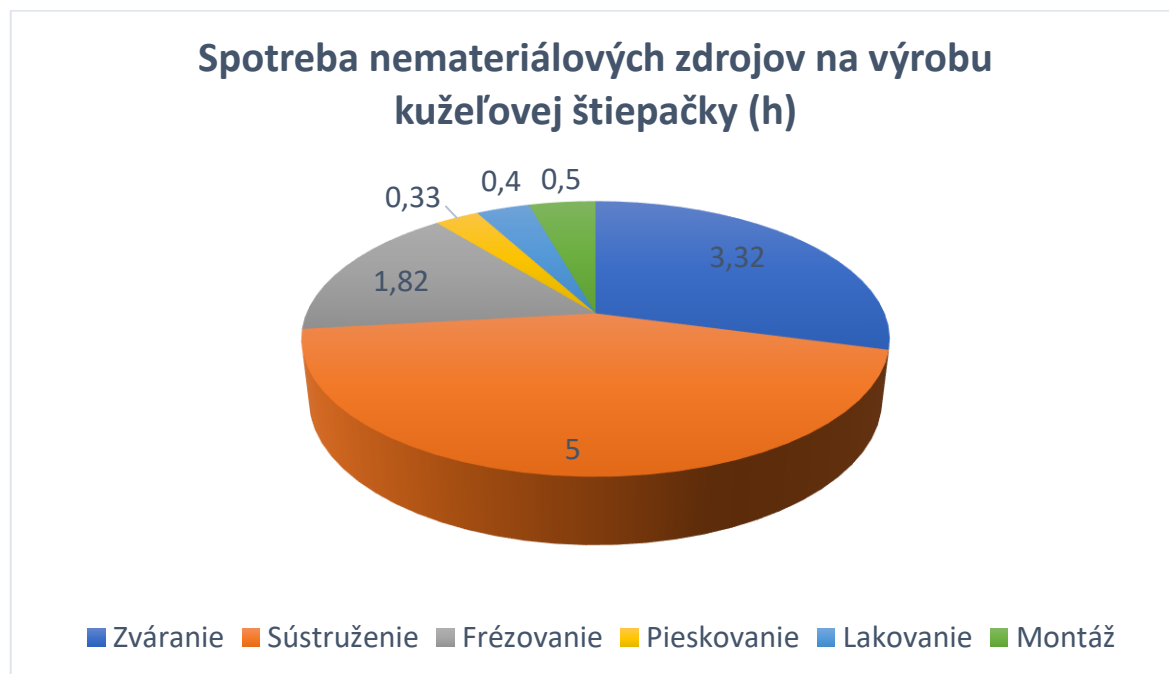
Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Farba	0,45	liter
Materiál z plazmy	44,05	kilogram
Hutný materiál	40	kilogram
Spojovací materiál	0,5	kilogram
Hydromotor	1	ks

Zdroj: vlastné spracovanie, podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Z nemateriálových zdrojov sa na výrobu kuželovej štiepačky spotrebúva 3,32 hodiny zvárania, 5 hodín sústruženia, 1,82 hodiny frézovania, 0,33 hodiny pieskovania, 0,4 hodiny lakovania a 0,5 hodiny trvá montáž a kompletizácia výrobku. Spotrebu nemateriálových zdrojov na výrobu kuželovej štiepačky prehľadne uvádzame v grafe 3. Spoločnosť musí každý mesiac dodať odberateľovi tento výrobok v množstve 6 kusov. Nakoľko ide

o výrobok, o ktorý zákazníci prejavujú vysoký záujem, problém s predajom nerobí ani realizácia väčšieho objemu produkcie tohto výrobku, a preto 6 kusov bude minimálne množstvo, ktoré spoločnosť vyrobí za mesiac. Priame variabilné náklady spojené s výrobou jednej kužeľovej štiepačky sú 1104 €, pričom zisk z predaja jedného kusu je 276 €.

Graf 3 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu kužeľovej štiepačky



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Čelný nakladač je zariadenie umožňujúce uchopiť na traktor, bager či iné kompatibilné vozidlo rôzne nástroje za účelom manipulácie s ťažkým bremenom. Na toto zariadenie je možné upínať iné zariadenia, ako napríklad drapák, hydraulický navijak a iné. Na výrobu jedného čelného nakladača spoločnosť spotrebúva 0,95 litra farby, 14 kilogramov materiálu z plazmy, 79,95 kilogramov hutného materiálu a 0,1 kilogramu spojovacieho materiálu. Spotrebu materiálových zdrojov potrebných na výrobu čelného nakladača prehľadne uvádzame v tabuľke 8. Z nemateriálových zdrojov sa na výrobu čelného nakladača spotrebúva 8 hodín zvárania, 0,3 hodiny sústruženia, 0,7 hodiny frézovania, 0,5 hodiny pieskovania, 0,55 hodiny lakovania a 0,1 hodiny trvá montáž a kompletizácia. Spotrebu nemateriálových zdrojov potrebných na výrobu čelného nakladača prehľadne uvádzame v grafe 4. Taktiež ide o výrobok vyznačujúci sa vysokým dopytom, preto minimálne vyrobené množstvo na uspokojenie odberateľov je 18 kusov za

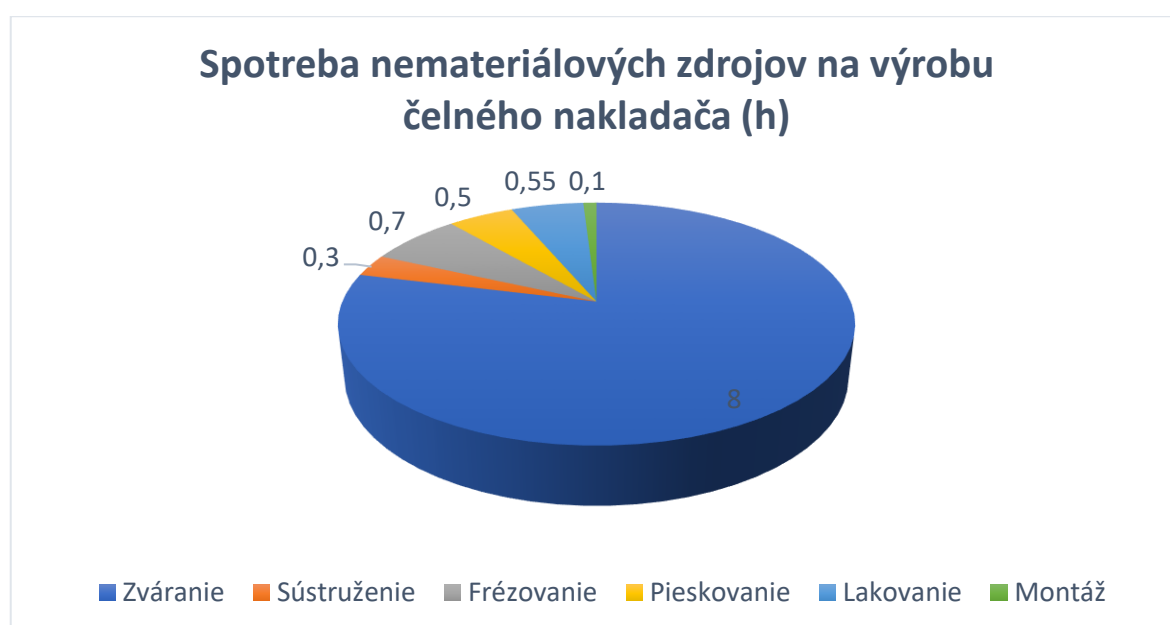
mesiac. Náklady spojené s výrobou tohto výrobku sú na úrovni 221,67 €, pričom zisk z predaja jedného kusu je 95 €.

