

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: 103003/I/2014/1399126427

**SIMULÁCIA VÝVOJA CENY AKCIÍ**

**Diplomová práca**

**2014**

**Bc. Michal Pleva**

**EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY**

**SIMULÁCIA VÝVOJA CENY AKCIÍ**

**Diplomová práca**

**Študijný program:** Operačný výskum a ekonometria

**Študijný odbor:** 6258 Kvantitatívne metódy v ekonómii

**Školiace pracovisko:** Katedra operačného výskumu a ekonometrie

**Školiteľ:** doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Michal Pleva  
**Študijný program:** Operačný výskum a ekonometria (Jednoodborové štúdium, inžiniersky II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii  
**Typ záverečnej práce:** Inžinierska záverečná práca  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Simulácia vývoja ceny akcií

**Anotácia:** Pri riešení problémov výberu portfólia vznikajú problémy so stanovením očakávanej ceny akcií. Jedným z nástrojov použiteľným v danej oblasti je použitie simulácií. Cieľom práce je analyzovať možnosti použitia simulácií pri stanovení očakávanej ceny akcií.

**Vedúci:** doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.  
**Katedra:** KOVE FHI - Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI

**Dátum zadania:** 04.10.2012

**Dátum schválenia:** 07.11.2012

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.  
vedúci katedry

## **Čestné vyhlásenie**

**Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol (uviedla) všetku použitú literatúru.**

**Dátum: 25.4.2014**

.....

(podpis študenta)

## **Pod'akovanie**

Touto cestou by som sa rád vyjadril pod'akovanie doc. Mgr. Jurajovi Pekárovi, PhD., vedúcemu tejto záverečnej práce, za odborné rady a cenné pripomienky, ktorými prispel k vyššej kvalite jej vypracovania.

Bc. Michal Pleva

## **Abstrakt**

Bc. PLEVA, Michal : *Simulácia vývoja ceny akcií*. – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie. – Vedúci záverečnej práce: doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD. – Bratislava FHI EU, 2014, 68 s.

Cieľom záverečnej práce bolo analyzovanie možností použitia simulácií pri stanovení očakávanej ceny akcií. Práca je rozdelená do štyroch kapitol. Obsahuje 18 grafov, 5 tabuliek, 8 obrázkov a 4 prílohy. Prvá kapitola je venovaná analýze súčasného stavu možností obchodovania na finančných burzách. Ďalej sa venuje opisu významných svetových búrz Frankfurst Stock Exchange a New York Stock Exchange a vybraných akciových indexov DAX S&P 500. Klasifikácia simulácií a využitých modelov GBM, GARCH poskytne prehľad v súvislosti s finančným modelovaním. Druhá časť kladie dôraz na stanovenie hlavného cieľa v súvisi s parciálnymi cieľmi. Tretia kapitola sa zaoberá popisom matematických a všeobecných teoretických metód a postupov použitých pri skúmaní danej problematiky. Záverečná kapitola sa zameriava na integráciu prostredia programu Matlab s odhadom parametrov modelov a ich následnou simuláciou. Ďalej v tejto časti analyzujeme problémy pri odhadovaní parametrov v oboch modeloch. Pri modeli GBM je to konštantnosť volatility a pri modeli GARCH predovšetkým podmienená heteroskedasticita. Výsledkom riešenia problematiky je prehľadná postupnosť krokov a analýza simulovaných modelov.

### **Kľúčové slová:**

cena akcie, akciový index , simulácia, Wienerov proces, Brownov pohyb, geometrický Brownov pohyb, náhodná prechádzka, volatilita, drift, GARCH

## **Abstract**

Bc. PLEVA, Michal : *Simulation of stock prices.* – University of Economics in Bratislava. Faculty of Business Informatics, The Department of Operations Research and Econometrics. – Supervisor: doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD. – Bratislava FHI EU, 2014, 68 p.

The aim of this master thesis was to analyze different possibilities of using simulations when estimating expected price of equities. The thesis is divided into the four chapters. It contains 15 graphs, 5 tables, 8 pictures and 4 attachments. The first chapter is dedicated to the analysis of current possibilities of trading on the stock markets. Then it proceeds to a description of characteristics of Frankfurt Stock Exchange and New York Stock Exchange, world's important stock exchanges, and selected stock market indices DAX and S&P 500. Lastly, it classifies simulations and used models geometric Brownian motion and Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. The second chapter defines the main objectives of the thesis with respect to the partial goals. The third chapter contains description of mathematical and general theoretical methods and procedures used during the research of the topic. The final chapter is aimed to integrate MATLAB environment to estimate parameters of models and consequently to commence models simulations. Then we discuss problems at parameter estimations in both models, namely uniformity of volatility at GBM and conditional heteroscedasticity at GARCH. The results of the problem analysis are clear step by step procedures and the analysis of simulated models.

### **Key words:**

Stock price, stock index, simulation, Wiener process, Brownian motion, Geometric Brownian motion, random walk, volatility, drift, GARCH

## Obsah

Úvod .....	9
<b>1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí.....</b>	<b>12</b>
1.1 Burza a niektoré pojmy .....	12
1.2 Možnosti obchodovania na burze cenných papierov .....	15
1.2.1 Slovenská republika.....	16
1.1.1 Európa.....	17
1.1.2 Spojené štáty americké (USA).....	20
1.3 Simulácia vývoja ceny akcií .....	23
1.3.1 Modelovanie ceny akcie .....	25
1.3.2 Stochastický proces (Stochastic process).....	28
1.3.3 Metóda Monte Carlo (Monte Carlo Method).....	28
1.3.4 Wienerov proces a geometrický Brownov pohyb (Wiener process and geometric Brownian motion).....	29
1.3.5 GARCH(1,1) pre modelovanie stochastickej volatility .....	33
<b>2 Cieľ práce .....</b>	<b>35</b>
<b>3 Metodika práce a metódy skúmania .....</b>	<b>36</b>
3.1 Geometrický Brownov pohyb.....	36
3.2 GARCH(1,1).....	39
<b>4 Výsledky práce a diskusia .....</b>	<b>41</b>
4.1 Identifikácia dát .....	41
4.2 Odhad historických parametrov a konštrukcia modelov .....	42
4.2.1 Model GBM.....	42
4.2.2 Model GARCH(1,1).....	46
4.3 Simulácia modelov .....	54
4.3.1 Simulácia modelom GBM.....	54
4.3.2 Simulácia modelom GARCH(1,1) .....	59
<b>Záver .....</b>	<b>64</b>
<b>Zoznam použitej literatúry .....</b>	<b>65</b>



## Zoznam skratiek:

NYSE	- New York Stock Exchange.
S&P 500	- Standard and Poor's 500
FSE	- Frankfurt Stock Exchange.
DAX	- Deutscher aktien index (German stock index)
NASDAQ	- National association of Securities Dealers Automated Quotations
DB	- Deutsche Börse Group.
MMC	- Metóda Monte Carlo.
BM	- Brownov pohyb.
GBM	- Geometrický Brownov pohyb.
ARCH	- Autoregresný model podmienenej heteroskedasticity.
GARCH	- Zovšeobecnený model ARCH.

## Úvod

Pojem simulácia, simulátor alebo simulant nachádzame v slovníku a to vo viacerých možných významoch a vedných disciplínach. Jedným z najčastejších býva tento výraz používaný ako synonymum k slovám predstierať, či napodobňovať (deti v útlom veku simulujú chorobu, starší zase prekvapenie pod vianočným stromčekom). Pojmom simulátor býva označený objekt, ktorý do určitej miery napodobňuje funkčnosti, stavy alebo procesy určitého napodobňovaného objektu (počítačový softvér, hra imitujúca let lietadla, trénažér v autoškolách). Výraz simulant používame na označenie simulujúcej osoby. Medzi najvšeobecnejšie definície možno zaradiť túto „Simulácia je numerická metóda zložitých pravdepodobnostných dynamických systémov pomocou experimentovania s počítačovým modelom“<sup>1</sup>. Jedná sa ale zjavne o špecifický typ simulácie, ktorý nazývame počítačová simulácia. V prevažnej časti tejto práce budeme pojmom simulácia rozumieť práve simuláciu počítačovú, pretože práve tú využívame v ekonómii a financiách najčastejšie.

V slovníku moderného ekonóma sa čoraz častejšie nachádza práve slovo simulácia ako vedecká metóda a najmä tou sa budeme zaoberať v tejto práci. Simulácia je imitácia reálnych vecí, stavov, vzťahov alebo procesov. Môžeme ju považovať za numerickú metódu zložitejších systémov pomocou experimentovania s počítačovým modelom. Keď nazrieme do histórie počítačového simulačného modelovania nemali by sme opomenúť jej významné medzníky ako sú rok 1930 – fyzik Enrico Fermi simuloval náhodné premenné vo výpočtoch, ktorých cieľom bolo popísať vlastnosti novoobjaveného neutrónu, ďalej roky 1941 – 1946 fyzik J. Robert Oppenheimer – „Manhattan Project“, ktorý pri nukleárnej zbrane (atómová bomba) prvýkrát využil metódu Monte Carlo. Metódu Monte Carlo spopularizovali fyzici Stanislav Ulam, John von Neumann, Nicolas Metropolis, ktorá sa ďalej využívala v hazardovaní kasínach -práca s náhodnými premennými. Neskôr počítačová simulácia a metóda Monte Carlo nachádza uplatnenie vo fyzike, chémii, ekonómii, psychológii, sociológii a v operačnom výskume<sup>2</sup>. V

---

<sup>1</sup> DLOUHÝ, M. a kol.: *Simulace pro ekonomy*. 2. vyd. Praha: Oeconomica, 2005, 10 s. ISBN 80-245-0155-4.

<sup>2</sup> U.S GOVERNMENT PRINTING OFFICE 1986-676-104/400. Dostupné na internete : <<http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?00326886.pdf>>

ekonometrickej a finančnej teórii sa moderne k opisu vývoja trhu aktív či vývoja makroekonomických ukazateľov využívajú stochastické diferenciálne rovnice. Brownov pohyb alebo Wienerov proces patriaci do rodiny Lévyho procesov, tvorí stochastickú zložku tejto diferenciálnej rovnice. Jeho rôzne modifikácie kvoli svojim vlastnostiam výborne aproximujú volatilitu a trend vývoja ceny aktíva. Brownov posun objavil biológ Robert Brown v roku 1827. Geometrický Brownov pohyb je používaný na simulovanie cien akcií v Black-Scholesovom modeli a je najrozšírenejším v spojitosti so správaním sa cien akcií.

Hlavným cieľom práce je zdôrazniť a poukázať na význam simulačných techník na peňažnom trhu, ďalej načrtnúť integráciu s počítačovým softvérom a poskytnúť jednoduchý podklad pre rozhodovanie finančného analytika. Práve použitie simulácií nám umožňuje odhadnúť budúcu hodnotu aktív pri stanovení očakávanej ceny akcií. V práci využijeme programovacie prostredie softvéru MATLAB<sup>3</sup> R2012a, ktorého skratka pochádza z názvu MATrix LABoratory. Tento nástroj určený na technické výpočty, vizualizáciu, analýzy dát, programovanie algoritmov, preto by mal čitateľ ovládať základnú úroveň programovacieho jazyka vychádzajúceho z programovacieho jazyka Fortran. V práci uvádzame len komentáre vytvorených skriptov a funkcií pre jednoduchšie pochopenie. Naopak, poskytujeme oboznámenie sa s problematikou výpočtu nasimulovanej ceny indexov akcií v rôznych iteráciách.

Práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej kapitole postupne vymedzíme možnosti obchodovania na burzách cenných papierov s klasifikáciou najznámejších búrz. Vytvoríme základný koncept simulačnej techniky v kontexte všeobecne známych a akceptovaných metód. Pojednáme o zásadách, metódach a postupoch, ktoré sú nevyhnutnou podmienkou jej korektnej realizácie. Zadefinujeme si stochastický proces a z neho odvodíme definíciu geometrického Brownovho pohybu. Tiež sa zameriame na spôsoby využitia modelu GARCH(1,1) pri modelovaní stochastickej volatility. V druhej kapitole stručne vymedzíme cieľ a parciálne ciele tejto práce. V tretej kapitole popíšeme metodické postupy, použité modely s opisom ich parametrov. Prakticky sa ku simulácii dostaneme vo štvrtej časti. Definíciou matematického aparátu geometrického Brownovho pohybu (GBP) v Matlabe pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice odvodíme model pre výpočet následnej simulácie. GBP sa využíva najmä pri modelovaní ceny akcií. Korešponduje s logikou vývoja ceny akcie argumentom, že relatívne

---

<sup>3</sup> Viac informácií, inštruktážne videá a rady na [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

prírastky GBP nie sú závislé na hodnote procesu (ceny akcie). Keďže nevýhodu GBM je konštantnosť volatility po úplný čas simulovania aplikujeme sofistikovanejší spôsob pre odhad stochastickej volatility pomocou modelu ARCH, respektíve jeho zovšeobecnenej forme, modelu GARCH. Tento model uvažuje zmenu disperzie (rozptyl) v čase. Aplikovanie modelov uskutočníme na dvoch cenových indexoch svetoznámych a zároveň najväčších búrz v intervale obdobia za roky 2010-2013. Prvou je najväčšia burza na svete s hlavným sídlom v New Yorku - NYSE<sup>4</sup> s indexom S&P 500<sup>5</sup>. Ako druhý index si vyberieme DAX<sup>6</sup>, ktorého majiteľom je najväčšia európska burza cenných papierov, Frankfurt Stock Exchange – FSE, vo Frankfurte. Z dát k vykresleniu modelu použitím GBP potrebujeme odhadnúť parametre drift a volatility. Pri modeli GARCH(1,1) musíme odhadnúť viaceré parametre na základe ktorých dokážeme predpovedať budúcu cenu akcie.

V poslednej, záverečnej stati zhodnotíme simulačné metódy modelov a finálnou analýzou porovnáme ich silné a slabé stránky. Rozsah práce nám nedovoľuje sa venovať obšírnosti otázok búrz, obchodovaniu na trhoch cenných papierov a využitiu ďalších modelov. Existuje ďalšia spleť modifikácií modelov a preto sa v práci odkazujeme aj na takú literatúru, ktorá poskytne hlbšie informácie týkajúce sa tejto problematiky.

---

<sup>4</sup> New York Stock Exchange – najväčšia burza cenných papierov na svete so sídlom v New Yorku

<sup>5</sup> S&P 500 - index obsahujúci viac než 500 druhov akcií, spoločne obchodovateľných na NYSE a NASDAQ. Komponenty a ich váhy sú determinované podľa S&P Dow Jones Indices

<sup>6</sup> Deutscher Aktien Index meria výkonnosť 30-tich veľkých nemeckých spoločností obchodovaných na Franfurtskej burze. Ceny sú preberané z elektronického obchodného systému Xetra, vznikol v roku 1988

# 1 Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

V tejto kapitole sa zameriame na vymedzenie niektorých pojmov, na možnosti obchodovania na burzách cenných papierov s ich klasifikáciou. Vytvoríme základný koncept simuláčnej techniky v kontexte všeobecne známych a akceptovaných metód. Pojednáme o zásadách, metódach a postupoch, ktoré sú nevyhnutnou podmienkou jej korektnej realizácie. Predstavíme vybrané modely a poskytneme opis v histórii ich používania.

## 1.1 Burza a niektoré pojmy

Vo výbere nasledujúcich pojmov sme považovali za dôležité najmä to, že úzko súvisia s riešenou problematikou v tejto práci.

### Akcia

Akcia je predstaviteľom základného imania spoločnosti a zároveň najviac obchododujúcim cenným papierom na kapitálovom trhu. Na vlastníctvo tohto finančného ekvivalentu (akcionára) sa viaže aj schopnosť podielania sa na riadení spoločnosti, zisku a likvidačnom zostatku<sup>7</sup>. Akciová spoločnosť sa považuje za emitenta ich upisovaním a predajom na finančnom trhu. Povinnosťou akciovej spoločnosti je určenie výšky základného imania a menovitej (nominálnej) hodnoty akcie za ktorú ju bude na finančnom trhu neskôr obchodovať.

V slovenskej legislatíve sa stretávame s dvomi druhmi akcií, a to v zaknihovanej alebo listinnej podobe, pričom listinná má zákonom predpísané záležitosti. Skladá sa z plášťa a kupónového hárka s talónom. Plášť pritom musí obsahovať obchodné meno a sídlo spoločnosti potvrdzujúci vlastnícky vzťah k akciovej spoločnosti, výšku základného imania, nominálnu hodnotu akcie, počet akcií, miesto registrácie akciovej spoločnosti, údaje o prevoditeľnosti, podpisy členov predstavenstva, dátum emisie, v prípade akcií na meno majiteľa. Kupónový hárok a talón slúžia na inkaso dividendy. Kupónový hárok obsahuje kupóny, kde na každom musí byť

---

<sup>7</sup> Všetky práva a povinnosti súvisiace s vlastníctvom akcií sa viažu na legislatívny poriadok (*Obchodný zákonník č. 513/1991 Zb., Dostupný na internete: <<http://www.zakonypreludi.sk/zz/1991-513>>* ) a stanovby akciovej spoločnosti

uvedený názov akciovej spoločnosti s počtom akcií, poradové číslo kupónu, dátum inkasa dividendy a pod. Pre legitimáciu a vydávanie nových kupónových hárkov slúži talón.

V zaknihovanej podobe ide o záznam v zákonom stanovenej evidencii. Záznam ostáva v pamäti počítača, čo znižuje náklady na emisiu a akcionár dostáva potvrdenie vlastníctva formou výpisov. Tento záznam nahráda listinný cenný záznam.

## Index

Indexy sú tzv. súhrnnými ukazovateľmi stavu vývoja cenných papierov. Premietajú “náladu na trhu”, najmä pokiaľ hovoríme o spoločenských a ekonomických tendenciách, stabilite postavenia na trhu alebo o vývoji danej skupiny podnikov, hospodárskeho odvetvia ale aj celého štátu. Jedným z najznámejších je Dow Jones Industrial Average<sup>8</sup>.

## Burza

Burza je obzvlášť špecifickým druhom trhu s charakteristicky vysokým stupňom organizácie, kde v súlade s právnymi predpismi a burzovými pravidlami stretáva ponuka a dopyt po burzovom tovare, avšak pri porovnaní napríklad s klasickým veľtrhom abstrahuje od fyzického predmetu obchodovania, ktorý sa nenachádza na mieste uzatvorenia obchodu. Úplné znenie zákona o burze cenných papierov je z 18. júna 2002 č. **429/2002 Z.z.**<sup>9</sup> Podmienky burzy, typy prípustných obchodov a miesto konania sú jasne vymedzené burzovými orgánmi. Burzy sú síce od seba navzájom odlišné, no možno ich zjednotiť podľa faktorov do niekoľkých systémov.

### Z hľadiska predmetu burzového obchodu možno deliť na :

- **Komoditné (tovarové) burzy** - *„Komoditná burza je právnická osoba so sídlom na území Slovenskej republiky, založená ako akciová spoločnosť, ktorá organizuje komoditné obchody, zabezpečuje s tým súvisiace činnosti na základe povolenia na vznik a činnosť komoditnej burzy podľa tohto zákona“*<sup>10</sup>

---

<sup>8</sup> DJIA – Charles Dow (1896) jeden z najznámejších indikátorov amerického trhu, obsahujúci 30 stabilných spoločností s vedúcou pozíciou na trhu. Napr. IBM, Intel, Coca-Cola, Microsoft.

<sup>9</sup> Zákon Národnej rady Slovenskej republiky č. 429/2002 Z.z. o burze cenných papierov

<sup>10</sup> Zákon Národnej rady Slovenskej republiky č. 92/2008 Z.z. o komoditnej burze a o doplnení zákona Národnej rady Slovenskej republiky č. 145/1995 Z. z. o správnych poplatkoch v znení neskorších predpisov

Vysoko rozvinutým a svižným obchodovaním s komoditami je známe napr. americké mesto Chicago (CME) s jeho niekoľkými tovarovými burzami, ale aj New York (NYMEX), Londýn (LME) a pod.

- **Burzy služieb** - Tento typ búrz sa vyskytuje napr. v oblasti poisťovníctva.
- **Peňažné burzy**<sup>11</sup> - zameriavajú sa na obchodovanie s finančnými aktívami, aj preto sú niekedy nazývané burzami finančnými. Jedná sa o promptné obchody s klasickými nástrojmi ako sú devízy, futurity, opcie. Podľa **typu finančných aktív** ich možno deliť na:
  - **burzy cenných papierov** – nazývajú sa aj efektovými burzami, obchoduje sa na nich najmä s klasickými cennými papiermi formou promptných obchodov,
  - **devízové burzy** – „*pôvodný typ peňažnej burzy, špecializovanej na obchodovanie s devízami, ktorej funkciu prevzali neskôr banky. (...) Bola jedným z faktorov ovplyvňujúcich devízový kurz.*“,<sup>12</sup>
  - **termínové a opčné burzy** – na tomto type búrz sa formou termínového obchodu uzatvárajú kontrakty na finančné deriváty, ako sú napr. futurity.<sup>13</sup>
- **Burzy lodného priestoru** – jedná sa najmä o oblasť lodiarstva (priestor lodí v New Yorku, Londýne), kde sa obchoduje s jeho produktmi. Neskôr sa obchody presúvajú na mimoburzové trhy.

