

APROXIMÁCIA BINOMICKÉHO ROZDELENIA NORMÁLNYM A PRÍKLAD JEJ APLIKÁCIE V AKTUÁRSTVE S VYUŽITÍM JAZYKA R

Abstrakt

Príspevok sa zameriava na prezentáciu limitných viet v analýze rizika v neživotnom poistení. Jednoducho a prehľadne uvádza teoretické východiská aj praktickú ukážku aplikácie. Numerické výpočty boli realizované v programovom jazyku R. Študent má možnosť použiť uvedený zdrojový kód a po voľbe vstupných parametrov aplikácia demonštruje dôležité vzťahy medzi binomickým a normálnym rozdelením. Analýza je podporená grafickými výstupmi.

Kľúčové slová

jazyk R, binomické rozdelenie, normálne rozdelenie, limitné vety, aktuárstvo, Galtonova doska

1 MOIVREOVA-LAPLACEOVA INTEGRÁLNA VETA

Nech náhodné premenné $X_1, \dots, X_n$ sú nezávislé so strednou hodnotou a disperziou

$$E(X_i); D(X_i)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Potom náhodná premenná

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

má za určitých podmienok pre dostatočne veľké n asymptoticky normálne rozdelenie.

Rozlišujeme lokálne limitné vety (limita postupnosti funkcií hustôt resp. pravdepodobnostných funkcií) a integrálne limitné vety (limita postupnosti distribučných funkcií). Tento predpoklad sa využíva v praxi. Ak skúmané náhodné veličiny v jednotlivých pokusoch nemajú normálne rozdelenie, tak s ich súčtom sa pri dostatočne veľkom počte pracuje ako s normálne rozdelenou náhodnou premennou.

Lindebergova-Levyho centrálna limitná veta. Nech $X_1, \dots, X_n$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných, ktoré majú identický zákon rozdelenia s konečnou strednou hodnotou a disperziou

$$E(X_i) = \mu; D(X_i) = \sigma^2$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Definujme náhodnú premennú Y , ktorá je súčtom náhodných premenných $X_1, \dots, X_n$, teda platí

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

Potom normovaná náhodná premenná

$$U = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

má asymptoticky normované normálne rozdelenie pravdepodobnosti, teda $U \sim N(0;1)$.
A platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U < u) = \Phi(u)$$

kde $\Phi(u)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Špeciálnym prípadom Lindebergovej-Levyho vety je **Moivreova-Laplaceova integrálna veta**. Nech náhodná premenná $Y \sim Bi(n; p)$. Potom pre ľubovoľné x platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} < x\right) = \Phi(x)$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Podľa [1], [3].

2 PRAKTICKÁ UKÁŽKA APLIKÁCIE

Poistovňa v rámci produktu povinného zmluvného poistenia motorových vozidiel odhaduje riziko týkajúce sa portfólia 250 poistných zmlúv uzavretých na jeden rok. Poistovňa zistila z historických údajov, že 10 % poistencov malo aspoň jednu poistnú udalosť za rok. Zistíme pravdepodobnosť, že viac ako 12 % poistencov v tomto portfóliu bude mať počas roka aspoň jednu poistnú udalosť.

Nech náhodná premenná X predstavuje počet poistencov v tomto portfóliu s aspoň jednou poistnou udalosťou (nahlásenou). Predpokladáme, že sa jedná o nezávislé udalosti v súlade s históriou. Potom

$$X \sim Bi(250; 0,1)$$

Našou úlohou je teda zistiť pravdepodobnosť

$$P(X > 30)$$

a teda

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30)$$

Za predpokladu, podľa [2], že $n \rightarrow \infty$ a $n \cdot p > 5$ môžeme využiť aproximáciu normálnym rozdelením

$$P(X > 30) \approx P(Y > 30)$$

kde

$$Y \sim N(25; 22,5)$$

pričom

$$E(Y) = \mu = 250 \cdot 0,1 = 25$$
$$D(Y) = \sigma^2 = 250 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 22,5$$

Potom ak $Z \sim N(0;1)$ platí

$$\begin{aligned} P(Y > 30) &= 1 - P(Y \leq 30) = 1 - P(Y < 30) = \\ &= 1 - P\left(\frac{Y - 25}{\sqrt{22,5}} < \frac{30 - 25}{\sqrt{22,5}}\right) = 1 - P(Z < 1,0541) = \\ &= 1 - \Phi(1,0541) = 1 - 0,85408 = 0,14592 \end{aligned}$$

Spresniť výpočet možno korekciou na spojitosť, podľa [2]

$$P(X = x) \approx P(x - 0,5 < Y < x + 0,5)$$

potom

$$P(X > 30) \approx P(Y > 30,5)$$

a teda

$$P(Y > 30,5) = 0,1231258$$

Dostávame pravdepodobnosť, že viac ako 30 poistencov v tomto portfóliu bude mať aspoň jednu poistnú udalosť je 12,31258 %.