Tabuľka 8 – Materiálové zdroje na výrobu čelného nakladača

Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Farba	0,95	liter
Materiál z plazmy	14	kilogram
Hutný materiál	79,95	kilogram
Spojovací materiál	0,1	kilogram

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Graf 4 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu čelného nakladača



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Hydraulický navijak je zariadenie poháňané hydraulickým motorom slúžiace na ťahanie ťažkých bremien. Na výrobu hydraulického navijaku sa spotrebúva 0,49 litra farby, 13,01 kilogramov materiálu z plazmy, 10 kilogramov hutného materiálu, 5,5 kilogramu spojovacieho materiálu a jeden hydromotor. Spotrebu materiálových zdrojov potrebných na výrobu hydraulického navijaku uvádzame v tabuľke 9. Z nemateriálových zdrojov sa pri výrobe hydraulického navijaku spotrebúva 3 hodiny zvárania, 0,5 hodiny sústruženia, 2 hodiny frézovania, 0,2 hodiny pieskovania, 0,5 hodiny lakovania a 0,7 hodiny trvá montáž a kompletizácia výrobku do konečného stavu. Spotrebu nemateriálových zdrojov potrebných na výrobu hydraulického navijaku prehľadne uvádzame v grafe 5. Pre uspokojenie dodávateľa musí spoločnosť vyrobiť tento výrobok v minimálnom množstve 16 kusov. Priame variabilné náklady spojené s výrobou

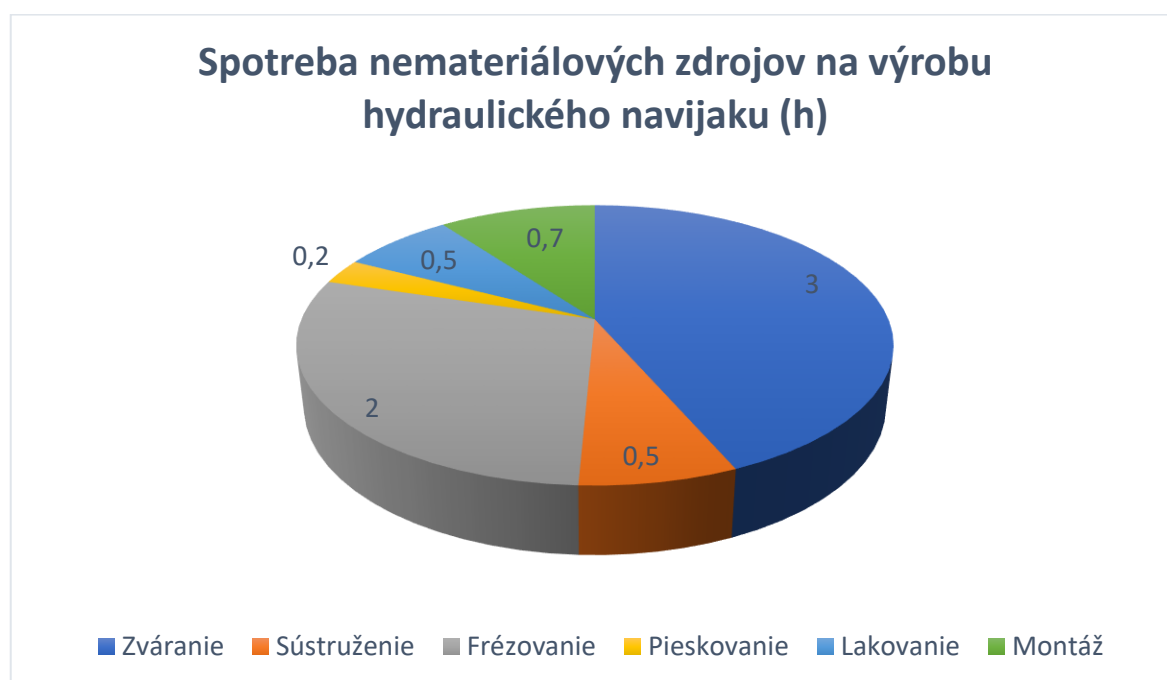
hydraulického navijaku sú vo výške 671,5 €, pričom zisk z predaja jedného kusu je na úrovni 118,5 €.

Tabuľka 9 – Spotreba materiálových zdrojov na výrobu hydraulického navijaku

Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Farba	0,49	liter
Materiál z plazmy	13,01	kilogram
Hutný materiál	10	kilogram
Spojovací materiál	5,5	kilogram
Hydromotor	1	ks

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Graf 5 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu hydraulického navijaku



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Rýchlopínač je jednoduchý nástroj určený na rýchle uchytanie rôznych druhov prídavných zariadení k rozmanitým typom stavebných a zemných strojov bez nutnosti použitia kľúčov. Na výrobu jedného kusa rýchlopínača spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. spotrebuje 0,5 litra farby, 15,5 kilogramu materiálu z plazmy a 2 kilogramy hutného materiálu. Spotrebu materiálových zdrojov využitých na výrobu rýchlopínača prehľadne uvádzame v tabuľke 10. Z nemateriálových zdrojov sa na výrobu rýchlopínača spotrebúvajú 2 hodiny zvárania, 0,25 hodiny sústruženia, 0,33 hodín frézovania, 0,25 hodín pieskovania a 0,32 hodín lakovania. Spotrebu nemateriálových zdrojov na výrobu rýchlopínača prehľadne uvádzame v grafe 6. Po nalakovaní je výrobok hotový

