

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103006/B/2014/3712213339

**Úspešnosť pri skúške podmienená stupňom úrovne
vedomostí zo strednej školy**

Bakalárska práca

2014

Tomáš Čekaňák

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

**Úspešnosť pri skúške podmienená stupňom úrovne
vedomostí zo strednej školy**

Bakalárska práca

Študijný program: Manažérske rozhodovanie a informačné technológie

Študijný odbor: 6258 Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a aktuárstva

Vedúci záverečnej práce: RNDr. Anna Starečková, PhD.

Bratislava 2014

Tomáš Čekaňák

Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

Zadanie záverečnej práce

Meno a priezvisko študenta: Tomáš Čekaňák
Študijný program: Manažérske rozhodovanie a informačné technológie
(Jednoodborové štúdium, bakalársky I.st., denná forma)
Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii
Typ záverečnej práce: Bakalárska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: Slovenský

Názov: Úspešnosť pri skúške podmienená stupňom úrovne vedomostí zo strednej školy

Anotácia: Na vybranom súbore aplikovať poznatky z predmetu Teória pravdepodobnosti I

Vedúci: RNDr. Anna Starečková, PhD.
Katedra: KMA FHI – Katedra matematiky a aktuárstva FHI
Vedúci katedry: doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc.
Dátum zadania: 10.10.2013

Dátum schválenia: 10.10.2013 doc.RNDr. Jozef Fecenko, CSc.
vedúci katedry

Čestné vyhlásenie

**Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som
uviedol všetku použitú literatúru.**

Dátum: 6.5.2014

.....

Tomáš Čekaňák

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej bakalárskej práce RNDr. Anne Starečkovej, PhD. Za odbornú pomoc, vecné pripomienky pri písaní mojej práce a v neposlednom rade za prejavenu ochotu.

ABSTRAKT

ČEKAŇÁK, Tomáš: *Úspešnosť pri skúške podmienená stupňom úrovne vedomostí zo strednej školy*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra matematiky a aktuárstva. – Vedúci záverečnej práce: RNDr. Anna Starečková, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2014, 41s.

Cieľom bakalárskej práce je analyzovanie úspešnosti študentov pri skúške na vysokej škole podmienenej stredoškolským vzdelaním z rôznych uhlov pohľadu, kvantifikácia tejto úspešnosti pomocou poznatkov z teórie pravdepodobnosti. Práca je rozdelená do 3 kapitol. Obsahuje 5 grafov a 5 tabuliek. Prvá kapitola sa zameriava na definovanie základných pojmov, opisuje teóriu pravdepodobnosti, podmienenú pravdepodobnosť, a vzťahy medzi nimi. V druhej časti sa aplikujú metódy výpočtu podmienenej pravdepodobnosti na súbor zistených údajov o prospechu študentov. Definuje sa úspešnosť študentov podmienená stredoškolským vzdelaním z rôznych uhlov pohľadu. Záverečná kapitola sa zaoberá interpretáciou dosiahnutých výsledkov na vzorke študentov a hodnotí stredné školy z hľadiska prípravy študentov na vysokú školu. Práca ponúka spôsob analýzy údajov o úspešnosti študentov, ktorý by mohol pomôcť mladým ľuďom pri výbere školy.

Kľúčové slová: pravdepodobnosť, podmienená pravdepodobnosť, úspešnosť

ABSTRACT

ČEKANÁK, Tomáš: *Success rate at the exams determined by the level of knowledge gained at high school.* – University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of Mathematics. – Bachelor work tutor: RNDr. Anna Starečková, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2014, 41 Pages.

The goal of the bachelor thesis is to analyse the success rate at the exams at university determined by high school education from different points of perspective and quantification of success rate using knowledge of probability theory. The work is divided into 3 chapters. It contains 5 graphs and 5 charts. First chapter is focusing on defining the essential terms, describes the theory of probability, conditional probability and relations among them. In the second chapter the methods of calculating the conditional probability are applied on the set of student performance data. We are also dealing with definition of the success rate of students determined by high school education from different points of view. The final chapter is concerned with the interpretation of results obtained from the sample of students, we are evaluating high schools according to the preparation of their students for university education as well. The thesis offers a method for analysing student being successful at exams data, which could help young people in choosing universities for their next studies.

Key words: probability, conditional probability, success rate

Obsah

Úvod.....	9
1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí	9
1.1 <i>Teória pravdepodobnosti</i>	10
1.1.1 Základné pojmy.....	10
1.1.2 Klasická definícia pravdepodobnosti.....	12
1.1.3 Galileiho kocky	13
1.1.4 Axiomatická definícia pravdepodobnosti.....	14
1.2 <i>Podmienená pravdepodobnosť a nezávislosť náhodných javov</i>	15
1.2.1 Podmienená pravdepodobnosť	15
1.2.2 Podmienená pravdepodobnosť a axiomatická definícia	18
1.2.3 Nezávislosť náhodných javov	19
2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania	21
2.1 <i>Cieľ práce</i>	21
2.2 <i>Význam základného a stredného vzdelania</i>	21
2.3 <i>Základný súbor</i>	21
2.4 <i>Pozorované javy</i>	23
2.4.1 Úspešnosť podmienená typom strednej školy.....	23
2.4.2 Hodnotenie skúšky podmienené typom strednej školy	25
2.4.3 Úspešnosť podmienená dosiahnutým hodnotením zo strednej školy	27
2.4.4 Hodnotenie skúšky podmienené hodnotením zo strednej školy	29
3 Výsledky práce a diskusia	33
3.1 <i>Celková úspešnosť študentov</i>	33
3.2 <i>Vplyv typu strednej školy na úspech pri skúške</i>	33
3.3 <i>Vplyv typu strednej školy na výsledok skúšky</i>	34
3.4 <i>Vplyv stredoškolského prospechu na úspešnosť pri skúške</i>	35
3.5 <i>Hodnotenie skúšky podmienené hodnotením zo strednej školy</i>	36
Záver	40
Zoznam použitej literatúry	41

Úvod

„Škola si dala prácu, aby v žiakoch a skrze žiakov pripravila a napomáhala budúcnosti ľudskej spoločnosti.“¹

— Ján Kalinčiak

V dnešnej dobe je vzdelanie neoddeliteľnou súčasťou našich životov, predstavuje súhrn vedomostí nadobudnutých ľuďmi, od našich predkov až dodnes. Bez základného vzdelania sa človek v bežnom živote nezaobíde, čo len poukazuje na významnosť tohto faktora. Čím vyššiu úroveň vzdelania sme schopní získať, tým lepšie možnosti sa nám môžu v budúcnosti naskytnúť, preto by malo medzi hlavné priority mladých ľudí patriť nadobudnutie čo najlepšej úrovne vzdelania. Keďže od kvality a úrovne vzdelania plynie aj možnosť uplatnenia sa na trhu práce, finančné ohodnotenie a celková budúcnosť absolventov.

V dnešnej dobe kladie čoraz viac spoločností stále vyšší dôraz na kvalitu zamestnancov. Tento faktor totiž výrazne vplýva na efektivitu práce a celkovú konkurencieschopnosť podniku. Preto sú stále častejšie zaužívané rôzne typy školení a iných vzdelávacích programov pre zamestnancov, ktoré poskytujú neustále dopĺňanie potrebných informácií, tzv. celoživotné vzdelávanie.

Tak ako sa podniky zameriavajú na vzdelanie svojich zamestnancov, by sa mal taktiež štát zamerať na vzdelanie svojich občanov, a venovať mu značnú pozornosť. Naši študenti sú predsa budúci sudcovia, vedci, lekári a ľudia pracujúci v rôznych iných dôležitých profesiách. Preto by sme mali dbať na to, aby stupeň ich vzdelania, a celková efektívnosť nášho vzdelávacieho systému bola na čo najvyššej úrovni. Aby naši študenti mohli v budúcnosti prosperovať chodu ekonomiky v krajine, a zvyšovať jej konkurencieschopnosť na nadnárodnej úrovni. V tejto práci sa budem venovať práve hodnoteniu úspešnosti vzdelávacieho systému, konkrétne úspešnosti absolventov stredných škôl na vysokej škole.

¹ Kalinčiak Ján, [cit. 2014-26-3]. Dostupné na internete: <<http://azcitaty.cz/jan-kalinciak/34596/>>

² MACKEY Niloufer, [cit.2014-26-3]. Dostupné na internete:

1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

Pri porovnávaní úspešnosti žiakov s rôznym stupňom úrovne vedomostí zo strednej školy budeme využívať teóriu pravdepodobnosti, konkrétne podmienenú pravdepodobnosť. Základy teórie pravdepodobnosti boli položené už v 16. storočí, no táto problematika siaha až k vzniku prvých hazardných hier. Napríklad už okolo roku 2300 pred naším letopočtom vymysleli Číňania hazardnú hru podobnú dnešným kartám, avšak namiesto kartám z papiera používali hlinené doštičky, neskôr papyrus. Hracie karty také ako ich dnes poznáme vyrobili prvýkrát Francúzi v roku 1387, avšak najviac sa rozšírili až vďaka Gutenbergovej kníhtlači. Keďže hazard je o náhode, ľudia sa začali zaoberať problematikou náhody, a pravdepodobnosti nejakého javu. Avšak hlbšieho preskúmania tejto tematiky sa ujali až známi matematici.

1.1 Teória pravdepodobnosti

Je matematická disciplína, ktorá sa zaoberá skúmaním opakujúcich sa javov, na ktoré okrem známych faktorov vplývajú aj náhodné. Ako prvý priblížil základy tejto matematickej disciplíny v 16. storočí Gerolamo Cardano. Vo svojej knihe ("Book on Games of chance") opisuje systematické zaobchádzanie s pravdepodobnosťou, ktoré ilustruje napríklad hodom kockou, pretože tento pokus je možné ľubovoľne mnohokrát opakovať za rovnakých podmienok. Túto vlastnosť nazývame vlastnosť hromadnosti. Základným podnetom pre sústreďenie sa na pravdepodobnosť boli hazardné hry. Dokazuje to aj fakt, že neskôr, v 17. storočí sa začali venovať pravdepodobnosti aj matematici Blaise Pascal a Pierre de Fermat keď chceli vyriešiť problém spravodlivého rozdelenia banku medzi hráčov, ak musela byť séria hazardných hier ukončená predčasne³. Položili základy pre klasickú definíciu pravdepodobnosti, pričom využívali hlavne kombinatoriku.

Dnes je teória pravdepodobnosti uznávaná matematická disciplína, využívaná v rôznych sférach, či už v školstve, hudbe, fyzike, predpovediach počasia alebo hodnotení úspešnosti nového typu liečby v medicíne.²

1.1.1 Základné pojmy

V teórii pravdepodobnosti sa často stretáme s výrazmi pokus, náhodný pokus, náhodná udalosť. Pokus sa dá chápať ako uskutočnenie určitého súboru podmienok vplývajúcich na výsledok pokusu. Ak na pokus vplývajú aj iné faktory, ktorých účinok

² MACKEY Niloufer, [cit.2014-26-3]. Dostupné na internete:
<<http://homepages.wmich.edu/~mackey/Teaching/145/probHist.html>>

nevieme dopredu určiť, hovoríme o náhodnom pokuse. Udalosť, je každá situácia, ktorá môže nastať po uskutočnení náhodného pokusu.