Možno ukázať, že ak $X \sim Bi(250; 0,1)$

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 0,1246714$$

a môžeme tvrdiť

$$0,1246714 \approx 0,1231258$$

2 VYUŽITIE JAZYKA R PRE VÝPOČET

V tejto kapitole ukážeme formuláciu problému a jeho výpočet pomocou jazyka R. Pre ďalšie informácie o jazyku R pozri napr. [2].

Pre výpočet $P(Y > 30,5)$ dostávame

```
n <- 250
p <- 0.1
k <- n*0.12
mean <- n*p
sd<-sqrt(n*p*(1-p))
P1 <- 1-(pnorm((k-mean+0.5)/sd), 0, 1)
0.1231258
```

A ak $X \sim Bi(250; 0,1)$, potom pre pravdepodobnosť $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - F(30)$ dostávame

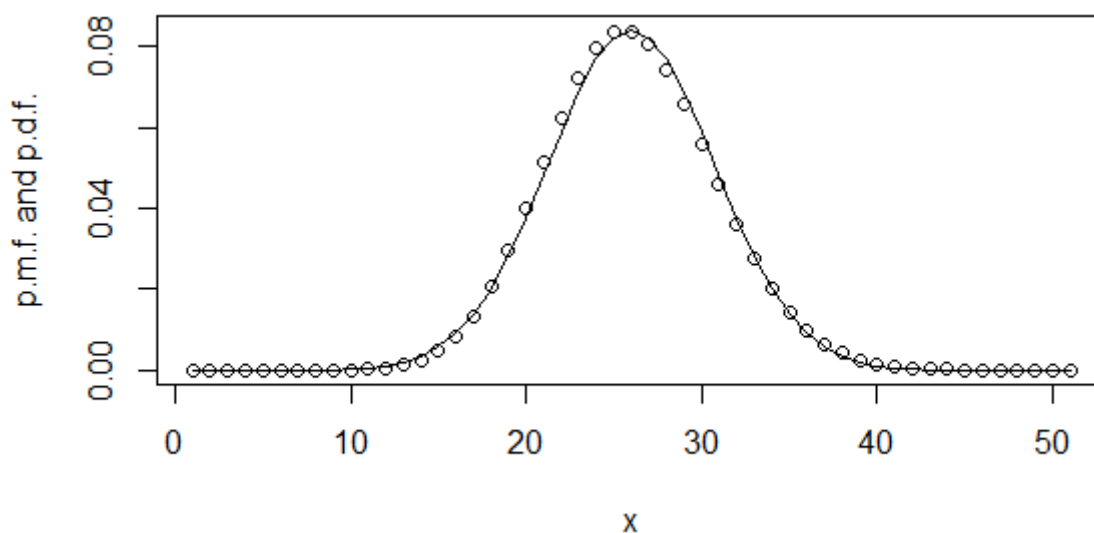
```
P2 <- 1 - pbinom(30, n, p)
0.1246714
```

Graficky môžeme danú situáciu zobrazit' nasledovne

```
x<-0:50
plot(dnorm(x,n*p,sd),type="l",ylab="p.m.f. and p.d.f.",xlab="x")
lines(dbinom(x,n,p),type="p")
```

