EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 103003/I/2013/3374081179

METÓDY DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA V EKONOMICKÝCH MODELOCH

Diplomová práca

2013 **Bc. Ankhbayar Sukhee**

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

METÓDY DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA V EKONOMICKÝCH MODELOCH

Diplomová práca

Študijný program: Manažerské rozhodovanie a informačné technológie

Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Vedúci záverečnej práce : Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Bratislava 2013 **Bc. Ankhbayar Sukhee**

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

Dátum: **..**

(podpis študenta)

Poďakovanie

Chcel by som poďakovať Ing. Karolovi Szomolányimi, PhD za jeho podnetné nápady a pripomienky, poskytnutie vhodných materiálov, ako aj za obetovaný čas a množstvo trpezlivosti.

ABSTRAKT

SUKHEE, Ankhbayar: *Metódy dynamického programovania v ekonomických modeloch.* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra aplikovanej informatiky. – Vedúci záverečnej práce: Ing., Karol Szomolányi, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2013, počet strán 48.

Cieľom tejto práce je predstaviť metódy dynamického programovania, ich využitie v ekonomických modeloch a pracovať s jednoduchším modelom a riešiť optimalizačnú úlohu analyticky resp. Matematickým formulovaním a pomocou použitia riešiteľa v Exceli. Práca je rozdelená do 4 kapitol.
Prvá kapitola je venovaná vzniku dynamického programovania a jeho vyvoja v ekonomických modeloch a súčasný stav využitia.
V ďalšej časti charakterizuje hlavnú myšlienku a základné princípy dynamického programovania, ktoré sú využívané pri riešení problému dynamickej optimalizácie a ukazujem ich využitie v ekonomických modeloch matematickým formulovaním.
V poslednej kapitole pri zohľadnení všetkých týchto zákonitostí je tiež cieľom prepojiť teoretické znalosti s praxou pomocou aplikácie na konkrétnom prípade spotrebiteľa a optimalizácie jeho spotreby a úspory. Riešenie tohto problému je formulované použitím metódy dynamického programovania a je riešené pomocou použitia riešiteľa v Exceli.

Kľúčové slová:

Rekurzívne metódy, Dynamické programovanie, Dynamická optimalizácia

ABSTRACT

SUKHEE, Ankhbayar: *Dynamic programming methods in economic models.* University of Economics in Bratislava. Faculty of Economic Informatics; Department of operations research and econometrics. – Thesis supervisor: Ing. Karol Szomolányi, PhD. – Bratislava: FHI EU, 2013, 48 pages

The aim of this work is to present dynamic programming methods, their use in economic models and to work with simple models and to solve optimization problems by analytically respectively. Mathematical formulation and by using Excel solver. The work is divided into 4 chapters. The first chapter includes a brief history of recursive methods and development of the dynamic programming usage in economic models and current state. The next section describes the main idea and the basic principles of dynamic programming, which are used to solve dynamic optimization problem and shows their usage in economic models by mathematical formulation. In the last chapter, taking into account all these principles is also to link theoretical knowledge with practice using the specific case of the dynamic optimization problem called optimal consumption-savings. The solution to this problem is formulated using dynamic programming methods and is solved by using solver in Excel.

Key terms

Recursive methods, Dynamic programming, Dynamic optimization, Intertemporal optimization

O B S A H str.

Úvod

Ekonomické subjekty, ako sú domácnosti, firmy a vlády sa často stretávajú s mnohými problémami voľby. Tieto problémy voľby sú zvyčajne dynamické. Napríklad domácnosť rozhoduje koľko skonzumuje dnes a koľko ušetrí pre budúcnosť. Firma rozhoduje akú výšku dividend na distribúciu investuje dnes a koľko v budúcnosti. Pracovník rozhodne, či prijať ponuku práce dnes, alebo počkať a hľadať novú prácu zajtra. Všetky tieto problémy sa týkajú nákladov a výnosov a sú kompromisom medzi súčasnosťou a budúcnosťou. Hlavným cieľom týchto všetkých ekonomických subjektov je maximalizovať užitočnosť zo všetkých možných volieb. Pretože optimálne riešenie je veľmi dôležite pri ekonomických problémoch.

Vzhľadom na tento cieľ musí mať ekonomický subjekt predstavu o dynamickej optimalizácii. Dynamická optimalizácia jednoducho znamená, že opatrenia, ktoré dnes prijmeme budú mať dôsledky pre budúcnosť. Musíme vziať do úvahy pri rozhodovaní ktoré opatrenia je potrebné prijať už dnes. Pri riešení dynamickej optimalizácie sa v praxi najčastejšie používa alternatívny prístup k spomínaným problémom nazývaný dynamické programovanie.

Metóda dynamického programovania bola pôvodne použitá v roku 1940 Richardom E.Bellmanom (1920 – 1984). Zásadnou myšlienkou je rozklad problému na podproblémy, ktoré sú vyriešené a ich riešenia sú ukladané pre ďalšie potencionálne možné využitie. Metóda je obzvlášť vhodná pre úlohy, ktoré sa dajú deliť na podúlohy, ktoré sú si podobné a môžu sa opakovať. Prístup dynamického programovania je veľmi výkonný a jednoduchší pri riešení problémov.

1. Súčasný stav riešenej problematiky doma a v zahraničí

1.1 Rekurzívne metódy v ekonomickej dynamike

Výskum v oblasti ekonomickej dynamiky prešiel pozoruhodnými transformáciami v posledných desaťročiach. V minulej generácii boli empirickí výskumníci zvyčajne povinný pridať dynamické a stochastické prvky k predpovediam o správaní odvodenom zo statických, deterministických ekonomických modelov. Dnes, v každej oblasti použitia, máme teórie, ktoré sa zaoberajú vyslovene s racionálnymi ekonomickými subjektami pôsobiacimi v priebehu času v stochastických prostrediach. Myšlienka ekonomickej rovnováhy prešla podobným vývojom: nesie už konotáciu systému v pokoji. Výkonné metódy ktoré sú teraz k dispozícii pre analýzu teoretických modelov s výsledkami rovnováhy, sú popísané rovnakými druhmi zložitých stochastických procesov, ktoré používame pre opis pozorovaného ekonomického správania.

Tento teoretický vývoj sa zakladá na širokej škále výsledkov ekonómie, matematiky a štatistiky: kontingentné tvrdenie (resp. contingent-claim) zavedené Arrowom (1953) a Debreuom (1959), ekonomické variačné aplikácie dávno spropagované Ramseyom (1928) a Hotellingom (1931), teória dynamického programovania Bellmanom (1957) a Blackwellom (1965).

Rekurzívne metódy predstavujú výkonný prístup k dynamickej ekonomike v dôsledku ich popísaného zamerania na kompromis medzi užitočnosťou súčasného obdobia a pokračujúcou hodnotou pre užitočnosť vo všetkých budúcich obdobiach. Ako už bolo spomenuté, zjednodušenie vyplýva z rokovaní s vývojom stavových premenných, ktoré zachytávajú následky dnešných akcií a podujatí pre všetky budúce obdobia, a v prípade neistoty všetkých možných realizácií v týchto budúcich obdobiach. To je nielen výkonný prístup k charakterizácii a riešení zložitých problémov, ale tiež nám pomáha rozvíjať intuíciu, vytvoriť koncepcie a premýšľať o dynamickej ekonomike.

Rekurzívne metódy sú veľmi dôležité pri analýze dynamických systémov v oblasti ekonómie a ďalších vied. Hlavnou myšlienkou rekurzívnych metód je najsť vhodnú definíciu stavu. Nie je to často zrejmé v akom stave to je, ani to, či konečný rozmerný stav existuje (napr. je možné, že celá nekonečná história systému určí jeho súčasnú pozíciu). Rekurzívne metódy boli jedným z hlavných úspechov makroekonomickej teórie od roku 1970 spresnením vzhľadom na rozšírenie rozsahu problémov. V rôznej literatúre, tento odvetvie je o objavovaní vhodného stavu a výstavbe diferenčnej rovnice prvého rádu, aby sa popísal jeho pohyb. Napríklad, v Gaussovom nastavení, matematické očakávanie a kovariančná matica vektora latentného stavu, sú podmienené dostupnými histórickými pozorovaniami, slúžia ako stav. V autorskej práci jeho slávneho filtra, Kalman (1960) poukázal, ako na odhadcu skrytého stavu môže byť postavené rekurzívne pomocou diferenčnej rovnice, ktorá používa aktuálne pozorovania k aktualizácii odhadcu posledného obdobia skrytého stavu. Muth (1960), Lucas (1972), Kareken, Muench, a Wallace (1973), Jovanovic (1979), a Jovanovic a Nyarko (1996), všetci používali verzie Kalmanovho filtra k štúdiu systémov, v ktorých sa agenti rozhodujú s nedokonalými pozorovaniami o stave.

Chvíľu sa zdalo, že niektoré veľmi dôležité problémy v makroekonómiu nemožno formulovať rekurzívne. Kydland a Prescott (1977) tvrdia, že by bolo ťažké uplatniť rekurzívne metódy k problému návrhu makroekonomickej politiky, vrátane dvoch príkladov o zdaňovaní a Phillipsovej krivke. Ako Kydland a Prescott formulovali, že problémy neboli rekurzívne: skutočnosť, že prognózy budúceho rozhodovania vlády verejnosti ovplyvňujú súčasné rozhodnutia verejnosti z problému vlády simultánne, nie sekvenčné. Ale čoskoro Kydland a Prescott (1980) a Hansen, Epple a Roberds (1985) navrhli rekurzívnu formuláciu týchto problémov, ktoré rozšíria stav ekonomiky pomocou Lagrangeovho alebo Hamiltonovho multiplikátora spojeného s vládnymi rozpočtovými obmedzeniami. Tie premenné pôsobia ako hraničný náklad udržiavania sľubov vlády. Nedávno Marcet a Marimon (1999) rozširovali a formulovali rekurzívnu verziu týchto problémov.

Významný pokrok pri uplatňovaní rekurzívnych metód sa podarilo dosiahnuť pomocou viacerých výskumníkov, vrátane Speara a Srivastava (1987), Thomasa a Worralla (1988) a Abreua, Pearceho a Stacchettiho (1990). Objavili stavovú premennú pre rekurzívne formulovanie nekonečne opakovaného problému morálneho hazardu. Tento problém si vyžaduje sledovať históriu výsledkov a používať ho ako podklad štatistiky pre kreslenie záverov o akcií agenta.

Rekurzívnej metódy motivačných problémov

Dynamické motivačné modely získali široké uplatnenie v oblasti financií a makroekonómie. Boli použité na mikro-základy trhovej neúplnosti firmy kapitálovú štruktúru a konkurzné právo. V makroekonómiu, prvý Ramsey a neskôr všeobecnejších Mirrlees modely informovali myslieť na daňovú politiku a sociálne poistenie. V každom z týchto rôznych prípadoch súvisiace dynamická motivačný problém obnoví rovnovážnej prínosy a výsledky z hry, ktorú hrajú populácií súkromne informovaná alebo prisľúbené prostriedky, a často spáchaný mechanizmus projektanta alebo istiny.

1.2 Dynamické programovanie

Dynamické programovanie je odvetvie optimalizácie. Zásadnou myšlienkou je rozklad problému na podproblémy, ktoré sú riešené a ich riešenie je ukladané pre ďalšie potenciálne možné použitie. Metóda je obzvlášť vhodná pre úlohy, ktoré sa dajú deliť na podúlohy, ktoré sú si podobné a môžu sa opakovať. V mnohých úlohách sa dá zvoliť spôsob rozkladu na podproblémy. Táto voľba môže mať vplyv na efektivitu celého výpočtu.

Jednou z najvýznamnejších osobností, ktoré prispeli k rozvoju modernej teórie riadenia a systémovej analýzy bol americký matematik Richard E. Bellman (1920-1984). Začiatok novej éry v analýze a optimalizácii rozsiahlych systémov zaznamenal práve jeho objav optimalizačnej metódy známej ako dynamické programovanie (rok 1940), ktorú podrobne rozobral v diele s rovnomenným názvom Dynamické programovanie. Definuje ho ako metódu na numerické riešenie optimalizačných problémov, ktorých riešenia nachádza pomocou rozdelenia komplexnej úlohy na viacero jednoduchých úloh. Jeden zo základných princípov znie: „Optimálna postupnosť rozhodnutí v mnohostupňovom optimalizačnom procese má tú vlastnosť, že nech sú vnútorné stavy procesu a predošlé rozhodnutia akékoľvek, ďalšie rozhodnutia musia tvoriť optimálnu postupnosť vychádzajúcu zo stavu, ktorý je výsledkom predošlým rozhodnutí.

Za prínos do dynamickej makroekonómie boli v roku 2004 ocenení Nobelovou cenou za ekonómiu veľmi významní ekonómovia Finn E. Kydland a Edward C. Prescott. Ich práca zmenila nielen samotný výskum, ale aj ekonomickú politiku. Po vojne totiž v makroekonomickej analýze dominovala teória Johna M. Keynesa, ktorý bol toho názoru, že krátkodobé výkyvy v produkcii a zamestnanosti sú predovšetkým dôsledkami zmien v celkovom dopyte. Kydland a Prescott však dokázali, že výkyvy ponuky môžu mať oveľa ďalekosiahlejšie dôsledky. Položili základy na tvorbu nových modelov, ktoré posudzujú ekonomické cykly ako kolektívny výsledok množstva rozhodnutí domácností a firiem v súvislosti, napríklad, so spotrebou, investíciami či pracovnou silou.