### Techniky obchodovania

Ako sme sa už zmienili o tom, že burza je mimoriadne organizovaným obchodom pričom nadobúda vysokú koncentráciu ponuky a dopytu po burzovom tovare tak za ďalší predpoklad jej môžeme priradiť súťaživosť jej obchodníkov. Svoju reputáciu si buduje okrem iného aj kvalitou poskytovaných služieb uvažujúc rýchlosť, spoľahlivosť a bezpečnosť obchodných transakcií. Jej príjmy tvoria z najväčšej časti provízie, pričom tvoria asi percento z objemu uzatvorených burzových obchodov, tieto sa však nerozdeľujú medzi akcionárov ale sú použité na ďalší rozvoj burzy.

---

<sup>11</sup> Pre detailnejšie rozdelenie pozri SERENČEŠ, P. 2011. Bankové Operácie. Nitra: SPU, 2011. Str. 30. ISBN 978-80-552-0602-8.

<sup>12</sup> Králik, J. – Jakubovič, D. 2004. Slovník finančného práva. 1. vyd. Bratislava: Veda, 2004. 28 s. ISBN 80-2240814-X.

<sup>13</sup> V súčasnosti však už prísne odlišovanie burzy cenných papierov a búrz termínových a opčných stráca svoje opodstatnenie, keďže na väčšine búrz cenných papierov sa obchoduje aj s finančnými derivátmi, teda predmet ich činnosti zahŕňa aj vykonávanie termínových a opčných transakcií.

**Dôležitá je ich charakteristika podľa využitia výpočtovej techniky pri uskutočňovaní burzových obchodov, a potom môžeme rozlíšiť typy búrz:**

- **Mechanické (tradičné) burzy** – obchody na nich sa uskutočňujú v burzovej hale, kde dochádza k osobným kontaktom účastníkov burzových obchodov.
  - **prezenčné (čiasťočne automatizované) burzy** – využíva sa na nich výkričný systém (open outcry), rovnako ako je to pri mechanických burzách, avšak tu sa ponuka a dopyt nezapisuje na čiernu tabuľu, používa sa totiž podpora počítačových terminálov a signalizačnej techniky.
  - **elektronické (úplne automatizované) burzy** – obchody na tomto type sú uzatvárané na tomto type búrz prostredníctvom elektronických zariadení. Automatizované burzy sú napr. v Londýne, London Stock Exchange využívajúci systém SETS (The Stock Exchange Electronic Trading), v Štokholme sú obchody uzatvárané pomocou terminálov na burze SAX (Stockholm Automated Exchange). Ďalšie elektronické burzy sa nachádzajú napr. aj v Toronte, Kodani a mnohých iných mestách.

S výrazným pokrokom telekomunikačných a výpočtových technológií a ich využívaním v takmer každej oblasti sa taktiež v súvislosti s trendom globalizácie viac než logickým javom do popredia postupne dostali burzy elektronické, spĺňajúce nároky na flexibilitu a schopnosť sprostredkovať obchody v nemalom objeme za krátky čas a to všetko za podmienok kladených na medzinárodný obchod zo strany jeho účastníkov.

## **1.2 Možnosti obchodovania na burze cenných papierov**

V nasledovnej kapitole sa zmienime o slovenskej a o dvoch svetoznámych burzách. Najskôr predstavíme Bratislavskú burzu cenných papierov, ktorá vznikla v súlade s rozhodnutím Ministerstva financií SR v roku 1990 a je v súčasnosti zároveň jediným organizátorom regulovaného trhu s cennými papiermi. Trh je členený na trh kótovaných cenných papierov a regulovaný voľný trh. Ďalšou v poradí je Frankfurt Stock Exchange, jedna z najväčších búrz



v Európe a jej korene siahajú až do obdobia stredovekých veľtrhov. New York Stock Exchange je špičkou amerického ale aj celosvetového rozmeru búrz akcií a derivátov.<sup>14</sup>

### *1.2.1 Slovenská republika*

Ako sme sa už zmienili, akcia je majetkový cenný papier predstavujúci podieľanie sa na majetkovej účasti spoločnosti. Výhoda emitovania akcií za účelom získania dlhodobého financovania je tá, že na rozdiel od bankových pôžičiek alebo dlhopisov spoločnosť upúšťa od platenia úrokov. Naopak, akcionár získava nákupom akcie právo na podiel z hospodárskeho výsledku, právo na riadenie a právo na podiel z likvidačného zostatku v prípade bankrotu spoločnosti. Najvyšším riadiacim orgánom akciovej spoločnosti je valné zhromaždenie, ktoré každoročne rozhoduje o spôsobe naloženia so ziskom (stratou) a následným rozdelením dividend prípadne reinvestovaním do ďalšieho rozvoja. Odhliadnuc od dividend, dobre riadená a perspektívna firma môže mať potenciál rastu hodnoty akcie, ktorý sa môže prejaviť práve pri predaji na sekundárnom trhu, na burze cenných papierov.

Pre investora predstavuje najdôležitejší cieľ zistenie nadhodnotenia alebo podhodnotenia spoločnosti konfrontujúc jej aktuálnu trhovú cenu. Ako príklad môžeme uviesť výpočet tzv. vnútornej hodnoty akcie a táto by bola výrazne nižšia ako momentálna trhovú cenu, vzniká potenciálna príležitosť pre investora. Analyticky aj pri spoločnosti vybranej s relatívne nižším ocenením ako jej konkurencia za predpokladu dočasnej anomálie, ktorá bude v blízkej budúcnosti odstránená zvýšením trhovej hodnoty nami vybranej podhodnotenej spoločnosti.

Niekedy sa burzy delia aj na všeobecné a špecializované podľa toho, či sa na nich obchoduje s rôznymi objektmi, alebo je škála obchodovaných objektov úzko vyprofilovaná.

#### **Z hľadiska právnej formy rozlišujeme:**

- **verejnoprávne burzy** teda burzy zakladané štátom vo forme verejnoprávnych inštitúcií,
- **súkromnoprávne burzy** zakladané obchodníkmi a finančníkmi, a to najčastejšie vo forme akciových spoločností.

---

<sup>14</sup> Meranie veľkosti NYSE bolo uskutočnené podľa trhovej hodnoty kótovaných akcií – trhovú kapitalizáciu v roku 2014/04 \$16,6 bil.

**Technika obchodovania na burze je kritériom, podľa ktorého sa burzy členia na:**

- **tradičné (mechanické) burzy,**
- **prezenčné burzy,**
- **elektronické burzy.**

V súčasnosti na Slovensku pôsobí množstvo slovenských, ale aj zahraničných brokerov, cez ktorých môžeme obchodovať na rôznych Európskych burzách. BCBP vznikla 15. Marca 1991 v súlade s rozhodnutím Ministerstva financií SR. Na burze sa začalo obchodovať 6. apríla 1993. Jej činnosť sa riadi burzovými pravidlami, ktoré boli koncipované na základe skúseností fungujúcich európskych a svetových búrz a z legislatívy platnej v Slovenskej republike.<sup>15</sup>

V zmysle Pravidiel pre prijatie cenných papierov na trhy burzy, ktoré sú súčasťou Burzových pravidiel BCPB, je možné obchodovať s cennými papiermi na trhu kótovaných cenných papierov a na voľnom trhu burzy. Trh kótovaných cenných papierov sa ďalej člení na kótovaný hlavný trh a kótovaný paralelný trh. Voľný trh nie je členený na ďalšie segmenty.

Najvyšším orgánom burzy je valné zhromaždenie akcionárov, ktorými sú Fond národného majetku SR, najväčšie slovenské peňažné ústavy, investičné, brokerské a poisťovacie spoločnosti (viď nižšie Zoznam akcionárov Burzy cenných papierov v Bratislave, a.s.). Štatutárnym orgánom je predstavenstvo a kontrolným orgánom dozorná rada. Výkonným orgánom burzy, ktorý riadi jej činnosť je generálny riaditeľ.<sup>16</sup>

### *1.2.2 Európa*

Korene *FWB* ® *Frankfurter Wertpapierbörse* (Frankfurt Stock Exchange – ďalej len FSE), siahajú do doby stredovekých veľtrhov. Jesenný veľtrh vo Frankfurte sa najprv zmienil počas sviatku všetkých svätých v roku 1150. Jesenný veľtrh má svoj pôvod v 11. storočí ako veľtrh úrody. Od roku 1330, kedy cisár Ľudovít Bavorský rozšíril toto privilégium zahrňujúce aj

---

<sup>15</sup> Od roku 2001 vykonáva BCPB svoju činnosť na základe povolenia Úradu pre finančný trh č. UFT-003/2001/BCP, ktoré nadobudlo právoplatnosť dňa 26.6.2001. S účinnosťou od 1.5.2008 BCPB organizuje mnohostranný obchodný systém - MTF.

<sup>16</sup> Pre získanie podrobnejších informácií na <<http://www.bsse.sk/>>

jarný veľtrh, čo sa malo za následok zvýšenie oobchodných a peňažných transakcií ako aj atraktivnosť návštevnosti mesta. FSE patrí do Deutsche Börse Group (ďalej len DB) medzi najväčšie a najvýkonnejšie burzy sveta. DB usporadúva trhy s cennými papiermi už od roku 1585. Jej hlavnou úlohou bolo stanoviť fixné menové kurzy jednotlivých krajín. Oficiálne prvý kurzový lístok bol vytvorený v roku 1625. Začiatok FSE siaha až do obdobia stredoveku veľtrhov. Na FSE sa spočiatku obchodovalo s obligáciami a jedny z prvých akcií boli kótované v roku 1820. Zintenzívnenie obchodu s akciami sa prejavilo až ako reakcia na konkurenčné snahy berlínskej burzy. S históriou FSE sú neodmysliteľne spojení takí významní bankári ako Mayer Amschel Rothschild a Max Warburg. FSE bola pôvodne súkromnou spoločnosťou, vlastnenou skupinou niekoľkých obchodníkov. Po tom ako v roku 1808 prevzala kontrolu nad burzou obchodná komora, sa FSE stala verejnoprávnou inštitúciou. Ani jedna svetová vojna nezanechala frankfurtskú burzu bez následkov mohutných finančných strát a napriek tomu, že bola medzinárodne orientovaná, v dôsledku vojnových konfliktov boli všetky styky prerušené. Prebratie kontroly nacistami nad všetkými burzovými operáciami počas 2. svetovej vojny zodpovedá veľmi výraznému zníženiu burzového efektu. Rok 1949 znamenal znovuzískanie líderstva na nemeckom burzovom trhu. FSE mala okrem iných výhod oproti iným burzám aj tú, že sa nachádzala v tesnej blízkosti významných bankových inštitúcií.

Za zodpovednosť nemeckej marky až do roku 2002, kedy bolo v Nemecku zavedené euro, ručí nemecká centrálna banka Bundesbank sídliaca vo Frankfurte už od roku 1957. Európska centrálna banka je ďalšou dôležitou inštitúciou so sídlom vo Frankfurte. Založená bola v roku 1998. Okrem týchto sa tu nachádza množstvo komerčných bánk medzinárodného významu, ako napr. Commerzbank a Deutsche Bank. FSE je od roku 1993 súčasťou skupiny Deutsche Börse AG. DB je organizátorom trhu s akciami a inými cennými papiermi. Poskytuje prístup investorom a firmám na svetové kapitálové trhy.<sup>17</sup> FSE má prvenstvo v osemčlennom rebríčku nemeckých búrz, pričom jej obrat reprezentuje až 90 percent národného trhu. Hoci sa na FSE obchoduje aj tradičným spôsobom (na parkete burzy), väčšina obchodov sa uzatvára prostredníctvom plneautomatizovaného elektronického systému Xetra, ktorý bol na burze zavedený v roku 1997.<sup>18</sup>

---

<sup>17</sup> Deutsche Börse vlastní okrem FSE aj futures burzu Eurex a clearingovú spoločnosť Clearstream.

<sup>18</sup> FSE. 2014. *History of Frankfurt Stock Exchange* [online]. Frankfurt. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : <<http://www.advfn.com/StockExchanges/history/FSE/FrankfurtStockExchange.html>>

FSE sa delí na viacero trhov a ponúka záujemcom dva rôzne spôsoby vstupu na burzový trh. Jeden spôsob vstupu je regulovaný predpismi EÚ a druhý je regulovaný samotnou burzou. S výberom prvej alternatívy súvisí splnenie tzv. Prime Standard alebo General Standard. Ide o naliehavosti stanovené normami EÚ, ktorých akceptovanie znamená pre firmy prijatie na Official Market alebo Regulated Market. Pri výbere druhej alternatívy musia firmy splniť Entry Standard. V tomto prípade sú prijaté na Open Market (Unofficial Regulated Market). Je to jednoduchší spôsob vstupu na trh. V Entry Standard sú požiadavky už zahrnuté, čo znamená menšiu náročnosť pre firmy a tým naa transparentnosť a náklady ako je to v prípade prvých dvoch „štandardov“. Tento spôsob vstupu na trh využívajú najmä malé a stredné spoločnosti.<sup>19</sup>

FSE patrí medzi najvýznamnejšie európske burzy, pretože na elektronickej platforme Xetra obchodujú spoločnosti z až osemnástich európskych štátov. Obchodné hodiny na FSE sa líšia v závislosti od typu trhu a cenných papierov. Na parkete je možné obchodovať od pondelka do piatka, medzi 9:00 a 20:00. Obchodné hodiny boli predĺžené s cieľom prispôbiť čas obchodovania severoamerickému trhu. K takémuto predĺženiu došlo aj na iných obchodných platformách frankfurtskej burzy.

Zaujímavým faktom je, že DB sa niekoľkokrát pokúšala získať London Stock Exchange aj Euronext. Financial Times informovali o tom, že adekvátne spojenia bude zrejme hľadať na ázijskom trhu a vo východnej Európe, po tom ako 15. novembra 2006 upustila od kúpy Euronextu.

## **DAX**

Deutscher Aktien Index DAX, vznikol s počiatočnou hodnotou 1000 bodov v roku 1988. Skladá sa z 30 veľkých nemeckých spoločností, ktoré obchodujú na FSE. Komponenty indexu a ich váhy uvádzame v Prílohe 1. Jedná sa o „blue chip“<sup>20</sup> index akciového trhu, ktorého ceny sú prevzaté do elektronickeho obchodného systému Xetra. Podľa DB, prevádzkovateľ Xetra DAX meria výkon 30 najväčších nemeckých firiem Prime Standard., pokiaľ ide o objem obrátov

---

<sup>19</sup> Deutsche Börse Group. 2014. *Market Structure*. [online]. Germany. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : Dostupné na internete <[http://deutsche-boerse.com/dbag/dispatch/en/kir/gdb\\_navigation/listing/10\\_Market\\_Structure?>](http://deutsche-boerse.com/dbag/dispatch/en/kir/gdb_navigation/listing/10_Market_Structure?>)

<sup>20</sup> Blue chip sú prvotriedne, priam „spoľahlivé“ cenné papiere, s ich kúpou sa spája menšie riziko

a vysokú trhovú kapitalizáciu. Na to aby sa spoločnosť mohla stať komponentom indexu, potrebuje splniť všetky podmienky týkajúce sa doby umiestnenia na burze. Momentálne je doba umiestnenia 3 roky, potom počet akcií, ktoré sú obchodovateľné, objem obchodov, trhovú kapitalizáciu a zároveň prezentáciu na nemeckej trhovej ekonomike. Trhová kapitalizácia predstavuje 75 percent z celkového objemu akciového trhu. Je potrebné si uvedomiť skutočnosť, že tento ako aj iné európske indexy sú ovplyvnené nielen európskymi, ale aj celosvetovými javmi ekonomického vývoja.

### *1.2.3 Spojené štáty americké (USA)*

*New York Stock Exchange (NYSE)* je najväčšou, najlikvidnejšou a najznámejšou burzou cenných papierov sveta. Na NYSE sú obchodované akcie najväčších a najbonitnejších amerických spoločností, ale aj akcie prestížnych zahraničných firiem. NYSE vznikla v roku 1792 na základe podpisu Buttonwoodskej dohody. Ako prvé obchodované cenné papiere na tejto burze boli akcie spoločnosti Bank of America. Burza prijala svoj štatút v roku 1817 a uznala svoj oficiálny názov New York Stock and Exchange Board. V roku 1863 sa zmenil názov na New York Stock Exchange (NYSE). Prvé priestory burzy boli na Wall Street na dolnom Manhattane, o niečo neskôr sa trvalé sídlo burzy presťahovalo na vedľajšiu Broad Street.

Od svojho vzniku NYSE vykonávala svoju činnosť nepretržite až na niekoľké výnimky v krátkych časových horizontoch, počas ktorých musela obchodné priestory pre burzovú verejnosť zatvoriť. Za jej najdlhší výpadok mala najväčšiu spoluvinu Prvá svetová vojna v prvých štyroch mesiacoch jej vypuknutia. Obchod s obligáciami kvôli financovaniu vojnových operácií jej napomohol znovuotvoriť burzové obchody. Ako druhú vinu možno uviesť dôsledok teroristických útokov na New York 11. septembra 2001, kedy bola zatvorená na štyri dni.

NYSE patrí medzi najznámejšie burzy na svete. V roku 1929 sa dostala do povedomia krachom, ktorý predchádzal svetovej hospodárskej kríze. NYSE ako aj ostatné americké burzy je akciovou spoločnosťou. Číslo 1366 je dlhodobým stálym počtom členov burzy. Členom burzy sa môže stať len fyzická osoba. Zabezpečiť pozíciu na burze si môže firma, ktorá menuje niektorého zo svojich riaditeľov. Po získaní kresla sa oficiálny burzový reprezentant stane členom burzy. Takto reprezentovaná organizácia sa nazýva členskou organizáciou.

Board of Directors, to je predstavenstvo burzy, ktoré vykonáva kontrolu nad burzovými predpismi a zároveň rozhoduje o členoch burzy. Nie je závislým orgánom od menežmentu burzy. Skladá sa zo 6 až 12 riaditeľov a predsedu.<sup>21</sup>

Board of Executives sú fyzické osoby, ktoré reprezentujú účastníkov burzových obchodov. Dohľad nad činnosťou NYSE spolu s ostatnými americkými burzami vykonáva komisia (The Securities and Exchange Commission) a Kongres spojených štátov amerických. Na NYSE obchodujú dve základné skupiny: house brokers a špecialisti.<sup>22</sup>

House brokers sú zamestnanci firiem s povolením obchodovania na burze. Vykonávajú nákupy alebo predaje na účet firemných klientov. V dňoch zvýšeného burzového záujmu vypomáhajú independant brokers vykonávaním objednávok brokerských firiem, ktoré nemajú svojho zástupcu.

Špecialisti zastávajú ako účastníci burzového trhu viacero významných funkcií. Zabezpečujú kontakt brokerov, ktorí vykonávajú nákup a predaj cenných papierov. Rovnako pôsobia ako aukčný subjekt, kde otváraciu cenu stanovujú každý obchodný deň. Ak house broker je viazaný cenou stanovenou limitovaným príkazom, predá klientov príkaz špecialistovi, ktorý zrealizuje obchod pri prvej výhodnej príležitosti. Ak je potrebné vyrovnať dočasnú nerovnováhu príkazov, očakáva sa od špecialistov aby vystupovali ako díleri na vlastný účet. Okrem špecialistov môžu obchodovať na vlastný účet aj individuálni členovia burzy.

Na burze NYSE sa obchoduje s akciami významných svetových spoločností. Tieto spoločnosti sú nazývané „blue chips companies“. <sup>23</sup> Predkladaním účtovných uzávierok spoločností preukazujú dodržiavanie právnych predpisov. Nedodržiavanie oznamovacích povinností je trestané sankciami NYSE.

Významným historickým medzníkom je rok 2006, kedy sa NYSE spojilo s sprostredkovalom elektronických obchodov Archipelago Holdings. Pre majiteľov kresiel to znamenalo prínos 80177 akcií novovzniknutej spoločnosti s názvom NYSE Group. Pre burzu ako

---

<sup>21</sup> BENEŠ, V., MUSÍLEK, P. 1992. *Burzy a burzovní obchody*. 2. vyd. Praha : Informatorium, 1992. 118 - 119 s. ISBN 8085427257.

<sup>22</sup> New York Stock Exchange. 2014. *About the organization*. [online]. New York. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : <<http://www.nyse.com/about/theorganization/1091545088167.html>>

<sup>23</sup> Ako “blue chip companies” sa označujú veľké dôveryhodné obchodné spoločnosti, známe svojou schopnosťou vytvárať zisk, často vyplácať dividendy a taktiež širokou škálou kvalitných služieb. Proti hospodárskym výkyvom sú väčšinou veľmi dobre zabezpečené. Ich akcie sa nazývajú “blue chip stocks“.

takú to znamenalo posilnenie konkurencieschopnosti. Spojením uzatvárania zmlúv na burzovom parkete a elektronickou cestou sa tak NYSE podarilo eliminovať výhodu hlavného konkurenta NASDAQ.<sup>24</sup> Zároveň sa na NYSE začalo obchodovať s finančnými derivátmi.<sup>25</sup> Rovnako ako NYSE, NYSE Group zachovala pôvodnú organizačnú štruktúru burzy. Zmena nastala v tom, že burza samotná sa stala obchodovateľnou akciovou spoločnosťou. Zlúčenie NYSE Group s paneurópskou burzou Euronext nastalo v máji 2006. Nová spoločnosť bude mať názov NYSE Euronext. Sídlo bude v New Yorku. Kmeňové akcie NYSE Euronext budú kótované na burzách NYSE Group a Euronext, obchodovať sa s nimi bude v lokálnej mene.