Tieto udalosti sa dajú členiť na tri základné skupiny:

- Udalosti isté
- Udalosti nemožné
- Náhodné udalosti

Ako príklad by som uviedol veľmi jednoduchý, v praxi sa nachádzajúci výrobný proces. Zoberme si podnik, v ktorom stroje vyrábajú technické súčiastky. Ak stroj vyrobí napríklad 50 technických súčiastok, z toho 3 nepodarky a pritom sa v jednom balení nachádzajú 4 súčiastky, vieme definovať základné udalosti. Udalosť istá je tá, keď v balení po 4 kusy bude aspoň jeden nepoškodený výrobok. Udalosť nemožnú predstavuje situácia, ktorá nemôže nastať, za žiadnych podmienok. Touto udalosťou je situácia, keď sa v balení nachádzajú štyri nepodarky. Nakoľko stroj vyrobí iba 3 nepodarky, je nemožné, aby sa v balení nachádzal aj štvrtý. Udalosť náhodnú v tomto príklade predstavuje prípad, keď sa v balení po 4 kusy nachádzajú jeden, dva alebo tri nepodarky. Všetky tri spomínané prípady definujú udalosť náhodnú.

Množina všetkých navzájom rôznych výsledkov náhodného pokusu E_i sa nazýva základný priestor, označujeme $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ v prípade, že množina obsahuje konečný počet elementárnych udalostí. Tento priestor nám označuje jeden konkrétny pokus, ako určitý súbor nemeniacich sa podmienok vplyvujúcich na výsledok pokusu.

Aby sme mohli pokračovať, potrebujeme si definovať typy vzťahov medzi udalosťami v základnom priestore Ω .

- Udalosť A je podudalosťou udalosti B práve vtedy, ak z nastania udalosti A automaticky vyplýva nastanie udalosti B , značíme $A \subset B$.
- Ak poznáme dve udalosti, ktoré vždy nastanú súčasne, alebo nenastane ani jedna, hovoríme že sa rovnajú, značíme $A = B$. Taktiež pri nich platí, $A \subset B$, a $B \subset A$.
- Udalosti A a B sú opačné vtedy, ak jav A nastane práve vtedy keď nenastane jav B a opačne. Značíme ich $\bar{A} = B$.
- Ak nastane súčasne udalosť A aj B , tento jav C nazývame prienik udalostí A a B ; $C = A \cap B$. Ak súčasné nastanie dvoch udalostí nie je možné, hovoríme, že tieto udalosti sú disjunktné.

- Udalosť, keď nastane alebo jav A , alebo jav B nazývame zjednotenie. Ak je udalosť C je zjednotením udalostí A a B tento jav označujeme $C = A \cup B$.
- Udalosť, keď nastane jav B a súčasne nenastane jav A , voláme rozdiel udalostí $C = B \setminus A$, platí $C = \bar{A} \cap B$.
- Úplný systém disjunktých javov tvoria také javy, ktoré sú vždy po dvoch disjunkté, a ich zjednotenie tvorí základný priestor Ω .

Pre vysvetlenie si uvedieme príklady týchto vzťahov v praxi. Uvažujme, že na skúšku na vysokej škole môže byť pripustený iba ten žiak, ktorý úspešne zvládol zápočet. Ak si množinu študentov, ktorí zvládli zápočet označíme A , a množinu študentov, ktorí úspešne spravili skúšku B , potom B je podmnožinou množiny A , platí $B \subset A$, pretože ak študent úspešne absolvoval skúšku, automaticky z toho vyplýva aj udalosť A , že úspešne zvládol aj zápočet. Prienik týchto dvoch udalostí, to znamená množina študentov, ktorí úspešne absolvovali ako zápočet tak aj skúšku bude množina B , práve preto, lebo platí, že je podmnožinou množiny A . Ak platí $B \subset A$ potom $A \cap B = B$.

Dve udalosti sa rovnajú, ak nastanú súčasne, alebo nenastane ani jedna. Ak si označím A udalosť, kedy skúšku úspešne ukončí aspoň 60% študentov, udalosť B keď skúšku nespraví menší podiel študentov ako 40% a udalosť C ktorá predstavuje situáciu, kedy skúšku úspešne absolvuje menej ako 60% študentov. Potom platí, že udalosti A a B sa rovnajú $A = B$, a udalosti A a C sú opačné $\bar{A} = C$. Zjednotenie, je udalosť kedy nastane alebo jeden alebo druhý jav. Pri aplikácii na jav A a C je zjednotením základný priestor Ω . To vyplýva z fakt, že javy A a C sú opačné a tvoria úplný systém disjunktých javov. V tomto prípade platí $A \cup C = \Omega$.³

1.1.2 Klasická definícia pravdepodobnosti

Aby sme mohli prejsť k ďalšiemu kroku, potrebujeme tieto javy kvantitatívne ohodnotiť, čo znamená priradiť k nim hodnotu, ktorá vyčísluje istotu, respektíve neistotu, s akou daný jav nastane. Pravdepodobnosť nastania javu A zapíšeme ako $P(A)$, a pre jej hodnotu

platí:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Za predpokladu, že každý možný výsledok pokusu má rovnakú možnosť nastania a počet všetkých možných, navzájom rôznych elementárnych udalostí je n . Nech A je

³ G.HORÁKOVÁ-V.HUŤKA.: *Teória Pravdepodobnosti*.2010 s.13

udalosť, ktorá sa dá rozložiť na m elementárnych udalostí, potom pre pravdepodobnosť nastania tejto udalosti platí:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

V praxi si vieme ukázať využitie tejto definície na jednoduchom príklade, kde každý možný výsledok pokusu má rovnakú pravdepodobnosť nastania. Uvažujme balík 32 kariet, v ktorom sa nachádza každá karta len raz. Udalosť A si označme náhodný výber jednej konkrétnej karty, esa. Potom pravdepodobnosť nastania tejto udalosti vypočítame pomocou vzťahu (1) ako podiel počtu priaznivých elementárnych udalostí m a počtu všetkých možných navzájom rôznych udalostí n . Keďže v balíku hracích kariet sa nachádzajú štyri esá, počet priaznivých elementárnych udalostí pre náš pokus sa bude rovnať $m = 4$ a počet všetkých možných navzájom rôznych elementárnych udalostí sa bude rovnať počtu všetkých kariet v balíčku $n = 32$. Potom pravdepodobnosť nastania udalosti A , teda výberu esa pri náhodnom výbere jednej karty z balíčku sa bude rovnať $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

1.1.3 Galileiho kocky

Už v 16. Storočí patrila medzi najznámejšie hazardné hry aj *passe-dix* (prekročenie desiatky). V tejto hre sa hádzalo troma hracími kockami. Tieto kocky mali na svojich hranách čísla 1 až 6 a každý hráč hádzal všetkými troma kockami naraz. Víťazom bol ten hráč, ktorý hodil na hracích kockách súčet vyšší ako desať. Jeden hráč však odpozoroval, že súčtom 12 vyhrávajú hráči oveľa častejšie ako súčtom 11, a s touto otázkou šiel za Galileim, ktorého daná problematika zaujala, čo dokazuje aj fakt, že sa neskôr našiel jeho spis z roku 1718, ktorý obsahoval správnu odpoveď na túto otázku. Galilei problém vysvetľuje pomocou možných kombinácií hodnôt na kockách.

Síce platí, že súčet 11 vieme dosiahnuť rovnakým počtom kombinácií ako súčet 12

$$11 = 2 + 4 + 5 = 1 + 6 + 4 = 2 + 3 + 6 = 1 + 5 + 5 = 3 + 3 + 5 = 4 + 4 + 3$$

$$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5 = 3 + 3 + 6 = 2 + 5 + 5 = 4 + 4 + 4$$

Avšak v skutočnosti by sme sa nemali na tento problém pozerieť ako na kombinácie čísel na kockách, ale variácie týchto hodnôt, pretože ak hodíme na prvej kocke 1, na druhej 6 a na tretej 5, nie je to tá istá udalosť, ako keď hodíme na prvej kocke 1, na druhej 5 a na tretej 6. To znamená že na poradí týchto hodnôt záleží. Tým pádom vieme súčet 11

dosiahnuť nie len jednou kombináciou hodnôt 1, 5, 6 ale $3!=6$ variáciami hodnôt 1,5,6. Táto početnosť variácií však neplatí pri všetkých kombináciách hodnôt. Napríklad, ak medzi týmito hodnotami na hracích kockách vystupuje jedno číslo dvakrát, napríklad kombináciou hodnôt 3, 3, 6 vieme dosiahnuť súčet 12 iba 3 variáciami. A ak by sme na hracích kockách hodili hodnoty 4, 4, 4, vieme ich hodiť iba jedným spôsobom, preto je to len jedna možná variácia. Z toho vyplýva, že súčet 12 vieme dosiahnuť 25 variáciami, pretože poznáme tri kombinácie navzájom rôznych hodnôt, ktoré dávajú súčet 12, dve kombinácie, kde sú dve hodnoty rovnaké, a jednu kombináciu, kde sú všetky hodnoty rovnaké.

$$25 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1$$

Avšak súčet 11 vieme dosiahnuť troma kombináciami hodnôt navzájom rôznych a troma kombináciami hodnôt, kde sú dve z nich rovnaké, čiže poznáme 27 variácií.

$$27 = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3$$

Keďže súčet hodnôt na kockách 11 vieme uskutočniť väčším množstvom rozkladov ako súčet hodnôt 12 a počet všetkých možných iných variácií je rovnaký, na základe klasickej definície pravdepodobnosti a využitím vzťahu (1) môžeme povedať, že pravdepodobnosť hodenia súčtu hodnôt na hracích kockách 12 je potom menšia ako pravdepodobnosť hodenia súčtu 11, čo dokazuje častejší výskyt súčtu hodnôt 11 ako súčtu 12 a preto sa častejšie vyhrávalo súčtom 11.⁴

1.1.4 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Andrej Nikolajevič Kolmogorov bol významný ruský matematik, ktorý formuloval axiomatickú teóriu pravdepodobnosti. Zadefinoval tri základné axiomy, ktoré platia pre javy a ich pravdepodobnosť. Na základe týchto axióm vieme dokázať každé ďalšie tvrdenie v teórii pravdepodobnosti.

1. Každému javu A je priradená jeho pravdepodobnosť nezáporným číslom,

$$P(A) \geq 0$$

2. Pravdepodobnosť nastania udalosti Ω je udalosť istá, keďže základný priestor obsahuje všetky možné, navzájom rôzne výsledky pokusu.

⁴ Skotnická I.: Kocky sú hodené [cit. 1-4-2014] Dostupné na internete: <<http://math.ku.sk/tkacik/predmety/download/hm/prace/skotnicka.pdf>>

$$P(\Omega) = 1$$

3. Pravdepodobnosti viacerých javov vieme sčítať, ak sú všetky tieto javy navzájom disjunktné, to znamená, že nemôžu nastať spolu. Ak udalosti $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú navzájom disjunktné, potom pravdepodobnosť, že aspoň jedna z nich nastane môžeme vyčísliť súčtom ich pravdepodobností⁵:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

1.2 Podmienená pravdepodobnosť a nezávislosť náhodných javov

1.2.1 Podmienená pravdepodobnosť

Zakladateľom tejto teórie bol anglický štatistik Thomas Bayes, ktorý spresnil výpočet pravdepodobnosti nastania náhodnej udalosti, pričom je známy výskyt inej udalosti, ktorá môže túto pravdepodobnosť ovplyvniť. Inak povedané, pravdepodobnosť nastania udalosti A za predpokladu, že nastala udalosť B , praxi označujeme $P(A / B)$.

Môžeme to vysvetliť na príklade hracích kariet, ktorých je v balíčku 32. Udalosťou B označme náhodný výber kráľa, udalosťou A výber esa. Potom s využitím vzťahu (1) o klasickej definícii pravdepodobnosti vieme kvantifikovať pravdepodobnosť nastania týchto dvoch javov. Pravdepodobnosť že vyberieme kráľa je potom $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ a pravdepodobnosť náhodného výberu esa je tiež $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, pretože ako eso, tak aj kráľ sa v balíčku vyskytuje 4 krát. Ak však vyberáme dve karty a prvú vyberieme kráľa a nevrátíme ju späť do balíčku, pravdepodobnosť, že ako druhú kartu vyberieme eso sa zmení, keďže už v balíčku nebude 32 ale 31 kariet. Poznáme výskyt inej udalosti, ktorá pravdepodobnosť ovplyvní. Potom pravdepodobnosť výberu esa v druhom pokuse bude $P(A/B) = \frac{4}{31}$.