Ďalšou podstatnou osobnosťou, ktorá do veľkej miery ovplyvnila prístup k makroekonomickému modelovaniu, bol Robert Lucas. V roku 1976 vo svojom diele s názvom Econometric policy evaluation: A critique spochybňoval už existujúce modely. Lucas v ňom túto kritiku ekonometrickej analýzy modelov v redukovanej forme rozvíja na troch príkladoch – spotrebnej funkcii ako výsledku hypotézy permanentného príjmu, dopytu po investíciách a Phillipsovej krivke. Lucas poukazuje na to, že regresiu založenú na modeloch v redukovanej forme nie je možné použiť pri rozhodovaní v hospodárskej politike. A to z toho dôvodu, že zmena hospodárskej politiky vyvolá zmenu chovania ekonomických agentov, takže pôvodný redukovaný regresný model prestane platiť. Lucas zároveň ponúka východisko – a síce vytváranie modelov na základe tzv. hlbokých parametrov (napr. preferencie, technológia), ktoré sú invariantné voči zmenám hospodárskej politiky. Iba regresia založená na štrukturálnych modeloch zostane platná aj po zmene hospodárskej politiky a preto má ich analýza pre ňu zmysel. Lucasova kritika je veľmi prínosná aj v tom, že nám ponúka návod, akým spôsobom konštruovať makroekonomické modely.

2. Cieľ práce

Cieľom tejto práce je predstaviť metódy dynamického programovania, ich využitie v ekonomických modeloch a pracovať s jednoduchším modelom a riešiť optimalizačnú úlohu analyticky resp. Matematickým formulovaním a pomocou použitia riešiteľa v Exceli.

Pre dosiahnutie tohto cieľa :

- V prvej kapitole uvádza vznik dynamického programovania a jeho vyvoj v ekonomických modeloch a súčasný stav využitia.
- V tretej kapitole predstavuje hlavnú myšlienku a základné princípy dynamického programovania, ktoré sú využívané pri riešení problému dynamickej optimalizácie a ukazuje ich využitie v ekonomických modeloch matematickým formulovaním.
- V poslednom kapitole pri zohľadnení všetkých týchto zákonitostí je tiež cieľom prepojiť teoretické znalosti s praxou pomocou aplikácie na konkrétnom prípade spotrebiteľa a optimalizácie jeho spotreby a úspory. Pri riešení tohto problému je formulovaný použitím metódy dynamického programovania a riešený pomocou použitia riešiteľa v Exceli.

3. Metodika práce a metódy skúmania

Dynamická optimalizácia jednoducho znamená rozpoznávanie, že akcie, ktoré sa prijímajú dnes budú mať dôsledky pre budúcnosť, a začlenenie tohto poznatku do rozhodovania o tom, ktoré akcie je potrebné prijať už dnes. Ak vezmeme jednoduchý príklad, je to rozhodnutie o tom, akú časť z nášho aktuálneho príjmu spotrebujeme dnes a akú časť ušetríme, má to dôsledok nielen na bežnú spotrebu, ale aj spotrebu do budúcnosti. Pre formálne vysvetlenie hovoríme o modely dvoch období spotreby a úspory (two-period consumption-savings model). V takomto modele, úlohou spotrebiteľa bude prijať čo najlepšie rozhodnutie o jeho spotrebe v jednotlivých obdobiach za účelom maximalizácie súčasnej hodnoty jeho príjmu vzhľadom na rozpočtové ohraničenie. Matematicky úlohu zapíšeme pomocou Lagrangeovej funkcie:

$$\max_{c1,c2}: Ł = U(c1) + \beta U(c2) + \lambda \left[y1 + \frac{y2}{(1+r)} - p1c1 - \frac{p2c2}{(1+r)} \right] \qquad (3.1)$$

a podmienky prvého rádu budú :

$$U'(c1) = \lambda p1 \qquad (3.2)$$

$$\beta U'(c2) = \lambda \frac{p2}{1+r}$$

Keď vyjadríme z druhej podmienky a dosadíme vzťah, ktorý získame do prvej podmienky, dostaneme Eulerovu rovnicu v tvare:

$$U'(c1) = \frac{\beta U'(c2)(1+r)p1}{p2} \qquad (3.3)$$

Jednotlivé premenné v našom prípade znamenajú:

c1, c2 – Spotreba jednotlivca v prvom a v druhom období

y1, y2 – Reálny príjem spotrebiteľa v prvom a v druhom období

p1, p2 – Ceny spotrebných tovarov za každé sledované obdobie

r – Úrokové miera, ktorú zarobí, ak ušetrí svoje prostriedky do budúcnosti alebo hodnota, ktorú zaplatí za pôžičku

β – Subjektívny diskontný faktor, pre ktorý platí $\beta = 1/(1+\delta)$, pričom $\beta<1$

δ – Subjektívna diskontná sadzba

Rovnica (3.3) spája spotrebu v druhom období so spotrebou v prvom období, kde skutočnosť, že medzičasový vzťah je odvodený od podmienky prvého rádu optimalizačného problému. To znamená, že vzťah medzi dvoma obdobiami úrovne spotreby je optimálny. V každom probléme dynamickej optimalizácie spotreby, ako je tento, rozhodnutie zvýšiť spotrebu o jednu jednotku spôsobí redukciu budúcej spotreby o takú čiastku, ktorá závisí na relatívnych cenách spotreby v súčasnosti a budúcnosti a úroková sadzba, ktorú by sme mohli získať, keby sme usporili náklady na jednotku spotreby za jedno obdobie. Podmienku prvého rádu môžeme tiež interpretovať ako rovnosť hraničných výnosov a hraničných nákladov. Pre optimálne správanie teda platí, že nemôžeme zvýšiť výšku hraničnej užitočnosti pomocou šetrenia (a odsúvania spotreby do budúcnosti) alebo požičiavania (a presúvania spotreby do súčasnosti).

3.1. Dynamické programovanie

Základný prístup k optimalizácii úloh s dvomi a viacerými obdobiami je komplexne vyjadrený vyššie uvedeným vzťahom (3.1). Pri riešení dynamickej optimalizácie je však tento spôsob dosť ťažkopádny a zložitý. Preto sa v praxi najčastejšie používa alternatívny prístup k spomínaným problémom nazývaný dynamické programovanie. Tento prístup bol pôvodne použitý v roku 1940 Richardom E.Bellmanom (1920 – 1984). Zásadnou myšlienkou je rozklad problému na podproblémy, ktoré sú riešiteľné a ich riešenie je ukladané pre ďalšie potenciálne možné použitie.

V istom zmysle dynamické programovanie stále rozdeľuje časový horizont problému do dvoch období, na prítomnosť a budúcnosť. Základnou myšlenkou je, že robíme rozhodnutia o tom, čo robiť vzhľadom na skutočnosť, že tieto rozhodnutia budú mať budúce dôsledky, s veľmi špecifickým spôsobom.

Spomenutá hraničná užitočnosť budúcej spotreby je vlastne alternatívnym nákladom stúpajúcej súčasnej spotreby. Ak sme teda v súčasnosti zvýšili výdavky o euro, vzdali sme sa iných možností tohto použitia v plnom rozsahu. Mohli sme ich ušetriť o dĺžku jedného obdobia a v tom ďalšom ich spotrebovať a získať tak úroky. Alebo by sme ich šetrili počas ďalších období a až potom minuli, čiže by sme si pripočítali akumulované úroky pre spotrebu počas dôchodku alebo by sme mohli časť spotrebovať zajtra a zvyšok ušetriť na dôchodok.

Vo všeobecnom matematickom vyjadrení problému si našu riadiacu premennú označíme ako x, tzv. alternatívnu voľbu a x_t potom bude hodnota x, pre ktorú sa rozhodneme v období t. Ďalšou dôležitou veličinou bude pre nás stavová premenná, ktorú si označíme ako s. Jej hodnotu nemáme priamo pod kontrolou, ale je pod naším nepriamym vplyvom. Tento vplyv je vyjadrený rovnicou priebehu stavovej premennej, ktorá spája prítomnosť s budúcnosťou. Všeobecný tvar tejto rovnice je:

$$\boldsymbol{s_t = Q(s_{t-1}, x_{t-1})} \tag{3.4}$$

a hovorí, že disponibilné aktíva v období sú ovplyvnené aktívami a spotrebou predošlého obdobia.

V našom prípade bude riadiaca premenná interpretovaná ako spotreba v každom období c_t a stavová premenná (ako vo väčšine úloh dynamickej optimalizácie) ako aktíva a_t, ktoré máme k dispozícii na začiatku jednotlivých období. Tieto aktíva dvoch období definujeme ako:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a_1 = y_1} \\ &\boldsymbol{a_2 = y_2 + (y_1 - p_1 c_1)(1 + r)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ktoré ak budeme riešiť ako sústavu dvoch rovníc, môžeme prepísať do spomínanej rovnice priebehu:

$$\boldsymbol{a_2 = y_2 + (a_1 - p_1 c_1)(1 + r)} \tag{3.6}$$

a je možné ju prepísať aj do všeobecnejšieho tvaru:

$$\boldsymbol{a_{t+1} = y_{t+1} + (a_t - p_t c_t)(1 + r)} \tag{3.7}$$

Rovnica (3.7) by mohla byť tiež rovnicou priebehu aktív v úlohách, ktorých časový horizont obsahuje viac ako dve obdobia. Cieľom dynamického programovania je nájsť tzv. optimálnu stratégiu, ktorej formálny tvar je:

$$\boldsymbol{x_t = h_t(s_t)} \tag{3.8}$$

Rovnica (3.8) vyjadruje optimálnu hodnotu riadiacej premennej x v období t, ktorá, ako vidíme, je podmienená hodnotou stavovej premennej v období t (pre nás budú stavovou premennou aktíva, s ktorými spotrebiteľ disponuje na začiatku obdobia t). Berieme pritom do úvahy aj vplyv jeho voľby na voľby v budúcnosti. Tento vplyv môžeme sledovať práve pomocou vyššie uvedenej pohybovej rovnice stavovej premennej (3.6).

3.1.1 Úlohy konečného časového horizontu

Uvažujme so zjednodušenou verziou úlohy, kedy skúmame spotrebu v dvoch obdobiach. Ako prvý predpoklad prijmime, že spotrebiteľ využíva aktíva z prvého obdobia, čiže $y_2 = 0$. Pričom tieto aktíva pre zhodu s rovnicou priebehu označíme a_1. Ďalej predpokladajme, že sme našli optimálnu stratégiu $h_2(a_2/p_2)$, ktoré nám určuje optimálnu úroveň spotreby c_2 pre akúkoľvek zadanú hodnotu aktív a_2.
Prístup dynamického programovania k analýze tohto problému zahŕňa:

$$\mathbf{max}_{\boldsymbol{c1}}\colon Ł = \boldsymbol{U(c1) + \beta U\left(h_2\left(\frac{a_2}{p_2}\right)\right)} \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{a_2 = y_2 + (a_1 - p_1 c_1)(1 + r)}$$

Našim prvým cieľom je získať podmienku prvého rádu, čo dosiahneme pomocou derivácie Lagrangeovej funkcie podľa premennej c_1. Potrebujeme však ešte pred tým zderivovať pohybovú rovnicu podľa c_1 (keďže je zjavné, že a_2 je funkciou premennej c_1):

$$\boldsymbol{\frac{\partial a_2}{\partial c_1} = -p_1(1 + r)} \tag{3.10}$$

A následne získame požadovanú podmienku prvého rádu v tvare:

$$\boldsymbol{U'(c1) = \beta U'(c_2) h'_2\left(\frac{a_2}{p_2}\right)\left(\frac{p_1(1+r)}{p_2}\right)} \tag{3.11}$$

Rovnice (3.3) a (3.11) sú rovnaké výrazy, ak $h'_2(a_2/p_2) = 1$.

Spotreba vo viacerých obdobiach nie je, samozrejme, obmedzená na riešenie úloh iba s dvomi periódami. Uvažujme teda o zväčšení rozsahu horizontu na tri obdobia: spotrebu c_3 a aktíva a_3 môžeme definovať takisto ako predtým. Rovnako budeme postupovať aj pri definícii $h_3(a_3/p_3)$ ako optimálnej stratégie, ktoré nám určuje maximálnu užitočnosť pre hodnotu spotreby c_3 pre akúkoľvek zadanú hodnotu aktív v treťom období. A ak vieme, že aktíva tretieho obdobia sú determinované tou istou rovnicou priebehu ako aktíva druhého obdobia, rovnica (3.7), tak problém spotrebiteľa môžeme vyjadriť nasledovne:

$$\mathbf{max}_{c1}: Ł = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{c1}) + \boldsymbol{\beta U}\left(\boldsymbol{h_2}\left(\frac{a_2}{p_2}\right)\right) + \boldsymbol{\beta^2 U}\left(\boldsymbol{h_3}\left(\frac{a_3}{p_3}\right)\right) \qquad \textbf{(3.12)}$$

V rovnici (3.12) je výraz $h_3(a_3/p_3)$ optimálna úroveň spotreby v treťom období vyjadrená funkciou premennej a_3. Vezmime ale do úvahy, že hodnota a_3 závisí od hodnôt a_2 a c_2. Takže, výraz $h_2(a_2/p_2)$ je výsledná hodnota spotreby c_2, ktorá je taktiež vyjadrená funkciou premennej a_2. Mohli by sme takto postupovať ďalej smerom dozadu, pričom samozrejme a_2 závisí od a_1 a c_1, ale v tejto chvíli splníme účel, už keď skončíme pri hodnote aktív v druhom období a_2. To je preto, že nám umožňuje definovať celý výraz $\beta U(h_2(a_2/p_2)) + \beta^2 U(h_3(a_3/p_3))$ ako funkciu a_2.

