

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

Evidenčné číslo: 17300/B/2011/2139020692

POMOC FRAKTÁLOVEJ ANALÝZY PRI PREDIKCII RUPTÚRNYCH STAVOV
SPOLOČENSKÉHO A EKONOMICKÉHO PREJAVU

Bakalárska práca

2011

Matej Dvonč

EKONOMICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY

POMOC FRAKTÁLOVEJ ANALÝZY PRI PREDIKCII
RUPTÚRNYCH STAVOV SPOLOČENSKÉHO
A EKONOMICKÉHO PREJAVU

Bakalárska práca

Študijný program: Hospodárska informatika

Študijný odbor: 9.2.10 Hospodárska informatika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky

Školiteľ: RNDr. Ľubomír Turňa, CSc.

Bratislava 2011

Matej Dvonč

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Matej Dvonč
Študijný program: Hospodárska informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.2.10 Hospodárska informatika
Typ záverečnej práce: Bakalárska záverečná práca
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Pomoc fraktálovej analýzy pri predikcii ruptúrnych stavov spoločenského a ekonomického prejavu

Anotácia: V BP (V práci ŠVOČ) sa sleduje možnosť predikcie zlomových situácií v prejave spoločenských a ekonomických subjektov. Snaha na dosiahnutie tohto cieľa sa opiera na využitie teórie fraktálovej analýzy a čiastočne aj základov synergetickej teórie.

Vedúci: RNDr. Ľubomír Turňa, CSc.
Katedra: KAI FHI - Katedra aplikovanej informatiky FHI
Vedúci katedry: doc. Ing. Gabriela Kristová, CSc.
Dátum zadania: 30.09.2010

Dátum schválenia: 19.10.2010
doc. Ing. Gabriela Kristová, CSc.
vedúci katedry

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že záverečnú prácu som vypracoval samostatne a že som uviedol všetku použitú literatúru.

V Bratislave, 29.3.2011

.....

Pod'akovanie

Chcel by som sa pod'akovať všetkým, ktorí boli akokoľvek nápomocní pri tvorbe tejto práce, či vytváraní vhodného prostredia na jej spracovanie. Osobitná vďaka jednoznačne patrí RNDr. Ľubomírovi Turňovi, CSc. za neoceniteľné odborné rady a celkové usmernenie počas písania tejto práce.

ABSTRAKT

DVONČ, Matej: *Pomoc fraktálovej analýzy pri predikcii ruptúrnych stavov spoločenského a ekonomického prejavu.* – Ekonomická univerzita v Bratislave. Fakulta hospodárskej informatiky; Katedra aplikovanej informatiky. – Vedúci záverečnej práce: RNDr. Ľubomír Turňa, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2011, 36 strán.

Jednotlivé procesy a ich vývoj v ekonomickom prostredí sa vyznačujú fluktuárnym, resp. náhodným charakterom, ktorý možno postihnúť štatistickými metódami založených na rôznych hypotézach správania sa náhodných procesov. Práca sa zaoberá hypotézou L – stability, ktorá vychádza zo všeobecnejšej teórie fraktálov a analyzuje jej konkrétnu implementáciu a vhodnosť v modeli M 1963 od B. Mandelbrota. Taktiež poukazuje na prítomnosť fraktálových štruktúr v časových radoch ekonomických procesov.

Kľúčové slová: fraktál, L – stabilita, nekonečná variabilita, škálovateľnosť

ABSTRACT

DVONČ, Matej: *The aid of fractal analysis in prediction of ruptures in economic and social behaviour*. University of Economics in Bratislava. Faculty of economic informatics; Department of applied informatics. – Supervisor of the work: RNDr. Ľubomír Turňa, CSc. – Bratislava: FHI EU, 2011, 36 pages.

Processes and their evolution within the economic environment can be characterized by random behavior, which is apprehensible with use of statistical methods based on specific hypothesis of behavior of random processes. This work presents the hypothesis called L – stable that resorts to more general theory of fractals. Particularly, the L – stable hypothesis is being analyzed as a particular implementation of Mandelbrot's model M 1963. Moreover, the analysis of time series of economic processes with accent on fractal textures in their graphical presentations can be found in the course of this work.