## S&P 500

Standard & Poor's 500 Index je akciový index založený na trhovej kapitalizácii, pozostávajúci z 500 veľkých amerických spoločností, ktoré obchodujú svoje akcie na NYSE alebo NASDAQ. Komponenty indexu a ich váhy sú determinované podľa **S&P Dow Jones Indices**.<sup>26</sup> Je jednoduchšie ho odlíšiť od ostatných amerických akciových indexov, ako sú napr. Dow Jones Industrial Average alebo Nasdaq Composite index, a to vďaka svojej rozmanitej voľbe okruhu a metodiky váh. Ide o jeden z najčastejšie sledovaných akciových indexov, a mnohí ho považujú za jeden z najlepších na reprezentáciu amerického akciového trhu a ekonomiky.<sup>27</sup> Národný úrad pre ekonomický výskum ho označil ako indikátor hospodárskych cyklov.<sup>28</sup> S&P uviedlo svoj prvý akciový index v roku 1923. Drvivú väčšinu, takmer 20% akcií tvorí sektor informačných technológií. Najvyššie intra denné hodnoty indexu sú práve v dnešných dňoch 4. apríl - 1897,<sup>28</sup> a hodnota s najvyššou uzávierkou 2. apríl - 1890,9.

---

<sup>24</sup> European Commission. 2013. Protection of personal data [online]. Justice. 2014. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <[http://ec.europa.eu/justice\\_home/fsj/privacy/docs/wpdocs/2006/wp117\\_sk.pdf](http://ec.europa.eu/justice_home/fsj/privacy/docs/wpdocs/2006/wp117_sk.pdf)>

<sup>25</sup> SOCHOR, J. 2006. *NYSE zmení podobu i služby* [online]. Ihned.cz. 2006. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <[http://ihned.cz/1-10076480-22879125-001000\\_d-43](http://ihned.cz/1-10076480-22879125-001000_d-43)>

<sup>26</sup> Pre viac informácií a získanie úplnej metodológie <<http://www.spindices.com/services/spice/>>

<sup>27</sup> INVESTOPEDIA. 2014. Standard & Poor's 500 Index - S&P 500 [online]. Investopedia. 2014. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <<http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>>

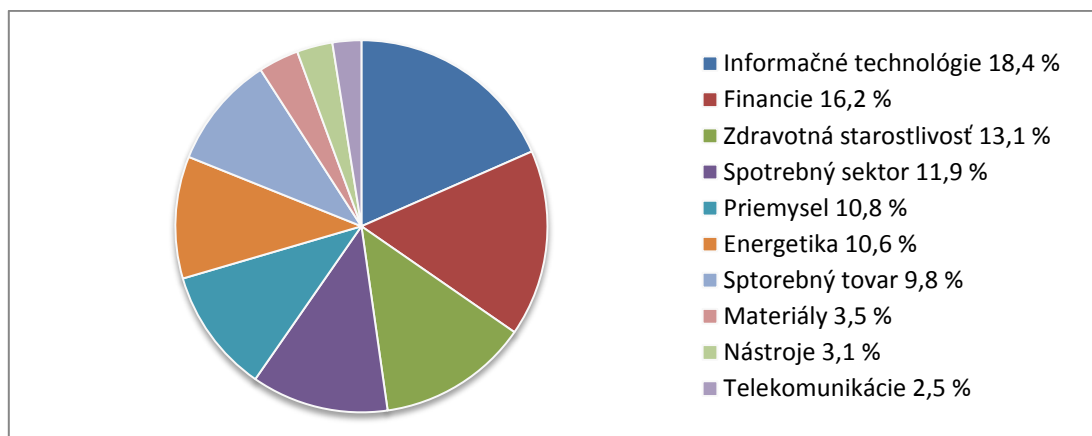
<sup>28</sup> RENSHAW, E. 2002 The Stock Market, Oil Price Shocks, Economic Recessions and the Business Cycle With An Emphasis on Forecasting [online]. Some Featured Highlights 2002, [cit 2014-04-05] Dostupné na internete: <[http://www.albany.edu/cer/bc/bc\\_essays.html](http://www.albany.edu/cer/bc/bc_essays.html)>

- **Kalkulácia trhovej váhy indexu**

$$\text{Hodnota indexu} = \frac{\sum(P_i * Q_i)}{\text{Deliteľ}}$$

kde  $P_i$  je cena akcie v indexe,  $Q_i$  je počet akcií verejne k dispozícii a *Deliteľ* predstavuje celkovú trhovú kapitalizáciu všetkých spoločností v indexe. Pre príklad, ak by celková upravená trhovú kapitalizácia zo zásob 500 komponentov mala hodnotu \$14 biliónov a deliteľ \$9 miliárd, potom by sa hodnota indexu rovnala \$1555,56.

**Graf 1 Rozdelenie sektorov v indexe S&P 500**



Zdroj: S&P Dow Jones Indices LLC - Vlastné spracovanie v MS Excel 2010

### 1.3 Simulácia vývoja ceny akcií

Simulácia si vyžaduje okrem znalostí v danom odbore aj vyššiu úroveň matematických, štatistických a inforatických poznatkov. To samozrejme ale nezaručuje úplné zachytenie zložitej spleti vzťahov skúmanej reality. Aj napriek tomu, že korektná simulácia do istej miery záleží aj od „citu“ či „umenia“ analytika, existujú všeobecné zásady metodické postupy, ktorých by sa počítačová simulácia mala pridržovať.<sup>29</sup>

- **Prečo používať simuláciu ?**

Simulácia, tak ako ju definuje väčšina zdrojov, pracuje s určitým modelom, teda idealizovanou podobou skutočného sveta. Tento fakt, samozrejme nevylučuje, možnosť získania poznatkov o svete reálnom. Umožňuje nám pochopiť a kontrolovať komplexné stochastické

<sup>29</sup> DLOUHÝ, M. a kol. 2005. Simulace pro ekonomy. 2. vyd. Praha: Oeconomica, 2005, 18-52 s. ISBN 80-245-0155-4.



systemy. Na určitej úrovni zjednodušenia, môžeme povedať, že simulácia predstavuje experimentáciu s modelom. Nachádza sa teda na pomedzí už vymenovaných všeobecných vedeckých metód.

- **Modelovanie systému**

Kvalitný model by mal uľahčiť pochopenie systému, a to buď analyticky, numericky, alebo pomocou simulácie. Ďalej by mal zachytiť charakteristické detaily, vynechané faktory, ktoré sú relevantné. Predpokladom realizácie simulácie je vytvorenie určitého modelu. Realizácia simulácie potom predstavuje experiment s modelom. Modelovanie, tak ako je definované, sa od simulácie takmer neodlišuje. Simulácia (určite patrí do podmnožiny modelovania) umožňuje rozšíriť záber skúmania i na špecifické typy modelov, v ktorých uvažujeme náhodne premenné, teda premenné ktorých hodnota je výsledkom realizácie určitého špecifického typu pravdepodobnostného rozdelenia. Realizovať simuláciu je samozrejme možné aj u deterministických modelov, obzvlášť v prípadoch, kde by bol výpočet (zistenie) výsledku experimentu s daným modelom príliš zložitý.

„Experiment môžeme charakterizovať ako cieľavedome navodený proces, pozmeňujúci spontánnosť prírodných procesov priamym pôsobením technickými nástrojmi a experimentálny objekt alebo menením podmienok, v ktorých sa objekt nachádza a tým zisťovanie zmien, ktoré takto nastanú“<sup>30</sup>.

- **Kroky v modelovaní**

„Modelovanie je špecifickým pokračovaním experimentu, kedy reálny objekt nahrádzame modelom. Slovo model je odvodené z latinského modulus (miera, takt, rytmus, veličina) a zo slova modus (kopia, obraz)“<sup>31</sup>.

- **Identifikácia systému** vrátane funkcií a stavových premenných, ktoré musia byť zahrnuté a ktoré by mali byť vylúčené,
- **vykonanie nevyhnutných** pravdepodobnostných predpokladov o stavových premenných a funkciách,
- **testovanie predpokladov,**

---

<sup>30</sup> PSTRUŽINA, K.: Atlas filosofie vědy (Fond rozvoje MŠMT F5 1747/1999) (Fond rozvoje MŠMT F5 1588/2002) dostupné aj na <<http://nb.vse.cz/kfil/win/atlas1/experim.htm>>, kap. Experiment

<sup>31</sup> PSTRUŽINA, K.: Atlas filosofie vědy (Fond rozvoje MŠMT F5 1747/1999) (Fond rozvoje MŠMT F5 1588/2002) dostupné aj na <<http://nb.vse.cz/kfil/win/atlas1/modelov.htm>>, kap. Modelování

- **identifikácia vstupov** a počiatočnej hodnoty stavových premenných,
- **vyriešenie modelu** buď analyticky, numericky alebo pomocou simulácie.
- **Problémy v simulácii**
  - Aké pravdepodobnostné rozdelenie majú premenné v modely ?
  - Ako môžeme vytvárať tieto náhodné premenné pre simuláciu ?
  - Ako analyzovať výstup simulácie ?
  - Koľko pozorovaní potrebuje simulácia ?
  - Ako môžeme zlepšiť účinnosť simulácie ?

### 1.3.1 Modelovanie ceny akcie

*„Model je zjednodušené zobrazenie študovaného systému pomocou verbálnych pravidiel, matematických rovníc, obrázkov či grafov.“<sup>32</sup>*

Na začiatok by bolo veľmi významné spomenúť ako je potrebné vnímať ceny akcií, najmä kvôli prípadu, že v reálnom svete obchodovania s cennými papiermi existuje len jedno rozhodnutie. Existuje veľa vplyvov, ktoré determinujú výsledok ceny akcie (ako sú napr. budúca hodnota aktív spoločnosti, ekonomická situácia trhu, politické rozhodnutia, správanie spotrebiteľa, atď.). Medzi prvé indikátory budúceho vývoja ceny akcie možno uviesť odhad očakávanej hodnoty  $\mu$  a rozptylu výnosu  $\sigma$ . V takom prípade potrebujeme dynamický model, ktorý berie do úvahy hľadisko času alebo dokonca kontinuálny vývoj cien. V praxi často používame model zvaný geometrický Brownov pohyb pre modelovanie cien akcií.

### Proces

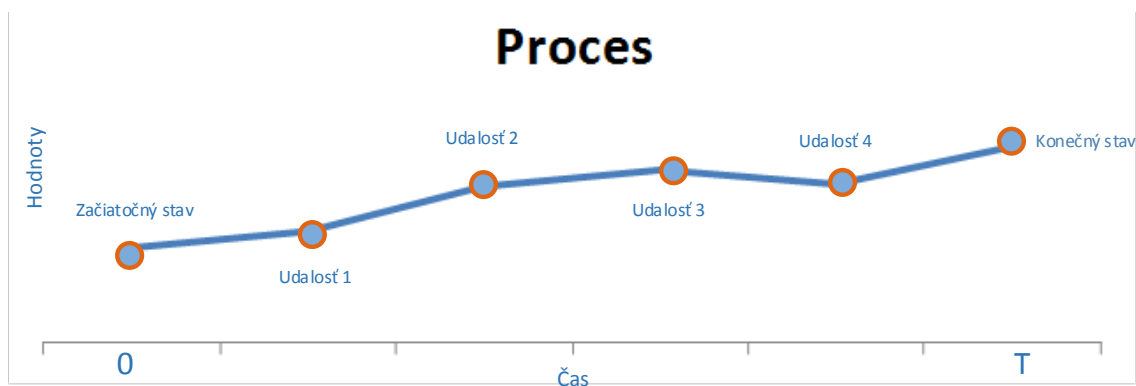
Proces môžeme definovať ako udalosť prebiehajúca v čase s úmyslom dosiahnúť určitý cieľ. Zvyčajne hovoríme o časovom období (intervale), ktorý nadobúda hodnoty od 0 do T. Počas toho sa môže stať niekoľko rozličných udalostí (Obrázok č.1). Napríklad vývoj ceny akcie.

---

<sup>32</sup> PAHOLOK, I. 2008. *Simulácia ako vedecká metóda*. E-LOGOS, *Electronic Journal for Philosophy*. 2008. 4 s. ISSN 1211-0442

Môžeme ho považovať za proces s určitým výsledkom a vplyv na zmenu ceny považujeme za udalosť.

Obrázok 1: Proces s udalosťami v čase



Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Visio 2013 a MS Excel 2010

### Ako sa vyvíja kurz akcie ?

Prognózovanie a simuláciu vývoja cien akcií môžeme považovať za veľmi zložitý a náhodný proces, najmä z toho dôvodu, že ekonomika je dynamický spoločenský systém, ktorý neusále "kmitá". Ako porovnanie môžeme uviesť napríklad meteorológiu, z jej dlhodobého hľadiska je prakticky nemožné predpovedať presné hodnoty.

Faktorov, ovplyvňujúcich cenu akcie je celý rad. Teória hovorí, že medzi najdôležitejšie patria vyhliadky spoločnosti, finančná sila a kapitálová štruktúra, alebo tiež vyššie dividendy. Tieto faktory však občas blednú pred vplyvom iracionálneho očakávania investorov na rast cien akcií. Každá akcia má **individuálny vývoj** kurzu. Napriek tomu možno odsledovať typický priebeh a niektoré štandardné situácie, v ktorých sa kurz akcie môže nachádzať. Denné kurzy vytvárajú krivku z ktorej možno vyčítať základný smer vývoja. Tento smer nazývame **trend**.

Cena vytvorená prostredníctvom konkrétneho burzového obchodu sa svojou podstatou ani procesom svojej tvorby takmer nelíši od ceny iného typu obchodu. Rozdiel možno nájsť akurát vo význame, ktorý má burzová cena nielen pre samotné strany obchodnej zmluvy, ale aj pre celé burzové publikum. Z cien všetkých burzových transakcií sa totiž príslušným orgánom burzy stanovuje oficiálny kurz, čiže všeobecná burzová cena. Kurz teda predstavuje trhovú cenu cenného papiera, vytvorenú na základe pomeru jeho ponuky a dopytu po ňom. Stav a vývoj kurzov nepochybne **výrazne ovplyvňuje** rozhodnutia účastníkov burzových obchodov, a preto aj

z tohto dôvodu musia byť pravidelne zverejňované. Denne vychádzajúci kurzový lístok predstavuje oficiálne zverejnenie kurzov obchodovaných cenných papierov, pričom akcie a obligácie sa zaznamenávajú oddelene. Informačná burzová činnosť je však zabezpečovaná napr. aj svetelnými signalizačnými tabuľami v blízkosti búrz, bánk, alebo iných obchodných, prípadne tlačových centier, ako je napr. Reuters Plaza v Londýne.

**Vývojom na burzách** sa zaoberajú aj mnohé renomované printové médiá, ako napr. londýnske *Financial Times*, alebo newyorský *The Wall Street Journal*, ktoré prinášajú podrobné finančné štatistiky a odborné ekonomické analýzy.

Kurzy sú teda významným faktorom ovplyvňujúcim burzové rozhodnutia, zároveň sú však východiskom mimoburzových cien a ceny dosahované na burze „bývajú i merítkom pre určenie výšky náhrady škody v súdnych sporoch (...).“<sup>33</sup> Je to dané najmä vysokým počtom účastníkov burzových obchodov a obratom týchto obchodov, čiže kurz vytvorený zohľadnením celkovej ponuky a celkového dopytu sa najviac približuje skutočnej trhovej hodnote predmetu obchodu.

Kurz sa **môže stanovovať priebežne**, kedy sa pružne reaguje na každý nový podnet zo strany ponuky alebo dopytu, alebo fixingom, kedy sa zmeny v ponuke alebo dopyte zohľadňujú periodicky k určitému stanovenému časovému úseku. Technik určovania kurzov je viacero a v praxi sa techniky stanovenia burzových cien na jednotlivých burzách od seba viac či menej odlišujú.

### **Volatilita (Volatility)**

*"There are three kinds of risks: volatility, volatility of volatility, and the standard error of the volatility of volatility" - Peter Carr*

Na finančnom trhu sa ceny aktív ako sú akcie, dlhopisy, komodity, kurzy a urokové miery tendenčne menia svoju hodnotu v čase. Ak ide o zmeny veľké, indikuje to volatilitu aktív. Aby sme sa vyjadrili korektné, volatilita meria relatívnu zmenu aktíva za daný čas. V ekonomickej (finančnej) teórii a vo finančnej matematike je definovaná ako štandardná odchýlka ( $\sigma$ ) náhodného Wienerovho procesu, pomocou ktorého modelujeme vývoj ceny aktíva. Zachytáva

---

<sup>33</sup> DĚDIČ, J. 1992. *Burza cenných papírů a komoditní burza*. 1992, s.146. ISBN 80-85431-62-9.

mieru fluktuácie, ktorá znamená pre investora riziko, ed. al vyššia volatilita - vyššie riziko. Existuje niekoľko prístupov odhadovania volatility. Historické koncepty tvrdia, že volatilita je implikovaná, nemení sa v čase a teda je konštantná. Podľa novodobého prístupu je realite veľmi vzdialený a volatilita sa časom mení, čo bolo experimentálne overené. Jej štandardné vyjadrenie sa uvádza v percentách. Pre opis **stochastickej volatility** sa využívajú dve premenné. Prvou z nich je výnos ( $\mu$ ) aktíva, ktorá je pozorovateľná a druhou je nepozorovateľná volatilita. Obidve premenné obsahujú náhodné zložky, ktoré sú navzájom korelované. Tým, že pripustíme nenulovú koreláciu, môžeme zachytiť známy leverage effect.

### 1.3.2 Stochastický proces (Stochastic process)<sup>34</sup>

Nech je daný pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \alpha, P)$  a indexová množina  $T$ . Súbor náhodných veličín

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

potom nazývame *stochastický proces*.

Zjednodušením označenia obdobne ako pri náhodných veličinách, kde namiesto  $X(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  píšeme len  $X$ , budeme pri stochastických procesoch používať nasledovný tvar:

$$\{X(t), t \in T\}$$

Index  $t \in T$  v našom prípade označuje čas.

V prípade, že platí  $T = \mathbb{Z}$  alebo  $T \subseteq \mathbb{Z}$  hovoríme o stochastickom procese s diskretným časom. Ak  $T$  je interval reálnych čísiel obmedzený, alebo neobmedzený, hovoríme o stochastickom procese so spojitým časom. Ak náhodné veličiny  $X(t)$  nadobúdajú iba diskkrétne hodnoty, hovoríme o procese s diskretnými stavmi. Ak  $X(t)$  nadobúda hodnoty z nejakého intervalu, hovoríme o procese so spojitými stavmi.

### 1.3.3 Metóda Monte Carlo (Monte Carlo Method)

MMC je stochastická metóda, čo znamená, že hľadaný výsledok je získavaný na základe výpočtu pravdepodobnosti. Medzi tvorcov tejto metódy patrí predovšetkým J. von Neumann, E.

---

<sup>34</sup> ŠEVČOVIČ a spol. 2009. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU Bratislava. 2009. 22 s. ISBN 978-80-227-3014-3.

Fermi a N. Metropolis. Jej prudký rozvoj datujeme od konca druhej svetovej vojny, kedy sa začali v oblasti atómového výskumu využívať počítače. Štatistické základy metódy formuloval v tejto dobe J. von Neumann.

#### **Riešenie rozdelíme do troch krokov**

- **Rozbor problému a návrh modelu**
  - z hľadiska riešenia problému sa jedná o najdôležitejší krok. Hoci je MMC použiteľná prakticky vo všetkých problémoch a jej formulácia nie je zložitá, nájdenie vhodného postupu môže neskúsenému riešiteľovi činiť nie malé problémy.
- **Generovanie náhodných čísel, ich transformácia na čísla s daným pravdepodobnostným rozdelením**
  - tento krok sa spravidla používa ako opakovanie cyklu, pokiaľ sa hľadaná hodnota príliš nelíši od hodnoty danej výpočtom. Rýchlosť konvergencie chyby výsledku k nulovej hodnote sa rovná prevrátenej hodnote odmocniny z počtu realizovaných simulácií (pokusov). Z toho plynie, že nepatrí medzi najefektívnejšie hodnoty.
- **Štatistické spracovanie výsledkov**
  - hľadaná hodnota je spravidla daná niektorým z momentov štatistických veličín, najčastejšie strednou hodnotou ( $\mu$ ).<sup>35</sup>

#### *1.3.4 Wienerov proces a geometrický Brownov pohyb (Wiener process and geometric Brownian motion)*

Ako sme sa už zmienili v úvodnej časti tejto práce, k opisu vývoja trhu aktív či vývoja makroekonomických ukazateľov využívajú stochastické diferenciálne rovnice. Brownov pohyb alebo Wienerov proces patriaci do rodiny Lévyho procesov, tvorí stochastickú zložku tejto diferenciálnej rovnice. Jeho rôzne modifikácie kvoli svojim vlastnostiam výborne aproximujú volatilitu a trend vývoja ceny aktíva. Brownov pohyb bol objavený škótskym biológom

---

<sup>35</sup> TESARĚ, J., BARTOŠ, P. 2006. *Metoda Monte Carlo a programovací jazyk MATLAB při přípravě učitelů na pedagogických fakultách. Technical computing Prague 2006, 14th Annual Conference Proceeding.* Praha. 2006. 26 s. ISBN 80-7080-616-8.