Výraz (3.12) je v termíne užitočnosti, diskontovaný späť tak, že užitočnosť je meraná v období 1 v súčasnej hodnote. Je to však možné napísať tiež ako:

$$\mathbf{max}_{c1}: Ł = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{c1}) + \boldsymbol{\beta J_2}(\boldsymbol{a_2}) \qquad \textbf{(3.13)}$$
$$\boldsymbol{J_2}(\boldsymbol{a_2}) = \boldsymbol{U}\big(\boldsymbol{h_2}(\boldsymbol{a_2}/\boldsymbol{p_2})\big) + \boldsymbol{\beta U}\big(\boldsymbol{h_3}(\boldsymbol{a_3}/\boldsymbol{p_3})\big)$$

Kde index pri *J* označí počet období, ktoré táto účelová funkcia zahŕňa a celá účelová funkcia vyjadruje maximálnu hodnotu užitočnosti v prítomnosti (v tomto prípade v druhom období). Keď potom $J_2(a_2)$ vynásobíme diskontným faktorom *β*, prevedieme úroveň užitočnosti z druhého obdobia do prvého.

Náš problém sa teraz stáva rovnice (3.12), kde ako vždy, jej maximalizácia vykonáva spätý s rozpočtovým ohraničením ako reprezentovaný rovnicou priebehu aktív (3.7). Keď pozrime rovnicu (3.12) pozorne, zistíme, že hodnoty a_2 a c_1 obe závisia od a_1 (a od parametrov ako sú ceny a úroková miera). Potom, ak nájdeme optimálnu úroveň spotreby pre prvé obdobie, t.j. ak riešime podľa strategického pravidla $h_1(a_1/p_1)$, maximálna hodnota rovnice (3.12) je v tomto prípade funkciou ukazovateľa a_1. Tú zapíšeme ako:

$$\boldsymbol{J_3}(\boldsymbol{a_1}) = \mathbf{max}_{c_1}: \big(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{c_1}) + \boldsymbol{\beta J_2}(\boldsymbol{a_2})\big) \qquad \textbf{(3.14)}$$

kde zadaný index 3 na ľavej strane rovnice, takisto ako v prípade indexu pri J_2, označí počet období, ktoré nám ešte ostávajú v riešení úlohy dynamickej optimalizácie. Dôležité je ešte pripomenúť, že prvým obdobím je pre nás to, v ktorom počítame optimalizáciu. Pre dôslednosť a nespornosť by sme mali potom výraz $U(h_3(a_3/p_3))$ označiť ako $J_1(a_3)$.

V problematike dynamickej spotreby vyjadruje účelová funkcia $J_3(a_1)$ súčasnú hodnotu maximálnej životnej (použitím termínu ‚životnej' naznačujeme dĺžku časového horizontu plánovania) užitočnosti, ktorú spotrebiteľ môže získať, ak začne svoju spotrebu s aktívami na úrovni a_1 a rozdelí si svoju spotrebu cez tri periódy zohľadňujúc podmienky prvého rádu (ktoré sú napokon nevyhnutné pre maximalizáciu užitočnosti). Rovnica (3.14) je Bellmanova základná rovnica optimálnosti pre náš problém.

Táto základná rovnica optimálnosti zapísaná v univerzálnej tvare vyzerá nasledovne:

$$\boldsymbol{J_{T-t}(a_t) = \max\nolimits_{c_t}: \left(U(c_t) + \beta J_{T-t-1}(a_{t+1})\right)} \qquad \textbf{(3.15)}$$

kde indexy pri premenných *a* a *c* označia obdobie, v ktorom je prijaté dané opatrenie resp. rozhodnutie, pričom znovu počítame od začiatku horizontu plánovania. Indexy pri *J* vyjadrujú počet obdobie ovplyvnených daným rozhodnutím v budúcnosti, resp. počet obdobie zostávajúcich do konca horizontu plánovania, kde *T* reprezentuje koniec časového horizontu. Umiestňujeme index na *J*, pretože funkčné forma *J* môže zmeniť od obdobia k obdobiu. Bez ohľadu na časové obdobie, účelová funkcia *J* vnútri operátora "Max" na pravej strane rovnice ostáva daným operátorom nedotknutá, pretože už je maximalizovaná. Taktiež keď nájdeme optimálnu stratégiu $h_t(s_t)$, musíme umiestniť časový index k *h*, pretože tvar tej funkcie optimálnej stratégie sa môže meniť z obdobia na obdobie.

Mohli by sme napísať rovnice (3.15) vo všeobecnejšej rovine ešte, ale čo je nakoniec dôležité je doplnkový charakter objektívne funkcie $U(c_t)$. Snažíme sa maximalizovať medzičasové doplnkové rady:

$$\boldsymbol{U(c_1) + \beta U(c_2) + \beta^2 U(c_3) + \beta^3 U(c_4) + \cdots + \beta^{T-1} U(c_T)}$$

vzhľadom na rovnicu priebehu premennej a a ostatné obmedzenia týkajúce sa tohto problému. Táto doplnková štruktúra znamená, že základná rovnica optimálnosti obsahuje Bellmanov princíp optimálnosti, ktorý v podstate hovorí, že ak by sme čiastočne prestali a zvážili zvyšok nášho plánu, bude ten zvyšok stále optimálny, vzhľadom na úroveň stavovej premennej v tomto bode v procese. Totiž, optimálny priebeh spotreby pre viac období je konštantný v čase, ak teda plán čiastočne prerušíme a zostavíme novú optimalizáciu problému pre zvyšok horizontu plánovania (daný hodnotou stavovej premennej v bode, kedy toto vykonáme), náš nový plán pre ostatok horizontu bude identický s tým pôvodným. Nepotvrdili by sme obavy o správnosti prijatia pôvodnej stratégie a nemali by sme ani dôvod ju meniť.

Aby pre nás bolo možné využiť Bellmanovu rovnicu optimalizácie, potrebujeme najprv získať pár výsledkov. Prvým je podmienka prvého rádu pre maximalizačný problém v (3.15). Ak *c* je našou riadiacou premennou, potom podmienka prvého rádu vzhľadom na *c* v období *t* bude :

$$\boldsymbol{U'(c_t) + \beta J'_{T-t-1}(a_{t+1})\left(\frac{\partial Q(a_t,c_t)}{\partial c_t}\right) = 0} \tag{3.16}$$

kde $a_{t+1} = Q(a_t, c_t)$ je rovnica priebehu premennej a, takže konečný výraz ľavej strany rovnice (3.16) vyjadruje ako sa a_{t+1} mení na základe zmeny c_t.

Druhý výsledok, ktorý potrebujeme získať, je známy pod názvom Benveniste-Scheinkmanova podmienka alebo ako skupinová podmienka. Nahradíme $h_t(a_t)$ pre c_t, čo naznačuje, že pracujeme s optimalizovanou funkciou, aby sme ju našli. Následne zderivujeme rovnicu (3.15) podľa a_t, čím získame vzťah:

$$\boldsymbol{\frac{\partial J_{T-t}(a_t)}{\partial a_t} = \left[U'^{(h_t(a_t))} + \left(\beta \frac{\partial J_{T-t-1}(a_{t+1})}{\partial a_{t+1}}\right)\left(\frac{\partial Q\big(a_t, h_t(a_t)\big)}{\partial h_t}\right)\right] \times \left[\frac{\partial h_t(a_t)}{\partial a_t}\right] + \left(\beta \frac{\partial J_{T-t-1}(a_{t+1})}{\partial a_{t+1}}\right)\left(\frac{\partial Q\big(a_t,h_t(a_t)\big)}{\partial a_t}\right)} \tag{3.17}$$

kde sme použili funkciu Q po substitúcii $h_t(a_t)$. Teraz ak porovnáme prvý výraz pravej strany rovnice (3.17) s rovnicou (3.16) (opäť poznamenávame, že sme c_t nahradili $h_t(a_t)$), vidíme, že predtým chaoticky pôsobiaci problém je vlastne rovný nule. Z rovnice (3.17) nám teda vzniká nasledujúci vzťah:

$$\boldsymbol{\frac{\partial J_{T-t}(a_t)}{\partial a_t} = \left(\beta \frac{\partial J_{T-t-1}(a_{t+1})}{\partial a_{t+1}}\right)\left(\frac{\partial Q\big(a_t,h_t(a_t)\big)}{\partial a_t}\right)} \tag{3.18}$$

Inými slovami, hodnota c závisí od hodnoty premennej a, kedy zderivujeme podľa a na oboch stranách optimalizovanej základnej rovnice optimálnosti, treba sa pozerať iba parciálne derivácie J podľa a.

Uvažujme jednoduchý príklad, ktorý patrí problému dynamickej optimalizácie spotreby, aby sme získali predstavu o tom, ako funguje dynamické programovanie. A je to špecialný prípad známy ako "Problém rozvrhnutia spotreby koláča".

V tomto probléme spotrebiteľ začína plánovací horizont so stanovenými aktívami, nazvanými koláč, z ktorého musí žiť po zvyšok plánovacieho horizontu. Koláč predstavuje stavovú premennú, ktorú označíme ako s a nemá prirodzenú tendenciu rásť. Tento fakt pre nás znamená, že pri tomto prístupe nebudeme zohľadňovať úrokovú mieru a ani ceny (keďže cena za jednotku spotreby sa rovná 1 v každom období). Definujme c ako spotrebu a rovnica priebehu pre úlohu rozvrhnutia spotreby koláča teda bude:

$$\boldsymbol{s_{t+1} = s_t - c_t} \tag{3.19}$$

Táto rovnica jednoducho hovorí, že dostupné množstvo koláča na začiatku ďalšieho obdobia bude taká čiastka, ktorú spotrebiteľ nevyužil v prítomnom období. V tomto príklade budeme predpokladať, že $T = 5$, takže koláč musí byť spotrebovaný v priebehu piatich období. A ešte jednu vec uvažujme, že spotrebiteľ diskontuje budúce hodnoty podľa diskontného faktora β. Máme teda všetky potrebné informácie pre kompletné zostavenie zápisu úlohy spotrebiteľa. Začneme účelovou funkciou:

$$\boldsymbol{U(c_1) + \beta U(c_2) + \beta^2 U(c_3) + \beta^3 U(c_4) + \beta^4 U(c_5)} \tag{3.20}$$

ďalej pokračujeme rovnicami priebehu stavovej premennej:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_2} &= \boldsymbol{s_1 - c_1} \\ \boldsymbol{s_3} &= \boldsymbol{s_2 - c_2} \\ \boldsymbol{s_4} &= \boldsymbol{s_3 - c_3} \\ \boldsymbol{s_5} &= \boldsymbol{s_4 - c_4} \end{aligned} \tag{3.21}$$

A potom píšeme rozpočtové obmedzenie:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \leq s_1 \tag{3.22}$$

ktoré hovorí, že celková životná spotreba musí byť menšia alebo rovná počiatočným aktívam. Namiesto použitia Langrangeovej metódy pre riešenie problému môžeme využiť rekurzívny prístup dynamického programovania tak, aby sme našli optimálny časový priebeh spotreby. V úlohe dynamického programovania s konečným časovým horizontom, rekurzívny prístup začína tým, že riešime úlohy posledného obdobia. To znamená, že najprv musíme nájsť stratégiu, ktorá nám určí, koľko má spotrebiteľ spotrebovať v piatom období. Bez ohľadu na to, aké množstvo koláča bude mať k dispozícii na konci štvrtého obdobia (na začiatku piateho obdobia). Takže, dostupná zásoba pre neho je s_5 a našou úlohou je nájsť optimálnú stratégiu $c_5 = h_5(s_5)$, ktorá maximalizuje $U(c_5)$ za dodržanie podmienky $c_5 \leq s_5$.

Pri riešení tohto problému budeme využívať to, čo je známe ako hraničné (boundery, resp. Transversality conditions) podmienky.

Hraničná podmienka nám udáva, kde systém skončí. Niekedy táto podmienka je určená v zadaní úlohy, ako napríklad v prípade, kedy by sme povedali hneď na začiatku, že istá časť koláča musí na konci piateho obdobia ostať (možno pre ďalšie generácie). V iných prípadoch je ju možné odvodiť zo základných ekonomických princípov, čo je prístup, ktorý ideme teraz uplatniť.

V rovnici (3.20) nefiguruje žiadna zostatková hodnota z činnosti, čiže spotrebiteľ nezíska užitočnosť z nezjedenej časti koláča na konci horizontu optimalizácie spotreby. Urobíme štandardný predpoklad, že hraničná užitočnosť je vždy kladná. To znamená, že spotrebiteľ sa nikdy nerozhodne pre zastavenie spotreby, pretože je sýty. Vzhľadom na tieto predpoklady, môžeme napísať jeho problém piateho obdobia cez Lagrangeovu funkciu o jednom období:

$$\max_{c_5}: U(c_5) + \lambda(s_5 - c_5) \tag{3.23}$$

Jej podmienka prvého rádu je:

$$U'(c_5) - \lambda = 0 \tag{3.24}$$

a predpoklad o vždy kladnej hraničnej užitočnosti nám hovorí o tom, že Lagrangeov multiplikátor je taktiež kladný. A z toho vyplýva, že obmedzenie v rovnici (3.23) je záväzné a teda platí, že $c_5 = s_5$. Tento fakt nám ďalej určuje optimálnu stratégiu pre piate obdobie:

$$\boldsymbol{c_5 = h_5(s_5) = s_5} \qquad \textbf{(3.25)}$$

Inými slovámi, optimálna stragégia pre spotrebu v poslednom období planovacieho horizontu je spotrebiteľ spotrebovať všetky zostávajúce koláče, bez ohľadu na množstvo. Táto optimálna stratégia určuje maximálnu hodnotu užitočnosti, ktorá v súlade s našim predchádzajúcim zápisom budeme písať ako $J_1(s_5)$ sa rovná $U(s_5)$. Táto rovnosť predstavuje potom hodnotu účelovej funkcie pre piate a posledné obdobie optimalizácie spotreby z piatich obdobie.