Táto pravdepodobnosť, že z balíčku vyberieme eso, za predpokladu, že vyberieme kráľa sa rovná $P(A/B) = \frac{4}{31}$, nazývame ju podmienená pravdepodobnosť, udalosť A/B nazývame podmienenou udalosťou.

Spôsob vypočítania sa dá jednoducho zovšeobecniť. Uvažujme množinu Ω obsahujúcu n elementárnych javov, ďalej udalosť A obsahujúcu k a udalosť B obsahujúcu l elementárnych javov. Taktiež udalosť prieniku $A \cap B$ obsahujúcu m elementárnych

⁵ G.HORÁKOVÁ-V.HUŤKA, *Teória pravdepodobnosti* 2010 s.16-30

udalostí. Potom pravdepodobnosť nastania udalosti B za predpokladu A vieme vyjadriť podľa klasickej definície pravdepodobnosti, použitím vzťahu (1):

$$P(A/B) = \frac{m}{l} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{l}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vo všeobecnosti platí, že pravdepodobnosť udalosti A za predpokladu nastania udalosti B , sa rovná

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2)$$

V prípade pravdepodobnosti udalosti B za predpokladu nastania udalosti A

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Z čoho vieme odvodiť aj vzťahy pre násobenie podmienených pravdepodobností

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (3)$$

Ak uvažujeme študentov v ročníku, ktorí majú za sebou skúšku z matematiky, z ktorých 20% skúšku neurobilo, a zvyšných 80% skúšku spravilo, z nich 30% ovládali problematiku výborne, teda na A . Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný študent bol ohodnotený touto známkou, teda A ?

Pri riešení tohto problému si ako prvý krok potrebujeme označiť udalosti, ktorých pravdepodobnosť poznáme. Označme A udalosť, keď vyberieme náhodne študenta, ktorý bol ohodnotený výborne. Udalosť B náhodný výber študenta, ktorý skúškou prešiel, bez ohľadu na známku. Z údajov, ktoré poznáme vieme, že $P(B) = 0,8$ a $P(A/B) = 0,3$ a našou úlohou je určiť $P(A)$. Keďže množina študentov, ktorí spravili skúšku výborne, je podmnožinou skupiny žiakov, ktorí skúškou prešli, potom platí $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$. Potom použitím týchto vzťahov (3) pre násobenie pravdepodobností môžeme odvodiť $P(A)$.

$$P(A) = P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$$

Po dosadení do vzorcov sme dostali odpoveď na otázku, aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný študent bol ohodnotený známkou A , teda $P(A) = 0,24$.

Pomocou týchto vzťahov (3) o násobení pravdepodobností vieme pomocou súčinnu vyjadriť prienik dvoch udalostí. Ak však potrebujeme vyjadriť prienik viacerých ako dvoch udalostí, potrebujeme tieto vzťahy zovšeobecniť pre n udalostí, z čoho budeme vedieť vyčísliť prienik n javov. Vo všeobecnosti platí:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots A_{n-1}) \quad (4)$$

Pre tento vzťah môžeme nájsť využitie v rôznych prípadoch. Nech máme v ročníku 100 študentov, ktorí absolvovali počas semestra predmet informatika, z ktorého mali prednášky, zápočet v riadnom a opravnom termíne, a taktiež skúška v riadnom a opravnom termíne z toho predmetu. O študentoch vieme, že iba polovica z nich mala 100%-tnú účasť na prednáškach, ďalej vieme, že len polovica z týchto študentov úspešne absolvovala zápočet v riadnom termíne. Spomedzi 100 študentov sa našlo len 20 poctivých ktorí chodili na všetky prednášky, urobili zápočet v riadnom termíne a skúšku taktiež na prvýkrát. Aká je pravdepodobnosť, že študent spraví skúšku v riadnom termíne ak chodil na všetky prednášky a zápočet úspešne absolvoval v riadnom termíne?

Pri riešení tohto problému si najprv označíme udalosti, A predstavuje študent so 100%-tnou dochádzkou, B označíme každého študenta, ktorý úspešne absolvoval zápočet v riadnom termíne a jav C hovorí o študentoch, ktorí boli úspešní na skúške v riadnom termíne. Keďže polovica zo študentov chodila na všetky prednášky, potom $P(A) = 0,5$. Vieme, že polovica z týchto študentov absolvovala zápočet v riadnom termíne, čiže $P(B/A) = 0,5$. Keďže iba 20 študentov chodilo na všetky prednášky a boli úspešní na riadnom termíne aj pri zápočte aj skúške, potom $P(A \cap B \cap C) = \frac{20}{100} = 0,2$. Pravdepodobnosť, že študent spraví skúšku na prvý krát, za predpokladu že bol na všetkých prednáškach a bol úspešný na riadnom termíne zo zápočtu nám predstavuje $P(C/A \cap B)$. Po upravení vzťahu (4) pre náš príklad dostaneme:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

Po dosadení:

$$0,2 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot P(C/A \cap B) \quad 0,2 = 0,25 \cdot P(C/A \cap B) \quad P(C/A \cap B) = 0,8$$

Pravdepodobnosť, že študent bude úspešný na prvom termíne skúšky, za predpokladu, že celý semester navštevoval poctivo prednášky a úspešne absolvoval zápočet v riadnom termíne je vyjadrená ako $P(C/A \cap B) = 0,8$ alebo 80%, čo vypovedá o dôležitosti navštevovania prednášok.

1.2.2 Podmienená pravdepodobnosť a axiomatická definícia

Aj podmienená pravdepodobnosť podlieha pravidlám axiomatickej definície pravdepodobnosti. Splnenie všetkých troch axiém vieme matematicky dokázať.

1. Každému javu je priradená pravdepodobnosť nezáporným číslom. Predpokladajme javy A, B , podľa predpokladu $P(A) \geq 0$, $P(B) \geq 0$, potom aj $P(A \cap B) \geq 0$, na základe týchto predpokladov s použitím vo vzťahu (2) vidíme, že aj čitateľ aj menovateľ sú nezáporné čísla, preto aj $P(A/B)$ bude nadobúdať nezáporné hodnoty. Vidíme, že podmienená pravdepodobnosť spĺňa prvú podmienku axiomatickej definície pravdepodobnosti

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0.$$

2. Pravdepodobnosť nastania udalosti istej Ω je vždy 1, $P(\Omega) = 1$. Túto podmienku overíme tak, že si zvolíme namiesto udalosti A jav istý, a odpovedáme na otázku, aká je pravdepodobnosť nastania javu istého za predpokladu nastania udalosti B ?

$$P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Keďže Ω je množina všetkých možných navzájom rôznych javov, patrí do nej aj jav B , hovoríme že je jeho podmnožinou, a preto ich prienik sa rovná javu B , $\Omega \cap B = B$. Táto skutočnosť nám potvrdzuje, že podmienená pravdepodobnosť spĺňa aj druhú podmienku axiomatickej definície pravdepodobnosti.

3. Pravdepodobnosť, že nastane aspoň jedna z množiny disjunktných udalostí, sa rovná súčtu ich pravdepodobností. Nech $A_1, A_2, \dots$ je ľubovoľná postupnosť navzájom nezlučiteľných, disjunktných udalostí, potom:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/B\right) &= \frac{P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i/B) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť nastania aspoň jednej z množiny navzájom disjunktných

podmienенých pravdepodobností sa dá vyčísliť súčtom týchto podmienенých pravdepodobností, čo nám potvrdzuje platnosť tretej podmienky axiomatickej definície pravdepodobnosti v podmienenej pravdepodobnosti.⁶

1.2.3 *Nezávislosť náhodných javov*

Dve udalosti sú navzájom nezávislé vtedy, ak nastanie udalosti A nezávisí od nastania udalosti B a naopak. Tento pojem je dôležité si osvojiť, kvôli jeho využitiu pri zisťovaní, ktoré javy vplývajú napríklad na úspešnosť študenta, alebo sú úplne nezávislé. Pre nezávislé udalosti A a B platí vzťah:

$$P(A/B) = P(A)P(B/A) = P(B) \quad (5)$$

Ak je udalosť A nezávislá od udalosti B , potom aj udalosť B je nezávislá od udalosti A , preto tento vzťah platí aj opačne. Pomocou vzťahu (2) pre výpočet podmienenej pravdepodobnosti, vzťahu (5) pre nezávislé udalosti a vzťahu (3) pre násobenie pravdepodobností, vieme odvodiť vzťah o súčine pravdepodobností nezávislých javov. Tento vzťah dostaneme po dosadení vzťahu (5) do vzťahu (3).

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (6)$$

Po spätnom dosadení do vzťahu (2) vidíme, že tieto vzťahy platia a udalosti sú teda nezávislé.⁷

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Využitie vzťahov pre nezávislosť náhodných javov môžeme ukázať na príklade, keď uvažujeme pravdepodobnosť, že žiak študujúci na vysokej škole absolvoval maturitu z anglického jazyka je 0,6 a pravdepodobnosť, že v prvom ročníku na vysokej škole úspešne zvládol kurz z anglického jazyka je 0,8. Absolvovanie maturity z anglického jazyka si označme udalosťou A , kurz anglického jazyka na vysokej škole udalosťou B , potom $P(A) = 0,6$ a $P(B) = 0,8$. Ak uvažujeme pravdepodobnosť, že študent úspešne zvládol vysokoškolský kurz z angličtiny za predpokladu, že maturoval z tohto jazyka je 0,8 potom $P(B/A) = 0,8$. Úlohou je vypočítať pravdepodobnosť, že študent zvládol maturitu z anglického jazyka a zároveň vysokoškolský kurz z tohto jazyka, čiže pravdepodobnosť

⁶ KOZUBÍK Aleš, *Podmienенá pravdepodobnosť* [cit.4-4-2014]. Dostupné na internete: <<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/alesko/PaS/>>

⁷ L.BENKO a kol., *Matematika pre ekonómov* 2. 1986 s.337-343

prieniku týchto dvoch udalostí $P(A \cap B)$. S využitím a dosadením hodnôt $P(B/A)$ a $P(B)$ do vzťahu (5) o nezávislosti náhodných udalostí dostaneme:

$$P(B/A) = P(B) = 0,8$$

Z čoho vyplýva nezávislosť týchto dvoch javov A a B . V tomto prípade používame pre výpočet prieniku vzťah (6) pre súčin pravdepodobností nezávislých javov:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$$

Vypočítali sme pravdepodobnosť náhodného výberu študenta, ktorý má absolvovanú maturitu z anglického jazyka a taktiež kurz anglického jazyka na vysokej škole.

V prípade, že pravdepodobnosť úspešného zvládnutia vysokoškolského kurzu, za predpokladu úspešnej maturity z anglického jazyka by bola nie 0,8 ale $P(B/A) = 0,9$ po dosadení do vzťahu o nezávislosti náhodných udalostí zistíme, že rovnosť neplatí a teda udalosti A a B by boli závislé.

$$P(B/A) \neq P(B) \quad 0,9 \neq 0,8$$

V takomto prípade, keď sú dva javy závislé, pre výpočet ich prieniku $P(A \cap B)$ využívame vzťah (3) pre násobenie podmienených pravdepodobností:

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = 0,9 \cdot 0,6 = 0,54$$

A teda pravdepodobnosť, že študent úspešne absolvoval maturitnú skúšku z anglického jazyka a zároveň vysokoškolský kurz v tomto jazyku by bola $P(A \cap B) = 0,54$.