Robertom Brownom (1773 - 1858) v roku 1827, keď študoval nepravidelný pohyb čiastočiek peľu vo vode prostredníctvom mikroskopu, ktorý však nevedel zdôvodniť. Po opakovaní experimentu s čiastočkami prachu dospel k záveru, že pôvod pohybu ostal nevysvetliteľný. Fyzikálnu podstatu tohto javu neskôr objasnil Albert Einstein (1879 - 1955) a empiricky tak dokázal aj existenciu molekúl a atómov. Louis Bachelier (1870 - 1946) bol prvým, ktorý použil Brownov pohyb na modelovanie stochastického vývoja ceny akcie vo svojej práci „*Teória špekulácie*“ (1900).<sup>36</sup> Jeho práca aplikujúca pokročilú matematiku v ekonómii a financiách je prvou, čím si Bachelier zaslúžil prívlastok otca kvantitatívnych metód vo financiách. O čosi neskôr americký matematik Norbert Wiener (1894 - 1964) zaoberajúci sa stochastickými procesmi, v roku 1923 dokázal existenciu Brownovho pohybu, čím aj naštartoval popularitu využitia tohto procesu ako rozumnej aproximácie rôznych prírodných javov. Na jeho počesť prevzal matematický aparát Brownovho pohybu názov Wienerov proces. Niektorí autori tieto pojmy stotožňujú, iní vnímajú Wienerov proces ako špeciálny typ Brownovho pohybu.

V odbore finančnej ekonomiky boli vytvorené a aplikované teórie, ktoré predpokladajú, že ceny akcií sledujú určitý typ stochastického procesu nazývaného Markovov proces. Tento proces hovorí, že cena akcie v nasledujúcom období je náhodnou veličinou, jej pravdepodobné rozdelenie závisí len od aktuálnej spotovej ceny, a nie od histórie vývoja ceny akcie. Historická cena akcie nemá pre predpoveď jej budúcej ceny žiaden význam. Modely správania sa cien cenných papierov sú zvyčajne vyjadrené formou, ktorá je známa ako **Wienerov proces**.

- **Vlastnosti Brownovho pohybu**

Niektoré dôležité vlastnosti Wienerovho procesu by nemali ostať nepovšimnuté, a zároveň nám umožnia aj lepšie pochopenie jeho správania.

**Preto uvedieme pre Wienerov proces tieto tvrdenia**

- Wienerov proces nie je v žiadnom bode diferencovateľný, tzn. funkcia času nemá v žiadnom bode deriváciu aj napriek svojej spojitosti.

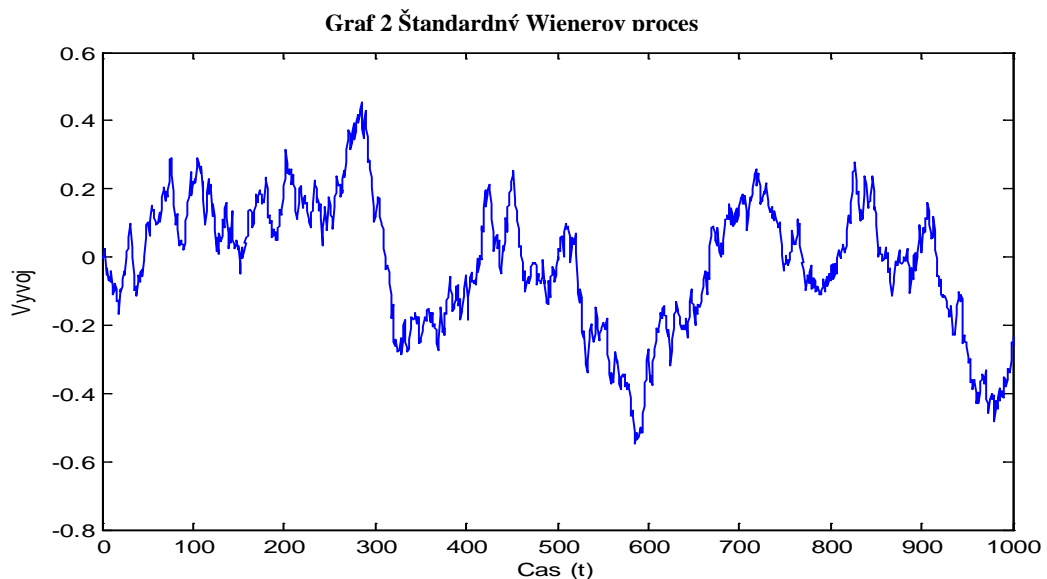
---

<sup>36</sup> BROWN R. 1866. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.* 1866. Philosophical Magazine N. S. 4. 161-173 s.

- Wienerov proces dokáže generovať akúkoľvek hodnotu v intervale  $[0,1]$  a opakovane generuje iné
- **Wienerov proces je stochastický proces  $\{W_t, t \in [0, T]\}$ , pre ktorý platia nasledujúce vlastnosti<sup>37</sup>**
  - a) všetky prírastky  $W_{t+\Delta} - W_t$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu\Delta$  a disperziou (varianciou)  $\sigma^2\Delta$
  - b) pre každé delenie  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n \leq T$  sú prírastky  $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu a).
  - c)  $W(0) = 0$

Brownov pohyb s parametrami  $\mu = 0$  a  $\sigma^2 = 1$  nazývame Wienerov proces.

Na grafe 2 vidíme štandardný Wienerov proces vygenerovaný použitím softvéru Matlab.



Zdroj: Vlastné spracovanie v programe Matlab R2012a

### Náhodná prechádzka

Je stochastický proces začínajúci so stavom 0. V každej diskretnej udalosti uvažujeme pravdepodobnosť  $P$  so šancou zmeny stavu o  $+1$  a so šancou  $1 - P$  je pravdepodobnosť poklesu stavu o 1. Udaloť sa stane  $T - krát$ , potom očakávaná hodnota  $T$  je

$$0 + T[P(+1) + (1 - P)(-1)].$$

<sup>37</sup> ŠEVČOVIČ a spol. 2009. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU Bratislava. 2009. 22-24 s. ISBN 978-80-227-3014-3.



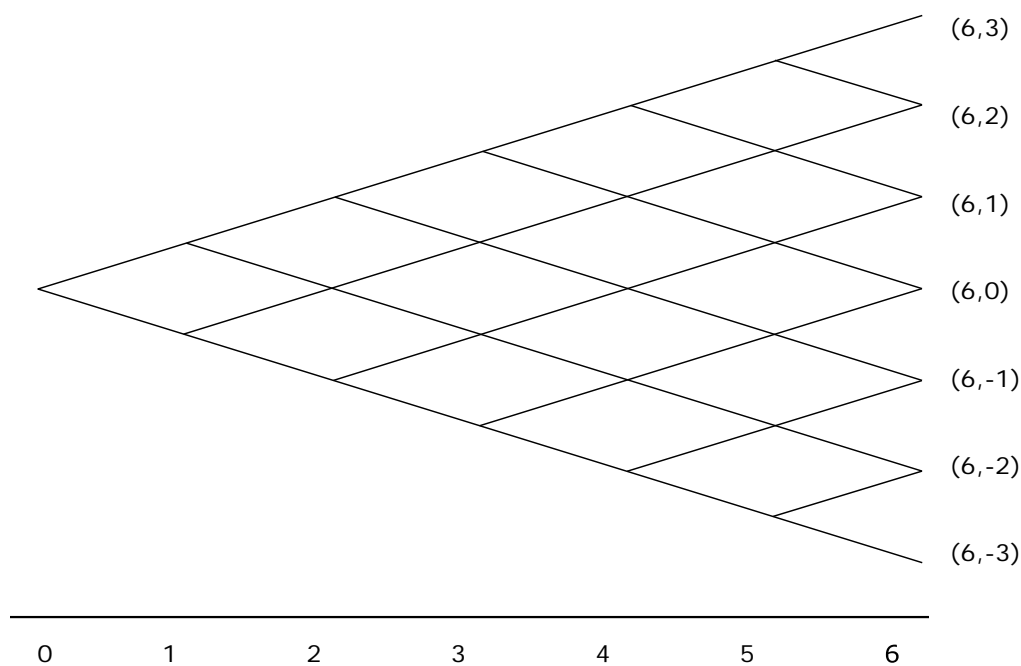
## Brownov pohyb konštruovaný pomocou náhodnej prechádzky

Majme časový interval  $[0; T]$ , ktorý rozdelíme na  $n$  častí rovnakej dĺžky  $\Delta t$  kde

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

krajný bod intervalu označme  $t_k = k\Delta t$  pre  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Predstavme si cenu akcie, ktorá sa pohybuje v čase. Spočiatku, v čase 0, je v bode 0. V každom ďalšom diskretnom bode času sa cena akcie s rovnakou pravdepodobnosťou posunie nahor alebo nadol. Veľkosť prírastku potom bude  $\sqrt{\Delta t}$ , za predpokladu, že všetky po sebe idúce prírastky sú navzájom nezávislé. Tento proces je známy ako symetrická (s použitím rovnakých pravdepodobností) náhodná prechádzka. Keď

Obrázok 2 Binomický strom pre  $n = 6, \Delta t = 1/6$



Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Visio 2013

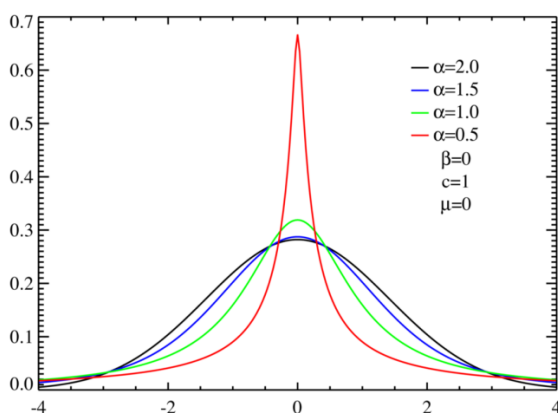
sme v čase 1 s hodnotou  $\sqrt{\Delta t}$ , potom v čase 2 nadobúdame  $\sqrt{\Delta t} + \sqrt{\Delta t} = 2\sqrt{\Delta t}$ , v opačnom prípade  $\sqrt{\Delta t} - \sqrt{\Delta t} = 0$ . Analogicky v čase 1 s hodnotou  $-\sqrt{\Delta t}$  v čase 2 nadobudneme hodnotu  $-\sqrt{\Delta t} - \sqrt{\Delta t} = -2\sqrt{\Delta t}$  alebo  $-\sqrt{\Delta t} + \sqrt{\Delta t} = 0$  atď. Kompletná schéma všetkých adekvátnych pozícií, ktoré môžeme nadobudnúť v diskretnom čase sa dá zakresliť do uzlov v tzv. binomickom strome.

### 1.3.5 GARCH(1,1) pre modelovanie stochastickej volatility

GARCH modelovanie nadväzuje na pokroky v pochopení modelovania volatility len v poslednom desaťročí. ARCH (Autoregressive conditional heteroskedastic) modely zaviedol Engle (1982) a rozšírenie na GARCH (generalized ARCH) modely Bollerssev (1986).<sup>38</sup> Tieto modely sa stali štandardnými nástrojmi v ekonometrii, a to najmä v oblasti empirických financií. Zovšeobecnený model autoregresnej podmienenej heteroskedasticity. Voľne povedané, môžeme myslieť heteroskedasticitu ako časovú premennú rozptylu (t.j. volatility). Podmienená znamená závislosť na pozorovaní bezprostrednej minulosti a autoregresná opisuje spätnú väzbu, mechanizmus, ktorý obsahuje predchádzajúce meranie do súčasnosti. GARCH je potom mechanizmus, ktorý zahŕňa odchýlky minulosti vo výklade budúcnosti odchýlky. Presnejšie povedané, GARCH je technika modelovania časových radov používajúca odchýlky minulosti a odchýlky prognóz minulosti na predpovedanie budúcich odchýlok. Sú schopné zachytiť dve dôležité funkcie, ktoré charakterizujú výnosy v časových radoch finančných aktív:

- **volatility clustering<sup>39</sup> alebo podmienená heteroskedasticita,**
- **rozšírená špicatosť a ťažké chvosty** (tj. chvosty v nepodmienenej distribúcii sú ťažšie ako v normálnom rozdelení).

Obrázok 3 Ťažké chvosty



Zdroj: Vlastné spracovanie v MATLAB R2012a

<sup>38</sup> MITTNIK, S.-PAOLELLA, S.-RACHEV, T. 2006. *Stationarity of stable power-GARCH processes*. Journal of econometrics. Karlsruhe, Germany. 2001. 98-99 s. ISSN 106-2002-97-107.

<sup>39</sup> TEYSSIÉRE, G. KIRMAN, P.A. 2007. *Long Memory in Economics*. Berlin: Springer, 2005. 266-267 s. ISBN-10 3-540-22694-X

Oba tieto javy boli pozorované už Mandelbrotom (1963), avšak vo svojej práci sa zameril na druhú časť a navrhol stabilné Paretovo rozdelenie ako model pre nepodmienené výnosy aktív. Myšlienka ťažkých chvostov a GARCH spolu súvisia. Diebold (1988) demonštroval, že GARCH proces s normálnym rozdelením generuje časové rady s ťažkými chvostami a nepodmienené rozdelenie. De Vries (1991) a Groenendijk et al. (1995) poukazujú na určité GARCH procesy, ktoré môžu dvíhať stabilitu Paretovho rozdelenia.

## 2 Cieľ práce

Hlavným cieľom práce je technická analýza možnosti použitia simulácii pri stanovení očakávanej ceny akciových indexov DAX a S&P 500. Pri modelovaní finančných procesov sa vo väčšine prípadoch využívajú ich výnosy, nie ich samotné ceny. Za hlavné dôvody sa považujú vyššia presnosť a výhodnejšie štatistické vlastnosti ako majú ceny akcií. Preto sa s ich časovými radmi pracuje oveľa ľahšie. Za parciálne dosiahnutie hlavného cieľa považujeme návrh dvoch modelov, ktoré v záverečnej časti štvrtej kapitoly budeme analyzovať a interpretovať.

Dozvieme sa, v akej postupnosti nasimulujeme vývoj a aké kroky nesmieme zanebať. Integráciou s počítačovým softvérom poskytneme jednoduchý podklad pre rozhodovanie finančného analytika. Použitie simulácií nám umožní odhadnúť budúcu hodnotu aktív pri stanovení očakávanej ceny akcií.

Pri identifikácii problému modelovania ceny akciových indexov bol cieľom výber tých najpodstatnejších názorov z kruhov tak ako domácich ale najmä svetových odborníkov a ich pretavenie do zrozumiteľnej interpretácie. V práci boli využité poznatky z analýz expertov na celosvetovom finančnom trhu.

V poslednej kapitole na základe získaných dát z voľne dostupného internetového zdroja aplikujeme modely geometrický Brownov pohyb a GARCH. Na základe prognózy vyhodnotíme možné dopady plynúce z týchto trendov. Ako sme sa už zmienili, k aplikácii budeme pristupovať prioritne prostredníctvom softvéru MATLAB ale na niektoré úlohy využijeme tabuľkový procesor Microsoft Excel 2010. Tieto nástroje sú určené na technické výpočty, vizualizáciu, analýzu dát a programovanie algoritmov. V práci uvádzame len komentáre vytvorených skriptov a funkcií pre rýchlejšie pochopenie. Naopak, poskytneme oboznámenie sa s problematikou výpočtu nasimulovanej ceny akciových indexov v rôznych iteráciách, pričom iteráciami myslíme počet opakovaných pozorovaní metódou Monte Carlo.

Analýzou poskytneme zrozumiteľný prehľad nasimulovaných prognóz a zdôrazníme silné a slabé stránky použitia vybraných modelov v porovnaní s reálnymi dátami. Toto docielime zobrazením odchýlok nasimulovaných modelov verzus reálne dáta.

### 3 Metodika práce a metody skúmania

Táto kapitola pojednáva o deskripcii vybraných modelov a ich parametrov, ktorými nasimulujeme vývoj budúcej ceny akciových indexov. Na simuláciu využijeme veľmi známu metódu využívanú pri numerických metódach vo financovaní - Monte Carlo. Na základe analýz vedeckých literatúr, článkov a príspevkov sme sa rozhodli použiť geometrický Brownov posun opisujúci vývoj ceny akciového indexu v čase a pre odhad stochastickej volatility použijeme ekonometricko-štatistický model GARCH(1,1).

#### **K zostrojeniu analýzy je potrebné vykonať tieto úlohy**

- Identifikácia dát.
- Odhad historických parametrov pre modelovanie.
- Konštrukcia modelov GBM a GARCH(1,1).
- Simulácia modelov metódou Monte Carlo.
- Vyhodnotenie výsledkov nasimulovaných udalostí.
- Porovnanie simulovaných udalostí s realitou.
- Porovnanie modelov pri kvalite odhadnutých parametrov.

#### **3.2 Geometrický Brownov pohyb**

Na základe teoretických a praktických poznatkov dokonalých trhov sa ceny aktív na finančných trhoch správajú náhodne a najmä nezávislo na predchádzajúcom vývoji. GBM je preto ideálnym nástrojom popisu ich stochastického vývoja. Wienerov proces ale nedokáže nadobudnúť záporné hodnoty, čo znamená, že cena akcie bude záporná. Keďže tento postup nezodpovedá realite vo finančných a ekonomických modeloch musíme vykonať jeho modifikáciu. Najfrekvencovanejším modelom je GBM, využívaný okrem iného, najmä na modelovanie ceny akcií a komodít.

V nasledujúcich definíciách definujeme GBM pohyb podľa<sup>40</sup>:

Nech  $\Delta t$  je časový úsek,  $S(t)$  a  $S(t + \Delta t)$  sú ceny akcií v určitom čase (v súčasnom čase  $t$  a v budúcom čase  $t + \Delta t$ ), a  $B(t)$  je prírastok Brownovho pohybu za čas  $\Delta t$ . Model pre vývoj cien akcií v diskretnom čase má tvar

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu\Delta t + \sigma\Delta B(t) \quad 3.1$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  sú konštanty. Táto rovnica nám hovorí o tom, že cena akcie rastie v čase  $t$  vzhľadom k jej aktuálnej hodnote nenáhodnou hodnotou  $\mu$  za jednotku času a mení sa náhodnou zmenou, ktorá je úmerná prírastku Brownovho pohybu za čas  $\Delta t$  s parametrom  $\sigma$ . Deterministická časť procesu (pri časovom diferenciáli  $\Delta t$ ) sa nazýva drift, stochastická časť (pri diferenciáli Wienerovho procesu  $\Delta W$ ) sa nazýva volatilita.

Hustota náhodnej premennej s normálnym rozdelením so strednou hodnotou  $\mu$  a s rozptylom  $\sigma^2$  má tvar

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad 3.2$$

Distribučná funkcia prírastku  $B(t + u) - B(t)$  má tvar

$$\mathbb{P}[B(t + u) - B(t) \leq a] = \int_{x=-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2u}} dx \quad 3.3$$

V spojitom čase vyjadríme GBM pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t) \quad 3.4$$

Pričom  $\mu$  nazývame deterministická zložka procesu a predstavuje konštantný parameter driftu zodpovedajúci očakávanej miere výnosu akcie, čo zn. za krátky interval  $dt$  vzrastie cena akcie o  $\mu S(t)dt$ . Druhý člen na pravej strane predstavuje stochastickú zložku procesu, ktorého súčasťou je Brownov pohyb. Parameter  $\sigma$  voláme volatilita a je rovný smerodajnej odchýlke výnosu, pričom ostáva konštantný počas celé obdobie modelovania.

---

<sup>40</sup> WIERSEMA, Ubbo F. 2008. *Brownian motion calculus*. England: JohnWiley & Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0-470-02170-5.

Keď položíme  $u = \ln S$ . Z Itôovej lemy<sup>41</sup> potom dostávame:

$$du = \left( \mu S \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S \frac{\partial u}{\partial S} dB(t) \quad 3.5$$

Pre vyjadrenie  $du$  potrebujeme parciálne derivácie funkcie  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad 3.6$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Po dosadení parciálnych derivácií do  $du$  dotaneme

$$du = \left( \mu S \frac{1}{S} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \right) S^2 \sigma^2 \right) dt + \sigma S \frac{1}{S} dB(t) \quad 3.7$$

Zjednodušením dostávame vzťah vyplývajúci z  $du$

$$du = d(\ln(S)) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma B(t) \quad 3.8$$

Dostávame sa k cene  $S$  v čase  $T$ .

$$\ln(S(T)) - \ln(S(0)) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \quad 3.9$$

$$\ln \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B(T)$$

Kde  $\ln \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right)$  má normálne rozdelenie s parametrami

$$\mathbb{E} \left\{ \ln \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right) \right\} = \mathbb{E} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \right] = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \quad 3.10$$

$$\mathbb{D} \left\{ \ln \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right) \right\} = \mathbb{D} \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B(T) \right] = \sigma^2 T$$

Stredná hodnota aj rozplyl rastú lineárne v čase.