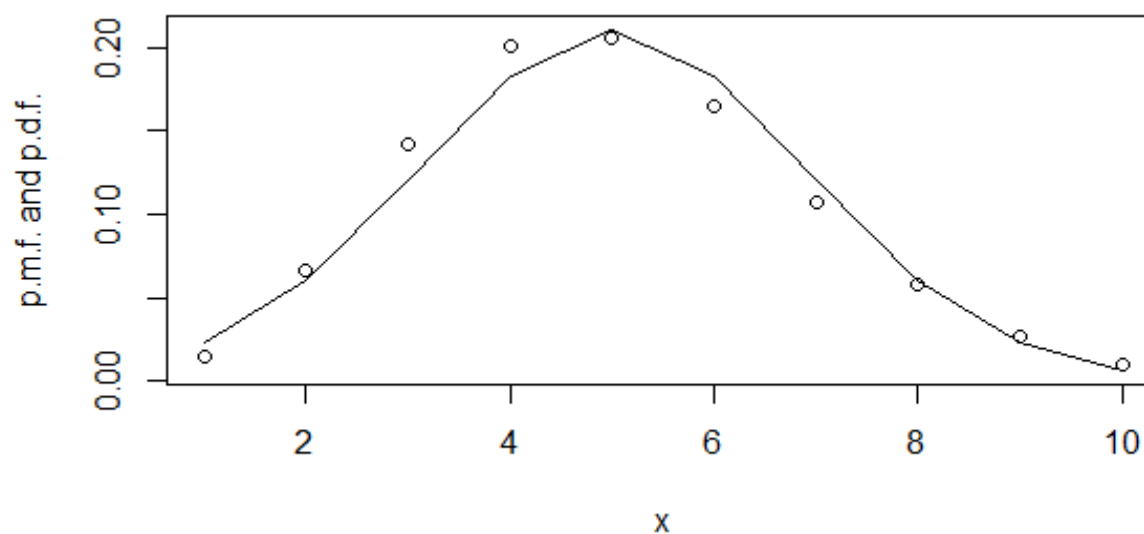
a dostávame grafický výstup (obr. 2.1), ktorý rovnako potvrdzuje, že pre $n \rightarrow \infty$ platí

$$Bi(n; p) \approx N(n \cdot p; n \cdot p \cdot (1 - p))$$



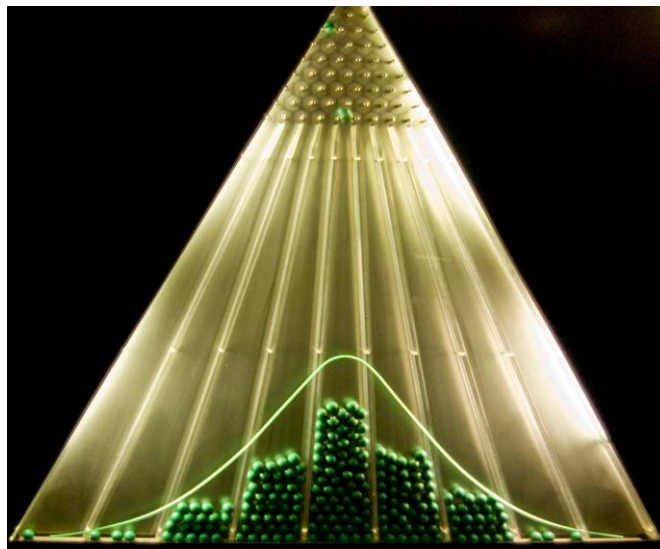
Obr. 2.1

Pre komparáciu nižšie uvádzame aj grafický výstup, ak by sme uvažovali $n = 40$



Obr. 2.2

Poznámka 2.1. Aproximáciu binomického rozdelenia normálnym vysvetľuje aj *Galtonova doska* (angl. *Galton box*; *bean machine* resp. aj *quincunx*), obr. 2.3. Pre viac informácií pozri napr. [1].



Obr. 2.3

Použitá literatúra

- [1] HORÁKOVÁ, G. – HUŤKA, V. 2010. Teória pravdepodobnosti 1. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2010. s. 202 ISBN 978-80-225-2888-7
- [2] JONES, O. – MAILLARDET, R. – ROBINSON, A. 2009. Introduction to Scientific Programming and Simulation using R. New York: CRC Press, 2009. ISBN 978-1-4200-6872-6
- [3] PÁLEŠ, M. 2014. Využitie centrálnych limitných viet pri vlastnom posúdení rizika a solventnosti. In *Vývojové trendy v poisťovníctve 2014 : recenzovaný vedecký zborník vedeckých prác [elektronický zdroj]*. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2014. ISBN 978-80-225-3846-6, s. 203-210 CD-ROM.

Kontaktné údaje

Páleš, Michal, Ing., PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 841, e-mail: pales.euba@gmail.com