Ďalším krokom v rámci rekurzívneho prístupu dynamického programovania bude nájsť $J_2(s_4)$. Vieme zapísať základnú rovnicu optimálnosti tzv. Bellmanovu rovnicu pre štrvté obdobie (predposledné obdobie) ako:

$$\boldsymbol{J_2(s_4) = \max_{c_4}: U(c_4) + \beta J_1(s_5)} \qquad \textbf{(3.26)}$$

Vieme, že $s_5 = s_4 - c_4$ zo základnej rovnice priebehu koláča, pre ktorú platí $\partial s_5 / \partial c_4 = -1$, dostaneme aj podmienku prvého rádu pre predošlú rovnicu (3.26) v tvare :

$$\boldsymbol{U'(c_4) = \beta \frac{\partial J_1(s_5)}{\partial s_5}} \qquad \textbf{(3.27)}$$

Keďže sme práve zaviedli vzťahy $c_5 = s_5$ a $J_1(s_5) = U(s_5)$, platí rovnosť $\partial J_1(s_5)/\partial s_5 = U'(c_5)$. Dosadením výsledného výrazu do rovnice (3.27) dostaneme Eulerovu rovnicu:

$$\boldsymbol{U'(c_4) = \beta U'(c_5)} \qquad \textbf{(3.28)}$$

Naším ďalším krokom bude zostaviť úlohu pre t = 3:

$$\boldsymbol{J_3(s_3) = \max_{c_3}: U(c_3) + \beta J_2(s_4)} \qquad \textbf{(3.29)}$$

Podmienkou prvého rádu pre voľbu hodnoty premennej c_3 je:

$$\boldsymbol{U'(c_3) = \beta \frac{\partial J_2(s_4)}{\partial s_4}} \tag{3.30}$$

lebo z rovnice priebehu pre koláča, $\partial s_4/\partial c_3 = -1$. Teraz potrebujeme zistiť spôsob, ako vyjadriť $\partial J_2(s_4)/\partial s_4$. Síce vieme, že použitím vhodnej substitúcie by sme mohli výraz prepísať na $J_2(s_4) = U\big(h_4(s_4)\big) + \beta J_1\big(s_4 - h_4(s_4)\big)$, avšak tento postup by nám skôr skomplikoval situáciu. V tomto bode ale môžeme využiť Benveniste-Scheinkmanovu podmienku, ktorá nám hovorí, že $[\partial J_2(s_4)/\partial s_4] = \beta[\partial J_1(s_5)/\partial s_5]$. Pripomeňme si tiež, že $J_1(s_5) = U(s_5)$, $c_5 = s_5$ a $[\partial J_1(s_5)/\partial s_5 = U'(c_5)]$, z čoho získame výraz $[\partial J_2(s_4)/$ $\partial s4{=}\beta U'c5$. Ak ho dosadíme do rovnice (3.30) , dostaneme:

$$\boldsymbol{U'(c_3) = \beta\big(\beta U'(c_5)\big) = \beta^2 U'(c_5)} \tag{3.31}$$

Môžeme pokračovať v práci smerom dozadu týmto spôsobom, s ďalším krokom vyjadríme rovnicu:

$$\boldsymbol{J_4(s_2) = \max_{c_2}: U(c_2) + \beta J_3(s_3)} \tag{3.32}$$

z ktorej pomocou využitia podmienky prvého rádu a Benveniste-Scheinkmanovej podmienky získame $U'(c_2) = \beta U'(c_3) = \beta^3 U'(c_5)$. Pokračovaním v tomto postupe smerom dozadu, získame $U'(c_1) = \beta U'(c_2) = \beta^4 U'(c_5)$. Na konci tohto rekurzívneho prístupu získame vzťah:

$$\boldsymbol{U'(c_1) = \beta U'(c_2) = \beta^2 U'(c_3) = \beta^3 U'(c_4) = \beta^4 U'(c_5)} \tag{3.33}$$

Pripomeňme si, že diskontný faktor β musí byť menší ako 1. Funkcia užitočnosti U na rozdiel od strategického pravidla h_t, má v každom období rovnaký tvar, takže rozdielne úrovne užitočnosti a hraničnej užitočnosti z jedneho obdobia na ďalšiu musia byť spôsobené rozdielnymi úrovňami spotreby. Inak povedané, ak je spotreba v každom období rovnaká, úrovne užitočnosti a hraničnej užitočnosti budú tiež rovnaké.

Z rovnice (3.33), vidíme, že hraničná užitočnosť musí v priebehu času narastať. Rovnosť znamená, že hraničná užitočnosť v prvom období je zlomkom z hraničnej užitočnosti v druhom období a tak ďalej. Z toho tiež vyplýva, že spotreba má v čase klesajúcu tendenciu. Keby sme boli predpokladať, že $\beta = 1$, tak spotrebiteľ neznížil budúcu užitočnosť vo vzťahu k súčasnej užitočnosti, a rovnica by (3.33) nám hovorila, že úroveň jeho hraničnej užitočnosti spotreby musela byť v priebehu času konštantná, čo znamená, že v každom období spotreboval rovnaké množstvo koláča. Pokiaľ už v zadaní problému určíme nemenné množstvo koláča s_1 a koláč v priebehu nerastie, tak v každom období spotrebuje 1/5 z počiatočnej hodnoty. A to bez ohľadu na funkčný tvar funkcie užitočnosti $U(c)$. Keď β je menšia ako 1, vieme, že spotreba sa v čase znižuje, ale jeho reálny priebeh spotreby v čase závisí od tvaru $U(c)$.

Pre zobrazenie to podrobnejšie, predpokladajme, že $U(c) = \ln(c)$, čo znamená, že U(c) =1/c. Potom z rovnice (3.33), dostaneme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c_2} &= \boldsymbol{\beta c_1} \\ \boldsymbol{c_3} &= \boldsymbol{\beta c_2} = \boldsymbol{\beta^2 c_1} \\ \boldsymbol{c_4} &= \boldsymbol{\beta c_3} = \boldsymbol{\beta^3 c_1} \\ \boldsymbol{c_5} &= \boldsymbol{\beta c_4} = \boldsymbol{\beta^4 c_1} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.34)}$$

Je známe, že optimálne riešenie zahŕňa spotrebu celého koláča na konci piateho obdobia, takže $(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) = s_1$, ktoré, po dosadení z rovnice (3.34) dostaneme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c_1} &= \frac{\boldsymbol{s_1}}{(\boldsymbol{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4})} \\ \boldsymbol{c_2} &= \frac{\boldsymbol{\beta s_1}}{(\boldsymbol{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4})} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.35)}$$

a môžeme získať podobné výrazy pre spotreby c_3, c_4 a c_5.

Výrazy ako (3.35) nám síce hovoria, ako nájsť úrovne spotreby v jednotlivých obdobiach, no stále to nie sú strategické funkcie, ktoré hľadáme. Aby sme našli h(s), potrebujeme využiť rovnicu priebehu premennej s. Napríklad využitím vzťahu $s_2 = s_1 - c_1$ v rovnici (3.35), dostaneme:

$$\boldsymbol{c_2} = \frac{\boldsymbol{\beta s_2}}{(\boldsymbol{\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4})} = \boldsymbol{h_2(s_2)} \qquad \textbf{(3.36)}$$

Ak budeme pokračovať týmto spôsobom a nájdeme ostatné *h*(s) funkcie, zistíme, že sú všetky odlišné. Uvažujme, že β = 1, takže projektant spotrebuje pätinu pôvodnej zásoby koláča v každom období, zistíme, že $c_1 = s_1/5$, $c_2 = s_2/4$, $c_3 = s_3/3$ a tak ďalej. Tento výsledok, že *h*(s) funkcie sa líšia naprieč obdobie, zovšeobecňuje na prípad, keď aktíva sa rastú a kde má spotrebiteľ mimo príjmov.

3.1.2 Úlohy nekonečného časového horizontu

Najväčší rozdiel medzi konečným a nekonečným časovým horizontom je, že v nekonečný horizont nemá posledné obdobie. Podľa úlohy s konečným časovým horizontom použime štandartný prístup dynamického programovania. Ten prístup založený na rekurzívnom prístupe, ktorého podstatou je v prvom rade práce s poslednom obdobím.

Pokiaľ však nepoznáme posledné obdobie, tento spôsob výpočtu nemôžeme využiť. V dynamickom programovaní však nachádzame spôsob ako vyriešiť aj takýto problém. Najprv uvažujme o Bellmanovej rovnici:

$$\boldsymbol{J_{T-t}(s_t) = \mathbf{max}_{c_t}\colon \left(U(c_t) + \beta J_{T-t-1}(s_{t+1})\right)} \tag{3.37}$$

Kde časové indexy pri riadiacej premennej *c* a stavovej premennej *s* sú uvedené ku dňu, merané od začiatku problému, niekedy známy ako uplynulý čas, a indexy pri *J* sú dané počtom periód, ktoré ostávajú do konca problému. Pri nekonečnom časovom horizonte budú obidva indexy *T-t* a *T-t-1* nadobúdať nekonečnú hodnotu. Zatiaľ čo indexy pri premenných *c* a *s* dávajú zmysel, indexy pri *J* zmysel nedávajú a počítanie s nimi nemá žiaden význam. Po ich vypustení a následným prepísaním predošlej rovnice (3.19) získame:

$$\boldsymbol{J(s_t) = \mathbf{max}_{c_t}\colon \left(U(c_t) + \beta J(s_{t+1})\right)} \tag{3.38}$$

Takto upravená Bellmanova rovnica nám dáva predstavu o tom, ako bude vyzerať ďalší krok. V probléme s konečným časovým horizontom sa tvar účelovej funkcie *J* v čase menil. V tomto prípade nezáleží koľko času uplynulo od začiatku plánovania, spotrebiteľ totiž nikdy nie je bližšie ku koncu horizontu, ako to bolo predtým. To znamená, že zmizol dôvod zmeny tvaru účelovej funkcie v čase. Vyradenie indexov pri *J* vo vyššie uvedenej rovnici odhalilo jeden zaujímavý fakt. Kým hodnota funkcie *J* sa bude v závislosti zmien

premenných c a s meniť, jej funkčný tvar ostane vždy rovnaký. A ak rovnakým spôsobom porovnáme optimálnu stratégiu $h(s)$, jej hodnota sa tiež bude meniť v čase na základe zmeny premennej s , ale funkčný tvar $h(s)$ sa nezmení.
Teraz uvažujme o variante koláčového problému s tým rozdielom, že povolíme rast koláča v priebehu času. Konkrétne, uvažujme problém maximalizácia užitočnosti zo spotreby $U(c)$ cez nekonečný horizont, kde je budúca spotreba znižovaná podľa diskontného faktora β a spotreba je realizovaná z akumulovaných aktív a. Naše aktíva sú v tomto prípade finančné, ktoré spotrebiteľ zarobí z nemennej úrokovej miery jedného obdobia. Dôležité je tiež poznamenať, že spotrebiteľ nemá žiadny iný príjem okrem úrokov z jeho aktív. Rovnica priebehu aktív teda bude:

$$\boldsymbol{a_{t+1} = (a_t - c_t)(1 + r)} \tag{3.39}$$

Rovnica (3.39) ukazuje, že spotrebiteľ začína obdobie t s aktívami rovnými a_t. Spotrebuje alebo sa zaväzuje k spotrebe (pravdepododbne umiestnením príslušnej čiastky na bezúročný účet) množstva c_t v období t, na sporenie zostáva $(a_t - c_t)$ z majetku, ktorým disponoval na začiatku obdobia t. Zarobí na úrokoch v miere r za úspory počas obdobia t, ktoré mu budú v období $t + 1$ tvoriť majetok vyjadrený touto rovnicou.

Bellmanova rovnica pre náš problém vyzerá:

$$\boldsymbol{J(a_t) = \max_{c_t}: \left(U(c_t) + \beta J(a_{t+1})\right)} \tag{3.40}$$

Podmienka prvého rádu pre maximalizáčný problém v rovnici (3.40), ktorá využíva rovnicu priebehu premennej a, keď derivujeme podľa c_t, dostaneme:

$$\boldsymbol{U'(c_t) = \beta(1 + r)J'(a_{t+1})} \tag{3.41}$$

Vzhľadom k tomu, táto podmienka musí platiť pre všetky hodnoty t, môžeme tiež písať:

$$\boldsymbol{U'(c_{t-1}) = \beta(1 + r)J'(a_t)} \tag{3.42}$$

lebo funkčná forma účelovej fukcie J nemenia v priebehu času, to isté platí aj pre J'.

Ďalej napíšeme Benveniste-Scheinkmanovu podmienku pre problém s nekonečným časovým horizontom, ako:

$$\boldsymbol{J'(a_t) = \beta(1+r)J'(a_{t+1})} \quad \textbf{(3.43)}$$

Kombináciou rovníc (3.41), (3.42) a (3.43) získame Eulerovu rovnicu spotreby:

$$\boldsymbol{U'(c_{t+1}) = \frac{U'(c_t)}{\beta(1+r)}} \quad \textbf{(3.44)}$$

Niekedy analýza týchto problémov sa zastaví na tomto mieste, inokedy autori predpokladajú funkčný tvar pre $U(c)$, ktorý je to, čo tu robíme. Rovnako ako aj v úlohe konečného horizontu predpokladajme, že $U(c) = \ln(c)$. Potom, z rovnice (3.44), máme:

$$\boldsymbol{c_{t+1} = \beta(1+r)c_t} \quad \textbf{(3.45)}$$

Keď cieľom analýzy je ísť nad rámec diferenčnej rovnice, čo znamená použiť Eulerovu rovnicu pre spotrebu tohto problému a nájsť optimálne stratégie $c = h(a)$, najčastejším ďalším krokom je predpokladať funkčný tvar $h(a)$ a snažiť sa ho dosadiť do zadania úlohy.