Po konečnej úprave sa dostávame k finálnemu tvaru pre  $S(T)$ , ktorý využijeme pri modelovaní vývoja ceny indexov:

$$S(T) = S_0 e^{\left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B(T)} \quad 3.11$$

<sup>41</sup> ØKSENDAL, B. 2003. *Stochastic Differential Equations*. 5th ed. Berlin: Springer, 2003. ISBN 978-3-540-04758-2.

Tento model vďaka exponenciálne dokáže nadobúdať aj záporne hodnoty, čo by klasický Wienerov proces nedokázal.

### 3.2 GARCH(1,1)

Pri GBM sa stretávame s nevýhodou konštantnosti volatility po dĺžku celého simulovaného obdobia modelovania. Ako sofistikovanejší spôsob tohto odhadu sme si zvolili model GARCH. Kde volatility v čase  $t + \Delta t$  je určovaná časom  $t$ .

Pri aplikáciách týchto modelov bolo dokázané, že väčšina existujúcich procesov sa dá adekvátne modelovať za pomoci procesu GARCH(1,1)<sup>42</sup>.

Základný model sa skladá z podmienenej strednej hodnoty s GARCH(1,1) Gaussových reziduí založený na všeobecnej ARMAX forme. ARMAX modely zahŕňajú autoregresiu (AR), kľzavý priemer (MA) a regresie (X) :

$$v_t = C + \sum_{i=1}^R AR_i y_{t-i} + u_t + \sum_{j=1}^M MA_j u_{t-j} + \sum_{k=1}^{Nx} \beta_k X(t, k) \quad 3.12$$

Modifikovaná rovnica GARCH modelu má tvar :

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad 3.13$$

Kde  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  sú váhy. Parametrej pravej časti rovnice  $V_L$  je dlhodobá volatility (*long volatility*),  $u_{t-1}^2$  je druhá mocnina výnosov predchádzajúceho obdobia a  $\sigma_{t-1}^2$  je rozptyl výnosov predchádzajúceho obdobia. Pritom pre váhy musí platiť

$$\gamma + \alpha + \beta = 1 \quad 3.14$$

Všeobecný model GARCH( $p, q$ ) sa zakladá na posledných  $p$  pozorovaniach výnosov a na posledných  $q$  odhadoch rozptylu. Odvodíme si ešte vzťah pre výpočet podmieneného rozptylu, ktorý sa mení v čase

$$\sigma^2 = E(u_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad 3.15$$

Po dosadení  $\omega = \gamma V_L$  napíšeme GARCH(1,1) v tvare

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad 3.16$$

<sup>42</sup> RUPPERT, D. 2011. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*. Springer Texts in Statistics. 2011. 488 s. ISBN 978-1-4419-7786-1.



Tento tvar budeme používať pre odhad parametrov. Pre odhad parametrov  $\omega$ ,  $\alpha$  a  $\beta$ ,  $\gamma$  využijeme vzťah 3.14 a dlhodobú odchýlku vypočítame ju  $\omega/\gamma$ .

Kvôli stacionarite modelu zavádzame ďalšiu podmienku

$$\alpha + \beta < 1 \tag{3.17}$$

V opačnom prípade by sme dlhohodobej odchýlke priradili zápornú váhu.

## 4 Výsledky práce a diskusia

V nasledujúcej kapitole navrhujeme modely vývoja cien akciových indexov, využijeme a stanovíme si jasné podmienky a predpoklady ich realizácie. Pomocou simulácie metódou Monte Carlo nasimulujeme hodnoty modelov s odhadnutými parametrami. Tie vypočítame na základe historických údajov. Potom spravíme výpočet prognózy pre mesiac január v roku 2014. Mesiac január má pritom 22 obchodných dní, každý obchodný deň pre nás znamená dĺžku kroku. Pre vyriešenie týchto úloh použijeme modely GBM a GARCH(1,1). V záverečnej stati zanalyzujeme silné a slabé stránky týchto modelov a ponúkneme jednoduchý prehľad pre ich rozhodovanie. Ako zdroj dát nám posluží časový rad cenových indexov DAX a S&P 500 v období od 1.4.2010 do 31.12.2013. Dáta sme získali z oficiálneho internetového zdroja Yahoo! Finance<sup>43</sup>, ktorý poskytuje finančné informácie o kurzoch akcií, burzových indexov, firemných a tlačových správ a finančných výkazov. Zároveň ponúka aj niektoré online nástroje pre správu osobných financií.

### 4.2 Identifikácia dát

Prvým krokom pri práci s dátami, respektíve s časovými radmi, je dôležité identifikovať ich historický vývoj. V tejto práci sme použili časové rady dvoch cenových indexov DAX a S&P 500 v období od 1.4.2010 do 31.12.2013. Ich vývoj sme zobrazili ako hodnotu indexu v čase, ktorý je znázornený na grafe 3.

V Matlabe sme spustili funkciu, ktorá načíta zdrojové dáta:

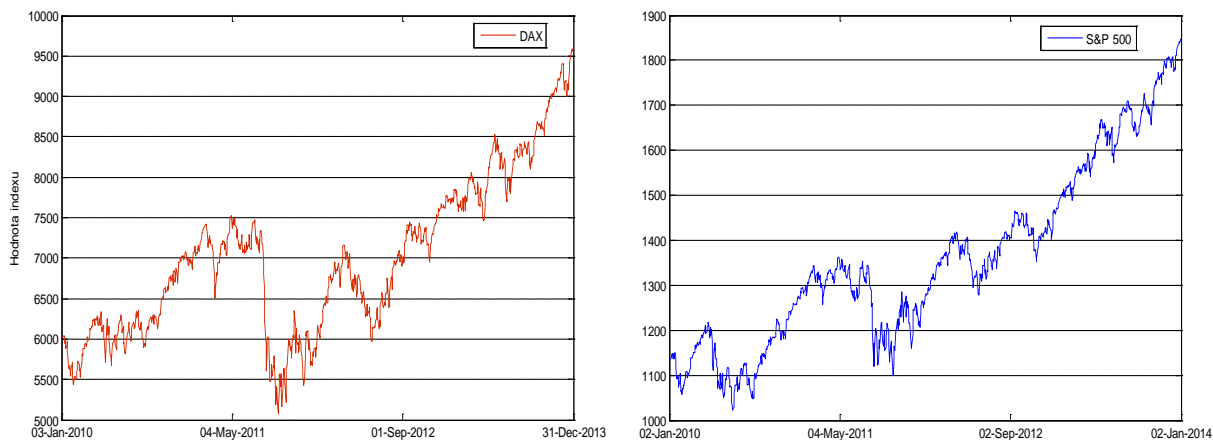
```
% Inicializácia premenných s načítaním dát
dax=load('DAX.txt'), sp500=load('SP500.txt');
% Vykreslenie grafu s popisom osí Y a X
plot(dax); ylabel('Hodnota indexu');xlabel('Počet simulácii')
```

Pre zobrazenie dát aj s časovou osou, sme museli využiť Finančný nástroj (Financial Toolbox), ktorého prinetscreen sa nachádza v Prílohe 2.

---

<sup>43</sup> [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)

**Graf 3 Historický vývoj DAX a S&P 500**



**Zdroj: Vlastné spracovanie Matlab R2012a**

Z nasledovných grafov dokážeme tvrdiť, že vývoj indexov v čase je veľmi identický a ich komponenty vystupujú vo vzájomnej korelácii. DAX reprezentuje finančnú situáciu na trhu v Nemecku a S&P 500 najmä spoločnosti na trhu USA. Ako príklad môžeme uviesť spoločnosť obchodujúcu na európskom trhu, ktorá je závislá od exportu na americkom trhu a naopak.

### **4.3 Odhad historických parametrov a konštrukcia modelov**

Základnou stavbou každého modelu sú jeho parametre. Pri ich odhadovaní si musíme dať záležať, pretože veľmi úzko nadväzujú na ďalšie kroky v modelovaní. Využijeme postupy podľa metodiky uvedenej v tretej kapitole.

#### **4.2.1 Model GBM**

S odhadom driftu a volatility súvisí stanovenie dĺžky časového horizontu a časového kroku. Ďalej sa dostávame do konfrontácie voľby dĺžky časového radu, pretože čím dlhší časový rad si vyberieme, tým získavame lepšiu presnosť odhadu ale naopak z hľadiska aktuálnosti je lepšie pracovať s dátami z krátkej minulosti. Snažili sme sa nájsť kompromis a zvolili sme si dáta za obdobie posledných štyroch rokov, čo predstavuje cca 1000 obchodných dní s diskretným časovým krokom  $\Delta t = 1/250$ , čo predstavuje 250 obchodných dní v priebehu jedného roka. V našom prípade DAX má za posledné štyri roky 1026 obchodných dní a S&P500 1006 obchodných dní, teda analogicky pre  $\Delta t_{DAX} = 4/1026$  a  $\Delta t_{S\&P\ 500} = 4/1006$ .

Ďalej predpokladáme pre výnosy  $v_i$  normálne rozdelenie. Potom platí, ako sme sme už spomenuli pre výpočet výnosov použijeme veličinu:

$$v_i = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}} \quad 4.1$$

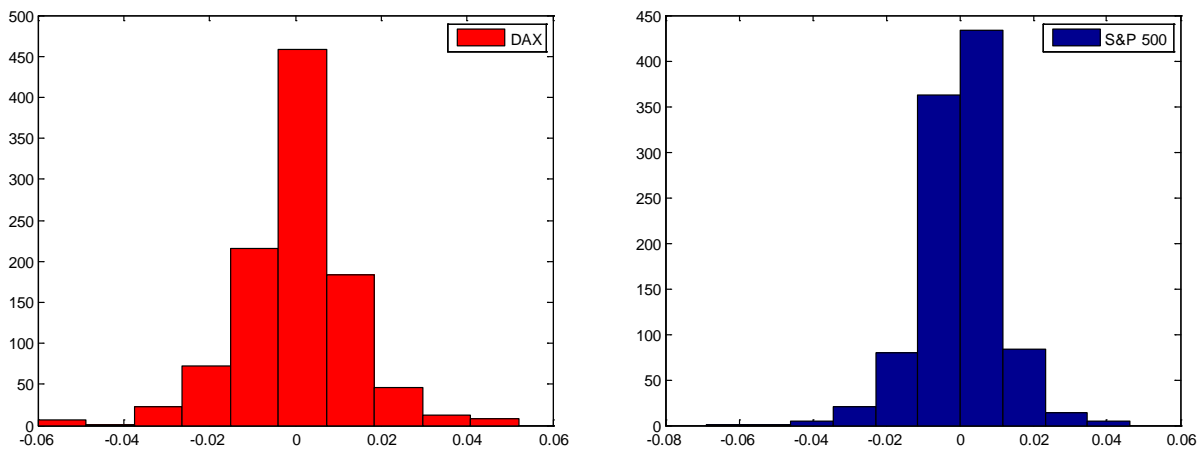
$$v_i \sim N\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t, \sigma\Delta t\right) \quad 4.2$$

Pričom posledná aproximácia vyplýva z :

$$\ln(1+x) \approx x \text{ pre } x \approx 0 \quad 4.3$$

Vypočítané výnosy a ich rozdelenie zobrazíme v histogramoch na grafe 4.

**Graf 4 Histogramy rozdelenia výnosov indexov DAX a S&P 500**



Zdroj: Vlastné spracovanie v programe Matlab R2012a

Deklarujeme, že na histogramoch je kolísanie výnosov výrazne väčšie pri akciovom indexe DAX ako pri S&P 500. Zároveň dokážeme povedať, že DAX sa veľmi blíži k normálnemu rozdeleniu. Toto pre nás indikuje väčšie riziko investovania do DAX.

Potom za predpokladov 3.10 odhadneme parametre GBM, drift a volatilitu pomocou aritmetického priemeru  $\bar{v}$  a rozptylu  $\sigma_v^2$ .

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \quad 4.4$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \quad 4.5$$

$$\mu = \frac{\bar{v}}{\Delta t} \quad 4.6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_v^2}{\Delta t}} \quad 4.7$$

Po aplikovaní vzťahov 4.4,4.5 a 4.6 a 4.7 vieme, že **drift** normálneho rozdelenia odhadujeme aritmetickým priemerom a **volatilitu** štandardnou odchýlkou. Vypočítame teda aritmetický priemer a štandardnú odchýlku vektora  $v_i$

$$\bar{v}_{DAX} = 0,00044509 \quad \sigma_{DAX}^2 = 0,000172539 \quad 4.8$$

$$\bar{v}_{DAX} = 0,000487 \quad \sigma_{DAX}^2 = 0,000114548 \quad 4.9$$

z ktorých dostaneme odhady veličín  $\mu$  a  $\sigma$  pre oba akciové indexy

$$\mu_{DAX} = 0,11417 \quad \sigma_{DAX} = 0,2104 \quad 4.10$$

$$\mu_{S\&P\ 500} = 0,1227 \quad \sigma_{S\&P\ 500} = 0,1699 \quad 4.11$$

Pre ich výpočet sme v Matlabe použili nasledovné príkazy:

```
% Načítanie dát s=load('sp500.txt') pre S&P 500
s=load('dax.txt');
% Dĺžka časového kroku - jeden deň, pre S&P 500 (dt=4/1006)
dt=4/1026;
% Inicializácia premennej - spočíta dĺžku ČR
n=length(s);
% Použitie cyklu FOR pre logaritmické výpočty výnosov podľa 4.1
for i=1:n-1
v(i)=log(s(i+1)/s(i));
end;
% Výpočet strednej hodnoty - arit. priemer
miDelta=mean(v);
% Výpočet rozptylu
s2Delta=var(v);
% Odhad parametra mi - drift
mi=miDelta/dt;
% Odhad parametra sigma - volatilita
sigma=sqrt(s2Delta/dt);
```

## Konštrukcia modelu

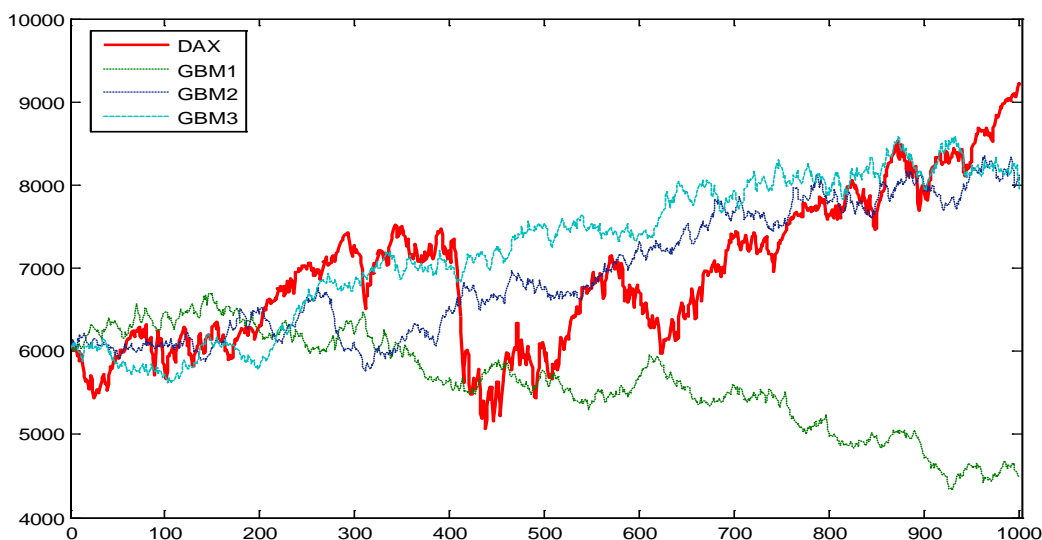
Ak ceny akciových indexov označíme  $S$  s príslušným časovým indexom, potom  $S_0$  bude cena indexu na začiatku obdobia a  $S_t$  bude cena akcie v čase  $t$ . Cenu akciového indexu  $S$  modelujeme pomocou geometrického Brownovho pohybu podľa vzťahu 3.11.

Pre výpočet v Matlabe použijeme nasledovný príkaz:

$$St = [S0 * \exp((\mu - 0.5 * (\sigma^2)) * t + \sigma * wT)] \quad 4.12$$

Na Graf 8 a Graf 9 môžeme vidieť trojnásobnú realizáciu vývoja cenových indexov podľa rovnice 4.12.

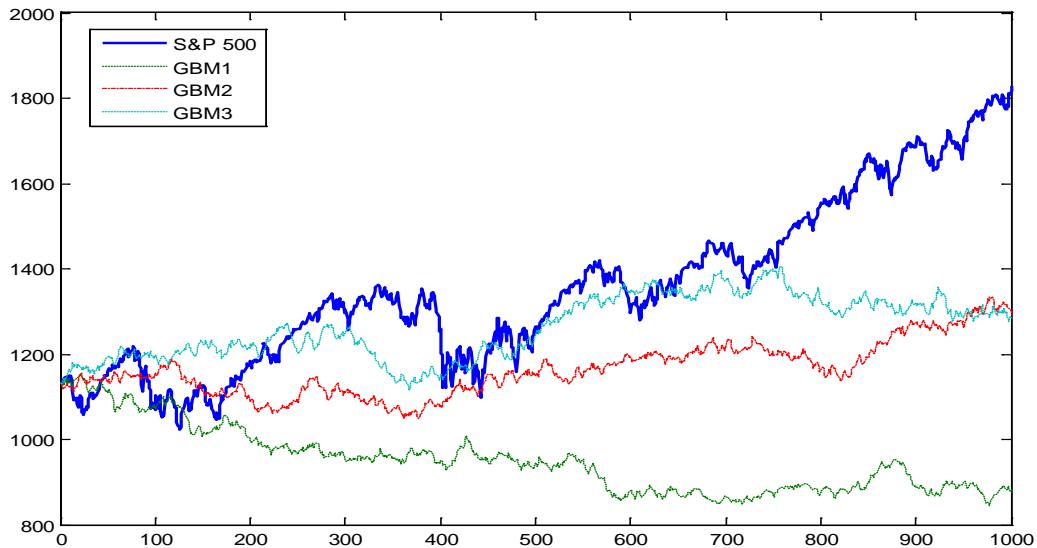
Graf 5 Trojnásobná realizácia GBM aplikovaná na DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

Mohli sme si všimnúť, že GBM zaručil normálne rozdelenie náhodnej premennej pre kmitanie volatility, čo nám spôsobuje markantné odchýlky od reálnych dát aj napriek tomu, že vychádzame z historicky odhadnutých parametrov. Pri využívaní tohto modelu sa zvykne realizovať viacnásobný beh tejto rovnice, čo aplikujeme v ďalšom kroku. Potom by sa hodnoty mali aproximovať s menšími odchýlkami od reálnych dát. Inak povedané krivka v tom prípade nadobudne užšie disperzie. Túto simulačnú metódu nazývame Monte Carlo.

Graf 6 Trojnásobná realizácia GBM realizovaná na S&P 500



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

#### 4.2.2 Model GARCH(1,1)

Pokiaľ máme manipulovať s časovým radmi ako sledom náhodných pozorovaní, tieto náhodné sekvencie, alebo stochastický proces môže vykazovať určitý stupeň korelácie z jedného pozorovania na ďalšie. Môžeme použiť takú korelačnú štruktúru, ktorá predpovedá budúce hodnoty procesu na základe minulej histórii pozorovaní. Využitie korelačnej štruktúry, ak existuje, umožňuje dekomponovať časové rady na deterministickú zložku (t.j. prognózy), a náhodné zložky (t.j. chyba, alebo neistota spojená s prognózou).

#### Modelovanie parametrov pomocou GARCH pozostáva z niekoľkých krokov

- **Vykonanie pred odhadovej analýzy, či sú dáta heteroskedastické a či ich možno modelovať pomocou GARCH.**
- **Odhad parametrov modelu.**
- **Vykonanie post odhadovej analýzy s potvrdením, že východiskový model vysvetľuje heteroskedasticitu prítomnú v dátach.**

Vzhľadom k tomu, že GARCH modelovanie predpokladá časový rad výnosov, musíme previesť ceny akciových indexov na výnosy, tak ako sme vykonali pri modeli GBM. Ďalej GARCH predpokladá, že časové rady výnosov sú stacionárne procesy. To sa môže zdať do istej

miery obmedzujúce, ale transformácia ceny na výnosy je bežná a všeobecne zaručuje stabilnú sadu dát pre modelovanie. Náš model pre časový rad výnosov sa skladá z modelu podmienenej strednej hodnoty a GARCH(1,1) modelu s Gaussovým rezidúami  $u_t$  (biely šum) založený na rovniciach 3.12 a 3.13.

$$v_t = c + u_t \quad 4.13$$

V modeli s podmienenou strednou hodnotou 4.12, výnosy  $v_t$ , sa skladajú z jednoduchej konštanty, plus nekorelované s bielym šumom. Tento model nám postačuje k opisu podmienenej stredenej hodnoty v časových radoch výnosov. Väčšina týchto radov si nevyžaduje komplexnosť, ktorú ARMAX model poskytuje.