V tejto časti sme definovali základné vzťahy pre klasickú pravdepodobnosť a podmienenú pravdepodobnosť. Tieto vzťahy budeme využívať pri hodnotení úspešnosti študentov podmienenej faktormi týkajúcimi sa štúdia na strednej škole.

2 Cieľ práce, metodika práce a metódy skúmania

2.1 Cieľ práce

Hlavným cieľom práce je analyzovanie vplyvu predošlého vzdelania na úspešnosť pri skúške, definovanie faktorov týkajúcich sa strednej školy vplývajúcich na výsledky počas vysokoškolského štúdia. Pohľad na úspešnosť študentov z rôznych uhlov podľa vplyvu týchto faktorov. Kvantifikácia významnosti činiteľov ktorými je podmienená úspešnosť pomocou základných vedomostí o teórii pravdepodobnosti. Definovanie pravdepodobnosti úspešného výsledku skúšky za predpokladu splnenia iných kritérií, pomocou poznatkov o podmienenej pravdepodobnosti.

2.2 Význam základného a stredného vzdelania

Keďže je na Slovensku ustanovená desaťročná povinná školská dochádzka, so základnou školou sa stretol každý Slovák. Základná škola má viacero dôležitých funkcií. Už od prvého ročníka sa snažia učitelia viesť deti k zodpovednosti, neučia ich len memorovať informácie, ale rozumieť súvislostiam medzi nimi, vedieť s nimi pracovať. Vedomosti o okolitom svete, ktoré vzdelávaním získavame nám umožňujú vytvoriť si pohľad na život, tvoriť si vlastné názory. Taktiež nás škola učí mravom a slušnému správaniu, čo vedie k civilizovanosti národu.⁸

Na základe vedomostí a názorov si žiak vie s pomocou rodičov vybrať vhodnú strednú školu. Odborné stredné školy nás vybavujú odbornými znalosťami, pomáhajú nám v realizácii profesijných cieľov. Gymnáziá nám rozširujú všeobecné vzdelanie získané na stredných školách a plnia funkciu prípravy na vysokú školu. Či je optimálne zvoliť gymnázium, alebo iný typ strednej školy s úmyslom pokračovať v štúdiu na vysokej škole je otázne, v niektorých smeroch nás vie lepšie ako gymnázium pripraviť obchodná akadémia, v iných zasa stredná priemyselná škola. Neskôr sa budeme venovať tejto problematike výberu správneho typu strednej školy, k čomu nám pomôže súbor údajov o žiakoch.

2.3 Základný súbor

V našom základnom súbore sú zhromaždené údaje o študentoch týkajúce sa stredoškolského vzdelania, ako aj vysokoškolského. Všetci študenti v súbore navštevovali vysokú školu ekonomického zamerania. Budeme sa venovať prospechu žiakov z predmetu

⁸ OAK Manali.: *Why is education so important* [cit.4-4-2014]. Dostupné na internete: <<http://www.buzzle.com/articles/why-is-education-so-important.html>>

matematika na rôznych stredných školách a porovnávať s úspešnosťou týchto študentov pri skúške z matematiky na vysokej škole. O študentoch máme zozbierané informácie o tom, aký typ strednej školy navštevoval a akou známku bol ohodnotený z predmetu matematika na tejto škole. Medzi študentmi sa vyskytli tri typy stredných škôl, ktoré v minulosti navštevovali a to obchodná akadémia, gymnázium a hotelová akadémia. Hodnotenia žiakov zo stredných škôl boli v rozmedzí od 1 po 4. Počas štúdia na vysokej škole mohli študenti absolvovať skúšku v dvoch termínoch, riadnom a opravnom. Tieto informácie sú zobrazené v tabuľke č.1.

Tabuľka č.1

Č	SŠ	Zn	Sk	Č	SŠ	Zn	Sk	Č	SŠ	Zn	Sk	Č	SŠ	Zn	Sk
1	G	3	FX	28	G	1	A	55	OA	2	B	82	G	3	E
2	G	2	E	29	OA	2	D	56	G	4	FX	83	OA	3	FX
3	OA	2	FX	30	OA	2	FX	57	G	3	FX	84	OA	2	D
4	OA	2	E	31	OA	2	E	58	OA	4	FX	85	G	2	E
5	G	4	FX	32	G	2	E	59	G	1	E	86	G	1	C
6	G	3	FX	33	OA	3	FX	60	G	2	E	87	G	1	B
7	G	3	FX	34	OA	3	D	61	OA	2	D	88	G	1	D
8	G	2	E	35	G	3	E	62	OA	2	E	89	G	2	FX
9	G	3	E	36	OA	2	FX	63	G	1	B	90	G	2	D
10	G	3	FX	37	OA	3	FX	64	G	1	E	91	OA	3	FX
11	G	1	C	38	OA	3	E	65	G	3	FX	92	G	2	C
12	OA	1	C	39	OA	2	E	66	G	2	E	93	G	2	D
13	G	2	E	40	OA	2	FX	67	G	1	A	94	G	1	E
14	G	3	D	41	OA	3	FX	68	G	1	A	95	G	1	A
15	OA	4	FX	42	HA	3	E	69	G	2	E	96	G	1	FX
16	OA	1	E	43	G	1	A	70	G	2	A	97	G	1	B
17	OA	3	FX	44	G	2	FX	71	OA	1	E	98	G	2	FX
18	OA	3	FX	45	OA	1	E	72	OA	2	D	99	OA	2	FX
19	G	3	E	46	OA	3	FX	73	OA	3	FX	100	G	3	FX
20	G	3	E	47	G	2	B	74	G	1	C	101	G	1	C
21	G	2	B	48	OA	2	C	75	OA	2	E	102	G	1	D
22	OA	3	FX	49	OA	3	FX	76	G	2	E	103	OA	3	FX
23	G	2	D	50	G	3	E	77	G	1	A	104	OA	3	FX
24	HA	2	FX	51	OA	3	FX	78	OA	1	C	105	G	1	FX
25	G	1	E	52	G	3	FX	79	OA	2	E	106	G	2	E
26	G	2	FX	53	G	1	B	80	G	1	E	107	OA	1	C
27	G	2	E	54	G	2	C	81	OA	1	E	108	G	2	C

Zdroj: vlastný

V tejto tabuľke značí prvý stĺpec číslo študenta, SŠ označuje typ strednej školy, Zn dosiahnuté hodnotenie na strednej škole, Sk označuje konečné hodnotenie študenta

z predmetu matematika, úspešní žiaci boli hodnotení známkami A,B,C,D,E a neúspešní známkou FX.

2.4 Pozorované javy

V širšom zmysle sa na tieto údaje môžeme pozeráť iba, ako na študentov, ktorí buď úspešne alebo neúspešne absolvovali skúšku z matematiky. Ak si položíme otázku, aká je pravdepodobnosť, že žiak prihlásený na predmet matematika ho úspešne ukončí? Ide o pravdepodobnosť náhodného výberu študenta, ktorý úspešne ukončil tento predmet. V tomto prípade by sme si mohli označiť jav S náhodný výber študenta s úspešne ukončenou skúškou a pravdepodobnosť vyjadríme pomocou vzťahu (1) o klasickej definícii pravdepodobnosti. Tento jav S vieme rozložiť na m elementárnych udalostí. Keďže úspešne ukončilo predmet matematika 70 študentov $m = 70$. Potom počet všetkých možných, navzájom rôznych výsledkov výberu je počet študentov zapísaných na tento predmet, ktorých bolo $n = 108$ po dosadení do vzťahu vieme vyčísliť túto pravdepodobnosť.

$$P(S) = \frac{m}{n} = \frac{70}{108} \doteq 0,648$$

Ak by sme chceli kvantifikovať neúspech študentov, teda pravdepodobnosť, že náhodne vybraný študent skúškou neprešiel, použijeme ten istý vzťah a vyčíslime. Keďže každý študent dostal hodnotenie od A po FX, udalosti S a FX tvoria úplný systém disjunktných javov a platí $P(\bar{S}) = P(FX)$. To, že udalosti tvoria úplný systém disjunktných javov dokazuje aj fakt, že ich prienik tvorí jav istý, teda súčet ich pravdepodobností sa rovná 1.

$$P(FX) = \frac{38}{108} \doteq 0,352$$

$$P(S) + P(FX) = 0,648 + 0,352 = P(\Omega) = 1$$

2.4.1 Úspešnosť podmienená typom strednej školy

Keďže o študentoch poznáme rôznorodé informácie o ich štúdiu, môžeme tento súbor analyzovať z viacerých pohľadov. Ak sa nám podarí ukázať, že na výsledok skúšky vplývajú iné skutočnosti, môžeme úspešnosť kvantifikovať presnejšie. Na základe údajov o type strednej školy akú navštevovali a úspešnosti pri skúške môžeme overiť závislosť týchto javov. Zistíme, či typ strednej školy vplýva na výsledok skúšky z matematiky.

Na základe údajov v Tabuľka č.1 vieme povedať, že súbor obsahuje množinu 64 študentov, ktorí navštevovali gymnázium, 42 študentov ktorí navštevovali obchodnú akadémiu a dvoch študentov, ktorí navštevovali hotelovú akadémiu. Označme tieto množiny študentov G pre gymnázium, O pre obchodnú akadémiu a H pre hotelovú akadémiu. Na základe vzťahu (1) o klasickej definícii pravdepodobnosti si vyjadríme pravdepodobnosť nastania týchto javov, teda pravdepodobnosť, že pri náhodnom výbere jedného študenta zo súboru vyberieme gymnazistu bude $P(G) = \frac{64}{108} = \frac{16}{27} \doteq 0,593$, žiaka obchodnej akadémie $P(O) = \frac{42}{108} = \frac{7}{18} \doteq 0,389$ a náhodný výber žiaka z hotelovej akadémie bude predstavovať pravdepodobnosť $P(H) = \frac{2}{108} = \frac{1}{54} \doteq 0,019$. Tieto udalosti tvoria úplný systém disjunktných javov, preto pravdepodobnosť ich zjednotenia, teda súčet jednotlivých pravdepodobností sa rovná pravdepodobnosti javu istého.

$$P(G \cup O \cup H) = P(\Omega) = 1$$

$$P(G) + P(O) + P(H) = 1$$

$$\frac{64}{108} + \frac{42}{108} + \frac{2}{108} = \frac{108}{108} = 1$$

Ďalej poznáme taktiež úspešnosť týchto študentov pri skúške podľa typu stredných škôl. Zo zistených údajov vieme, že 48 študentov navštevovalo gymnázium a zároveň spravili skúšku z matematiky. S použitím vzťahu (1) vieme vyjadriť pravdepodobnosť prieniku týchto udalostí $P(S \cap G) = \frac{48}{108} \doteq 0,444$. Z údajov vieme taktiež vyčítať, že obsahuje 22 takých študentov, ktorí boli z obchodnej akadémie a zároveň úspešne absolvovali skúšku z matematiky $P(S \cap O) = \frac{22}{108} \doteq 0,204$. A nakoniec jeden študent, ktorý navštevoval hotelovú akadémiu a zároveň spravil skúšku z matematiky $P(S \cap H) = \frac{1}{108} \doteq 0,009$. Overenie závislosti úspešného absolvovania skúšky od typu strednej školy dosiahneme dosadením do vzťahu (5). Ak sú tieto udalosti nezávislé, tak platia rovnosti:

$$P(S/G) = P(S/O) = P(S/H) = P(S)$$

po použití vzťahu (2) dostaneme

$$P(S/G) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{48}{108}}{\frac{64}{108}} = \frac{48}{64} = 0,75$$

$$P(S/O) = \frac{P(S \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{22}{108}}{\frac{42}{108}} = \frac{22}{42} \doteq 0,5$$

$$P(S/H) = \frac{P(S \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{2}{108}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Po vyčíslení týchto pravdepodobností vidíme, že vzťah (5) o nezávislosti náhodných javov v tomto prípade neplatí. Tieto javy sú závislé pretože nastanie jedného javu vplyva na pravdepodobnosť nastania javu druhého. Z čoho môžeme usúdiť, že v našom súbore študentov je úspešnosť pri skúške podmienená typom strednej školy, ktorú navštevovali. Z vyčíslených hodnôt vieme povedať, že pravdepodobnosť úspechu študenta z nášho súboru pri skúške z matematiky, za predpokladu, že navštevoval hotelovú akadémiu je $P(S/H) = 0,5$. Pravdepodobnosť, že náhodne vyberieme z množiny študentov takého, ktorý uspel pri skúške za predpokladu, že navštevoval obchodnú akadémiu je $P(S/O) = 0,5$. Pri náhodnom výbere úspešného študenta za predpokladu, že patrí do množiny gymnazistov platí $P(S/G) = 0,75$.