V našom prípade predpokladajme, že:

$$\boldsymbol{c_t = Xa_t} \quad \textbf{(3.46)}$$

kde X je neznáma konštanta, ktorej hodnota má byť určená. Predpokladáme, že X je konštantná, pretože $h(a)$ funkcia je nemenná v priebehu času. Ďalej dosaďme rovnicu priebehu aktív $a_{t+1} = (a_t - c_t)(1+r)$ do predošlej rovnice (3.46) a po využití vhodných časových indexov a matematických úpravách dostaneme:

$$\boldsymbol{c_{t+1} = (1-X)(1+r)c_t} \quad \textbf{(3.47)}$$

Kombináciou rovnice (3.45) s (3.47) nám dáva pár rovníc týkajúcich c_{t+1} a c_t, pričom obaja musia byť splnené. Test nášho predpokladaného funkčného tvaru v rovnici (3.46) je, či môžeme nájsť výraz pre X, ktorá spĺňa túto požiadavku. Porovnaním rovníc (3.45) a

(3.47) získame $\beta(1+r)c_t = (1-X)(1+r)c_t$, ktorý platí iba vtedy, ak $X = 1-\beta$. Keď tento výraz dosadíme do (3.46), získame optimálnu stratégiu :

$$\boldsymbol{c_t = (1-\beta)a_t} \tag{3.48}$$

Výraz (3.48) spĺňa náš predpoklad, že spotreba v každom období by konštantným zlomkom (od β je menšia ako 1) aktív v tomto období. Dosadením rovnice (3.48) do rovnice priebehu aktív a uvádza:

$$\boldsymbol{a_{t+1} = \beta(1+r)a_t} \tag{3.49}$$

Na vedomie, že podľa rovnice (3.45), Eulerova rovnica pre riešenie tohto problému, ktorá v kombinácii s rovnicou (3.49) dostaneme $c_{t+1}/a_{t+1} = c_t/a_t$. Toto zistenie nám hovorí, že podiel prítomnej optimálnej spotreby a aktív tohto obdobia ostáva v priebehu času konštantný. Aj keď je to pomerne jednoduchý príklad, to ukazujú, že nedostatok konečného obdobia nie je fatálne problém dynamického programovania v probléme s nekonečným časovým horizontom.

3.1.3 Úlohy v rámci neistosty

Predtým, než budeme pokračocať do ďalšej časti, je potrebné poznamenať, že doplnková štruktúra Bellmanovej rovnici v dynamickom programovaní sa dobre hodí na štúdium problémov týkajúcich sa neistú budúcnosť. Predpokladali sme, že tam bolo žiadnú neistotu v období t, čo svet vyzerať v období $t+1$. Ale v praxi, samozrejme, budúci stav sveta je neistý.

V tejto casti, uvažujeme taký prípad, kedy existujú dva možne stavy budúceho sveta, w_1 a w_2, respektíve sa stav w_1 s pravdepodobnosťou π a stav w_2 s pravdepodobnosťou (1–π). Predpokladáme, že skutočná hodnota funkcie J závisí na tom, z týchto dvoch možných stavov vlastne realizuje, tak, že máme $J(s_t+1;\ w_i),\ \ i = 1,2$, kde je poháňané s_t+1 rovnicou pohybu, ale hodnota w_i ktorá vzniká je mimo projektanta kontrolu.

V tomto prípade, sa účelová funkcia stáva očakávaná účelová funkcia, a Bellmanová rovnica može byť zapísaná ako:

$$\boldsymbol{J(s_t) = \textbf{Max}\colon E\big(U(x_t) + \beta J(S_{t+1})\big) = \textbf{Max}\colon U(x_t) + E\beta J(S_{t+1})}$$

$$= \mathbf{Max}: \boldsymbol{U(x_t) + \pi\beta J(S_{t+1}; w_1) + (1-\pi)\beta J(S_{t+1}; w_2)} \qquad \textbf{(3.50)}$$

Uvažujme prípad, kedy π je pravdepodobnosť prežitia jedného obdobie od t až $(t+1)$ a nech $J(s_t + 1)$ je účelová funkcia od nasledujúceho obdobia dynamického optimalizačného problému, podmienečný prežitie. Potom $(1-\pi)$ je pravdepodobnosť úmrtia pred začiatkom obdobia $(t+1)$, a konvenčný predpoklad je v tomto prípade $J(s_t + 1) = 0$. V tomto prípade, rovnica (3.50) sa stáva:

$$\boldsymbol{J(s_t)} = \mathbf{Max}: \boldsymbol{\left(U(x_t) + \pi\beta J(S_{t+1})\right)} \qquad \textbf{(3.51)}$$

Napísané v tejto forme, vidíme, že pravdepodobnosť prežitia, π, nadobúda tento problém rovnakým spôsobom, ako to robí diskontný faktor, β. Nižšia pravdepodobnosť prežitia do ďalšieho obdobia, má rovnaký vplyv na jedinca optimálnej spotreby plánu rovnako ako zvýšenie rýchlosti, pri ktorej sme diskontovať budúcnosť. Vzhľadom k tomu, β je $1/(1+\delta)$, kde δ je subjektívne diskontná sadzba, zvýšenie δ sa premieta do zníženia β. Ak budeme predpokladať, že π môže byť napísané ako $1/(1 + \eta)$, kde η odráža zodpovedajúce úmrtnosti, takže môžeme písať $\pi\beta$ ako:

$$\boldsymbol{\pi\beta} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\delta}}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\eta}}\right) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\delta\eta}}\right) \qquad \textbf{(3.52)}$$

Ak δ a η sú obaja dostatočne malé, to bude približne rovná $1/(1+\delta+\eta)$ a môžeme považovať pozorované diskontovanie budúcnosti ako pozostávať z dvoch prvkov, ktoré zadajú rovnakým spôsobom. Jedným z prvkov, odráža čistý krátkozrakosť a iné odráža očakávania úmrtnosti.

Ak je to vhodný spôsob, ako predstaviť neistotu o dĺžku života, to znamená, že výsledky získané sme na tomto mieste nie je potrebné meniť v každom zásadným spôsobom prispôsobiť neistú dĺžku života. Všetko, čo musíme urobiť, je zvýšiť diskontná sadzba δ, zníženie diskontný faktor β a pokračovať ako predtým. Zistíme, že jedinci s nižšou pravdepodobnosťou prežitia bude diskontovať budúcnosť viac ťažko a rozvrhnúť svoje aktíva spôsobom, má tendenciu posunúť viac spotreby k dispozícii.

Tento záver má vplyv aj mimo jednoduchých problémov sme boli zaoberajúca sa tu. Investičné problémy, či už investície do fyzického kapitálu alebo investície do ľudského kapitálu, sú jednoduché rozšírenie spotreba-úspory problémov, ktoré sme diskutovali.

Čokoľvek, čo znižuje jednotlivcovú dispozíciu k uloženiu (t.j zvyšuje jeho dispozíciu k posunu spotreby smerom k súčasnosti, od budúcnosti) bude tiež znížiť jeho dispozíciu k investíciám do fyzického alebo ľudského kapitálu.

3.2. Metóda Lagrangeovho multiplikátora

Kým dynamické programovanie je najviac obyčajný prístup k riešeniu diskrétnych časových dynamických optimalizačných problémov, Chow (1997) navrhol alternatívu – metódu Lagrangeovho multiplikátora. Väčšina autorov sa vyhla prístupu multiplikátora, pretože to vyžaduje sledovanie príliš mnohých súčtových znamení, aby sa dali spracovať, ale Chow tvrdí, že ťažkosti sú nadhodnotené a výhody tohto prístupu sa podceňujú.

Pozrime na Chowovu notáciu (ale pracuje vo svete bez neistoty), že nech $r(x_t, u_t)$ musí byť výraz pre účelové funkcie pre problém v čase *t*, kde x_t je hodnota stavovej premennej pre systém *x*, v čase *t* a u_t je hodnota riadiacej premennej, *u*, v čase *t*. Označenie *u* je riadiaca premenná a znamená, že jeho hodnota je vybraný projektant (niekedy je obmedzovaný). Označenie *x* je stavová premenná a znamená, že jeho hodnota opisuje stav systému v každom okamihu. Hodnota *x* nie je na uvážení projektanta, ale je určená podľa rovnice priebehu pre *x*, ktorú budeme písať ako:

$$\boldsymbol{x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots .. T} \qquad \textbf{(3.53)}$$

Rovnica (3.53) vyjadruje, že vzhľadom na hodnotu *x*, v období *t*, a vzhľadom k funkcii $f(x, u)$, ktorá opisuje, ako sa *x* v priebehu času vyvíja, kedy projektant zvolil hodnotu riadiacej premennej *u* v období *t*, hodnota *x* v $t + 1$ je tiež určená. V probléme dynamickej optimalizácie, najmä keď *x* zadá účelovú funkciu, $r(x, u)$, znamená to, že pri voľbe hodnoty riadiacej premennej *u* v čase *t* projektant musí vziať do úvahy nielen to, ako táto voľba ovplyvňuje hodnotu účelovej funkcie v čase *t*, ale aj to, aký to bude mať vplyv na hodnotu účelovej funkcie v $t + 1$.

Vo väčšine dynamických optimalizačných problémov, sú budúce hodnoty účelovej funkcie diskontované, tak, že sa snažíme o súčasnej hodnotu: nech $\beta = 1/(1 + \delta)$ je subjektívny diskontný faktor, kde δ je subjektívne diskontná sadzba projektanta. Lagrangeov prístup k tejto dynamickej optimalizačné úlohy:

$$\text{Ł} = \boldsymbol{\sum_{t=0}^{T} \beta^t r(x_t, u_t) - \beta^{t+1} \lambda_{t+1}\big(x_{t+1} - f(x_t, u_t)\big)} \qquad \textbf{(3.54)}$$

kde sčítanie je v časovom horizonte, zvyčajne písaný 0 do T, kde T môže byť ∞. Náš problém je vybrať u_t a x_t, t = 0,. . . , T, s cieľom maximalizovať rovnice (3.54).

Na vedomie, že v rovnici (3.54) sme použili diskontný faktor pre Lagrangeov multiplikátor $(\lambda_t + 1)$. To je pohodlie, ktoré stavia všetky časti problému výslovne na súčasnej hodnote, čo znamená, že multiplikátor $(\lambda_t + 1)$ sám o sebe je v súčasných hodnotovom vyjadrení. Všimnime si tiež, že index pri multiplikátore, a exponent na diskontný faktor pôsobiaci na multiplikátor, súhlasí s časovým indexom na prvú *x* člene v multiplikátorom časti výrazu.

Ďalej, treba nájsť podmienku prvého rádu pre maximalizáciu rovnice (3.54) podľa oboch u a *x*. Môžeme považovať *x* ako riadiacá premenná, pretože priebehová rovnica, ktoré sme vybudovali do Lagrangeovho funkcie, dopadá byť vždy spokojní a tak vlastne obmedzuje možné hodnoty *x* môže nadobúdať. To je všeobecne, ako Lagrangeov výraz funguje, a to aj v prípade, statické - to prevedie na problém optimalizácie s výhradou obmedzení v ekvivalentnej neobmedzeného problému. Aby sme videli to, skúsme nahradiť v dynamickom optimalizačného problému pre všetky hodnoty *x*, pomocou rovnice (3.53) vyššie (s príslušnými časovými indexmi), odstrániť všetkých *x* podmienok. Výsledný výraz bude veľmi chaotický, a podmienka prvého rádu pre tento problém budú totožné (na rozdiel od trochu porovnáva a nahrádzanie), na tie, ktoré sa chystáme odvodiť.

Podmienky prvého rádu pre rovnice (3.54), t = 0,.....,T sú:

$$\boldsymbol{\frac{\partial Ł}{\partial u_t} = \beta^t \frac{\partial r(x_t,u_t)}{\partial u_t} + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}\frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial u_t} = 0}$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial Ł}{\partial x_t} = \beta^t \frac{\partial r(x_t,u_t)}{\partial x_t} - \beta^t\lambda_t + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}\frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial x_t} = 0} \qquad \textbf{(3.55)}$$

Existuje pár vecí, ktoré by mali byť poznamenané pri podmienkach prvého rádu. Po prvé, že majú pre všetky hodnoty *t*, takže naozaj nemáme dve rovnice, máme toľko rovníc, koľko je diskrétnych časových periód v našom probléme. Po druhé, budeme môcť zrušiť pomerne málo β členov. A po tretie, že je dôležité si uvedomiť, rolu x_t ako prekrytia obdobia. Ak by sme mali písať rovnice (3.54), v plnom znení, rozširuje podľa operátora sumácie, zistili by sme, že x_t sa dvakrát za obmedzujúcimi časti, raz ako sme ukázali vyššie, a raz ako "prednej" časti v období $t - 1$ verzia rovnice (3.54). To znamená, že, keď sa rozlišovať vzhľadom na x_t sa bude ukončenie s dvomi prvkami, z ktorých jeden z $-\beta^t\lambda_t x_t$ a jeden z $\beta^{t+1}\lambda_{t+1}f(x_t, u_t)$.