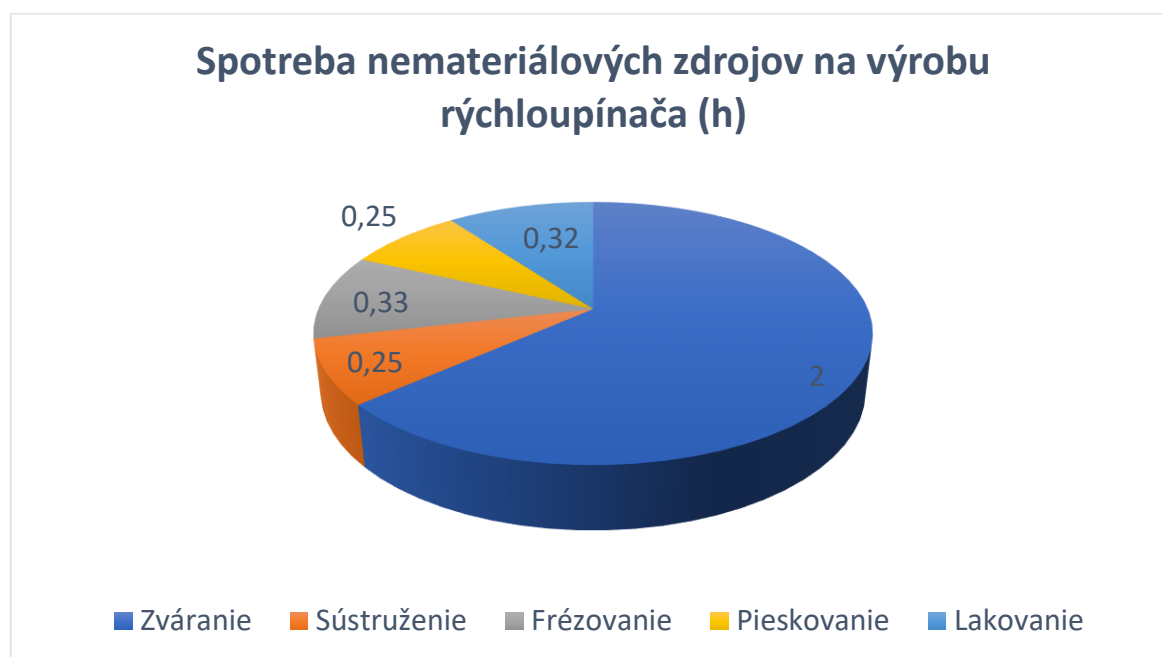
a pripravený na odovzdanie odberateľovi. Výroba tohto výrobku si nevyžaduje žiadnu montáž alebo kompletizáciu. Nakoľko ide o výrobok vyznačujúci sa pomerne nízkym dopytom, odberateľský potenciál pre spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o. je maximálny počet 6 kusov za mesiac. Náklady na výrobu jedného kusa rýchchloupínača tvoria 104,3 €, pričom zisk z jeho predaja je na úrovni 44,7 €.

Tabuľka 10 – Spotreba materiálových zdrojov na výrobu rýchchloupínača

Materiálové zdroje	Množstvo	Mená jednotka
Farba	0,5	liter
Materiál z plazmy	15,5	kilogram
Hutný materiál	2	kilogram

Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

Graf 6 – Spotreba nemateriálových zdrojov na výrobu rýchchloupínača



Zdroj: vlastné spracovanie podľa údajov firmy BOMAX Slovakia, s. r. o.

4.4 Optimalizácia výrobného procesu

4.4.1 Formulácia úlohy lineárneho programovania

Spoločnosť BOMAX Slovakia, s. r. o., ako každá správne fungujúca firma v podmienkach trhovými ekonomikami, sa usiluje o maximalizáciu zisku. Snaha o maximalizáciu zisku motivuje firmy čo najefektívnejšie využívať vzácne a mnohokrát finančne náročné zdroje, čím sa všeobecne zvyšuje blahobyt obyvateľstva. Naším

optimalizačným kritériom bude teda maximalizácia zisku. Budeme riešiť maximalizačnú úlohu lineárneho programovania, pričom účelová funkcia bude vyzerat':

$$\max z(x) = 177x_1 + 80x_2 + 276x_3 + 95x_4 + 118,5x_5 + 44,7x_6,$$

kde rozhodovacie premenné reprezentujú počty vyrobených produktov a koeficienty účelovej funkcie sú prislúchajúce zisky z predaja jednotlivých produktov, pričom musíme spĺňať nasledujúce štruktúrne podmienky.

$$0,49x_1 + 0,45x_3 + 0,95x_4 + 0,49x_5 + 0,5x_6 \geq 0 \quad (1)$$

$$52,65x_1 + 44,05x_3 + 14x_4 + 13,01x_5 + 15,5x_6 \leq 10000 \quad (2)$$

$$12,15x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 79,95x_4 + 10x_5 + 2x_6 \geq 0 \quad (3)$$

$$14,09x_1 \leq 700 \quad (4)$$

$$1,62x_1 + 0,5x_3 + 0,1x_4 + 5,5x_5 \geq 0 \quad (5)$$

$$1x_3 + 1x_5 \geq 10 \quad (6)$$

$$2,9x_1 + 0,32x_2 + 3,32x_3 + 8x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 480 \quad (7)$$

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,25x_6 \leq 320 \quad (8)$$

$$0,4x_1 + 0,32x_2 + 1,82x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 + 0,33x_6 \leq 320 \quad (9)$$

$$0,3x_1 + 0,33x_3 + 0,5x_4 + 0,2x_5 + 0,25x_6 \leq 160 \quad (10)$$

$$0,7x_1 + 0,4x_3 + 0,55x_4 + 0,5x_5 + 0,32x_6 \leq 160 \quad (11)$$

$$1,2x_1 + 0,5x_3 + 0,1x_4 + 0,7x_5 \leq 160 \quad (12)$$

$$413x_1 + 270x_2 + 1104x_3 + 221,67x_4 + 671,5x_5 + 104,3x_6 \leq 50000 \quad (13)$$

$$x_1 \geq 45 \quad (14)$$

$$x_2 \leq 10 \quad (15)$$

$$x_3 \geq 6 \quad (16)$$

$$x_4 \geq 18 \quad (17)$$

$$x_5 \geq 16 \quad (18)$$

$$x_6 \leq 6 \quad (19)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (20)$$

Technologické koeficienty štruktúrnych podmienok (1) až (6) nám reprezentujú jednotkové spotreby materiálových zdrojov, pričom koeficienty pravých strán pri týchto ohraničeníach nám udávajú disponibilné množstvá, respektíve minimálne využiteľné množstvá materiálových zdrojov.