2.4.2 Hodnotenie skúšky podmienené typom strednej školy

Zo zistených hodnôt vieme odvodiť, s akou pravdepodobnosťou študent z konkrétnej strednej školy prejde skúškou z matematiky. Avšak pri hlbšom preskúmaní týchto javov sa môžeme venovať aj konkrétnemu hodnoteniu zo skúšky na vysokej škole. Študenti sú hodnotení na skúške známami A pre výborne, B veľmi dobre, C dobre, D uspokojivo, E dostatočne a v prípade, že študent nevyhovel známku FX, nedostatočne. Označme si podľa týchto známk aj množiny študentov, podľa toho, ako boli ohodnotení pri skúške, teda A, B, C, D, E a FX . Zo zistených údajov o študentoch vieme vyčítať, presné početnosti študentov, ktorí dosiahli konkrétnu známku, podľa škôl.

Tabuľka č.2

$\cap$	G	O	H	Σ
A	7	0	0	7
B	6	1	0	7
C	7	4	0	11
D	6	5	0	11
E	22	11	1	34
FX	16	21	1	38
Σ	64	42	2	108

Zdroj: vlastný

Tieto údaje sú zobrazené v Tabuľka č.2, z ktorej vieme vyčítať napríklad, že 6 študentov navštevovalo gymnázium a bolo ohodnotených známku B. Hovoríme o prieniku udalostí $G \cap B$. Podobne vieme kvantifikovať početnosti prienikov javov

G, O, H a javmi A, B, C, D, E a FX , teda hodnotení zo skúšky. Využitím údajov v Tabuľka č.2 a vzťahu (1) o klasickej definícii pravdepodobnosti vieme vyjadriť pravdepodobnosti nastania jednotlivých javov A, B, C, D, E a FX .

$$P(A) = P(B) = \frac{7}{108} = 0,065$$

$$P(C) = P(D) = \frac{11}{108} = 0,102$$

$$P(E) = \frac{34}{108} = 0,315$$

$$P(FX) = \frac{38}{108} = 0,352$$

Keďže každý študent bol ohodnotený jednou zo známok A, B, C, D, E, FX , na základe axiomatickej definície pravdepodobnosti vieme, že pravdepodobnosť zjednotenia týchto javov sa rovná 1. Tieto javy totiž tvoria úplný systém disjunktných javov.

$$P(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup FX) = P(\Omega) = 1$$

$$\frac{7}{108} + \frac{7}{108} + \frac{11}{108} + \frac{11}{108} + \frac{34}{108} + \frac{38}{108} = \frac{108}{108} = 1$$

Pri porovnávaní hodnotení študentov podmienenom typom strednej školy budeme využívať vzťah pre výpočet podmienenej pravdepodobnosti. Týmto spôsobom si postupne vyjadríme pravdepodobnosť hodnotenia študentov podmienenú typom strednej školy.

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{7}{64} = 0,109$$

$$P(A/G) = 0,109$$

$$P(A/O) = 0$$

$$P(B/G) = 0,094$$

$$P(B/O) = 0,024$$

$$P(C/G) = 0,109$$

$$P(C/O) = 0,095$$

$$P(D/G) = 0,094$$

$$P(D/O) = 0,119$$

$$P(E/G) = 0,344$$

$$P(E/O) = 0,262$$

$$P(FX/G) = 0,219$$

$$P(FX/O) = 0,5$$

$$P(A/H) = P(B/H) = P(C/H) = P(D/H) = 0$$

$$P(E/H) = P(FX/H) = 0,5$$

Z týchto hodnôt vieme usúdiť, že pravdepodobnosť, že študent spraví skúšku na B za predpokladu, že navštevoval gymnázium je $P(B/G) = 0,094$ ak by však navštevoval obchodnú akadémiu, táto pravdepodobnosť by sa rovnala $P(B/O) = 0,024$.

2.4.3 Úspešnosť podmienená dosiahnutým hodnotením zo strednej školy

Z predchádzajúcich zistení vyplýva, že študentov vie na vysokoškolskú matematiku najlepšie pripraviť práve gymnázium. Avšak nie samotné ukončenie gymnázia zaručuje študentovi, že na vysokej škole nebude mať problém s matematikou. Môžeme sa opäť pozrieť na fakt, či na výsledok skúšky vplýva aj známka dosiahnutá z matematiky na strednej škole.

V tejto situácii je zaujímavé vyčíslieť pravdepodobnosť, že študent prešiel skúškou za predpokladu, že na strednej škole dosahoval slabé výsledky z matematiky bez ohľadu na typ strednej školy. Označme si Z_4 množinu žiakov, ktorí na strednej škole dosahovali z matematiky hodnotenia 4, potom platí, že takýto študent bude úspešný pri skúške z matematiky s pravdepodobnosťou $P(S/Z_4) = \frac{P(S \cap Z_4)}{P(Z_4)} = 0$. Pretože ani jeden žiak z množiny Z_4 neprešiel skúškou z matematiky na vysokej škole. Označme si ďalej množiny Z_1, Z_2 a Z_3 podľa dosiahnutých hodnotení na strednej škole, podobne ako pri Z_4 , potom vyjadríme pravdepodobnosti. Potrebne početnosti sú vyčíslené na základe Tabuľka č.1 a zobrazené v Tabuľke č.3.

Tabuľka č.3

i	G_i	$S \cap G_i$	O_i	$S \cap O_i$	H_i	$S \cap H_i$
1	23	21	7	7	0	0
2	24	20	17	12	1	0
3	15	7	16	2	1	1
4	2	0	2	0	0	0

Zdroj: vlastný

Keďže udalosti G, O a H tvoria v našom súbore úplný systém disjunktných javov, potom $P(Z_i) = P(G_i) + P(O_i) + P(H_i)$ a taktiež platí, že $P(S \cap Z_i) = P(S \cap G_i) + P(S \cap O_i) + P(S \cap H_i)$. Na základe týchto vzťahov a údajov v Tabuľke č.3 vieme vypočítať podmienené pravdepodobnosti.

$$P(S/Z_1) = \frac{28}{30} \doteq 0,933$$

$$P(S/Z_2) = \frac{32}{42} \doteq 0,762$$

$$P(S/Z_3) = \frac{10}{32} \doteq 0,313$$

Vyčíslené pravdepodobnosti kvantifikujú úspešnosť študentov podmienenú ich prospechom na strednej škole. Ale táto pravdepodobnosť sa ešte môže odlišovať podľa typu školy, akú študent navštevoval. Preto si označme udalosť G_1 náhodný výber študenta, ktorý študoval na gymnázium, kde dosiahol hodnotenie z matematiky známku 1, potom podobne G_2, G_3 a G_4 pre gymnazistov, ktorí dosiahli na strednej škole známky z predmetu matematika 2, 3 alebo 4. Podobne pre študentov z obchodnej akadémie a hotelovej akadémie si zavedieme udalosti $O_1, \dots, O_4$ a $H_1, \dots, H_4$. Potom udalosť $G_1 \cap S$ bude označovať jav, keď bol študent na gymnázium ohodnotený známku 1 a zároveň úspešne absolvoval skúšku z matematiky. Keďže ideme hodnotiť úspešnosť týchto študentov pri skúške, podmienenú hodnotením zo strednej školy a typom strednej školy, využijeme poznatky o podmienenej pravdepodobnosti a použijeme vzťah (2). Pri pracovaní s týmto vzťahom a podmienenými pravdepodobnosťami $P(S/G_i), P(S/O_i)$ a $P(S/H_i)$ potrebujeme poznať pravdepodobnosti jednotlivých udalostí $P(G_i), P(O_i), P(H_i)$ a prieniky týchto udalostí s udalosťou S to znamená s množinou študentov úspešných pri skúške. Všetky potrebné údaje o týchto udalostiach sú zobrazené v tabuľke č.3.

Na základe týchto údajov vieme vyčísliť potrebné pravdepodobnosti, a to napríklad $P(G_2) = \frac{24}{108} \doteq 0,22$, pravdepodobnosť že náhodne vybraný študent navštevoval gymnázium, a z predmetu matematika bol ohodnotený známku 2.

Potrebovať budeme aj pravdepodobnosť prieniku týchto udalostí s udalosťou S , ktorá označuje množinu úspešných študentov pri skúške z matematiky. Napríklad pravdepodobnosť, že študent navštevoval obchodnú akadémiu, kde bol ohodnotený z predmetu matematika známku 2 a zároveň bol úspešný pri skúške na vysokej škole sa dá tiež jednoducho vyčísliť pomocou údajov z tabuľky č.3 ako: $P(S \cap O_2) = \frac{12}{108} \doteq 0,11$

Ďalej už môžeme pomocou vzťahu (2) vyčísliť jednotlivé podmienené pravdepodobnosti. Keďže žiaden študent, ktorý mal na strednej škole známku z matematiky 4, neprešiel skúškou na vysokej škole, týmto podmieneným pravdepodobnostiam sa nemusíme venovať, ich hodnoty budú nulové, keďže $P(S \cap G_4) = P(S \cap O_4) = P(S \cap H_4) = 0$.

$$P(S/G_1) = \frac{P(S \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{\frac{21}{108}}{\frac{23}{108}} = \frac{21}{23} \doteq 0,913$$

$$P(S/G_2) = \frac{20}{24} \doteq 0,833$$

$$P(S/G_3) = \frac{7}{15} \doteq 0,467$$

Keďže sa tieto podmienené pravdepodobnosti nerovnajú vidíme, že javy S a G_i nie sú nezávislé na základe vzťahu (5) o nezávislosti udalostí. Z čoho vyplýva, že úspech pri skúške z matematiky je podmienený známku z matematiky a typom strednej školy, ktorú študent navštevoval. Ďalej použijeme ten istý postup aj pre množiny O_i a H_i .

$$P(S/O_1) = \frac{7}{7} = 1$$

$$P(S/O_2) = \frac{12}{17} = 0,706$$

$$P(S/O_3) = \frac{2}{16} = 0,125$$

$$P(S/H_1) = 0$$

$$P(S/H_2) = 0$$

$$P(S/H_3) = 1$$

$$P(S/H_4) = 0$$

Vzhľadom na nízku početnosť v množine študentov H , aj pravdepodobnosti, ktoré súvisia s touto množinou sú skreslené. Vypovedajú síce o pravdepodobnosti náhodného výberu z našej množiny prvkov no v konečnej interpretácii nemusia dávať zmysel.

2.4.4 Hodnotenie skúšky podmienené hodnotením zo strednej školy

V prípade, ak by sme chceli zistiť, aké študijné výsledky môžeme očakávať, podľa toho akú strednú školu žiak navštevoval a aké známky dosahoval, vieme tento súhrn podmienených pravdepodobností vyjadriť opäť pomocou údajov v Tabuľka č.1. Označme si udalosť K študentov, ktorí dosahujú nadpriemerné výsledky na vysokej škole, to znamená známky A a B. Udalosťou L výber študenta, ktorý dosahuje známky C, D, E. Pre zjednodušenie si potrebné údaje ukážeme zoskupené podľa našej potreby v Tabuľka č.4 kde vidíme počty študentov rozdelených podľa hodnotenia skúšky, typu strednej školy a prospechu z matematiky.