3.2.1 Úlohy konečného časového horizontu

Uvažujme opäť ten problém rozvrhnnutia spotreby koláča, aby sme pohopili, že ako funguje Lagrangeov multiplikátor prístup v ekonomickom probléme. Naším cieľom je maximalizovať užitočnosť počas planovacieho horizontu, ktorý beží od $t = 1$ do T , kde c_t je riadiaca premenná pre spotrebu v období t a ln (c_t) je daná užitočnosť v tomto období. Množstvo koláča, ktoré zostalo v období $t + 1$ bude s_{t+1}, je stavová premenná a je určená rovnicou priebehu:

$$\boldsymbol{s_{t+1} = s_t - c_t} \quad \textbf{(3.56)}$$

V rovnici (3.56), vidíme, že množstvo koláča, ktoré ponechané v období $t + 1$ sa rovná rozdielu medzi množstvom koláča k dispozícii na začiatku obdobia t a množstvom, ktoré bolo spotrebované v období t. Koláč nemá prirodzenú tendenciu rásť a pre jednoduchosť, predpokladajme, že $\beta = 1$, to znamená, že spotrebiteľ nediskontuje budúcnosť. Lagrangeov výraz pre tento problém je nasledujúci:

$$Ł = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{ln(c_t) - \lambda_{t+1}(s_{t+1} - s_t + c_t)} \quad \textbf{(3.57)}$$

Podmienky prvého rádu pre problém (3.57) $t = 1, \ldots, T$ sú:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ł}{\partial c_t} &= \frac{1}{c_t} - \lambda_{t+1} = 0 \\ \frac{\partial Ł}{\partial s_t} &= -\lambda_t + \lambda_{t+1} = 0 \end{aligned} \quad \textbf{(3.58)}$$

kde s_t prekrýva výraz. Od podmienkou prvého rádu potrebujeme poznamenať, že $\lambda_t = \lambda_{t+1}$, ktorý nám hovorí, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora zostáva bezo zmeny v priebehu času. Ešte je potrebné poznamenať, že inverzia spotreby v jednom období (čo vzhľadom k tomu, vybrali sme formu prirodzeného logaritmu pre funkciu užitočnosti je hraničná užitočnosť spotreby) sa rovná hodnote multiplikátora v ďalšom období. Pretože tieto podmienky platiť pre všetky t, to je tiež pravda, že $(1/c_{t-1} = \lambda_t)$ tak, kombinovanie podmienkou prvého rádu, nájdeme $(1/c_{t-1} = 1/c_t)$, z ktorej je zrejmé, že pre všetky t, $(c_{t-1} = c_t)$, ktorá nám hovorí, že vzhľadom na absenciu diskontovanie, optimalnosť vyžaduje množstvo spotrebovaného koláča byť rovnaké v každom období.

Podľa úlohy konečného časového horizontu (T je konečný, pretože sa nesnažíme byť koláč navždy) bez prvku dedičstva vo funkcii užitočnosti, tam nie je zisk z akéhokoľvek zostávajúceho koláča po období T. To nám hovorí, že spotreba v období T, c_T, by sa mala rovnať zásobe koláča zostane na začiatku obdobia T, s_T, resp. $s_T = c_T$ a $s_{T+1} = 0$. Ale vzhľadom k tomu, že c_t je v priebehu času konštantná, ak je $c_T = s_T$, potom tak robí c_{T-1}, a to tiež robí c_{T-2} a všetky predchádzajúce hodnoty c. Celková spotreba je teda T_{s_T}. Pretože chceme konzumovať celý koláč, a pretože sme mali na začiatku také množstvo koláča rovná s_1, samozrejme, to všetko nám hovorí, že $T_{s_T} = T_{c_T} = s_1$, z ktorého $c_T = s_1/T$ a od c je konštantná v priebehu času, to nám dáva:

$$\boldsymbol{c_t = \frac{s_1}{T}, \ t = 1, \dots, T} \tag{3.59}$$

Ak $T = 5$, spotrebiteľ spotrebuje v každom období rovnaké množstvo koláča rovná pätinu pôvodnej zásoby koláča.

Je potrebné uvedomiť si, v tomto bode, že metóda Lagrangeovho multiplikátora iba nám dala podmienku prvého rádu, ktorá nám povedala, že úroveň spotreby musela býť rovnaká v každom období.

3.2.2 Úlohy nekonečného časového horizontu

Ďalej uvažujme o uplatnení prístupu Lagrangeovho multiplikátora k rozšíreniu problému rozvrhnutia spotreby koláča. Opäť máme maximalizáčný problém užitočnosti, a znovu budeme predpokladať, že funkcia užitočnosti v období t je funkcia prirodzeného logaritmu funkcie $\ln(c_t)$. V tomto probléme je však projektant predpokladá sa, že zdedil zásobu majetku, w_0, na začiatku plánovacieho obdobia. Jeho nahromadený majetok zarobí na úrokoch v konštantnej miere r a budeme definovať $R = (1 + r)$ ako úrokový faktor. Rovnica priebehu pre jeho majetok je:

$$\boldsymbol{w_{t+1} = R(w_t - c_t), \qquad t = 0, \dots, T} \tag{3.60}$$

tak, že v období $t + 1$, jeho majetok sa skladá z tej časti svojho majetku obdobia t, ktorú nemal spotrebovať v období t, plus úroky z tohto majetku. Budeme predpokladať, aspoň spočiatku, že $T = \infty$, takže máme úlohu nekonečného horizontu a budeme predpokladať, že má subjektívny diskontný faktor β. Lagrangeova metóda pre tohto problému je:

$$Ł = \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta^t \ln(c_t) - \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \big(w_{t+1} - R(w_t - c_t)\big)} \quad \textbf{(3.61)}$$

Podmienky prvého rádu pre tohto problému sú:

$$\frac{\partial Ł}{\partial c_t} = \boldsymbol{\beta^t \frac{1}{c_t} - \beta^{1+t} \lambda_{t+1} R = 0} \quad \textbf{(3.62)}$$
$$\frac{\partial Ł}{\partial \boldsymbol{w_t}} = \boldsymbol{-\beta^t \lambda_t + \beta^{1+t} \lambda_{t+1} R = 0}$$

Tieto podmienky môžu byť zjednodušené ako $(1/c_t) = \beta\lambda_{t+1}R$ a $\lambda_t = \beta\lambda_{t+1}R$, a keďže podmienky musia platiť pre všetky *t*, máme tiež $c_t = \beta R c_t - 1$, diferenčná rovnica prvého rádu v *c*. Či koeficient na c_{t-1} je väčšia alebo menšia ako 1, závisí od relatívneho rozsahu trhovej úrokovej sadzby, *r*, a subjektívnej diskontnej sadzby, δ, lebo $\beta R = (1 + r)/(1 + \delta)$. Ak subjektívna diskontná sadzba projektanta je vyššia ako trhová sadzba, $\delta > r$ a $\beta R < 1$ tak, $c_t < c_t - 1$, nám hovorí, že spotreba klesá v priebehu času. Je to štandardný výsledok - ak jedinec diskontuje budúcnosť v pomere vyššom než trhové úrokové sadzby, budú mať tendenciu k posunu spotreby od budúcnosti do súčasnosti.

Na vedomie, že spojením rovnice prvého radu s rovnicou priebehu pre *w*, získame systém dvoch lineárných diferenčných rovníc prvého rádu v *c* a *w*:

$$\boldsymbol{c_t = \beta R c_t - 1} \quad \textbf{(3.63)}$$
$$\boldsymbol{w_t = R(w_{t-1}, c_{t-1})}$$

Než budeme analyzovať tento systém, na vedomie, že zatiaľ čo rovnica (3.63) charakterizuje správanie *c* a *w* v priebehu času, to nie je nevyhnutne vo forme, ktorá najviac zaujíma nás empirických účely. Najmä rovnica (3.63) nám hovorí, ako sa spotreba mení v čase, ale môže sa stať, že to, čo sme naozaj zaujíma, je výraz vzťahujúci sa k spotrebe v období *t* k majetku v období *t* – typ funkcie spotreby (aj keď na základe majetku skôr než na základe bežných príjmov).

Riešenie pre tento vzťah je nasledujúci:

$$\boldsymbol{c_t = (1 - \beta) w_t} \quad \textbf{(3.64)}$$

Táto rovnica hovorí, že spotreba v období t je zlomok $(1-\beta)$ majetku (od $\beta = 1/(1+\delta)$, mohli by sme napísať, as $(\delta/(1+\delta))w_t)$. Na vedomie, že absencia časového indexu pri β znamená, že tento vzťah sa predpokladá držať bez zmeny v každom období, takže spotreba v každom období je konštantný zlomok $(1-\beta)$ majetku v tomto období. Ktorá jednoducho hovorí, že pomer spotreby k majetku je konštantný v priebehu času, aj keď úrovne c a w sa však môže zmeniť.

Aby sme zistili, či výraz (3.64) zapadá do nasích výsledkov, predpokladajme, že $c_t = \gamma w_t$ kde γ je nejaká neznáma konštanta. Ďalšie náhradou za w členy v rovnici (3.63), dávame $(c_t/\gamma) = R(c_{t-1}/\gamma - c_{t-1})$, od ktorého máme:

$$\boldsymbol{c_t = R(1-\gamma)c_{t-1}} \qquad \textbf{(3.65)}$$

Výraz (3.65), je v súlade s výrazom (3,63), ak $(1-\gamma) = \beta$ (z ktorých $\gamma = (1-\beta)$), takže rovnica (3.64), je v súlade s rovnicou (3.63).

Pred zvážením tohto bodu ďalej, vrátime sa k bodu sme urobili skôr, že rovnica (3.63) je sústava dvoch lineárnych diferenčných rovníc. V maticovom zápise, dáva:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c_t} \\ \boldsymbol{w_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-R} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_{t-1}} \\ \boldsymbol{w_{t-1}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.66)}$$

Na vedomie, že diferenčné rovnice v tomto systéme sú homogénne. Korene matice koeficientov v rovnici (3.66) sú R a βR. R je väčší ako 1, a budeme predpokladať, kvôli ilustráciu, že βR je menšia ako 1, čo znamená, že subjektívne diskontná sadzba projektanta, δ, je väčšia ako úroková sadzba, r. To znamená, že rovnováha systému (pretože obe rovnice sú homogénne, je na začiatku) je sedlový bod.

Náš ďalší krok je zvážiť charakteristické vektory spojené s každým z koreňov. Ak vezmeme väčší koreň, R, prvý, vyriešenie jeho charakteristického vektoru vyžaduje riešenie:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{(\beta-1)R} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-R} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_{11}} \\ \boldsymbol{w_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.67)}$$

z ktorého vidíme, že w_{11} musí byť nula, aby bola rovnica je splnená. Druhý člen, w_{21}, môže prijať akúkoľvek hodnotu, a tak ho môžeme normalizovať na rovné 1, dáva

$(w_{11}, w_{21})' = (0, 1)'$. Riešenie pre charakteristický vektor spojený s druhým koreňom, βR, ktorý budeme písať ako $(w_{12}, w_{22})'$, Nájdeme na normalizáciu w_{22} rovnú 1, že $(w_{12}, w_{22})' = \big((1-\beta), 1\big)'$.

Pripomeňme si, že $X_t = AX_{t-1}$ môže, keď charakteristické vektory sú odlišné, byť písaný ako $X_t = WA^tW^{-1}X_0$, kde W je matica zložená z charakteristických vektorov a X_0 je vektor počiatočných hodnôt, v tomto prípade, *c* a *w*, máme:

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta-1} & \mathbf{1} \\ \frac{-1}{\beta-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

zo všetkých, ktoré máme (s tým, že $\lambda_1 = R_1$ a $\lambda_2 = \beta R$):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{c_t} \\ \boldsymbol{w_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_1^t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_2^t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta-1} & \mathbf{1} \\ \frac{-1}{\beta-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_0} \\ \boldsymbol{w_0} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Je to:

$$\boldsymbol{c_t} = \mathbf{0}\boldsymbol{\lambda_1^t} + \boldsymbol{c_0}\boldsymbol{\lambda_2^t} \tag{3.70}$$

$$\boldsymbol{w_t} = \left(\boldsymbol{w_0} - \frac{\boldsymbol{c_0}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})}\right)\boldsymbol{\lambda_1^t} + \left(\frac{\boldsymbol{c_0}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})}\right)\boldsymbol{\lambda_2^t} \tag{3.71}$$

Z rovníc (3.70) a (3.71), vidíme, že spotreba je riadený iba stabilným koreňom systému, a preto FODE v rovnici (3.63). S odkazom na bod sme už poznamenali vyššie, že riešenie tohto problému je často uvedené v literatúre ako $c_t = (1-\beta)w_t$ vidíme, že, keď budeme predpokladať, ako by mal, táto forma sa vzťahuje na c_0 a w_0, váhu na λ_1 termíne v rovnici (3.71), tiež ide k nule, a w_t bude tiež riadiť iba stabilným koreňom systému. Ďalej, za predpokladu, že $c_0 = (1-\beta)w_0$, pomer c_t/w_t, ktorý odvodíme z rovníc (3.70) a (3.71) je $(1-\beta)$ pre všetky *t*, čo $c_t = (1-\beta)w_t$, teda taký aký by mal byť.

Tieto výsledky tiež vráťme sa k našej diskusii hraničných podmienok. Vzhľadom k tomu, obe diferenčné rovnice v našom systéme sú homogénne, rovnováha pre systém je v pôvode. Technicky vzaté, zatiaľ čo za predpokladov, ktoré sme vykonali vyššie, náš systém má tendenciu konvergovať k rovnováhe, to trvá nekonečné množstvo času, aby tak urobili. To naznačuje, že riešenie $c_t = (1-\beta)w_t$ môže fungovať len v prípade nekonečného časového horizontu.