Technologické koeficienty štruktúrnych podmienok (7) až (12) reprezentujú jednotkové spotreby nemateriálových zdrojov, pričom koeficienty pravých strán pri týchto ohraničeníach predstavujú disponibilné množstvá daných nemateriálových zdrojov.

Taktiež je nevyhnutné formulovať finančné ohraničenie, ktoré reprezentuje štruktúrna podmienka (13). Technologické koeficienty tohto ohraničenia nám hovoria o priamych variabilných nákladoch na produkciu jednotlivých výrobkov, pričom hodnota pravej strany reprezentuje maximálne možné množstvo finančných prostriedkov, ktoré môže firma investovať do produkcie svojich výrobkov.

Dodatočné podmienky (14) až (19) nám vyjadrujú odberateľský potenciál. Koeficienty pravej strany reprezentujú maximálne alebo minimálne množstvá prislúchajúcich výrobkov, ktoré firma bude vyrábať. Tieto ohraničenia nám zaručujú, aby spoločnosť nevyrábala nepredajné množstvá produkcie, respektíve, aby uspokojila minimálne požiadavky odberateľov.

Taktiež je veľmi dôležité, aby spoločnosť realizovala iba nezáporné množstvá produkcie. Spoločnosť totiž nemôže vyrábať záporné množstvá. Túto skutočnosť nám reprezentuje podmienka nezápornosti (20) pre všetky rozhodovacie premenné, ktorú uvládzeme ako poslednú.

4.4.2 *Riešenie úlohy lineárneho programovania v jazyku R*

Ako prvý krok pre riešenie úlohy lineárneho programovania je potrebné si nainštalovať balík, ktorý je schopný riešenia úlohy lineárneho programovania. My už máme daný balík nainštalovaný, preto môžeme preskočiť tento krok. Ďalej je potrebné daný balík načítať z knižnice. V našom prípade ide o balík lpSolve. Celá formuláciu úlohy lineárneho programovania v jazyku R je uvedená na obrázku 3.

Vstupné údaje pre formuláciu úlohy lineárneho programovania zadávame pomocou matic a vektorov. Vektor `f.obj` obsahuje koeficienty účelovej funkcie. Matica `f.con` obsahuje technologické koeficienty vrátane koeficientov dodatočných podmienok, pričom argument `nrow = 19` udáva, že matica bude mať 19 riadkov a argument `byrow = true` udáva, že maticu budeme zadávať po riadkoch. Počet stĺpcov matice si algoritmus dopočíta sám, a teda nemusíme ho zadávať explicitne. Pre sprehládnenie uvádzame v každom riadku technologické koeficienty prislúchajúce jednej štruktúrnej podmienke, resp. dodatočnej podmienke, t. j. počet riadkov matice technologických koeficientov sa rovná súčtu počtov štruktúrnych podmienok a dodatočných podmienok. Je veľmi dôležité

poznamenať, že podmienky nezápornosti nie je nevyhnutné zadávať, nakoľko lpSolve je predprogramovaný, aby považoval za prípustné riešenie iba riešenie z množiny nezáporných čísel. Vektor f.dir je vektor nerovností prislúchajúcich k jednotlivým štruktúrnym podmienkam. Vektor f.rhs je vektor obsahujúci koeficienty pravej strany prislúchajúcich k jednotlivým štruktúrnym podmienkam.

Obrázok 3 – Formulácia úlohy lineárneho programovania v jazyku R

```
library(lpSolve)
f.obj = c(177, 80, 276, 95, 118.5, 44.7)
f.con = matrix(c(0.49, 0, 0.45, 0.95, 0.49, 0.5,
                 52.65, 0, 44.05, 14, 13.01, 15.5,
                 12.15, 25, 40, 79.95, 10, 2,
                 14.09, 0, 0, 0, 0, 0,
                 1.62, 0, 0.5, 0.1, 5.5, 0,
                 0, 0, 1, 0, 1, 0,
                 2.9, 0.32, 3.32, 8, 3, 2,
                 4, 3, 5, 0.3, 0.5, 0.25,
                 0.4, 0.32, 1.82, 0.7, 2, 0.33,
                 0.3, 0, 0.33, 0.5, 0.2, 0.25,
                 0.7, 0, 0.4, 0.55, 0.5, 0.32,
                 1.2, 0, 0.5, 0.1, 0.7, 0,
                 413, 270, 1104, 221.67, 671.5, 104.3,
                 1, 0, 0, 0, 0, 0,
                 0, 1, 0, 0, 0, 0,
                 0, 0, 1, 0, 0, 0,
                 0, 0, 0, 1, 0, 0,
                 0, 0, 0, 0, 1, 0,
                 0, 0, 0, 0, 0, 1), nrow=19, byrow=TRUE)
f.dir = c(">=", "<=", ">=", "<=", ">=", ">=", "<=", "<=", "<=", "<=",
          "<=", "<=", "<=", ">=", "<=", ">=", ">=", ">=", "<=")
f.rhs = c(0, 10000, 0, 700, 0, 10, 480, 320, 320, 160,
          160, 160, 50000, 45, 10, 6, 18, 16, 6)

lp("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)
lp("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)$solution
lp("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs, compute.sens = TRUE)$duals
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Funkciu, ktorá rieši úlohu lineárneho programovania, voláme jednoduchým príkazom lp, kde jednotlivé argumenty zadávame v poradí, ako sú uvedené na obrázku 3. V našom prípade ide o maximalizačnú úlohu, preto ako prvý argument volíme "max". Ďalej nasledujú vstupné údaje vo forme matic a vektorov. Takto formulovaná funkcia nám vráti iba hodnotu účelovej funkcie pre optimálne riešenie. Ak chceme zistiť, aké je optimálne riešenie, musíme za funkciou vložiť príkaz \$solution. V prípade, ak chceme, aby algoritmus riešil aj citlivosťnú analýzu, je potrebné zadať argument compute.sens – TRUE. Následne za funkciu vložíme príkaz podľa požiadaviek, čo chceme, aby nám funkcia vrátila. V našom prípade chceme, aby funkcia vrátila hodnoty duálnych premenných, preto za funkciou uvádzame príkaz \$duals. Po formulácii úlohy lineárneho programovania stačí spustiť kód a funkcia nám vráti výstup, ktorý uvádzame na obrázku 4.

Obrázok 4 – Výstup z jazyka R