Tabuľka č.4

$\cap$	G_1	G_2	G_3	O_1	O_2	O_3	H_1	H_2	H_3
K	10	3	0	0	1	0	0	0	0
L	11	17	7	7	11	2	0	0	1
FX	2	4	8	0	5	14	0	1	0

Zdroj: vlastný

Pomocou Tabuľka č.4 a vzťahu (2) vieme vyčísliť rôzne pravdepodobnosti. Napríklad, s akou pravdepodobnosťou bude študent gymnázia dosahovať na vysokej škole nadpriemerné známky sa bude rovnáť $P(K/G) \doteq \frac{13}{64} = 0,203$. To znamená, že približne 20% gymnazistov dosahuje nadpriemerné výsledky na vysokej škole. U študentov z obchodnej akadémie predstavuje táto pravdepodobnosť $P(K/O) = \frac{1}{42} \doteq 0,024$.

$$P(K/G) \doteq 0,203$$

$$P(K/O) \doteq 0,024$$

$$P(L/G) \doteq 0,547$$

$$P(L/O) \doteq 0,476$$

$$P(FX/G) \doteq 0,25P(FX/O) \doteq 0,5$$

Avšak pre zhodnotenie vplyvu známok z matematiky na výsledky na vysokej škole potrebujeme poznať prieniky $K \cap G_i$, $K \cap O_i$, $L \cap G_i$, $L \cap O_i$ a následne môžeme pomocou vzťahu (2) vyjadriť hodnoty pravdepodobností. Tieto prieniky javov sú údaje uložené v Tabuľka č.4. Potom pravdepodobnosť, že študent bude mať nadpriemerné výsledky na výsledky na vysokej škole, za predpokladu, že na gymnáziu mal jednotky bude:

$$P(K/G_1) = \frac{P(K \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{\frac{10}{108}}{\frac{23}{108}} = \frac{10}{23} \doteq 0,435.$$

Tým istým spôsobom dopočítame všetky hodnoty pravdepodobností úspešnosti na vysokej škole podmienených prospechom na rôznych stredných školách. Z vypočítaných hodnôt vieme povedať, že jednotkár z gymnázia pri vysokoškolskej skúške z matematiky dosiahne s pravdepodobnosťou 43,5% nadpriemerné výsledky, priemerne úspešný bude s pravdepodobnosťou 47,8% avšak pravdepodobnosť, že skúškou neprejde je asi 8,7%.

$$P(K/G_1) \doteq 0,435$$

$$P(K/O_1) = 0$$

$$P(K/G_2) \doteq 0,125$$

$$P(K/O_2) \doteq 0,059$$

$$P(K/G_3) = 0$$

$$P(K/O_3) = 0$$

$$P(L/G_1) \doteq 0,478$$

$$P(L/O_1) = 1$$

$$P(L/G_2) \doteq 0,708$$

$$P(L/O_2) \doteq 0,647$$

$$P(L/G_3) \doteq 0,467$$

$$P(L/O_3) \doteq 0,125$$

$$P(FX/G_1) \doteq 0,087$$

$$P(FX/O_1) = 0$$

$$P(FX/G_2) \doteq 0,167$$

$$P(FX/O_2) \doteq 0,294$$

$$P(FX/G_3) \doteq 0,533$$

$$P(FX/O_3) \doteq 0,875$$

Na hodnotenie študentov pri skúške sa môžeme pozrieť z užšieho hľadiska a hodnotiť aj konkrétne dosiahnuté známky. Avšak pri tomto konkrétnom súbore študentov sa nám bude viac pravdepodobnostných hodnôt rovnáť nule, pretože medzi študentmi nie je zastúpená každá množina možných kombinácií typov strednej školy, známok na strednej škole a hodnotení pri skúške. Pre definovanie konkrétnych pravdepodobností potrebujeme opäť zoskupiť údaje v tabuľke podľa požadovaných informácií. Potrebujeme poznať početnosť študentov rozdelených podľa známky na strednej škole, typu strednej školy a známky na vysokej škole. Tieto údaje vidíme v tabuľke č.5.

Tabuľka č.5

$\cap$	G_1	G_2	G_3	O_1	O_2	O_3	H_1	H_2	H_3
A	6	1	0	0	0	0	0	0	0
B	4	2	0	0	1	0	0	0	0
C	4	3	0	3	1	0	0	0	0
D	2	3	1	0	4	1	0	0	0
E	5	11	6	4	6	1	0	0	1
FX	2	4	8	0	5	14	0	1	0
Σ	23	24	15	7	17	16	0	1	1

Zdroj: vlastný

Nasledovne použijeme opäť vzťah (2) pre vyhodnotenie pravdepodobnosti udalosti A, B, C, D alebo E za predpokladu nastania jednotlivých udalostí G_1 až H_3 . To znamená, napríklad pravdepodobnosť, že študent dosiahne hodnotenie B na skúške, za predpokladu, že na obchodnej akadémii dosahoval známky 2 sa bude rovnáť približne 5,9%.

$$P(B/O_2) = \frac{P(B \cap O_2)}{P(O_2)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{17}{108}} = \frac{1}{17} \doteq 0,059$$

Nakoľko z obchodnej akadémie sme mali množinu len dvoch študentov, z nich jeden skúškou neprešiel, všetky tieto pravdepodobnosti určitého hodnotenia zo skúšky sa budú rovnáť 0 okrem jednej. Keďže jeden študent, ktorý mal z matematiky známku 3, spravil skúšku s hodnotením E, potom pravdepodobnosť náhodného výberu študenta z množiny E za predpokladu že mal trojku na hotelovej akadémii je rovná 1.

$$P(E/H_3) = 1$$

$P(A/G_1) \doteq 0,261$	$P(A/G_2) \doteq 0,042$	$P(A/G_3) = 0$
$P(B/G_1) \doteq 0,174$	$P(B/G_2) \doteq 0,083$	$P(B/G_3) = 0$
$P(C/G_1) \doteq 0,174$	$P(C/G_2) = 0,125$	$P(C/G_3) = 0$
$P(D/G_1) \doteq 0,087$	$P(D/G_2) = 0,125$	$P(D/G_3) \doteq 0,067$
$P(E/G_1) \doteq 0,217$	$P(E/G_2) \doteq 0,458$	$P(E/G_3) = 0,533$
$P(A/O_1) = 0$	$P(A/O_2) = 0$	$P(A/O_3) = 0$
$P(B/O_1) = 0$	$P(B/O_2) \doteq 0,059$	$P(B/O_3) = 0$
$P(C/O_1) \doteq 0,429$	$P(C/O_2) \doteq 0,059$	$P(C/O_3) = 0$
$P(D/O_1) = 0$	$P(D/O_2) \doteq 0,235$	$P(D/O_3) \doteq 0,063$
$P(E/O_1) \doteq 0,571$	$P(E/O_2) \doteq 0,353$	$P(E/O_3) \doteq 0,063$

3 Výsledky práce a diskusia

V predošlej časti sme ukázali možný postup analyzovania faktorov vplývajúcich na úspech pri vysokoškolskom vzdelávaní. Pozornosť sme sústredili hlavne na dva faktory a to typ strednej školy, akú študent v minulosti navštevoval a hodnotenie, ktoré na tejto škole dosiahol v rámci predmetu matematika. Následne sme kvantifikovali vplyv týchto faktorov na výsledok skúšky z matematiky. Najprv sme sa pozerali na toto hodnotenie zo širšieho pohľadu a to či študent uspel alebo neuspel. Potom sme tento problém preskúmali hlbšie z pohľadu dosiahnutých hodnôt študentov pri skúške. V základnom súbore sme zozbierali údaje od 108 študentov, avšak nie všetky skupiny študentov boli dostatočne zastúpené. Ukázané postupy sú však použiteľné na akomkoľvek súbore údajov o študentoch.

3.1 Celková úspešnosť študentov

Najprv sme sa pozreli na študentov ako na úspešných alebo neúspešných pri skúške z matematiky. Aplikovaním poznatkov o klasickej definícii pravdepodobnosti sme zistili, že približne 64,8% študentov bolo pri skúške úspešných, z čoho vplyva že 35,2% študentov neuspelo. Tento údaj vypovedá o pomere úspešných študentov k neúspešným v množine študentov o ktorých poznáme tieto informácie.

Avšak, nie v každom ročníku máme rovnaké zloženie študentov, a táto úspešnosť sa môže veľmi líšiť. Preto táto informácia nie je natoľko dôveryhodná, aby sme mohli tvrdenie o úspešnosti zovšeobecniť a povedať, že úspešnosť študentov, ktorí sa prihlásili na skúšku z matematiky na ekonomickej univerzite je 65%. Pre takéto zistenia by sme potrebovali omnoho rozsiahlejší súbor s hodnoteniami študentov. Tento údaj nám hovorí iba o úspešnosti študentov v našom výberovom súbore, bez ohľadu na iné študijné predpoklady. Neskôr sme ukázali, že na úspešnosť pri skúške môže vplývať napríklad typ strednej školy ktorú študent navštevoval.

3.2 Vplyv typu strednej školy na úspech pri skúške

Na základnom súbore sme aplikovali znalosti o závislosti náhodných javov, a zistili sme, že jeden z faktorov vplývajúcich na úspešnosť na vysokej škole je aj typ strednej školy, ktorú študent navštevoval. Zo zistených hodnôt $P(G)$, $P(O)$ a $P(H)$ poznáme zloženie študentov v našom súbore podľa stredných škôl. Po ukončení základného vzdelania sa rozhodlo približne 59,3% študentov pokračovať na gymnáziu, 38,9% si zvolilo obchodnú akadémiu a 1,9% študentov z nášho súboru pokračovalo v štúdiu na

hotelovej akadémii. Od týchto hodnôt sa vyvíjali aj výsledné podmienené pravdepodobnosti.

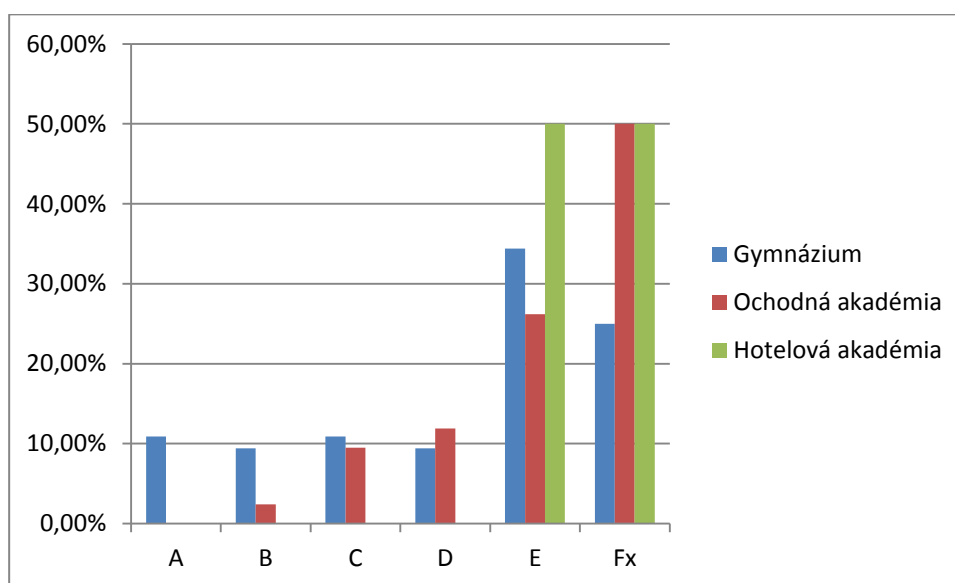
Pravdepodobnosť, že študent uspel pri skúške, za predpokladu, že navštevoval gymnázium bola 75%. Z množiny študentov o ktorých máme údaje dosahovali gymnazisti najvyššiu úspešnosť. Študenti z obchodnej akadémie dosiahli úspešnosť 50%. Pravdepodobnosť, že študent uspel pri skúške za predpokladu, že navštevoval hotelovú akadémiu bola síce rovnaká ako pri obchodnej akadémii a to 50%. Avšak tento údaj je značne skreslený kvôli tomu, že spomedzi študentov, o ktorých poznáme tieto údaje boli len dvaja, ktorí navštevovali hotelovú akadémiu.