V modeli s podmieneným rozptylom 3.13, prognóza rozptylu,  $\sigma_t^2$ , sa skladá z konštanty plus vážený priemer prognózy posledného obdobia,  $\sigma_{t-1}^2$ , a posledné štvorce reziduí  $u_{t-1}^2$ . Hoci finančná návratnosť, ako je definovaná v rovnici 4.1, zvyčajne vykazuje malú koreláciu, no vo štvorcoch reziduí je signifikantná korelácia.

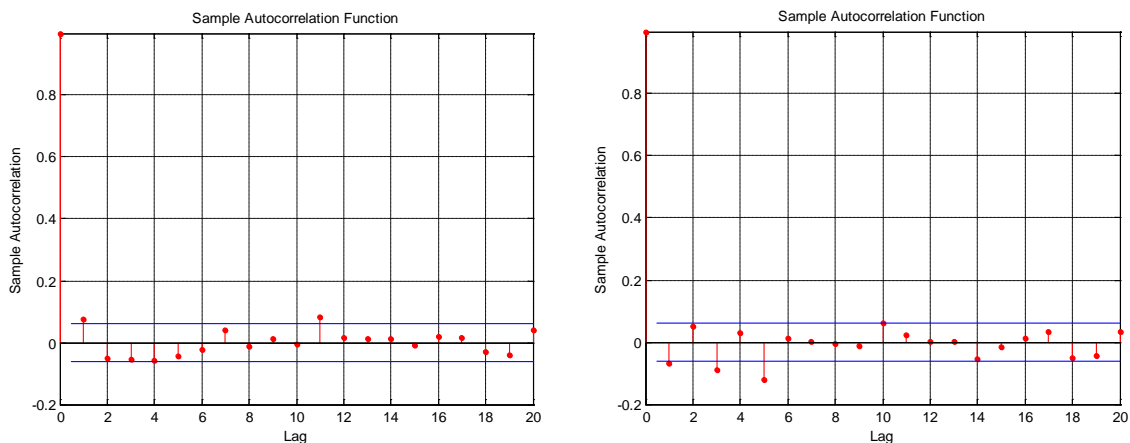
Zo vzťahu 4.1 dostaneme logaritmus diferencií výnosov a označíme ich symbolom  $v$ .

- **Pred odhadová analýza**

Najprv skontrolujeme korelácie zavolaním funkcií `autocorr` a `parcorr` skúmaním autokorelačnej funkcie (ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF), *ceteris paribus*.

```
% Skúmanie ACF(v), PACF(v)
autocorr(v), parcorr(v)
```

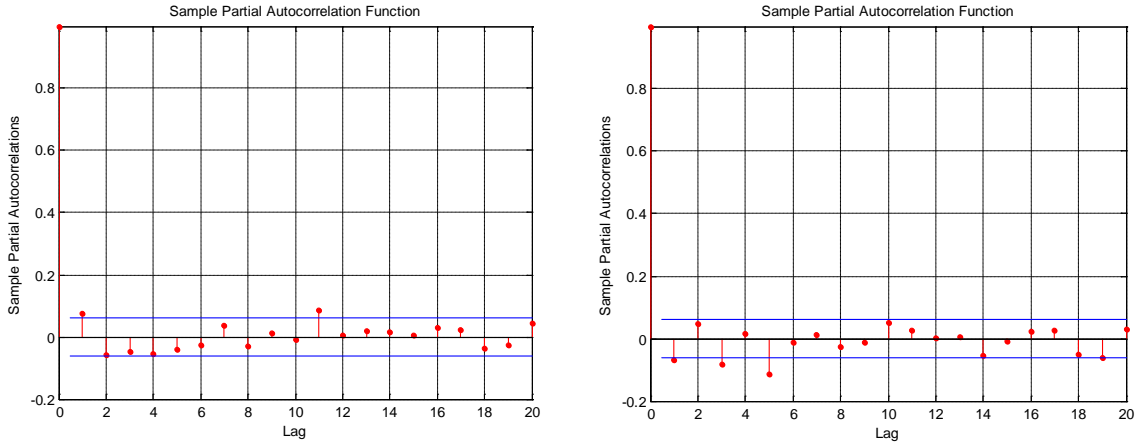
**Obrázok 4 Test autokorelácie výnosov (zľava DAX, S&P 500)**



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a



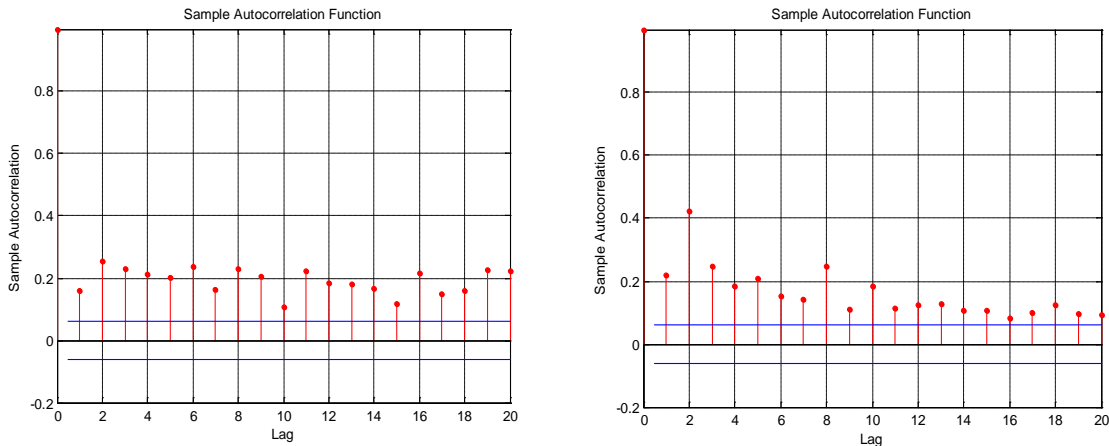
Obrázok 5 PACF výnosov (zľava DAX, S&P 500)



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

Podľa ACF by to mohol byť biely šum. Hoci ACF pozorovaných výnosov vykazuje malú koreláciu (Obrázok 4), ACF zo štvorcov reziduí výnosov môže byť stále naznačujúca signifikantnú koreláciu a vytrvalosť v druhom ráde momentov. Pozrieme sa na to vynesiením ACF druhých mocnín výnosov.

Obrázok 6 ACF <sup>2</sup> výnosov (zľava DAX, S&P 500)



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

Obrázok 7 ACF <sup>2</sup> (zľava DAX, S&P 500) potvrdzuje, že aj keď sú výnosy sami o sebe z veľkej časti nekorelované, proces rozptylu vykazuje značnú koreláciu. Všimnime si, že ACF zanikne pomaly, čo naznačuje proces rozptylu. V blízkosti sú nestacionárne,  $u$  nie je biely šum ale

$$u_t = \sqrt{\sigma_t^2} \eta_t,$$

Kde  $\eta$  je biely šum s jednotkovou disperziou, teda

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Odhadujeme model **konštanta + šum**. Na modelovanie šumu použijeme GARCH(1,1).

### Kvantifikácia korelácie

Koreláciu môžeme vyčíslieť pomocou formálnej hypotézy ako je Ljung-Box-Pierce Q-testu (LBQ) a Englov ARCH testu. Funkcia `lbqtest` implementuje LBQ pre zánik náhodných údajov založených na ACF teste. Q-test sa najčastejšie používa ako post odhad nedostatočného prispôsobenia inovácií (t.j. reziduí). V tomto prípade ho ale môžeme použiť ako súčasť analýzy, pretože východiskový model predpokladá, že výnosy sú len jednoduché a čisté inovácie procesu. Funkcia `archtest` implementuje Englov test na prítomnosť účinkov ARCH. Za platnosti nulovej hypotézy, že časový rad je náhodný sled Gaussových porúch (t.j. neexistujú žiadne ARCH účinky), je tento test tiež Chí-kvadrát rozdelenie.<sup>44</sup>

Obe funkcie vrátia identické výstupy. Prvý výstup,  $H$ , je logické rozhodnutie.  $H = 0$  znamená, že neexistuje žiadna významná korelácia.  $H = 1$  znamená pripustenie korelácie, s výstupmi P-Value (`pValue`), štatistickým testom (`Stat`) a kritickou hodnotou Chí-kvadrát (`CriticalValue`).

Rozhodli sme sa použiť funkciu `archtest`

```
[H, pValue, Stat, CriticalValue]=
=archtest(v-mean(v)), [10 15 20]', 0.05) 4.14
```

**Tabuľka 1 Výsledok archtestu DAX**

H =	1	pValue =	0	Stat =	165.5476	CriticalValue =	18.3070
	1		0		178.2762		24.9958
	1		0		201.0305		31.4104

Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

**Tabuľka 2 Výsledok archtestu S&P 500**

H =	1	pValue =	0	Stat =	237.2688	CriticalValue =	18.3070
	1		0		238.7778		24.9958
	1		0		242.0863		31.4104

Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

<sup>44</sup> ENGLE, R. 1982. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica* JSTOR : 2008, Vol. 50. 987-1007 s.

V oboch prípadoch zamietame  $H = 0$  a potvrdzujeme výskyt korelácie.

- **Odhad parametrov**

Prítomnosť heteroskedasticity, uvedená v predchádzajúcej analýze nám indikuje vhodnosť modelovania GARCH. Na odhad parametrov použijeme funkciu `garchfit`.

```
[coeff, errors, LLF, residuals, sigma, summary] 4.15
      = garchfit(v)
```

Výsledky odhadov pre oba indexy nájdeme v prílohách 3 a 4.

Teraz, keď je odhad kompletný, môžeme zobrazit' odhady parametrov a ich štandardné odchýlky funkciou `garchdisp`.

```
garchdisp(coeff, errors) 4.16
```

**Tabuľka 3 Odhad parametrov DAX a S&P 500**

<b>DAX</b>				<b>S&amp;P 500</b>			
Number of model Parameter Estimated: 4				Number of model Parameter Estimated: 4			
Standard Parameter	T Value	Error	Statistic	Standard Parameter	T Value	Error	Statistic
C	0.00092544	0.00032063	2.63	C	0.00087347	0.00025947	3.64
K	2.8819e-06	8.6702e-07	3.39	K	3.4442e-06	8.7204e-07	3.95
GARCH(1)	0.90166	0.015816	57.0083	GARCH(1)	0.84573	0.021135	40.0164
ARCH(1)	0.080219	0.013226	6.0651	ARCH(1)	0.12234	0.016884	7.59

**Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a**

Ak substituujeme tieto odhady podľa definície východzieho modelu 3.16, potom konštantné modely GARCH(1,1) podmieneného rozptylu, ktoré najlepšie zodpovedajú pozorovaným dátam sú

$$v_{DAX} = 0,00092544 + u_{DAX} \quad 4.17$$

$$v_{S\&P\ 500} = 0,00087347 + u_{S\&P\ 500} \quad 4.18$$

$$\sigma_{DAX}^2 = 2,8819e - 06 + 0,90166u_{t-1}^2 + 0,080219\sigma_{t-1}^2 \quad 4.19$$

$$\sigma_{S\&P\ 500}^2 = 3,4442e - 06 + 0,84573u_{t-1}^2 + 0,12234\sigma_{t-1}^2 \quad 4.20$$

Pri oboch modeloch splňame podmienku 3.17.

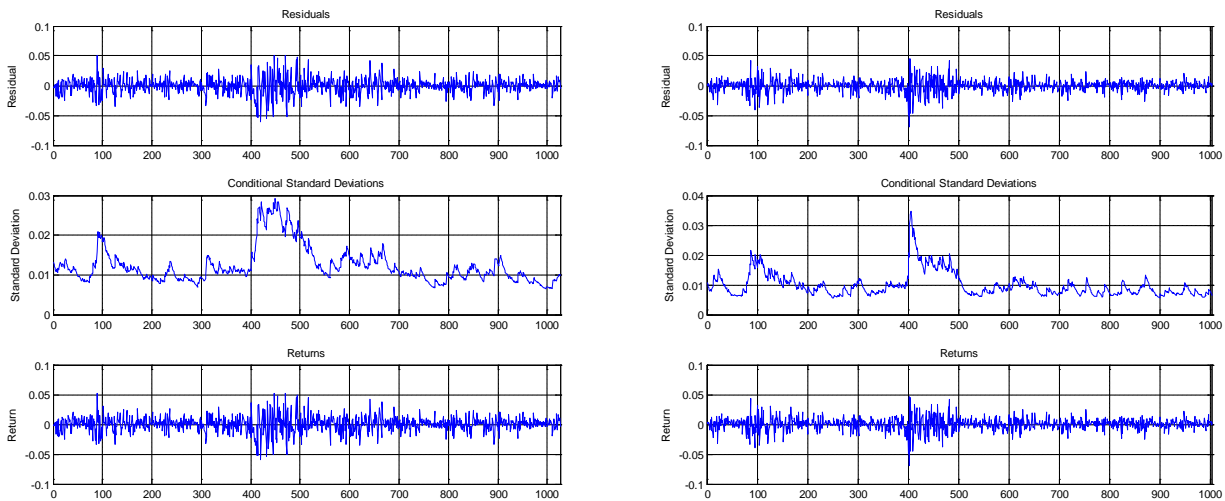
- Post odhadová analýza

## Porovnanie reziduí, podmienených štandardných odchýlok, a výnosov

Okrem odhadov parametrov a štandardných odchýlok, `garchfit` tiež vracia optimalizované log-likelihood funkčné hodnoty (LLF), reziduá a podmienené smerodajné odchýlky ( $\sigma$ ). Použitím funkcie `garchplot` skontrolujeme vzťahy medzi reziduami odvodených od daného modelu, zodpovedajúce podmieneným smerodajným odchýlkam a pozorovaným výnosom.

```
garchplot(residuals_dax, sigma_dax, v_dax)
```

Graf 7 Garchplot DAX a S&P 500



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

```
garchplot(residuals_sp500, sigma_sp500, v_SP500)
```

Upozorníme, že porovnanie reziduí, podmienených smerodajných odchýlok a výnosov vykazujú zhlukovanie volatility, už spomínanej **volatility clustering**. Tiež si všimnime, že sumy  $\alpha_{DAX} + \beta_{DAX} = 0,90166 + 0,080219 = 0,981879$  a  $\alpha_{S\&P\ 500} + \beta_{S\&P\ 500} = 0,84573 + 0,12234 = 0,96807$ , sú veľmi blízko hranice nestacionárnosti časových radov.

## Porovnanie korelácie štandardizovaných reziduí

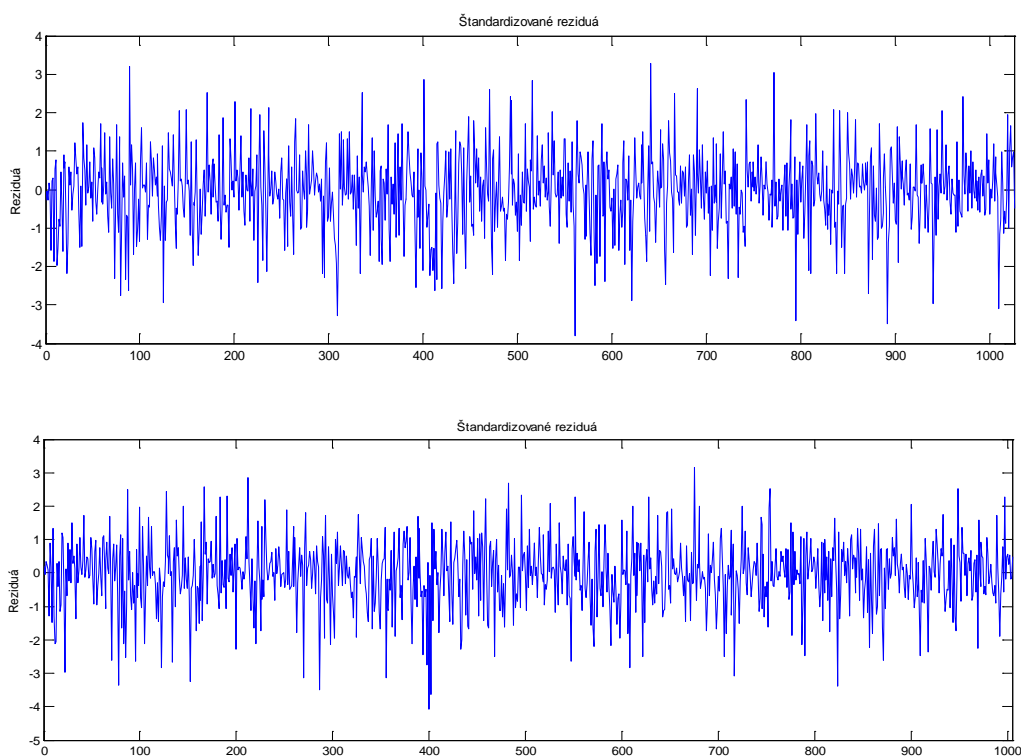
Štandardizované reziduá sú podielom reziduí a ich štandardných odchýlok, ktoré by mali byť bielym šumom. Našou úlohou je skontrolovať, či sa v nich náhodou nenachádza autokorelácia.

Keď spravíme ACF druhých mocnín štandardizovaných reziduí, zistíme, či sme dobre modelovali rozptyl pôvodných dát.

```
plot(residuals_dax./sigma_dax);  
ylabel('Reziduá');  
title('Štandardizované reziduá')
```

```
plot(residuals_sp500./sigma_sp500);  
ylabel('Reziduá');  
title('Štandardizované reziduá')
```

**Graf 8 Štandardizované reziduá DAX a S&P 500**

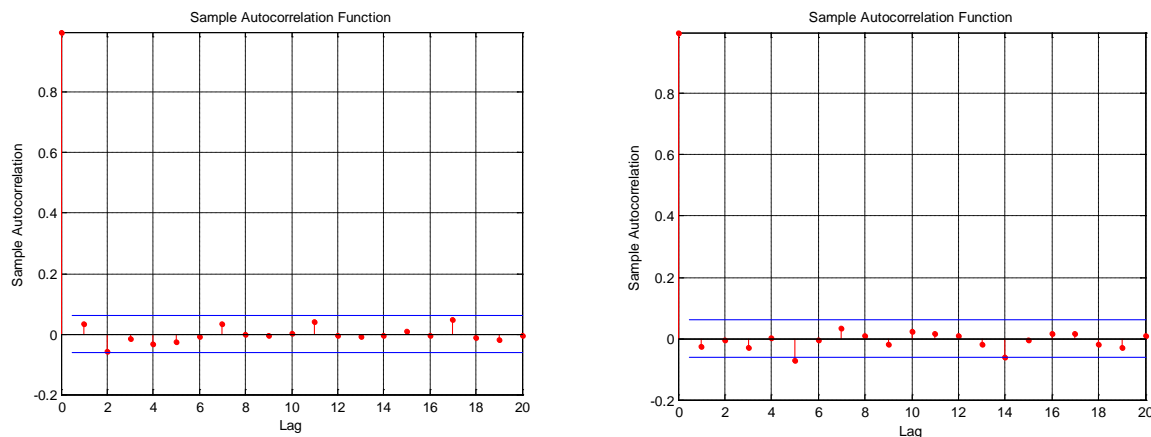


**Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a**

Zostrojíme si grafy zobrazujúce autokoreláciu druhých mocnín štandardizovaných reziduí

```
autocorr((residuals_dax./sigma_dax).^2)  
autocorr((residuals_sp500./sigma_sp500).^2)
```

**Graf 9 ACF<sup>2</sup> štandardizovaných reziduí DAX a S&P 500**



Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

ACF test nám potvrdil, že v druhých mocninách štandardizovaných reziduí neexistuje žiadna autokorelácia.

### Kvantifikácia a porovnanie korelácie štandardizovaných reziduí

V nižších tabuľkách porovnáваме archtesty výsledkov pred odhadovej analýzy s výsledkami post odhadovej analýzy. V pred odhadovej analýze archtest znamenal odmietnutie nulovej hypotézy ( $H = 1$  a  $pValue = 0$ ). V post odhadovej analýze, za použitia štandardizovaných reziduí založených na odhade modelu, tie testy ukazujú súhlas ( $H = 0$  s veľmi významnými  $pValues$ ) nulových hypotéz a potvrdzujú vypovedaciu schopnosť navrhnutého modelu.

**Tabuľka 4 Archtest štand. reziduí DAX**

Štand. reziduí							
H =	0	pValue =	0.9554	Stat =	3.8131	CriticalValue =	18.3070
	0		0.9579		6.9912		24.9958
	0		0.8885		12.7330		31.4104
Druhé mocniny štand. reziduí							
H =	0	pValue =	0.9520	Stat =	3.8949	CriticalValue =	18.3070
	0		0.9828		5.8061		24.9958
	0		0.9191		11.9113		31.4104

Zdroj: Vlastné spracovanie Matlab R2012a

Tabuľka 5 Archtest štand. reziduí S&P 500

Štand. reziduá							
H =	0	pValue =	0.5503	Stat =	8.8097	CriticalValue =	18.3070
	0		0.5825		13.2570		24.9958
	0		0.7707		15.0987		31.4104
Druhé mocniny štand. reziduí							
H =	0	pValue =	0.4227	Stat =	10.7722	CriticalValue =	18.3070
	0		0.6347		13.3312		24.9958
	0		0.7683		14.0965		31.4104

Zdroj: Vlastné spracovanie Matlab R2012a

### 4.3 Simulácia modelov

Akonáhle máme model pripravený, dokážeme ho simulovať. V simulácii využijeme poznatky metódy Monte Carlo. Jedná sa o veľmi známu metódu, ktorá sa hrdí aplikáciou v nespočetných oblastiach výskumu či už finančnej matematiky, fyziky, chémie alebo astronómie. Z nasimulovaných hodnôt spravíme aritmetický priemer a porovnáme ich s reálnymi dátami. Zvolíme viaceré varianty simulácii, a to 1000, 10000 a 100000 simulácii pre akciový index DAX aj S&P 500. Potom sa pozrieme na histogramy ich rozdelenia výnosov a nakoniec spravíme priemer z nasimulovaných hodnôt. Tieto hodnoty neskôr nanesieme na graf a porovnáme ich s vývojom historických dát cenových indexov. Analogicky budeme postupovať aj pri prognóze na mesiac január 2014.