```
> library(lpSolve)
> f.obj = c(177, 80, 276, 95, 118.5, 44.7)
> f.con = matrix (c(0.49, 0, 0.45, 0.95, 0.49, 0.5,
+ 52.65, 0, 44.05, 14, 13.01, 15.5,
+ 12.15, 25, 40, 79.95, 10, 2,
+ 14.09, 0, 0, 0, 0, 0,
+ 1.62, 0, 0.5, 0.1, 5.5, 0,
+ 0, 0, 1, 0, 1, 0,
+ 2.9, 0.32, 3.32, 8, 3, 2,
+ 4, 3, 5, 0.3, 0.5, 0.25,
+ 0.4, 0.32, 1.82, 0.7, 2, 0.33,
+ 0.3, 0, 0.33, 0.5, 0.2, 0.25,
+ 0.7, 0, 0.4, 0.55, 0.5, 0.32,
+ 1.2, 0, 0.5, 0.1, 0.7, 0,
+ 413, 270, 1104, 221.67, 671.5, 104.3,
+ 1, 0, 0, 0, 0, 0,
+ 0, 1, 0, 0, 0, 0,
+ 0, 0, 1, 0, 0, 0,
+ 0, 0, 0, 1, 0, 0,
+ 0, 0, 0, 0, 1, 0,
+ 0, 0, 0, 0, 0, 1), nrow=19, byrow=TRUE)
> f.dir = c(">=", "<=", "<=", ">=", "<=", ">=", ">=", "<=", "<=",
+ "<=", "<=", "<=", ">=", ">=", ">=", ">=", "<=")
> f.rhs = c(0, 10000, 0, 700, 0, 10, 480, 320, 320, 160,
+ 160, 160, 50000, 45, 10, 6, 18, 16, 6)
>
> lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)
Success: the objective function is 16832.59
> lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)$solution
[1] 49.680625 10.000000 7.762002 30.869543 16.000000 6.000000
> lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs, compute.sens = TRUE)$duals
[1] 0.0000000 0.0000000 0.0000000 4.5990617 0.0000000 0.0000000 5.3975766 0.0000000
[9] 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.2337682 0.0000000 15.1553730 0.0000000
[17] 0.0000000 -54.6680474 9.5228280 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
[25] 0.0000000
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Na obrázku 4 možno vidieť výsledok riešenia úlohy lineárneho programovania. Hodnota účelovej funkcie je 16832,59 €, pričom optimálne riešenie úlohy je 49,680625 kusov výrobku x_1 , 10 kusov výrobku x_2 , 7,762002 kusov výrobku x_3 , 30,869543 kusov výrobku x_4 , 16 kusov výrobku x_5 a 6 kusov výrobku x_6 . V našom prípade bude teda vektor optimálneho riešenia vyzeráť:

$$HUF = 16832,59$$

$$x^* (49,680625; 10; 7,762002; 30,869543; 16; 6).$$

Pri získavaní tieňových cien lpSolve, ako prvé v poradí uvádza tieňové ceny jednotlivých ohraničení a následne tieňové ceny rozhodovacích premenných. Tieňové ceny ohraničení nám ponúkajú užitočné informácie. Nakoľko máme 19 ohraničení v našej úlohe lineárneho programovania, vektor duálnych cien ohraničení bude pozostávať z prvých 19 hodnôt výstupu duálnych cien, ktorý nám ponúka lpSolve. Z dôvodu uvádzania cien v eurách má zmysel zaokrúhliť jednotlivé duálne ceny na 2 desatinné miesta, t. j. na centy. Vektor duálnych cien bude teda vyzeráť:

$$u^* (0; 0; 0; 4,6; 0; 0; 5,4; 0; 0; 0; 0; 0; 0,23; 0; 15,16; 0; 0; -54,67; 9,52).$$

Pre potrebu interpretácie a analýzy výsledkov bude pre nás užitočné vedieť, koľko jednotlivých zdrojov spotrebujeme a koľko zdrojov nám zostáva nevyužitých, ak sa rozhodneme realizovať výrobný program, ktorý reprezentuje optimálne riešenie. V prípade použitia balíka lpSolve, ktorý nepodporuje výpis týchto údajov jednoduchým argumentom, je potrebné tieto údaje dopočítať a upraviť, čím dostaneme vektor doplnkových premenných. Využijeme na to jednoduchý súčin matice f.con a vektora optimálneho riešenia, čo reprezentujeme na obrázku 5.

Obrázok 5 – Výpočet vektora využitých zdrojov

```
f.used = f.con %*% lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)$solution
print(f.used)
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Po spustení príkazu získame výstup, ktorý prezentujeme na obrázku 6. Dostaneme tak vektor využitých zdrojov v prípade realizácie výrobného programu, ktorý reprezentuje vektor optimálneho riešenia.

Obrázok 6 – Výstup z výpočtu vektora využitých zdrojov

```
> f.used = f.con %*% lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)$solution
> print(f.used)
```

	[,1]
[1,]	68.002473
[2,]	3690.934681
[3,]	3804.119615
[4,]	700.000000
[5,]	175.450567
[6,]	23.762002
[7,]	480.000000
[8,]	286.293373
[9,]	92.787774
[10,]	37.600419
[11,]	64.779487
[12,]	77.784705
[13,]	50000.000000
[14,]	49.680625
[15,]	10.000000
[16,]	7.762002
[17,]	30.869543
[18,]	16.000000
[19,]	6.000000

Zdroj: vlastné spracovanie

Na to, aby sme dostali vektor doplnkových premenných, ktorý budeme označovať s*, musíme od vektora koeficientov pravej strany odrátať vektor využitých zdrojov a následne prvky tohto vektora trochu upraviť. Ak je znamienko nerovnosti pri ohraničení typu

menšie alebo rovné, príslušný prvok vektora doplnkových premenných vyjadruje, koľko daného zdroja je ešte nevyužitého. Naopak, v prípade, ak je znamienko nerovnosti pri ohraničení typu väčšie alebo rovné, potom príslušný prvok vektora doplnkových premenných vyjadruje, koľko z daného zdroja sme využili nad minimálnu stanovenú hranicu. V našom prípade, aby sme dostali hodnoty vektora doplnkových premenných s^* , stačí prenásobiť číslom -1 všetky prvky vektora (vektor, ktorý sme získali rozdielom vektora koeficientov pravej strany a vektora využitých zdrojov), ktoré sú menšie ako 0. Následne pre zjednodušenie interpretácie a analýzy získaných výsledkov prvých 13 prvkov zaokrúhlime na dve desatinné miesta. Pre výpočet sme v jazyku R použili pomerne jednoduchý cyklus s dvoma podmienkami. Celý postup uvádzame na obrázku 7.

Obrázok 7 – Výpočet vektora doplnkových premenných s^*