3.3 Vplyv typu strednej školy na výsledok skúšky

Na základe údajov v Tabuľka č.2 a vzťahu (1) o klasickej definícii pravdepodobnosti sme vyčíslili zloženie študentov podľa dosiahnutých hodnotení na skúške. Výsledné hodnoty nám hovoria o tom, že najviac študentov bolo ohodnotených známku FX a to približne 35%, títo študenti skúšku nespravili na rozdiel od študentov, ohodnotených známku E, takýchto študentov bolo v našom súbore približne 31%. Podiel študentov ktorí dostali známku C a D bol rovnaký, približne 10%. Takisto sa rovnal aj podiel študentov, ktorí boli ohodnotení A a B, ten bol približne 7%. Tieto zhody sú spôsobené tým, že počet študentov, ktorí dosiahli A a B sa rovná a takisto aj počet študentov ohodnotených C a D. Preto sme pri výpočtoch dosiahli identické zlomky.

V ďalšom kroku sme vyčíslili pravdepodobnosti týchto hodnotení podmienené typom strednej školy. Hodnoty, ktoré nám vyšli naznačujú, že gymnázium vedelo pripraviť týchto študentov na vysokoškolskú matematiku o niečo lepšie ako obchodná akadémia. Dosiahnuté hodnoty sú zakreslené v Graf č.1. Vidíme, že gymnazisti získavajú hodnotenia A,B,C,D zhruba rovnako rovnomerne, pohybujú sa okolo 10%. Približne 35% gymnazistov získalo hodnotenie E a 25% neuspelo pri skúške. Medzi študentmi z obchodnej akadémie sa nevyskytoval ani jeden, ktorý vedel spraviť skúšku na A a iba veľmi málo študentov z obchodnej akadémie bolo ohodnotených známku B, približne 2,4%. Pri hodnoteniach C a D sa už dostali na úroveň gymnazistov, približne 10% avšak pri hodnotení E dosiahli opäť nižšie hodnoty, približne 26%. Podiel neúspešných študentov z obchodnej akadémie sa dostal až na 50%, čo je značne viac oproti gymnazistom. O študentoch z hotelovej akadémie vieme povedať, že majú 50% úspešnosť pri skúške a to na známku E, keďže medzi študentmi v našom súbore boli len dvaja z nich jeden bol ohodnotený na skúške známku E a druhý nebol úspešný.

Graf č.1: Hodnotenie študentov podľa strednej školy



Zdroj: vlastný

Z týchto údajov sa dá vyčítať, že gymnazisti dosahujú častejšie známky A,B,C ako študenti obchodnej akadémie. Z čoho vyplýva, že študentov z nášho súboru vedelo pripraviť gymnázium na vysokoškolskú matematiku oveľa lepšie, ako obchodná akadémia.

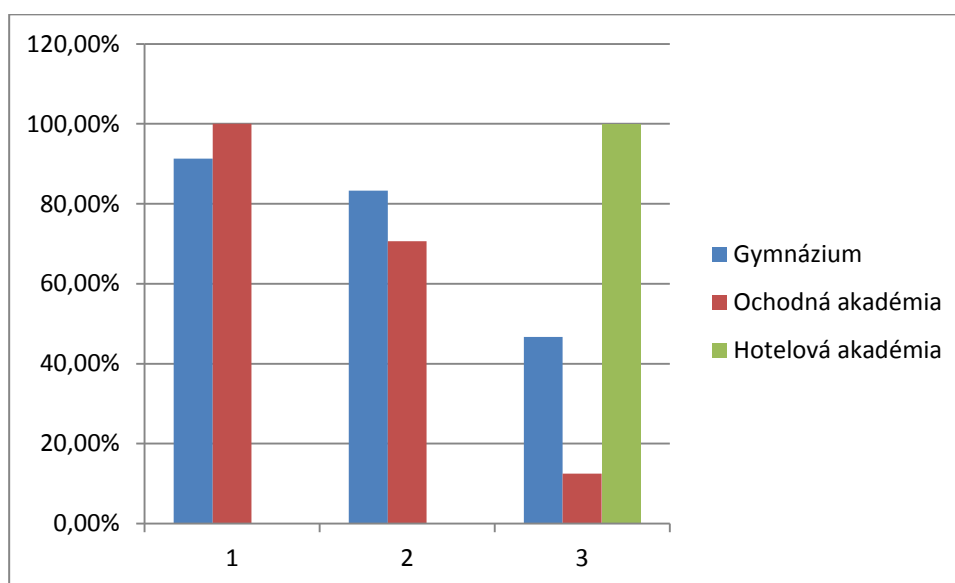
3.4 Vplyv stredoškolského prospechu na úspešnosť pri skúške

Síce z predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že študentov na vysokú školu najlepšie pripravilo gymnázium, no nie samotné ukončenie gymnázia zaručuje študentovi vysokú pravdepodobnosť úspechu pri skúške. Na základe vzťahu o nezávislosti náhodných javov sme zistili, že na výsledok skúšky vplyva taktiež známka dosiahnutá na strednej škole.

Pri aplikovaní vzťahu o podmienenej pravdepodobnosti na tento súbor študentov sme zistili, že spomedzi študentov, ktorí boli na stredných školách hodnotení známkou 1 bolo úspešných pri skúške 93,3%. Žiaci, ktorí na strednej škole dostávali hodnotenie 2, ukázali trochu slabšiu ale stále vysokú úspešnosť pri skúške 76,2%. Najhoršie na tom boli žiaci hodnotení na strednej škole známkami 3, ktorí dosiahli 31,3% úspešnosť. Medzi študentmi sa nachádzali aj štyria takí, ktorých hodnotenie na strednej škole bolo 4, ale ani jeden neuspel pri skúške z matematiky. Tieto hodnoty značne vypovedajú o súvislosti medzi strednou a vysokou školou.

Keďže nie na každej škole sú zaužívané tie isté osnovy, spôsob vzdelávania a zamerania sa na niektoré oblasti môže byť rôzny. Preto sme si rozdelili výberový súbor v Tabuľke č.3 nie len podľa známok ale aj podľa stredných škôl. Z výsledných hodnôt sme si zostavili graf interpretujúci úspešnosť študentov podľa prospechu a typu stredných škôl.

Graf č.2: Úspešnosť študentov podľa prospechu a typu strednej školy



Zdroj: vlastný

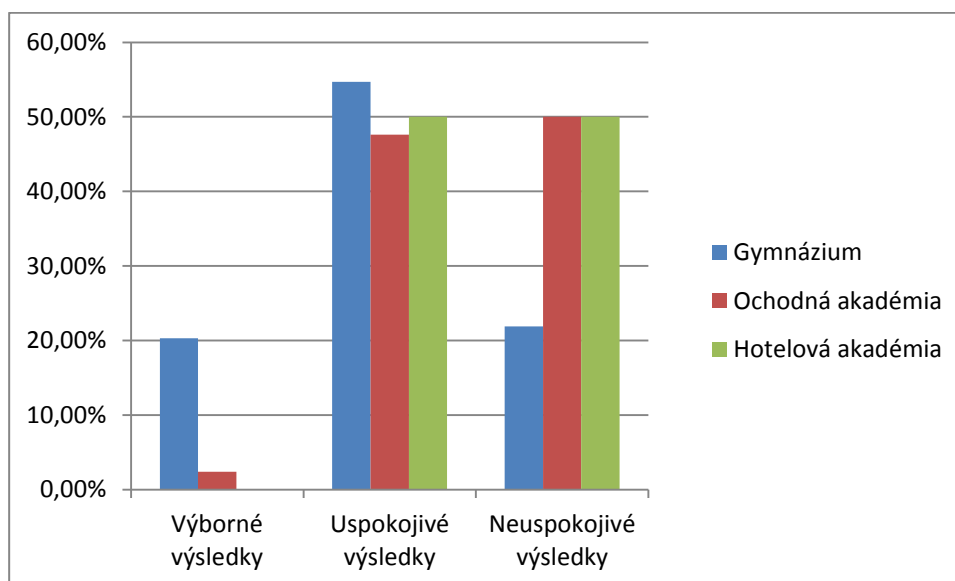
Po výpočte úspešnosti študentov podľa prospechu a typu strednej školy sme zistili, že žiaci hodnotení na obchodnej akadémii známku 1 boli o niečo úspešnejší ako gymnazisti s rovnakým prospechom. Aj keď obidve skupiny študentov dosiahli veľmi dobré výsledky, gymnazisti približne 91% ale jednotkári z obchodnej akadémie dosiahli 100% úspešnosť pri skúške z matematiky. Pri skupine študentom s prospechom na strednej škole 2 už jemne prevyšovali študenti gymnázia keď dosiahli úspešnosť 83,3% a študenti obchodnej akadémie 70,6%. Avšak medzi žiakmi s prospechom 3 jasne prevyšovali gymnazisti s úspešnosťou 46,7% oproti žiakom obchodnej akadémie s 12,5% úspešnosťou. Úspešnosť študentov, ktorí na hotelovej akadémii dosiahli známku 3 bola 100%. Opäť je potrebné pri tomto údaji spomenúť skreslenosť výsledkov, pretože vo vybranom súbore boli len dvaja študenti obchodnej akadémie. Z nich jeden dosiahol známku 2, tento študent pri skúške úspešný nebol a naopak, študent ktorý dosiahol známku 3 pri skúške uspel. Tento fakt iba poukazuje na dôležitosť množstva údajov pri podobných analýzach.

3.5 Hodnotenie skúšky podmienené hodnotením zo strednej školy

V poslednej časti sme sa venovali vplyvu prospechu z matematiky počas strednej školy na výsledné hodnotenie z predmetu matematika na vysokej škole. Najprv sme určovali úspešnosť zo širšieho uhla pohľadu, keď sme si rozdelili študentov podľa výsledku skúšky na tri skupiny, a to študentov s výbornými výsledkami, študentov s uspokojivými známkami a nakoniec študentov ktorí neuspeli pri skúške. Medzi výborných študentov sme zaradili všetkých, ktorí boli ohodnotení z matematiky známku

A alebo B, študentov ohodnotených známkami C,D a E sme zaradili do skupiny s uspokojivými výsledkami.