Pozrime sa na prípad, keď T je nekonečný, aby sme uvažovali tento zmysel. Za predpokladu, že neexistuje žiadny motív dedičstva, a preto nie je dôvod zostávať žiadne množstvo po T je dosiahnuté, rovnica (3.63), naznačuje, že by sme mali mať $w_{t+1} = R(w_t - c_t) = 0$, z ktorých máme:

$$\boldsymbol{c_t = w_t} \qquad \textbf{(3.72)}$$

ktorý nie je v súlade s $c_t = (1-\beta)w_t$, ak nie je $\beta = 0$, ktorý nie je prípad, keď predpokladáme, že β je konštantná, ako sme. To je však, v súlade s rovnicou (3.63), $c_t = \beta R c_{t-1}$, pretože to vyžaduje len to, že $c_{t-1} = w_t/\beta R$. Inými slovami, ako sme už skôr tvrdili, že riešenie verzie Lagrangeovho multiplikátora optimalizačného problému prináša potrebné podmienky, ktoré budú vždy splnené pozdĺž cesty riešenia. Hraničná podmienka, ktorá závisí na predpokladanom horizonte plánovania, určuje ktorú kandidátnu cestu bude skutočne nasledovaná.

4. Výsledky práce

4.1 Riešenie problému rozvrhnutia spotreby koláča

Už poznáme tento problém z predchádzajúcej kapitoly. Takže poďme vyriešiť tento problém s nasledujúcimi predpokladajmi, že počiatočné množstvo koláča $s_1 = 100$, počet období $T = 10$ a diskontný faktor $\beta = 0.9$. Naša úloha sa týka úlohú konečného časového horizontu a

Máme teda všetky potrebné informácie pre kompletné zostavenie zápisu úlohy spotrebiteľa. Začneme účelovou funkciou:

$$\boldsymbol{U(c_1) + \beta U(c_2) + \beta^2 U(c_3) + \cdots + \beta^8 U(c_9) + \beta^9 U(c_{10})} \tag{4.1}$$

ďalej pokračujeme rovnicami priebehu stavovej premennej:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s_2 = s_1 - c_1} \\ &\boldsymbol{s_3 = s_2 - c_2} \\ &\ldots \\ &\boldsymbol{s_9 = s_8 - c_8} \\ &\boldsymbol{s_{10} = s_9 - c_9} \end{aligned} \tag{4.2}$$

A potom píšeme rozpočtové obmedzenie:

$$\boldsymbol{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_8 + c_9 + c_{10} \leq s_1} \tag{4.3}$$

Spotreba za celý skúmaný horizont musí byť teda menšia alebo rovná počiatočnému množstvu aktív, resp. veľkosti koláča. Na to, aby sme našli optimálny časový priebeh spotreby, využijeme rekurzívny prístup. Začíname riešením úlohy pre posledné siedme obdobie. Predpokladajme, že počas neho študent spotrebuje celú čiastku aktív, ktorá ostala zo šiesteho obdobia označenú ako s_{10}. Optimálna stratégia pre posledné obdobie, ktorú hľadáme bude teda $c_{10} = h_{10}(s_{10})$, ktoré maximalizuje funkciu za podmienky $c_{10} \leq s_{10}$. V tomto štádiu je potrebné určiť, či má ostať spotrebiteľovi nejaká určená časť aktív do dôchodku resp. pre ďalšie generácie. V našom prípade však účelová funkcia nemá na konci výraz , ktorý by predstavoval toto dedičstvo. Neobsahuje žiadnu zostatkovú hodnotu, čiže spotrebiteľ v poslednom období spotrebuje celý zvyšok aktív resp. koláča bez ohľadu na to, aké množstvo to bude. Pokiaľ vezmeme do úvahy tento fakt, úlohu siedmeho obdobia definujeme pomocou Lagrangeovej metódy:

$$\mathbf{max}_{c_{10}}\colon \boldsymbol{U(c_{10}) + \lambda(s_{10} - c_{10})} \tag{4.4}$$

Jej podmienka prvého rádu je:

$$\boldsymbol{U'(c_{10}) - \lambda = 0} \tag{4.5}$$

a predpoklad o vždy kladnej hraničnej užitočnosti nám hovorí o tom, že Lagrangeov multiplikátor je taktiež kladný. A z toho vyplýva, že obmedzenie v rovnici (4.4) je záväzné a teda platí, že $c_{10} = s_{10}$. Tento fakt nám ďalej určuje optimálnu stratégiu pre piate obdobie:

$$\boldsymbol{c_{10} = h_{10}(s_{10}) = s_{10}} \tag{4.6}$$

Inými slovámi, optimálna stragégia pre spotrebu v poslednom období planovacieho horizontu je spotrebiteľ spotrebovať všetky zostávajúce koláče, bez ohľadu na množstvo. Táto optimálna stratégia určuje maximálnu hodnotu užitočnosti, ktorá v súlade s našim predchádzajúcim zápisom budeme písať ako $J_1(s_{10})$ sa rovná $U(s_{10})$. Táto rovnosť predstavuje potom hodnotu účelovej funkcie pre desiate a posledné obdobie optimalizácie spotreby z desiatich obdobie.

Ďalším krokom v rámci rekurzívneho prístupu dynamického programovania bude nájsť $J_2(s_9)$. Vieme zapísať základnú rovnicu optimálnosti tzv. Bellmanovu rovnicu pre predposledné obdobie ako:

$$\boldsymbol{J_2(s_9) = \max_{c_9}\colon U(c_9) + \beta J_1(s_{10})} \tag{4.7}$$

Vieme, že $s_{10} = s_9 - c_9$ zo základnej rovnice priebehu koláča, pre ktorú platí $\partial s_{10}/\partial c_9 = -1$, dostaneme aj podmienku prvého rádu pre predošlú rovnicu (4.7) v tvare :

$$\boldsymbol{U'(c_9) = \beta \frac{\partial J_1(s_{10})}{\partial s_{10}}} \tag{4.8}$$

Keďže sme práve zaviedli vzťahy $c_{10} = s_{10}$ a $J_1(s_{10}) = U(s_{10})$, platí rovnosť $\partial J_1(s_{10})/\partial s_{10} = U'(c_{10})$. Dosadením výsledného výrazu do rovnice (4.8) dostaneme Eulerovu rovnicu:

$$\boldsymbol{U'(c_9) = \beta U'(c_{10})} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Pokračovaním v tomto postupe smerom dozadu, získame vzťah:

$$\boldsymbol{U'(c_1) = \beta U'(c_2) = \beta^2 U'^{(c_3)} = \cdots = \beta^8 U'(c_9) = \beta^9 U'(c_{10})} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Predpokladajme, že $U(c) = \ln(c)$, čo znamená, že U‘(c) =1/c. Potom z rovnice (4.10), dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c_2 = \beta c_1}\\
&\boldsymbol{c_3 = \beta c_2 = \beta^2 c_1}\\
&\boldsymbol{c_4 = \beta c_3 = \beta^3 c_1}\\
&\boldsymbol{\ldots}\\
&\boldsymbol{c_7 = \beta c_6 = \beta^6 c_1}\\
&\boldsymbol{c_9 = \beta c_8 = \beta^8 c_1}\\
&\boldsymbol{c_{10} = \beta c_9 = \beta^9 c_1}
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Je známe, že optimálne riešenie zahŕňa spotrebu celého koláča na konci piateho obdobia, takže $\boldsymbol{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_8 + c_9 + c_{10} = s_1}$, ktoré, po dosadení z rovnice (4.11) dostaneme:

$$\boldsymbol{c_1 = \frac{s_1}{(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots+\beta^8+\beta^9+\beta^{10})}} \qquad \textbf{(4.12)}$$

$$\boldsymbol{c_2 = \frac{\beta s_1}{(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots+\beta^8+\beta^9+\beta^{10})}}$$

a môžeme získať podobné výrazy pre spotreby c_3, c_4, c_5 atď.

Je to analytický resp. matematický spôsob riešenia tohto problému. Môžeme ho vyriešiť pomocou aplikácie, ktoré sú vytvorené programovacím algoritmusom ako riešiteľ v exceli.

Vyriešili sme obidvoma spôsobmi v Exceli a porovnali vysledky. Môžeme ich pozrieť na obrazku č.1.   Vidíme, že tie výsledky sú pomerne rovné.

4.2 Riešenie problému optimálnej spotreby a úspory

Jednou z prvých aplikácií dynamickej optimalizácie v ekonómii bol Ramseyov model spotreby a úspor (Blanchard a Fisher, 1989). Tento model zahrňa obmedzenia spotrebiteľa, jeho preferencií a ako tieto obmedzenia a preferencie spoločne určujú jeho rozhodnutie o spotrebe a úspore v jednotlivých obdobiach.

Uvažujme a riešme jednoduchú verziu tohto problému. Naša úloha sa týka dvanástich období, takže $T = 12$. Jedno obdobie v našej úlohe predstavuje jeden mesiac. Spotrebiteľ získava príjem y_t a spotrebuje c_t v období *t*. Predpokladajme, že príjem spotrebiteľa y je konštantný v každom období. Respektíve spotrebiteľ má konštantnú mzdu. Úroková miera zarába na úspory, alebo platia za jeho požičiavanie je *r* a jeho subjektívny diskontný faktor *β*. Úroková miera *r* a diskontný faktor *β* sú konštantné. V takomto modele, úloha spotrebiteľa bude prijať čo najlepšie rozhodnutie o jeho spotrebe v jednotlivých obdobiach za účelom maximalizácie prítomnej hodnoty jeho príjmu a vzhľadom na rozpočtové ohraničenie. Takže môžeme písať úlohu spotrebiteľa v tvare:

$$\boldsymbol{max}\colon \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\beta}^{t-1} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{c_t}) \qquad \boldsymbol{t = 1, \dots, 12} \tag{4.13}$$

V našom prípade bude riadiaca premenná interpretovaná ako spotreba v každom období c_t a stavová premenná (ako vo väčšine úloh dynamickej optimalizácie) ako aktíva a_t, ktoré máme na začiatku jednotlivých období k dispozícii. Tieto aktíva dvoch období definujeme ako:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{a_2} &= \boldsymbol{y_2} + (\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{c_1})(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

ktoré ak budeme riešiť ako sústavu dvoch rovníc, môžeme prepísať do spomínanej rovnice priebehu:

$$\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{y_2} + (\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{c_1})(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{r}) \tag{4.15}$$

a môžme ju prepísať aj do všeobecnejšieho tvaru:

$$\boldsymbol{a_{t+1} = y_{t+1} + (a_t - c_t)(1 + r)} \qquad \textbf{(4.16)}$$

V našom prípade príjem spotrebiteľa y_t je konštantný v každom období t. Takže môžeme písať rovnicu (4.16) ako:

$$\boldsymbol{a_{t+1} = y + (a_t - c_t)(1 + r)} \qquad \textbf{(4.17)}$$

Rovnica (4.17) je rovnica priebehu aktív našej úlohy. Podľa tejto rovnice môžeme získať aktívum v každom období.

$$\boldsymbol{a_1 = y}$$
$$\boldsymbol{a_2 = y + (a_1 - c_1)(1 + r)}$$
$$\boldsymbol{a_3 = y + (a_2 - c_2)(1 + r)}$$
$$\boldsymbol{\ldots}$$
$$\boldsymbol{a_{11} = y + (a_{10} - c_{10})(1 + r)}$$
$$\boldsymbol{a_{12} = y + (a_{11} - c_{11})(1 + r)}$$

Rovnica (4.17) ukazuje, že spotrebiteľ začína obdobie *t* s aktívami rovnými a_t. Spotrebuje alebo sa zaväzuje k spotrebe (pravdepododbne umiestnením príslušnej čiastky na bezúročný účet) množstva c_t v období *t*, na sporenie zostáva $(a_t - c_t)$ z majetku, ktorým disponoval na začiatku obdobia *t*. Zarobí na úrokoch v miere *r* za úspory počas obdobia *t*, ktoré mu budú v období $t + 1$ tvoriť majetok vyjadrený touto rovnicou.
Bellmanova rovnica pre náš problém vyzerá:

$$\boldsymbol{J(a_t) = \mathbf{max}_{c_t}\!: \big(U(c_t) + \beta J(a_{t+1})\big)} \qquad \textbf{(4.18)}$$

Podmienka prvého rádu pre maximalizáčný problém v rovnici (4.18), ktorá využíva rovnicu priebehu premennej *a*, keď derivujeme podľa c_t, dostaneme:

$$\boldsymbol{U'(c_t) = \beta(1 + r)J'(a_{t+1})} \qquad \textbf{(4.19)}$$

Vzhľadom k tomu, táto podmienka musí platiť pre všetky hodnoty *t*, môžeme tiež písať:

$$\boldsymbol{U'(c_{t-1}) = \beta(1+r)J'(a_t)} \tag{4.20}$$

lebo funkčná forma účelovej fukcie J nemenia v priebehu času, to isté platí aj pre J'.
Ďalej napíšeme Benveniste-Scheinkmanovu podmienku pre problém s nekonečným časovým horizontom, ako:

$$\boldsymbol{J'(a_t) = \beta(1+r)J'(a_{t+1})} \tag{4.21}$$

Kombináciou rovníc (4.19), (4.20) a (4.21) získame Eulerovu rovnicu spotreby:

$$\boldsymbol{U'(c_{t+1}) = \frac{U'(c_t)}{\beta(1+r)}} \tag{4.22}$$

Predpokladajme, že *U*(*c*) = ln(*c*). Potom, z rovnice (4.22), máme:

$$\boldsymbol{c_{t+1} = \beta(1+r)c_t} \tag{4.23}$$

Dosadíme rovnicu (4.23) pre naš problém

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c_2 = \beta(1+r)c_1}\\
&\boldsymbol{c_3 = \beta(1+r)c_2 = \beta^2(1+r)^2c_1}\\
&\boldsymbol{c_4 = \beta(1+r)c_3 = \beta^3(1+r)^3c_1}\\
&\boldsymbol{\ldots}\\
&\boldsymbol{c_{10} = \beta(1+r)c_9 = \beta^9(1+r)^9c_1}\\
&\boldsymbol{c_{11} = \beta(1+r)c_{10} = \beta^{10}(1+r)^{10}c_1}\\
&\boldsymbol{c_{12} = \beta(1+r)c_{11} = \beta^{11}(1+r)^{11}c_1}
\end{aligned}$$

Riešenie tohto problému matematickým formulovaním bude náročná práca. Takže riešme tento problém pomocou použitia riešiteľa v Exceli.
Takže učelová funkcia bude:

$$\boldsymbol{max}: \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\beta}^{t-1} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{c}_t) \qquad\qquad \boldsymbol{t} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{12}$$

Respektíve cieľom tejto úlohy je maximalizovať užitočnosti spotrebiteľa. Predpokladali sme diskontný faktor $\beta = 0.85$, úrokovú mieru $r = 0.25$ a konštantný príjem spotrebiteľa $Y = 800$. Počiatocná hodnota spotreby $c_t = 700$ v každom období. Na obrazke č.2 môžeme pozrieť počiatočné hodnoty, ktoré sme zadali. Potom na obrazke č.3 pozrieme výsledok riešenia našej úlohy, ktorý vypočítané pomocou riešiteľa v exceli.