```
s = f.rhs - f.used
options(scipen=999)
i = 1
for (x in s) {
  if (x < 0){
    x = x*-1
  }
  x = round(x, 2)
  print(x)
  i = i+1
}
```

Zdroj: vlastné spracovanie

Vektor s^* bude teda vyzerat':

$s^*(68; 6309,07; 3804,12; 0; 175,45; 13,76; 0; 33,71; 227,21;$
 $122,4; 95,22; 82,22; 0; 4,68; 0; 1,76; 12,87; 0; 0)$

4.4.3 Získanie celočíselného riešenia

Z vektora optimálneho riešenia možno vidieť, že nám vyšlo neceločíselné riešenie. Nakoľko spoločnosť môže vyrábať iba celé kusy, jednotlivé prvky optimálneho riešenia musia pochádzať z množiny celých čísel. Je teda na mieste optimálne riešenie vhodným spôsobom upraviť. Tento problém možno riešiť zaokrúhľovaním, čo ale nemusí byť v súlade s teóriou optimálnosti. V prípade potreby presnejšieho výsledku je možné pre optimalizáciu použiť metódu vetiev a hraníc, ktorú balík lpSolve taktiež obsahuje. Stačí do funkcie pridať jednoduchý príkaz `all.int = TRUE`. Ide o postoptimalizačný proces, výsledkom čoho je celočíselné optimálne riešenie. Po aplikácii tejto metódy sme dostali uvedené riešenie.

$$\begin{aligned}
HUF &= 16745,5 \\
x^*(49, 10, 8, 31, 16, 5) \\
s^*(67,4; 6348,09; 3813,8; 9,59; 174,48; 14; 2,14; 35,45; 227,29; \\
&122,71; 95,85; 82,9; 93,73; 4; 0; 2; 13; 0; 1)
\end{aligned}$$

4.5 Interpretácia a analýza získaných výsledkov

Z hodnoty účelovej funkcie úlohy lineárneho programovania možno vidieť, že pri optimálnom využití výrobných zdrojov bude spoločnosť dosahovať zisk, a to vo výške 16832,59 €. V prípade optimálneho celočíselného riešenia je hodnota účelovej funkcie 16745,5 €, čo je v porovnaní s hodnotou účelovej funkcie neceločíselného riešenia o 87,09 € menej. Je ale potrebné poznamenať, že nejde o čistý zisk, nakoľko spoločnosť ešte musí uhradiť mnohé náklady, ktoré vstupujú do produkcie výrobkov nepriamo, ako napríklad nájom budov, náklady spojené s prevádzkou výrobných hál či náklady na prepravu surovín. Nakoľko interpretácia neceločíselného riešenia v kontexte praktickej aplikácie v spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. nedáva zmysel, budeme interpretovať hodnoty celočíselného riešenia. Realizovať sa bude výroba výrobku x_1 (drapák) v objeme 49 kusov, výroba výrobku x_2 (štiepací kužeľ) v objeme 10 kusov, výroba výrobku x_3 (kužeľová štiepačka) v objeme 8 kusov, výroba výrobku x_4 (čelný nakladač) v objeme 31 kusov, ďalej sa bude vyrábať výrobok x_5 (hydraulický navijak) v objeme 16 kusov a výrobok x_6 (rýchloupínač) v objeme 5 kusov.

Z hodnôt vektora doplnkových premenných možno vidieť, že pri realizácii výrobného programu, ktorý reprezentuje vektor optimálneho celočíselného riešenia, sa surovina s_1 (farba) využije v celkovom objeme 67,4 litrov. Suroviny s_2 (materiál z plazmy) zostane ešte nevyužitej 6348,09 kilogramov, vyčerpá sa teda iba 3651,91 kilogramov. Surovina s_3 (hutný materiál) sa spotrebuje v celkovom objeme 3813,8 kilogramov. Surovinu s_4 (hydraulický materiál) sa vyčerpá v objeme 690,41 kilogramov. Zostane teda ešte 9,59 kilogramov nevyužitých. Je potrebné uviesť, že nejde o nedostatkovú surovinu. Napriek tomu, že podniku ešte zostal nevyužitý tento zdroj, zostatkové množstvo nevystačí na zaradenie ďalšej jednotky produkcie do výrobného programu. Minimálne množstvo na zaradenie ďalšej jednotky produkcie (drapák) do výrobného programu je totiž 14,09 kilogramov. Vyplýva to z požiadavky celočíselného riešenia. Nemôžeme totiž zaradiť do výrobného programu necelý výrobok, keďže na celý výrobok sa spotrebuje minimálne 14,09 kilogramov suroviny s_4 . Surovina s_5 (spojovací materiál) sa spotrebuje v objeme

174,48 kilogramov a suroviny s_6 (hydromotor) sa spotrebuje o 14 kusov viac, ako je minimálne množstvo, ktoré spoločnosť môže objednať, teda celkovo sa ho spotrebuje 24 kusov.

Z nemateriálových zdrojov sa zdroj s_7 (zváranie) využije v celkovom množstve 477,86 hodín. Zostane nevyužitý iba v objeme 2,14 hodín. Zdroj s_8 (sústruženie) zostane nevyužitý v množstve 35,45 hodín. Zdroja s_9 (frézovanie) zostane ešte nevyužitého 227,29 hodín, z čoho vyplýva, že spoločnosť disponuje ešte veľkým množstvom nevyužitého zdroja frézovanie, nakoľko sa vo výrobnom programe využilo iba 92,71 hodín tohto zdroja. Zdroj s_{10} (pieskovanie) zostane nevyužitý v množstve 122,71 hodín, z čoho taktiež vyplýva, že spoločnosť disponuje veľkým množstvom nevyužitého zdroja pieskovanie. Spoločnosti zostane taktiež nevyužitý zdroj s_{11} (lakovanie) v množstve 95,82 hodín a zdroj s_{12} (montáž) v množstve 82,9 hodín.

Spoločnosť vyčerpá takmer všetky svoje finančné zdroje s_{13} na realizáciu optimálneho výrobného programu, a to v množstve 49906,27 €. Tento zdroj možno považovať za nedostatkový, nakoľko finančný zostatok nám neumožňuje zaradiť do výrobného programu ďalšiu jednotku produkcie žiadneho výrobku. Spoločnosti totiž síce zostane 93,73 € nevyužitých financií, no na rozšírenie výroby o ďalšiu jednotku by potrebovala minimálne 104,3 €, čo predstavujú náklady na výrobu najlacnejšieho výrobku.