Graf č.3: Úspešnosť študentov podľa hodnotení a typu strednej školy



Zdroje: vlastné

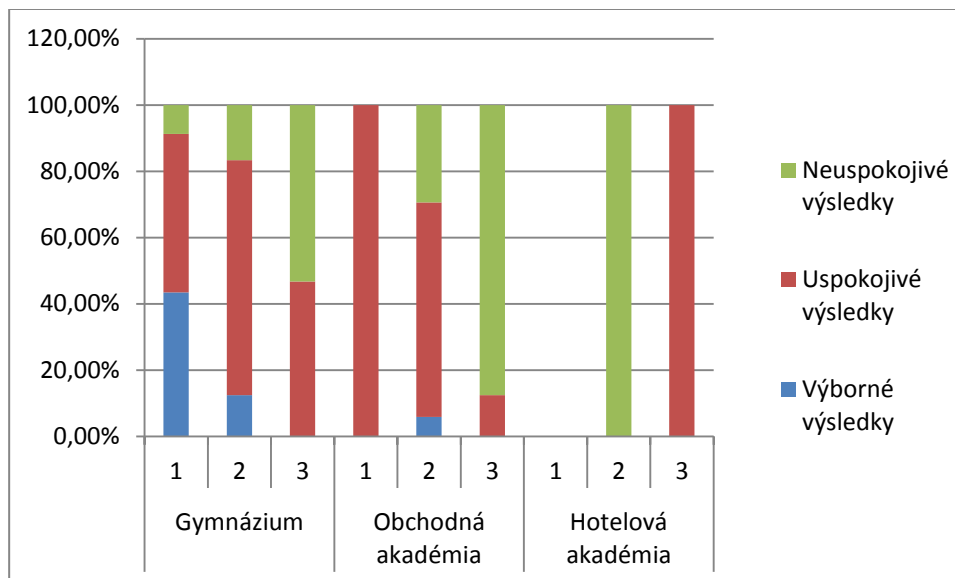
Graf č.3 nám opäť ukazuje, že gymnázium je na tom o niečo lepšie ako obchodná akadémia. Výborné výsledky totiž dosahuje okolo 20% gymnazistov oproti 2,5% študentov z obchodnej akadémie s výbornými výsledkami. V skupine študentov s uspokojivými výsledkami sa úspešnosti všetkých škôl pohybovali okolo 50%. Konkrétne gymnázium 54,7%, obchodná akadémia 47,6% a hotelová akadémia 50%. Najmenší podiel študentov nespravilo skúšku z matematiky práve z gymnázia, 25%, nakoľko pri obchodnej a hotelovej akadémii sa táto hodnota vyšplhala na 50%.

Potom sme si rozdelili študentov nielen podľa dosiahnutých výsledkov ale aj podľa prospechu na strednej škole. Výsledky znovu potvrdili vyššiu úspešnosť gymnazistov v tomto súbore. Tieto výsledky zobrazuje graf č.4. Na tomto grafe môžeme pozorovať zloženie úspešností žiakov podľa prospechu dosiahnutého na konkrétnom type strednej školy. Výborné výsledky dosahovali hlavne študenti gymnázia s ohodnotením 1, vyše 40%. Žiaci obchodnej ani hotelovej akadémie nedosiahli nadpriemerné výsledky pri skúške z matematiky, čo poukazuje na úroveň vzdelania žiakov v tejto oblasti.

Žiaci, ktorí boli na obchodnej akadémii ohodnotení známkou 1 síce všetci prešli skúškou ale dosiahli len priemerné výsledky. Avšak približne 6% študentov ohodnotených na obchodnej akadémii známkou 2 dosiahlo nadpriemerné výsledky pri skúške. Tento fakt naznačuje opäť nízky počet opýtaných študentov, keďže každá skupina či už podľa známok alebo typu strednej školy je zastúpená malým počtom študentov, tieto výsledky

môžu byť skreslené. Ak by sme mali k dispozícii údaje o viacerých študentoch, ktorí navštevovali obchodnú akadémiu, pravdepodobnosť nadpriemerných výsledkov u študentoch ohodnotených známkou 1 by mohla byť vyššia.

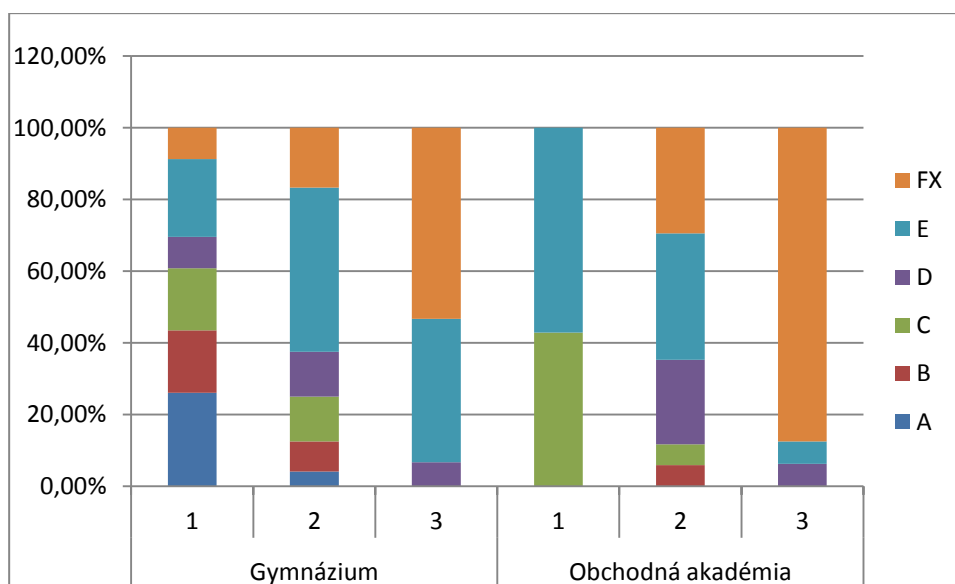
Graf č.4: Hodnotenie skúšky podľa prospechu a typu strednej školy



Zdroj: vlastné

V poslednej časti sme rozdelili študentov do skupín, podľa konkrétneho hodnotenia pri skúške, prospechu na strednej škole a typu strednej školy ktorú navštevovali. Vzhľadom na obmedzenosť výberového súboru nám častejšie vychádzali nulové pravdepodobnosti, hlavne pri žiakoch z hotelovej akadémie.

Graf č.5



Zdroj: vlastné

Vzhľadom na množstvo skúmaných javov v tomto prípade a fakt, že množstvo študentov z hotelovej akadémie bolo veľmi nízke, kvôli lepšej grafickej interpretácii sme vynechali tieto údaje o študentoch hotelovej akadémie. Výsledky skúmania sú zobrazené v grafe č.5.

Tento graf nám znázorňuje celkovú úspešnosť študentov podľa jednotlivých skupín a hodnotení. Vidíme, ako neúspešnosť stúpa so zvyšujúcou sa známkou na strednej škole. Gymnazisti nedosahovali tak vysoké podiely neúspešných študentov ako obchodná akadémia, a aj nárast týchto početností je prudší so zvyšujúcou sa známkou u študentov obchodnej akadémie. Nech sa zameriame na ktorúkoľvek prospechovú skupinu, je vidno, že u študentov gymnázia sú dosahované vždy väčšie úspešnosti pri lepších hodnoteniach skúšky. Z toho jasne vyplýva že študentov v tomto súbore jednoznačne lepšie pripravilo gymnázium.

Zo zistených údajov vieme usúdiť, že vo väčšine hodnotení je vhodnejšie pre vysokú školu gymnázium. Avšak toto hodnotenie hovorí iba o predmete matematika a úspešnosti v rámci výberového súboru 108 študentov. Ak by sme mali údaje o viacerých študentoch, z viacerých stredných škôl, tento výsledok by bol vernejší, avšak s najväčšou pravdepodobnosťou by boli gymnazisti v matematike najúspešnejší. No matematika je iba jedna z mnohých oblastí štúdia na vysokej škole. V inej oblasti by nás možno lepšie pripravila iná stredná škola. Keďže údaje máme o študentoch, ktorí študovali na vysokej škole ekonomického zamerania tieto hodnotenia hovoria iba o úspešnosti na týchto školách. Pri vysokej škole iného zamerania môže byť úspešnosť študentov gymnázia nižšia ako úspešnosť iných stredných škôl. Aby sme dosiahli čo najobjektívnejšie výsledky, potrebovali by sme údaje o čo najväčšom počte študentov. Avšak zber týchto údajov formou napríklad dotazníka je značne náročný, museli by sme hľadať jednoduchšie spôsoby zberu. Pri dostatočnom množstve údajov o úspešnosti študentov by mohli dosiahnuté výsledky napomôcť nielen žiakom základných škôl s výberom strednej, ale aj maturantom s výberom vysokej školy.

Záver

V tomto skúmaní sme sa snažili kvantifikovať význam faktorov vplývajúcich na úspešnosť pri skúške na vysokej škole. Medzi tieto faktory patrila typ strednej školy, akú študent navštevoval a dosiahnutá známka z predmetu matematika. Na úspešnosť pri skúške sme sa pozerali najprv ako na úspech alebo neúspech, neskôr sme sa zamerali na konkrétne hodnotenia študentov pri skúške z matematiky. Cieľom bolo kvantifikovať tieto podmienené udalosti a vyhodnotiť, aký typ strednej školy je pre štúdium matematiky na vysokej škole najvhodnejší.

Ako najvhodnejšia stredná škola pre prípravu študenta na vysokoškolskú matematiku sa ukázalo gymnázium. Avšak tento jav nehovorí o tom, že gymnázium je celkovo najvhodnejšie pre prípravu na vysokoškolské štúdium. Z vlastných skúseností viem, že na niektoré predmety vie pripraviť študenta lepšie obchodná akadémia. Keďže na gymnáziách nepatrí medzi štandardné predmety napríklad účtovníctvo, žiaci z gymnázií mávajú s týmto predmetom na vysokej škole problémy. Na rozdiel od študentov obchodných a hotelových akadémií, ktorí sa už počas štúdia na strednej škole stretli so základmi účtovníctva a o to menej komplikácií majú s týmto predmetom na vysokej škole. Tento výskum priniesol z môjho pohľadu zaujímavé výsledky, avšak hovoria iba o vplyvoch stredoškolského vzdelania na skúšku iba v rámci vzorky 108 študentov.

V budúcnosti by som navrhol tento výskum pre širší počet študentov, zisťovanie údajov by sa malo týkať nie len predmetu matematika ale napríklad aj cudzích jazykov či spomínaného účtovníctva. Ešte komplexnejší prehľad o podmienenej úspešnosti študentov na Slovensku by sme získali zberom údajov študentov z rôznych vysokých škôl, s rôznym zameraním. Avšak najvernejší obraz by sme získali ak by sme hodnotili úspešnosť žiakov z konkrétnych stredných škôl, týmto spôsobom by sa mohla hodnotiť úroveň vzdelania týchto škôl.

Na základe týchto údajov by sa mohli žiaci základných škôl a ich rodičia lepšie rozhodnúť pre ďalšie štúdium v závislosti od toho, akú vysokoškolskú budúcnosť si predstavujú. Týmto procesom by sa mohla značne zvýšiť efektivita vzdelávacieho procesu na Slovensku avšak pre verný obraz by bol nutný zber veľkého množstva údajov, čo sa môže zdať veľmi náročné. Avšak a postupnou informatizáciou sa už dnes zadávajú hodnotenia do tzv. internetových žiackych knižiek a akademických informačných systémov. Prepojením týchto databáz by sa proces zberu údajov značne zjednodušil a výsledky analýzy by hovorili nie o vernom obraze ale o skutočnej úspešnosti.

Zoznam použitej literatúry

Knižné zdroje

1. G.HORÁKOVÁ-V.HUŤKA. 2010. *Teória Pravdepodobnosti*. 2010 1.vyd. Bratislava: EKONÓM, 2010. 238 strán. ISBN 978-80-225-2888-7
2. L.BENKO a kol. 1986. *Matematika pre ekonómov 2*. 1986 1.vyd. Bratislava: Alfa, 1986. 416 strán. ISBN 63-555-86

Internetové zdroje

3. AZCITATY: Kalinčiak J. [online]. [cit. 2014-26-3]. Dostupné na internete: <<http://azcitary.cz/jan-kalinciak/34596/>>
4. KATEDRA MATEMATIKY PFKU: Skotnická I. [online]. [cit.1-4-2014] Dostupné na internete: <<http://math.ku.sk/tkacik/predmety/download/hm/prace/skotnicka.pdf> >
5. WESTERN MICHIGAN UNIVERSITY: Mackey N. [online]. [cit.2014-26-3]. Dostupné na internete: <<http://homepages.wmich.edu/~mackey/Teaching/145/probHist.html>>