Záver

Cieľom tejto práce je predstaviť metódy dynamického programovania, ich využitie v ekonomických modeloch a pracovať s jednoduchším modelom a riešiť optimalizačnú úlohu analyticky resp. Matematickým formulovaním a pomocou použitia riešiteľa v Exceli.

V teoretickej časti sme čitateľovi priblížili princíp uvažovania pri dynamickom programovaní a rozobrali sme podrobne krok po kroku spôsob, ktorým funguje. Predstavili sme použitie metód s úloham s konečným časovým horizontom, s nekonečným časovým horizontom ako aj v rámci neistoty. Pri tých úlohách sme využili zjednodušenú metódu dynamického rozvrhnutia spotreby koláča. Pomocou jej aplikácie sme sa na konci tejto kapitoly dopracovali ku vzorcom, ktoré slúžia na výpočet optimálnych hodnôt spotreby v jednotlivých obdobiach.

V praktickej časti sme naplnili cieľ a to prepojiť teoretické znalosti s praxou pomocou aplikácie na konkrétnom prípade spotrebiteľa. Riešili sme dvé problémy, ktoré sú: problém optimalnej spotreby a úspory a problém rozvrhnutia spotreby koláča. Sú zjavné, že vyznamné optimalizačne úlohy s konečným časovým horizontom sa v praxi využíva najčastejšie. To je dôvod, prečo sme vybrali v tejto časti práve tých úlohach.

Pri riešení prvej úlohy určili sme si konkrétny prípad spotrebiteľa, ktorý má počiatočné množstvo koláča 100 a potrebuje nájsť optimálnu spotrebu v rámci desiatich období. Zadaný sme mali aj diskontný faktor, ktorým svoju spotrebu v priebehu času znižuje. Na konci desiateho období mu teda nič neostane. Postupnými krokmi sme sa dostali ku konkrétnym hodnotám spotreby vo všetkých desiatich obdobiach, ktoré by boli pre tohto spotrebiteľa optimálne pomocou riešiteľa v Exceli. Pri riešení druhej úlohy sme určili, že spotrebiteľ má konštantný príjem v dvanástom období a zarobí na úrokoch v miere r za úspory počas obdobia t. Pre tento problém je riešenie matematickým spôsobmi dosť náročné lebo vyriešili sme pomocou použitia riešiteľa v Exceli.

Zoznám použitia literatúry

Literatúry

[1] **FERGUSON, B.S. – LIM, G.C. 2003.** ***Dynamic Economic Models in Discrete Time*****.**
1. Vyd. London: Vyd. TAYLOR & FRANCIS GROUP, 2003. 154 s. ISBN 0-203-98776-4

[2] **LJUNGQVIST, L – SARGENT, T.J. 2004.** ***Recursive Macroeconomic Theory***
1. Vyd. MIT PRESS, 2000. 1033 s. **ISBN-10 026212274X**

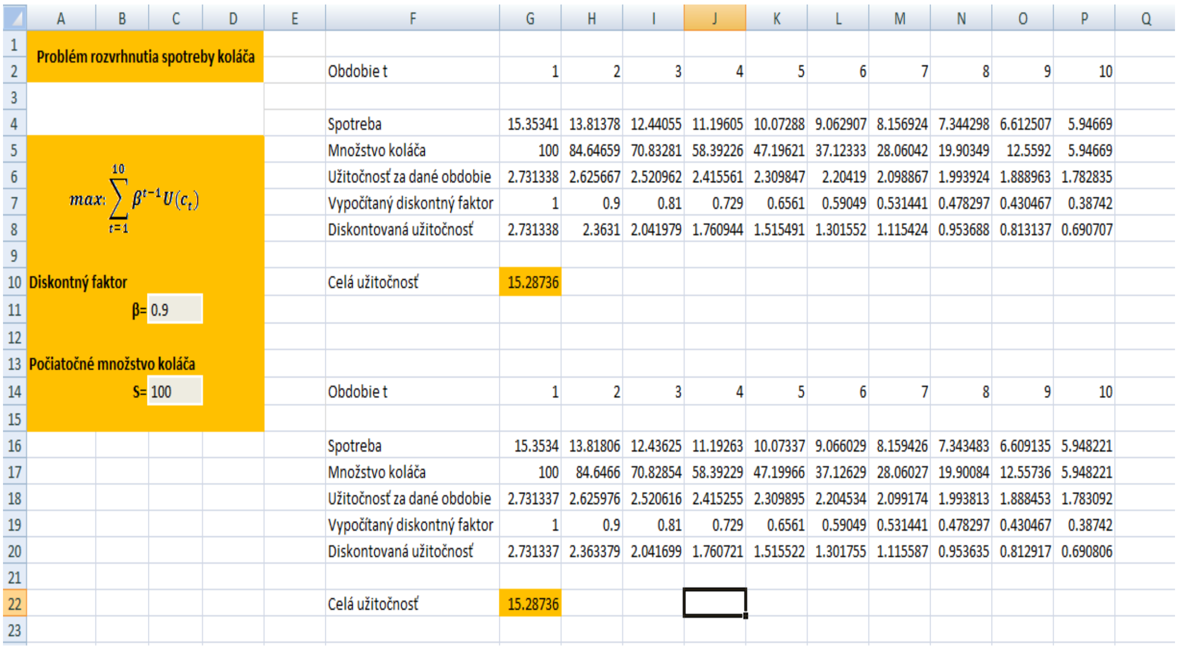
[3] **STOCKY, L.N – LUKAS, E.R. 1989**. ***Recursive Methods in Economic Dynamics***
1. Vyd. HARVARD UNIVERSITY PRESS, 1989. 588 s. ISBN 0674750969

Internetové zdroje

http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming
http://en.wikipedia.org/wiki/Intertemporal_consumption

Prílohy

Obrazka č.1



Problém rozvrhnutia spotreby koláča

$$max: \sum_{t=1}^{10} \beta^{t-1} U(c_t)$$

Diskontný faktor

β= 0.9

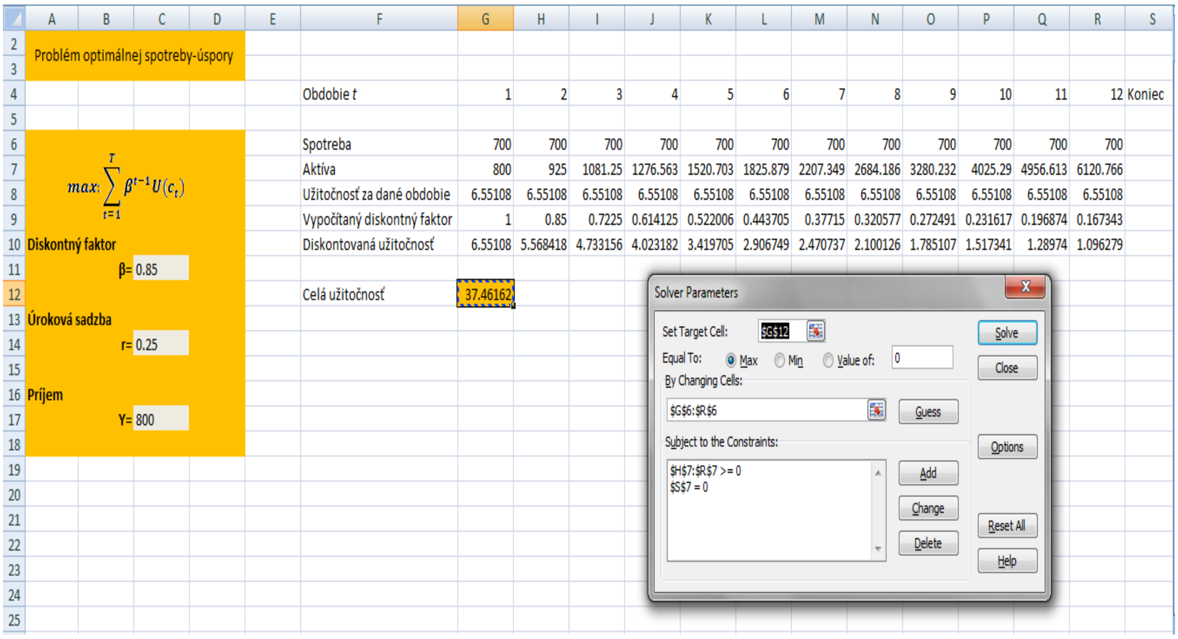
Počiatočné množstvo koláča

S= 100

Obdobie t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Spotreba	15.35341	13.81378	12.44055	11.19605	10.07288	9.062907	8.156924	7.344298	6.612507	5.94669
Množstvo koláča	100	84.64659	70.83281	58.39226	47.19621	37.12333	28.06042	19.90349	12.5592	5.94669
Užitočnosť za dané obdobie	2.731338	2.625667	2.520962	2.415561	2.309847	2.20419	2.098867	1.993924	1.888963	1.782835
Vypočítaný diskontný faktor	1	0.9	0.81	0.729	0.6561	0.59049	0.531441	0.478297	0.430467	0.38742
Diskontovaná užitočnosť	2.731338	2.3631	2.041979	1.760944	1.515491	1.301552	1.115424	0.953688	0.813137	0.690707
Celá užitočnosť	15.28736									

Obdobie t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Spotreba	15.3534	13.81806	12.43625	11.19263	10.07337	9.066029	8.159426	7.343483	6.609135	5.948221
Množstvo koláča	100	84.6466	70.82854	58.39229	47.19966	37.12629	28.06027	19.90084	12.55736	5.948221
Užitočnosť za dané obdobie	2.731337	2.625976	2.520616	2.415255	2.309895	2.204534	2.099174	1.993813	1.888453	1.783092
Vypočítaný diskontný faktor	1	0.9	0.81	0.729	0.6561	0.59049	0.531441	0.478297	0.430467	0.38742
Diskontovaná užitočnosť	2.731337	2.363379	2.041699	1.760721	1.515522	1.301755	1.115587	0.953635	0.812917	0.690806
Celá užitočnosť	15.28736									

Obrazka č.2



Problém optimálnej spotreby-úspory

$$max: \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} U(c_t)$$

Diskontný faktor

β= 0.85

Úroková sadzba

r= 0.25

Príjem

Y= 800

Obdobie *t*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Koniec
Spotreba	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700	
Aktíva	800	925	1081.25	1276.563	1520.703	1825.879	2207.349	2684.186	3280.232	4025.29	4956.613	6120.766	
Užitočnosť za dané obdobie	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	6.55108	
Vypočítaný diskontný faktor	1	0.85	0.7225	0.614125	0.522006	0.443705	0.37715	0.320577	0.272491	0.231617	0.196874	0.167343	
Diskontovaná užitočnosť	6.55108	5.568418	4.733156	4.023182	3.419705	2.906749	2.470737	2.100126	1.785107	1.517341	1.28974	1.096279	
Celá užitočnosť	37.46162												

Obrazka č.3

Problém optimálnej spotreby-úspory

$$max: \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} U(c_t)$$

Diskontný faktor

β= 0.85

Úroková sadzba

r= 0.25

Príjem

Y= 800

Obdobie *t*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Koniec
Spotreba	651.4304	692.1441	735.4064	781.3151	830.5071	880.8444	940.1405	993.4985	1055.023	1127.528	1200.384	1262.411	
Aktíva	800	985.712	1166.96	1339.442	1497.658	1633.939	1741.369	1801.535	1810.046	1743.778	1570.313	1262.411	3.41E-
Užitočnosť za dané obdobie	6.479171	6.539794	6.600423	6.660979	6.722037	6.780881	6.846029	6.901233	6.961318	7.027783	7.090397	7.140779	
Vypočítaný diskontný faktor	1	0.85	0.7225	0.614125	0.522006	0.443705	0.37715	0.320577	0.272491	0.231617	0.196874	0.167343	
Diskontovaná užitočnosť	6.479171	5.558825	4.768806	4.090673	3.508945	3.008713	2.581977	2.212377	1.896893	1.627754	1.395918	1.194961	
Celá užitočnosť	38.32501												