Z posledných 6 hodnôt vektora s^* možno vidieť, že spoločnosť bude vyrábať o 4 výrobkov x_1 (drapák) viac, ako je minimálne množstvo na uspokojenie odberateľov. Výrobok x_2 (štiepací kužeľ) vyrobí v množstve 10 kusov, čo je maximálne možné množstvo tohto výrobku, aby sa spoločnosť vyhla problému s jeho predajom. Výrobku x_3 (kužeľová štiepačka) sa vyrobí o 2 kusy viac, ako je minimálne množstvo potrebné na uspokojenie odberateľov. Výrobku x_4 (čelný nakladač) sa vyrobí o 13 kusov viac, ako je minimálne množstvo potrebné na uspokojenie zákazníkov. Výrobok x_5 (hydraulický navijak) sa vyrobí v minimálnom možnom množstve potrebnom na uspokojenie dopytu, t. j. 16 kusov a výrobok x_6 (rýchloupínač) sa vyrobí v množstve 5 kusov, čo je o jeden menej ako maximálne možné množstvo vzhľadom na odberateľský potenciál.

Z vektora duálnych cien úlohy neceločíselného lineárneho programovania možno vidieť, že v prípade rozšírenia počtu dodávateľov suroviny s_4 (hydraulický materiál), nemateriálneho zdroja s_7 (zváranie) a finančných zdrojov s_{13} má spoločnosť potenciál rastu. Ide o nedostatkové zdroje a zvýšením ich disponibilného množstva môže spoločnosť

zvyšovať zisk. V prípade zvýšenia disponibilného množstva suroviny s_4 (hydraulický materiál) o jednu jednotku (kilogram) sa zvýši hodnota účelovej funkcie o 4,6 jednotiek (€). Ak firma zvýši disponibilné množstvo zdroja s_7 (zváranie) o jednu jednotku (hodina), hodnota účelovej funkcie sa zvýši o 5,4 jednotiek (€). Ďalej možno vidieť, že zvýšením disponibilného množstva finančných zdrojov s_{13} o jedno € sa nám zvýši hodnota účelovej funkcie o 0,23 €. Je potrebné poznamenať, že tak nemusí nevyhnutne nastať z dôvodu požiadavky celočíselného riešenia. Rozšírenie disponibilného zdroja o jednu jednotku totiž stále nemusí byť postačujúce na zaradenie ďalšej jednotky produkcie do výrobného programu. Napriek tomu majú duálne ceny pre nás veľkú vypovedaciu hodnotu. Hovoria nám o tom, kde má podnik potenciál rastu a na čo by sa mal zamerať v prípade, že by chcel rozširovať svoju výrobu.

Zvyšné hodnoty vektora duálnych cien nám podávajú veľmi dôležité informácie. Hovoria nám o tom, na aké výrobky by spoločnosť mala zamerať marketingové nástroje a podporiť ich predaj a taktiež výroby ktorých výrobkov by sa mala spoločnosť vzdať a zdroje využité na ich výrobu investovať do výrobkov, ktoré využitím daných zdrojov prinesú vyšší zisk. Vyjadrujú totiž o koľko by sa zvýšila, respektíve znížila, hodnota účelovej funkcie, ak by spoločnosť predala o jeden kus určitého výrobku viac, respektíve menej. Z vektora duálnych cien možno vidieť, že ak by spoločnosť zvýšila produkciu výrobku x_2 (štiepací kužeľ) o jeden kus, hodnota účelovej funkcie by sa zvýšila o 15,16 €. Hodnota účelovej funkcie by taktiež vzrástla zvýšením produkcie výrobku x_6 (rýchloupínač) o jeden kus, a to o 9,52 €. V prípade výrobku x_5 (hydraulický navijak) je to naopak. Zvýšením produkcie tohto výrobku by si spoločnosť dokonca uškodila. Vzhľadom na dané ohraničenia disponibilných zdrojov by bolo najlepšie pre spoločnosť znížiť produkciu tohto výrobku a ušetrené zdroje investovať do výroby iných výrobkov. Znížením produkcie výrobku x_5 o jeden kus sa teda hodnota účelovej funkcie zvýši o 54,67 €.

Záver

V súčasnosti je vstup novej firmy na trh pomerne jednoduchá záležitosť. Vďačíme za to aj známemu ekonómovi Adamovi Smithovi, ktorý už pred takmer tristo rokmi opísal základné črty trhovej ekonomiky, ako ju dnes poznáme. Tvrdil, že trhovú cenu je stanovená trhovým mechanizmom na základe pôsobenia ponuky a dopytu. Každý si sleduje svoj vlastný záujem, firmy sa usilujú maximalizovať svoj zisk a spotrebitelia zase nakúpiť za čo najnižšie ceny. Výsledkom pôsobenia trhového mechanizmu je teda trhovú cenu, ktorú samotná firma bez značnej konkurenčnej výhody nedokáže ovplyvňovať a je preto odsúdená túto trhovú cenu prijať. Slobodné podnikanie zaručuje jednoduchý vstup nových firiem na trh, a tým aj vysokú konkurenciu v jednotlivých odvetviach. Každá firma s výnimkou neziskových spoločností sa v podmienkach trhovej ekonomiky usiluje o maximalizáciu zisku. Zisk firiem možno považovať za jednu z hnacích síl ekonomiky. Nakoľko sú spoločnosti mnohokrát limitované a nútené prijať ceny stanovené trhovým mechanizmom, musia hľadať iné možnosti potenciálneho zvýšenia zisku. Vidina zisku motivuje firmy k technologickým pokrokom, inováciám a iným možnostiam, metódam či vedeckým prístupom umožňujúcim zvyšovať zisk, a tým nesporne aj k zvyšovaniu všeobecného blahobytu spoločnosti.

Cieľom našej práce bola praktická aplikácia jednej z metód operačnej analýzy, teda lineárneho programovania, umožňujúcej exaktným prístupom dospieť k optimalizácii výrobného procesu s cieľom maximalizácie zisku spoločnosti pôsobiacej v podmienkach trhovej ekonomiky. Vedomosti z tejto problematiky sme aplikovali v strojárskych spoločnosti BOMAX Slovakia, s. r. o. Spoločnosť doposiaľ nevyužila žiadne exaktné postupy optimalizácie výrobných procesov, čím sme našou analýzou mali možnosť prispieť k správne fungovaniu spoločnosti.