#### 4.3.1 Simulácia modelom GBM

Pre výpočet simulovaných hodnôt naprogramujeme funkciu *AssetPaths* s parametrami:

- $S_0$  – začiatočná hodnota pre výpočet simulácie,
- $\mu$  – drift (odhad parametra podľa 4.10 pre DAX, 4.11 pre S&P 500),
- $\sigma$  – volatilita (odhad parametra podľa 4.10 pre DAX, 4.11 pre S&P 500),
- $NSteps$  – počet dní, ktoré chceme simulovať,
- $NRepl$  – počet simulácii.

```

% Funkcia pre výpočet GBM a simulácia N krokov
function SPaths = AssetPaths(S0, mi, sigma, T, NSteps, NRepl)
% Výpočet parametrov
dt = T/NSteps;
nudt = (mi-0.5*sigma^2)*dt;
siddt = sigma*sqrt(dt);
% Simulácia + inkreментy pre každý časový krok
Increments = nudt + siddt*randn(NRepl, NSteps);
LogPaths = cumsum([log(S0)*ones(NRepl,1) , Increments] , 2);
SPaths = exp(LogPaths);
end

```

Pre počet simulácií po získaní odhadnutých parametrov zavoláme funkciu:

```

% Funkcia s parametrami pre DAX - simulácia 1000x
AssetPaths(S0, mu, sigma, 1, 1026, 10000)

```

4.21

Pozrieme sa na histogramy rozdelenia výnosov podľa simulácie. Najprv si ale musíme inicializovať výsledky simulácie do premenných Sim10000DAX a Sim1000SP500.

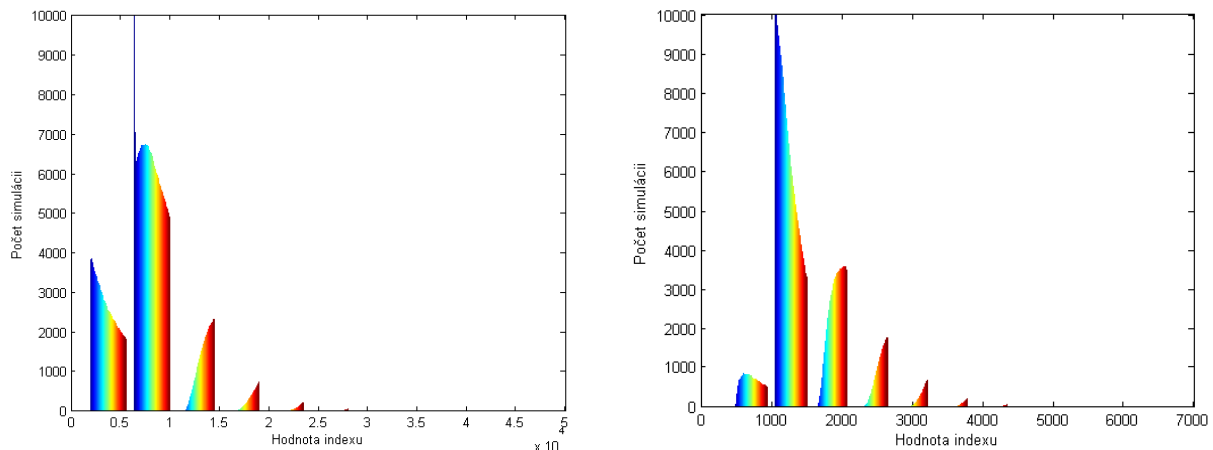
Pre zobrazenie histogramov môžeme použiť funkcie:

```

hist(Sim10000DAX); ylabel('Počet simulácií');
xlabel('Cena indexu')
hist(Sim1000SP500); ylabel('Počet simulácií');
xlabel('Cena indexu')

```

**Graf 10 Histogramy rozdelenia cien simulácie (zľava DAX a S&P 500)**



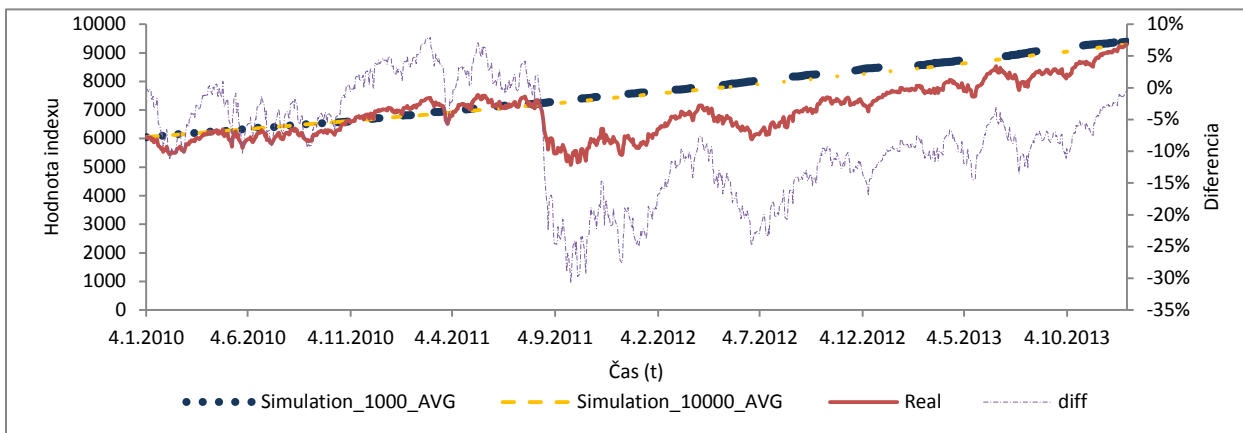
**Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a**

Čo dokážeme z histogramov simulovaných hodnôt cenových indexov potvrdiť je, že sú lognormálne rozdelené s najhustejšou pravdepodobnosťou okolo hodnoty 10000 pre index DAX a hodnoty 2000 pre index S&P 500 (Graf 7). Ďalej vidíme, že histogram rozdelenia simulovaných hodnôt indexu S&P 500 má menšiu volatilitu, tak ako sme vypočítali v 4.11.



Pre zobrazenie výsledkov hodnôt sme použili dve varianty, 1000 a 10000 simulácií (viď označenie v legende grafu) a ich priebeh funkcií môžeme vidieť na Grafe 8 a Grafe 9. Simulované hodnoty nanesené na grafoch sú vypočítané aritmetickým priemerom podľa vzťahu 4.4. Diferencia (*diff*) na grafe znamená, percentuálne vyjadrenie hodnoty odchýlky v odhade. Je

Graf 11 Simulácia indexu DAX (GBM)



Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010

vypočítaná ako relatívny prírastok podľa vzťahu:

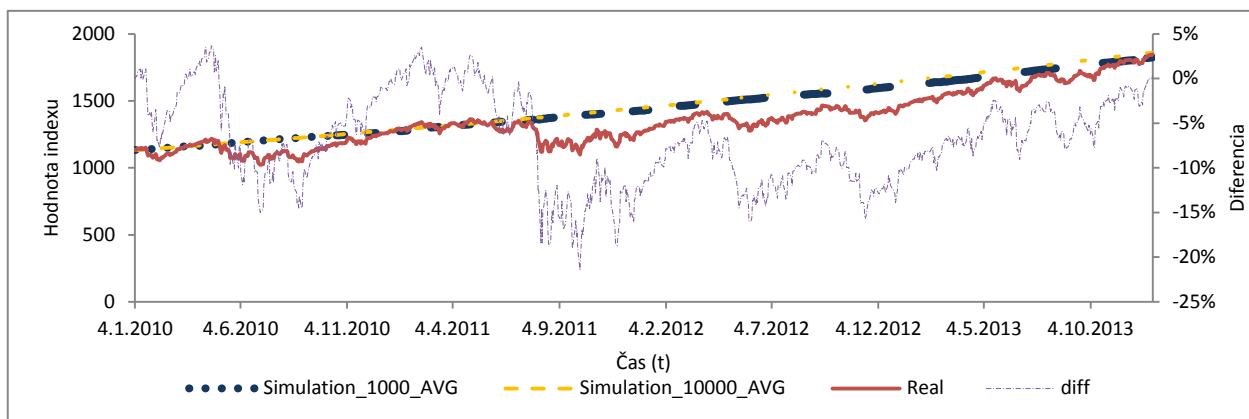
$$diff = \frac{Sim. hodnota indexu - reálna hodnota indexu}{reálna hodnota indexu} * 100 \quad 4.22$$

Na grafe 11 Simulácia indexu DAX (GBM) vidíme štyri priebehy funkcií. *Simulation\_1000\_AVG* je funkcia podľa zvolenej metódy Monte Carlo, 1000 opakovaných experimentov rovnice GBM, podobne ako pri *Simulation\_10000\_AVG*, kde bolo použitých 10000 experimentov. Tieto simulované hodnoty porovnávame s funkciou *Real*, zobrazujúcou reálne historické dáta akciového indexu DAX. Funkciou *diff* dokážeme určiť odchýlku odhadu od reálnych dát. Pri výbere takto dlhého časového radu vidíme značné odchýlky od. Maximálna hodnota odchýlky sa dotýka až 30 percentného prepadu odhadu v septembri 2011, naopak pri poslednom odhade sme sa vôbec nemýlili. V auguste 2011 totiž ceny akcií na akciových trhoch v Spojených štátoch, na blízkom východe, v Európe aj Ázii prudko poklesli. Stalo sa to kvôli strachu z európskej dlhovej krízy Španielska a Talianska ako aj kvôli obavám z aktuálneho

prepadu ratingu Francúzska. Akciový index DAX padol 18. augusta o 5,8 percenta (346,14 bodov) s výslnou úrovnou 5 602,8.<sup>45</sup>

Identickou situáciou si v auguste 2011 prešiel aj akciový index S&P 500, ktorý stratil 6,7 percenta (76.92 bodov) a dostal sa na úroveň 1 119,46 so všetkými 500 akciami. Pokles S&P 500 sme zaznamenali presne 8. augusta, to znamená o 10 dní skôr ako poklesol DAX. Za následok oneskorenia môžeme tvrdiť, že sila obchodníkov na amerických burzách je väčšia ako sila na európskych.

Graf 12 Simulácia indexu S&P 500 (GBM)



Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010

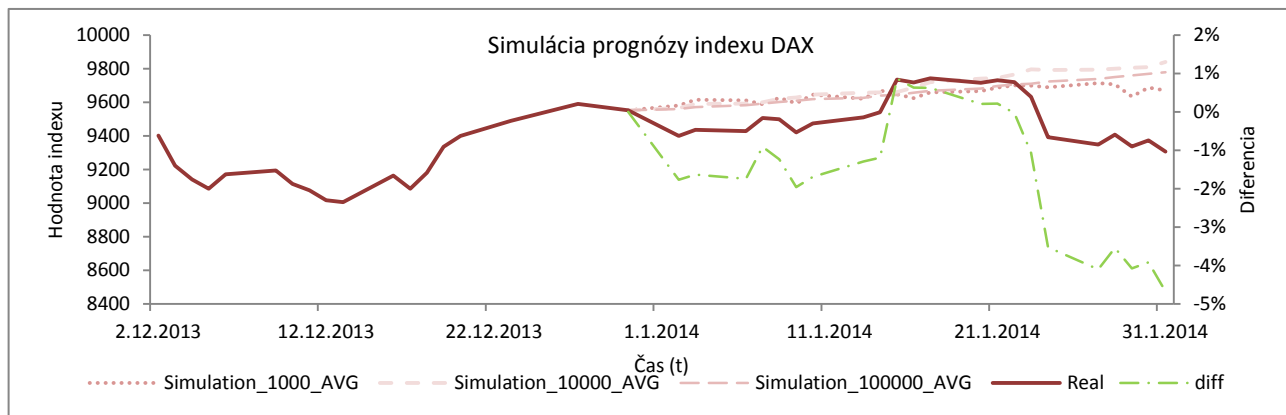
## Prognóza modelu GBM

Aby sme eliminovali od odchýlok dlhodobého vývoja počas štyroch rokov, použijeme tento model na kratšiu časovú dĺžku. Prognóza obsahuje dĺžku obdobia 22 obchodných dní, čo predstavuje jeden mesiac, na základe tých istých historických dát za posledné štyri roky. Tiež využijeme simulačnú techniku Monte Carlo, ale experimenty rozdelíme do troch variánt. Prvou je simulácia na 1 000, druhou 10 000 a treťou 100 000 experimentov. Ako vidíme na Graf 13 Simulácia prognózy indexu DAX, pri minimalizácii odchýlky najlepšie obstála *Simulation\_1000\_AVG* (1 000 pozorovaní), za ňou *Simulation\_100000\_AVG* (100 000 pozorovaní) a nakoniec *Simulation\_10000\_AVG* (10 000 pozorovaní). Ak by sme takto

<sup>45</sup> BREMER,C. DMITRACOVA,O. 2011. *Analysis: France, Britain AAA-ratings under security* [online]. REUTERS. 2011. [cit 2014.03.10] Dostupné na internete <<http://www.reuters.com/article/2011/08/08/us-crisis-ratings-idUSTRE7773KG20110808>>

navrhnutý model GBM aplikovali pri investovaní do cenového indexu DAX s dĺžkou obdobia na jeden mesiac, utrpeli by sme očakávanú stratu takmer 1%. Pri investovaní za optimistického predpokladu sme uvažovali nárast hodnoty indexu o 1%.

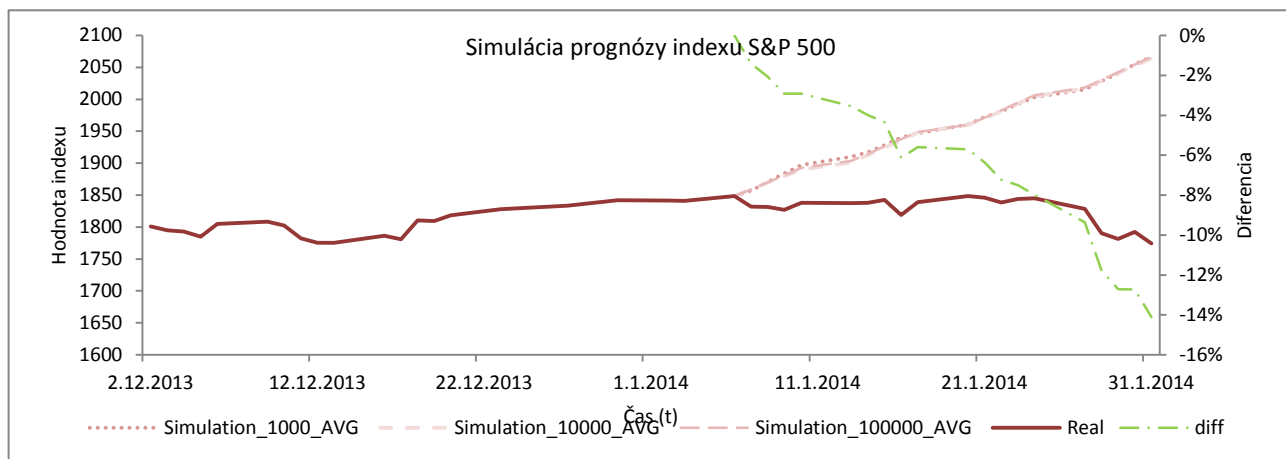
**Graf 13 Simulácia prognózy indexu DAX**



**Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010**

Pri simulovaní hodnôt pre prognózu cenového indexu S&P 500 sú všetky varianty podobné. S&P 500 klesal takmer po celú dobu prognózy.

**Graf 14 Simulácia prognózy indexu S&P 500**



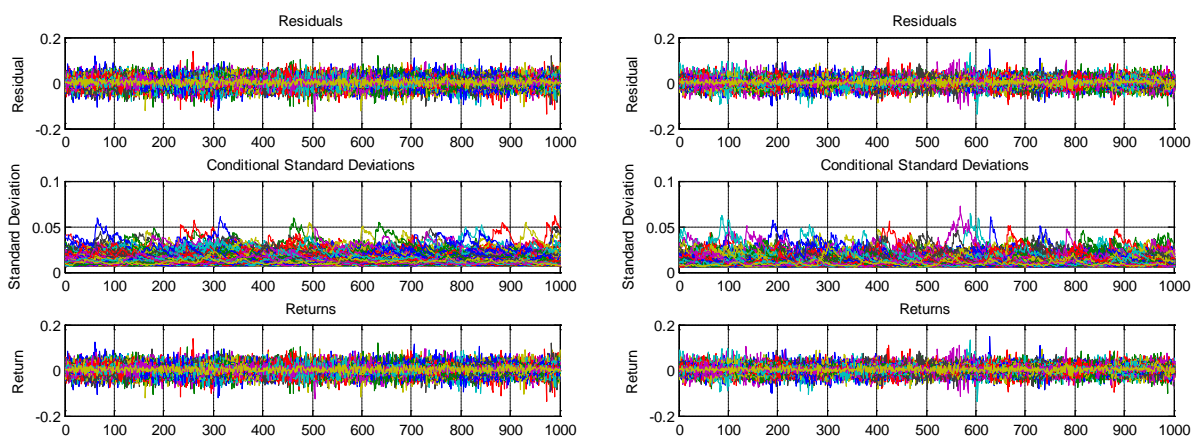
**Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010**

### 4.3.2 Simulácia modelom GARCH(1,1)

V tejto časti si ukážeme ako nasimulujeme vzorové cesty pomocou simulačnej funkcie `garchsim` pre časové rady výnosov, reziduí a podmienenej smerodajnej odchýlky procesov. Skontrolujeme účinky prechodov v procese simulácie. Budeme vychádzať s odhadnutých modelov podľa 4.17, 4.18, 4.19 a 4.20. Keďže časový rád výnosov obsahuje cca 1000 obchodných dní bolo by vhodné použiť aspoň 1000 pozorovaní s 1000 cestami. V premennej `coeff` máme parametre odhadnutých modelov.

```
(u_dax,sigma_dax,v_dax)=garchsim(coeff_dax,1000,1000)
```

```
(u_sp500,sigma_sp500,v_sp500)=garchsim(coeff_sp500,1000,1000)
```



Výsledkom je realizácia 1000 pozorovaní, zhruba štyri roky. V tejto časovej dĺžke používame historické dáta akciových indexov DAX a S&P 500. Simulácia Monte Carlo si vyžaduje viac ako 1000 ciest, jedná sa však o pomerne veľké pole, ktoré si vyžaduje väčší kus pamäte ako máme k dispozícii. Simulácia týchto dát predstavuje pre každý parameter 8 mil bitov, čo predstavuje spolu 24 mil. Preto môžeme spraviť prognózu len na kratšie časové obdobie, jeden mesiac.