Rozhodli sme sa o optimalizáciu výrobných procesov najpredávanejších variantov z každého druhu výrobku, nakoľko firma vyrába viaceré výkonnostné varianty zo všetkých druhov. Ako štruktúrne podmienky sme stanovili materiálové, nemateriálové i finančné ohraničenia. Bolo taktiež potrebné uvažovať aj nad odberateľským potenciálom, aby sme sa vyhli produkcii takého množstva výrobkov, ktorých predaj by nebol vzhľadom na kúpyschopný dopyt realizovateľný. Formulovali sme teda úlohu lineárneho programovania so šiestimi rozhodovacími premennými a dvadsiatimi štruktúrnymi podmienkami, ktorú sme následne riešili pomocou programovacieho jazyka R. Konkrétne sme na riešenie

využili balík lpSolve, ktorý riešenie úloh lineárneho programovania umožňuje. Po vyriešení úlohy sme čelili problému, nakoľko spoločnosť dokáže vyrábať iba celé kusy výrobkov. Vhodné riešenie by teda pochádzalo z množiny celých nezáporných čísel. Problém sme nakoniec vyriešili aplikáciou metódy vetiev a hraníc, ktorá je v balíku lpSolve predprogramovaná. Nakoniec sme výsledky riešenia interpretovali a analyzovali.

Dospeli sme k záveru, že pri optimálnom využití výrobných zdrojov pri zohľadnení celočíselného riešenia bude spoločnosť dosahovať zisk vo výške 16745,5 €. Z pokročilej analýzy vyplýva, že spoločnosť má relatívne veľký potenciál dosahovať ešte väčší zisk. Manažment podniku by sa mal zamerať na získanie väčšieho množstva dodávateľov hydraulického materiálu, nakoľko patrí medzi nedostatkové zdroje. Ďalej by spoločnosť mala zvážiť rozšírenie výrobného procesu zvaranie, nakoľko taktiež ide o nedostatkový zdroj a jeho rozšírením by spoločnosť mohla zvýšiť svoj zisk. Medzi nedostatkové zdroje patrí taktiež disponibilné množstvo finančných prostriedkov určených na investovanie do výrobného procesu. Spoločnosť by mala svoje marketingové nástroje primárne zamerať na výrobky: štiepací kužel a rýchchloupínač, nakoľko zvýšením ich odberateľských potenciálov by mohla spoločnosť znásobiť svoj zisk. Na druhej strane by spoločnosť mala znížiť produkciu hydraulických navijakov, nakoľko ich náklady obetovanej príležitosti sú pomerne vysoké, z čoho vyplýva, že spoločnosť realizuje technológiu na výrobu hydraulického navijaku, ktorá nie je dostatočne efektívna vzhľadom na disponibilné množstvá výrobných zdrojov. Mala by preto znížiť produkciu tohto výrobku a ušetrené zdroje investovať do produkcie takých výrobkov, ktoré dokáže vyrábať efektívnejšie.

Zoznam použitej literatúry

Knižné zdroje

- [1] BREZINA, Ivan – IVANIČOVÁ, Zlatica – PEKÁR, Juraj. Operačná analýza. Bratislava : Jura Edition, 2007. 243 s. ISBN 978-80-8078-176-7.
- [2] BREZINA, Ivan – PEKÁR, Juraj. Úvod do operačného výskumu I. Bratislava : Letra Edu, 2018. 170 s. ISBN 978-80-89962-17-4.
- [3] HILLIER, Frederick S. – LIEBERMAN, Gerald J. Introduction to Operations Research. 9. vyd. New York : McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. 1047 s. ISBN 978-0-07-337629-5.
- [4] HRABLIK-CHOVANCOVÁ, Henrieta – SAKÁL, Peter. Operačná analýza : časť 1. Trnava : AlumniPress, 2011. 242 s. ISBN 978-80-8096-151-0.
- [5] HU, T. C. – KAHNG, Andrew B. Linear and Integer Programming Made Easy. Switzerland : Springer, 2016. 143 s. ISBN 978-3-319-23999-6.
- [6] MATOUŠEK, Jiří – GÄRTNER, Bernd. Understanding and Using Linear Programming. New York : Springer, 2007. 222 s. ISBN 978-3-540-30697-9.
- [7] SALLAN, Jose M. – LORDAN, Oriol – FERNANDEZ, Vicenc. Modeling and Solving Linear Programming with R. Barcelona : OmniaScience, 2015. 108 s. ISBN 978-84-944229-3-5.
- [8] WINSTON, Wayne L. – GOLDBERG, Jeffrey B. Operations Research - Applications and Algorithms. 4. vyd. Belmont : Thomson Learning, Inc., 2004. 1418 s. ISBN 0-534-52020-0.

Elektronické zdroje

- [9] ANDERSEN, Erling D. Linear optimization: Theory, methods, and extensions [elektronický zdroj]. 2010. 80 s. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/228791187_Linear_optimization_Theory_methods_and_extensions
- [10] BERKELAAR, Michael. Interface to 'Lp_solve' v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs [elektronický zdroj]. 2020. 11 s. Dostupné na: <https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf>

- [11] MÁČA, Jaromír – LEITNER Bohuš. Operačná analýza I : Deterministické metódy operačnej analýzy [elektronický zdroj]. 2002. 178 s. Dostupné na: http://fbiw.uniza.sk/ktvi/publikacie/09_operanal1_u_2002.html
- [12] Účtovné výkazy BOMAX Slovakia, s. r. o. Dostupné na: <https://finstat.sk/45916519>
- [13] <https://www.rdocumentation.org/packages/base/versions/3.6.2/topics/matrix>
- [14] <https://www.r-project.org/about.html>
- [15] <https://cran.r-project.org/>
- [16] https://hbctraining.github.io/Intro-to-R-flipped/lessons/04_introR_packages.html
- [17] <https://www.statmethods.net/interface/packages.html>
- [18] <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>
- [19] <http://www.bomaxslovakia.sk/sk/>