**Prognóza modelu GARCH(1,1) pozostáva z týchto úloh**

- **Výpočet prognózy.**
- **Výpočet priemernej štvorcovej odchýlky (RMSE)**
- **Asymptotické správanie prognózy krátkodobého horizontu**

- **Výpočet prognózy**

Pre výpočet prognózy použijeme funkciu `garchpred`. Funkcia `garchpred` vypočíta podmienenú strednú a štandardnú odchýlku prognózy výnosov cenových indexov za použitia odhadnutých parametrov modelu. Pracuje s špecifikačnou štruktúrou `coeff` (output `garchfitu`) a časovými radmi výnosov `v`. Ak chceme získať informácie o správaní asymptoty, je potrebné predpovedať prognózu na viac ako jedno obdobie. Použitie nasledujúcich príkazov znamená prognózu podmienenej strednej hodnoty a štandardnej odchýlky v horizonte 22 dní.

```
[sFcast_dax, yFcast_dax] = garchpred(coeff_dax, v_dax, 22);
[sFcast_sp500, yFcast_500] = garchpred(coeff_sp500, v_sp500, 22);
```

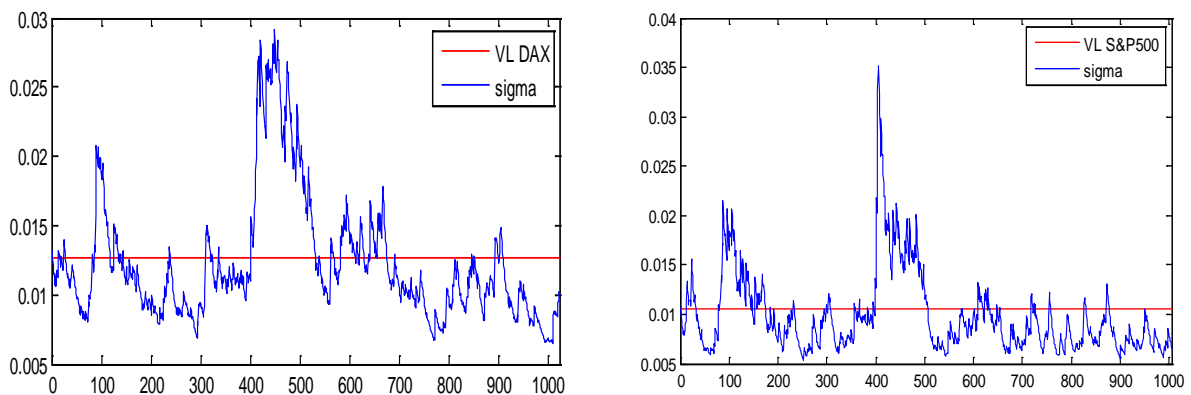
Výsledky ukazujú, že východiskový model DAX prognózy podmienenej strednej hodnoty je stále 0,0009. Toto platí pre každý horizont prognózy, pretože očakávaná hodnota rezidua je 0. Pre východiskový model S&P 500 prognózy podmienenej strednej hodnoty to neplatí, pretože hodnota rezidua kolíše od -0,0002 do 0,0002. Podmienená štandardná odchýlka prognózy sa mení v čase. Nepodmienená štandardná odchýlka  $u_t$  je daná druhou odmocninou podľa vzťahu 3.15

$$V_L = \sqrt{\frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^P \alpha_i - \sum_{j=1}^Q \beta_j}} \quad 4.23$$

V Matlabe spustíme príkaz

```
Vl=sqrt(coeff.K/(1-sum([coeff.GARCH(:);coeff.ARCH(:)])))
VL_dax = 0,0126 , VL_sp500 = 0,0105
```

**Obrázok 7 Dlhodobá volatilita verzus rozptyl výnosov**

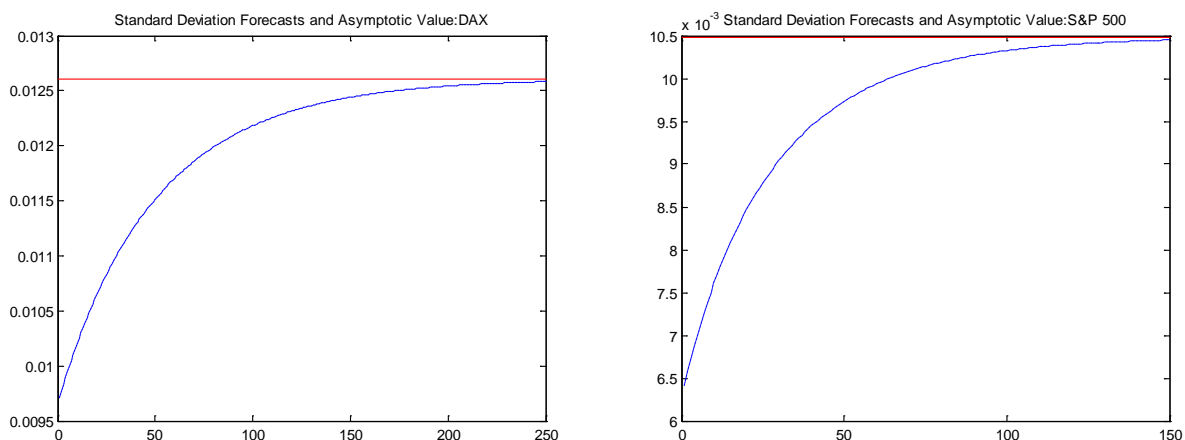


**Zdroj: Vlastné spracovanie v Matlab R2012a**

Na obrázku 7 je dlhodobá volatilita  $V_L$  a rozptyl.výnosov. Väčšina hodnôt sa však nachádza pod hranicou dlhodobej volatility. Preto nás zaujíma v akom časovom horizonte sa rozptyl priblíži k dlhodobej volatilita, čo zobrazíme na nasledujúcom obrázku.

```
plot([0 length(sigma_dax)], [Vl_dax Vl_dax], 'red');
hold('on'); plot(sigma_dax)
plot([0 length(sigma_sp500)], [Vl_sp500 Vl_sp500], 'red');
hold('on'); plot(sigma_sp500)
```

**Obrázok 8** Štandardné odchýlky prognóz a asymptoty

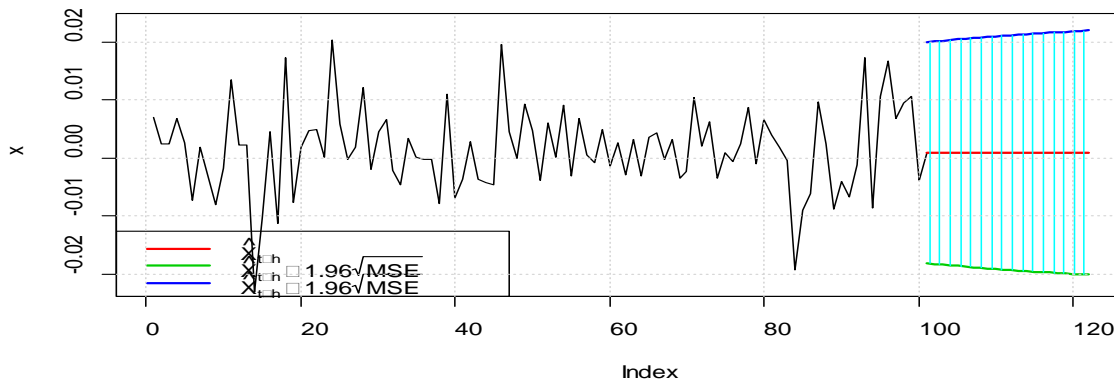


**Zdroj:** Vlastné spracovanie v Matlab R2012a

Predikovaný vývoj štandardnej odchýlky konverguje k jej nepodmienennej strednej hodnote (dlhodobá volatilita). Rozptyl výnosov cenového indexu DAX konverguje pomalšie k  $V_L$  o 100 dní pomalšie ako ku cenovému indexu S&P 500.

**Graf 15** Predikované modelu s intervalmi spoľahlivosti DAX

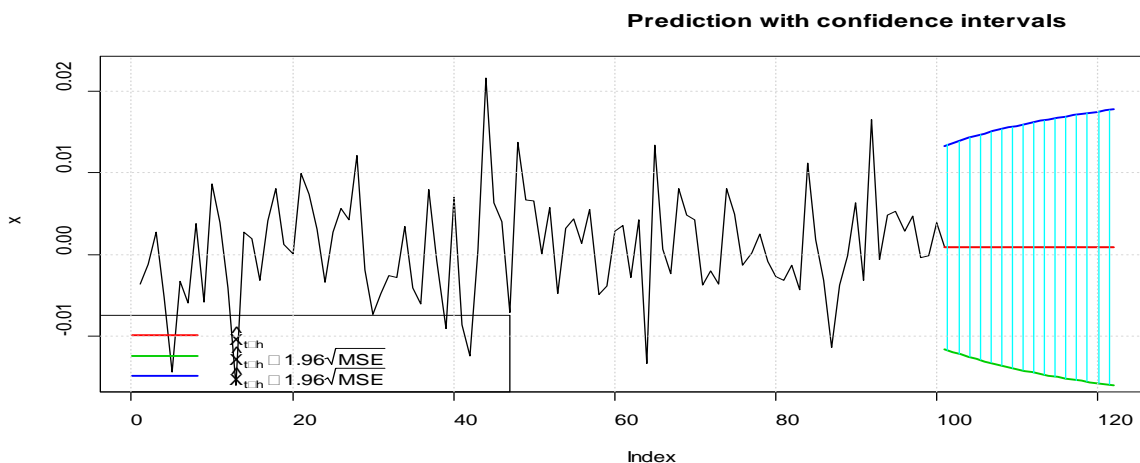
**Prediction with confidence intervals**



**Zdroj:** Vlastné spracovanie v R 3.1.0

Na grafe 15 a 16 sme zobrazili prognózu odhadnutého modelu na najbližších 22 dní. Taktiež nám zobrazuje intervali spoľahlivosti.

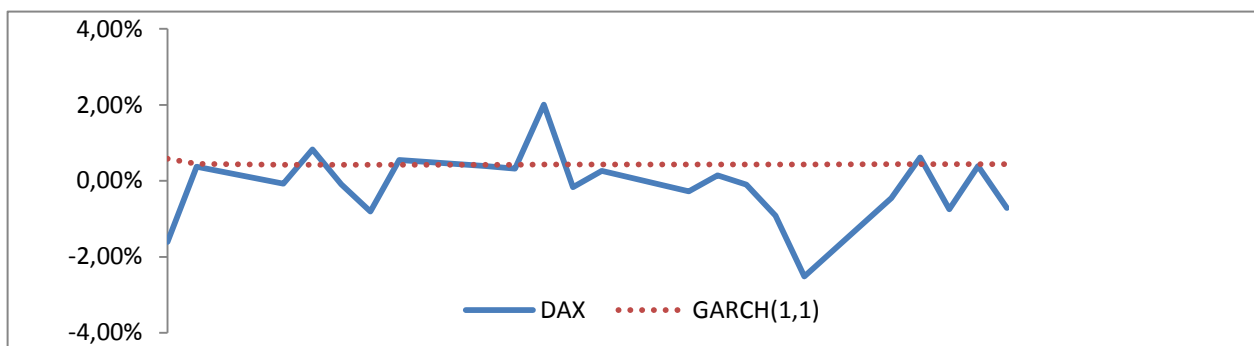
**Graf 16 Predikované hodnoty modelu s intervalmi spoľahlivosti S&P 500**



Zdroj: Vlastné spracovanie v R 3.1.0

Po použití modelu pre akciový index DAX s odhadnutými parametrami podľa 4.17 a 4.19 sme vytvorili prognózu na mesiac január 2014 verzus reálne dáta. Jedná sa o 22 pracovných dní a maximálna miera odchýlky je 1 percento.

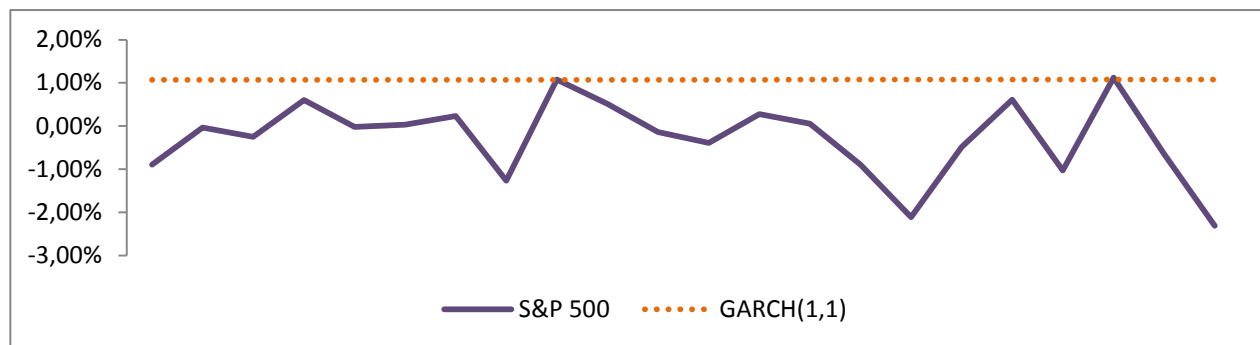
**Graf 17 Prognóza výnosov DAX Január 2014**



Zdroj 1: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010

Podobný postup sme zvolili pre akciový index S&P 500 (podľa odhadnutých parametrov 4.18 a 4.20), odchýlky sú na tom o čosi horšie, keďže index viac kmitá. Jeho prognózu môžeme vidieť na grafe 18.

Graf 18 Prognóza výnosov S&P 500 Január 2014



Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel 2010



## Záver

Cieľom tejto práce bolo popísať vývoj ceny výrazne sledovaných akciových indexov na burzách cenných papierov. V uplynulej histórii vývoja cien týchto indexov vidieť viaceré cenové šoky, ktoré mali následne negatívny vplyv na globálny vývoj. Mnoho štúdií sa dnes usilovne snaží čo najlepšie zachytiť tento vývoj a následne svoje modely aplikovať na simuláciu cien do budúcnosti.

V našej práci sme zvolili za vysvetľované premenné ceny akciových indexov DAX a S&P 500. Tieto typy indexov sú hlavným benchmarkom na burzách, DAX na FSE a S&P 500 na väčšom počte amerických búrz. Vybrané časové rady sme podrobili niekoľkým štatistickým testom. Pri modelovaní sme využili geometrický Brownov pohyb, ktorý opisuje ceny akcií ako náhodný nezávislý jav. Ďalším modelom je GARCH (1,1). Tento model sme využili na modelovanie stochastickej volatility, pretože GBM disponuje len s konštantnou volatilitou. V modeli GARCH(1,1) potvrdil koreláciu v prvom ACF teste, ale nakoniec štandardizované reziduá ostali nekorelované.

Pri zostavovaní modelov sme využili dáta v rozpätí štyroch rokov, počnúc rokom 2010 a končiac rokom 2013. Zvyšné dáta do januára 2014 sme využili na zostavenie ex post prognózy. Počas prípravy tejto práce neboli dostupné všetky aktuálne dáta, preto sme ich využili na porovnanie simulovaných dát s reálnymi. Podľa modelu GBM sa porovnané dáta líšia od reálnych pri cenovom indexe DAX o 5 percent a pri S&P 500 takmer o 14 percent. Pri modelovaní stochastickej volatility pomocou GARCH(1,1) sme zistili, že tento model je viac adaptabilnejší, lepšie vystihuje realitu ako model GBM, čo dokazujú aj výsledky prognóz.

## Zoznam použitej literatúry

### Knihy / Monografie:

- [1] DLOUHÝ, M. a kol. 2005. *Simulace pro ekonomy*. 2. vyd. Praha: Oeconomica, 2005, 10 s. ISBN 80-245-0155-4.
- [2] KRÁLÍK, J. – JAKUBOVIČ, D. 2004. *Slovník finančního práva*. 1. vyd. Bratislava: Veda, 2004. 28 s. ISBN 80-2240814-X.
- [3] BENEŠ, V., MUSÍLEK, P. 1992. *Burzy a burzovní obchody*. 2. vyd. Praha : Informatorium, 1992. 118 - 119 s. ISBN 8085427257.
- [4] DLOUHÝ, M. a kol. 2005. *Simulace pro ekonomy*. 2. vyd. Praha: Oeconomica, 2005, 18-52 s. ISBN 80-245-0155-4.
- [5] ŠEVČOVIČ a spol. 2009. *Analytické a numerické metody oceňovania finančných derivátov*. STU Bratislava. 2009. 22 s. ISBN 978–80–227–3014–3.
- [6] TESAŘ, J., BARTOŠ, P. 2006. *Metoda Monte Carlo a programovací jazyk MATLAB při přípravě učitelů na pedagogických fakultách. Technical computing Prague 2006, 14th Annual Conference Proceeding*. Praha. 2006. 26 s. ISBN 80-7080-616-8.
- [7] ŠEVČOVIČ a spol. 2009. *Analytické a numerické metody oceňovania finančných derivátov*. STU Bratislava. 2009. 22-24 s. ISBN 978–80–227–3014–3.
- [8] MITTNIK, S.-PAOLELLA, S.-RACHEV, T. 2006. *Stationarity of stable power-GARCH processes*. Journal of ekonometrics. Karlsruhe, Germany. 2001. 98-99 s. ISSN 106-2002-97-107.
- [9] TEYSSIÉRE, G. KIRMAN, P.A. 2007. *Long Memory in Economics*. Berlin: Springer, 2005. 266-267 s. ISBN-10 3-540-22694-X
- [10] WIERSEMA, Ubbo F. 2008. *Brownian motion calculus*. England: JohnWiley & Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0-470-02170-5.
- [11] ØKSENDAL, B. 2003. *Stochastic Differential Equations*. 5th ed. Berlin: Springer, 2003. 368-370 s. ISBN 978-3-540-04758-2.

- [12] RUPPERT, D. 2011. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*. Springer Texts in Statistics. 2011. 488 s. ISBN 978-1-4419-7786-1.
- [13] ENGLE, R. 1982. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica* JSTOR : 2008, Vol. 50. 987-1007 s.

### **Zákony a uznesenia:**

- [14] Zákon Národnej rady Slovenskej republiky č. 429/2002 Z.z. o burze cenných papierov.
- [15] Zákon Národnej rady Slovenskej republiky č. 92/2008 Z.z. o komoditnej burze a o doplnení zákona Národnej rady Slovenskej republiky č. 145/1995 Z. z. o správnych poplatkoch v znení neskorších predpisov.

### **Elektronické dokumenty – monografie:**

- [16] ANDERSEN, L. H. 1986. *Metropolis, Monte Carlo, and the Maniac* [online]. U.S GOVERNMENT PRINTING OFFICE. 1986. [cit. 2014.02.07] Dostupné na internete : <<http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?00326886.pdf>> LAUR-86-2600.
- [17] Národná banka SR. 2010. Burza cenných papierov v Bratislave, a.s.. [online]. 2014. [cit 2014-04-01] Dostupné na internete : < <http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-trhom-cennych-papierov/burza-cennych-papierov/burza-cennych-papierov-v-bratislave-a-s> >
- [18] Investopedia. 2009. Monte Carlo Simulation with GBM. [online]. 2009. [cit 2014-04-05] Dostupné na internete : < <http://www.investopedia.com/articles/07/montecarlo.asp>>
- [19] Frankfurt Stock Exchange. 2014. *History of the Frankfurt Stock Exchange*. [online]. 2014. [cit. 2014-04-05] Dostupné na internete: <<http://www.boerse-frankfurt.de/en/basics+overview/history/11th+to+17th+century>>
- [20] FSE. 2014. *History of Frankfurt Stock Exchange* [online]. Frankfurt. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : <<http://www.advfn.com/StockExchanges/history/FSE/FrankfurtStockExchange.html>>

- [21] Deutsche Börse Group. 2014. *Market Structure*. [online]. Germany. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : Dostupné na internete <[http://deutsche-boerse.com/dbag/dispatch/en/kir/gdb\\_navigation/listing/10\\_Market\\_Structure?](http://deutsche-boerse.com/dbag/dispatch/en/kir/gdb_navigation/listing/10_Market_Structure?)>
- [22] Wikipedia.de. 2014. Zusammensetzung. [online]. 2014. [cit 2014-04-05] Dostupné na internete : <<http://de.wikipedia.org/wiki/DAX>>
- [23] NEW YORK STOCK EXCHANGE. 2014. *About the organization*. [online]. New York. 2014. [cit. 2014.01.06] Dostupné na internete : <<http://www.nyse.com/about/theorganization/1091545088167.html>>
- [24] EUROPEAN COMMISSION. 2013. *Protection of personal data* [online]. Justice. 2014. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <[http://ec.europa.eu/justice\\_home/fsj/privacy/docs/wpdocs/2006/wp117\\_sk.pdf](http://ec.europa.eu/justice_home/fsj/privacy/docs/wpdocs/2006/wp117_sk.pdf)>
- [25] SOCHOR, J. 2006. *NYSE změny podoby i služby* [online]. Ihned.cz. 2006. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <[http://ihned.cz/1-10076480-22879125-001000\\_d-43](http://ihned.cz/1-10076480-22879125-001000_d-43)>
- [26] INVESTOPEDIA. 2014. *Standard & Poor's 500 Index - S&P 500* [online]. Investopedia. 2014. [cit. 2013.12.20] Dostupné na internete : <<http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>>
- [27] PSTRUŽINA, K. 1999. *Atlas filosofie vědy* (Fond rozvoje MŠMT F5 1747/1999) (Fond rozvoje MŠMT F5 1588/2002) Dostupné aj na internete: <<http://nb.vse.cz/kfil/win/atlas1/experim.htm>>, kap. Experiment.
- [28] PSTRUŽINA, K.: *Atlas filosofie vědy*. (Fond rozvoje MŠMT F5 1747/1999) (Fond rozvoje MŠMT F5 1588/2002) dostupné aj na <<http://nb.vse.cz/kfil/win/atlas1/modelov.htm>>, kap. Modelování.

### Články v elektronických časopisoch a iné príspevky

- [29] DĚDIČ, J. 1992. *Burza cenných papírů a komoditní burza*. 1992, s.146. ISBN 80-85431-62-9.
- [30] BROWN R. 1866. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the*

*general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.* 1866.  
Philosophical Magazine N. S. 4. 161-173 s.

### **Výskumné správy:**

- [31] RENSHAW, E. 2002. *The Stock Market, Oil Price Shocks, Economic Recessions and the Business Cycle With An Emphasis on Forecasting* [online]. Some Featured Highlights, 2002. [cit 2014-04-05] Dostupné na internete: <[http://www.albany.edu/cer/bc/bc\\_essays.html](http://www.albany.edu/cer/bc/bc_essays.html)>

### **Internetové stránky:**

- [32] [www.investopedia.com](http://www.investopedia.com).  
[33] [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com).  
[34] [www.investopedia.com](http://www.investopedia.com).  
[35] [www.deutsche-boerse.com](http://www.deutsche-boerse.com).  
[36] [www.nyse.com](http://www.nyse.com).  
[37] [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).  
[38] [www.boerse-frankfurt.de/en](http://www.boerse-frankfurt.de/en).  
[39] [www.reuters.com](http://www.reuters.com)