Key words: fractal, L – stability, infinite variance, scaling

Obsah

Úvod	1
1 Teória fraktálovej analýzy	3
1.1 <i>Fraktál, fraktálová geometria</i>	3
1.1.1 Sebakodobnosť, škálová invariantnosť fraktálov.....	5
1.1.2 Fraktálová dimenzia	6
1.2 <i>Fraktály a finančné trhy.....</i>	7
1.2.1 Hypotéza fraktálového trhu.....	7
1.3 <i>Štatistické metódy na fraktálnom prístupe</i>	8
1.3.1 Škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti	10
2 M 1963 model.....	16
2.1 <i>Východiská modelu.....</i>	17
2.1.1 L – stabilné zákony pravdepodobnosti.....	18
2.1.2 Význam modelu M 1963 v štatistickej indukcii.....	23
2.2 <i>Niektoré aplikácie modelu M 1963.....</i>	24
2.2.1 Variabilita cien pšenice (Chicago 1883 – 1936)	24
2.2.2 Zmeny cien niektorých úrokových mier a výmenných kurzov.....	27
3 Niektoré vlastnosti ekonomických veličín z hľadiska fraktálovej analýzy.....	29
3.1 <i>Nestacionarita a fraktálová štruktúra časových radov</i>	29
Záver	36

Úvod

Súčasnú spoločnosť charakterizujú fenomény rýchlych sociálnych zmien, ktoré vyplývajú z integračného procesu jednotlivých štátov a ich ekonomík, nielen v rámci väčších územných celkov (napr. kontinent), ale skôr v celosvetovom meradle. Trend globalizácie, ako logický dôsledok integračných intencií a technologického pokroku, spôsobuje doposiaľ nevidanú interakciu v aзда každej sfére spoločenského bytia, najviac sa však prejavuje v oblasti ekonomiky, ktorá sa vyznačuje vysokou dynamikou.

Vzor trhového hospodárstva, model každej vyspelej ekonomiky, prináša do spomínaných trendov prvok neistoty, plynúci z definície trhového mechanizmu. Trhový mechanizmus predstavuje súhrn vzťahov a procesov, vznikajúce prostredníctvom slobodných rozhodnutí jednotlivých ekonomických subjektov pri alokácii disponibilných zdrojov na základe cenových informácií. Z toho implicitne vyplýva nutnosť existencie informácií, vytvárajúce informačný systém každého subjektu na trhu, ktoré ovplyvňujú jeho rozhodnutia. Existuje tiež predpoklad, že informácie sú obmedzeným zdrojom a taktiež nie sú rovnomerne rozmiestnené v časopriestore. Logickým dôsledkom predchádzajúcej úvahy je skutočnosť, že trhové subjekty nekonajú rovnako, kvôli nerovnakej dispozícii informáciami, a teda ich chovanie nemožno presne predpovedať, môžeme ho iba odhadnúť.

Náhodné procesy a ich zákonitosti popisuje teória pravdepodobnosti, vetva matematiky výrazne využívaná v štatistike. Aplikáciou štatistických metód je možné modelovať dynamiku jednotlivých trhov na základe odhadu tzv. pravdepodobnostného rozdelenia náhodnej premennej (ceny, dôchodku, atď.), ktoré viac alebo menej verne kopíruje skutočnosť.

V štatistickej praxi prevládajú rozdelenia vychádzajúce z Gaussovho (normálneho) rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré je charakteristické svojim zvonovitým tvarom. Toto rozdelenie predpokladá koncentráciu väčšiny hodnôt náhodnej premennej okolo strednej hodnoty, teda $E(X) \approx \mu^1$ a taktiež minimálny odklon odchýlok (štatistických chýb) od μ (pravidlo 3σ).

¹ kde $E(X)$ je očakávaná hodnota náhodnej premennej X a μ je stredná hodnota výskytu hodnôt NP.

Empirické merania a ich vizualizácie (vznik výkonnejších počítačov) však vykazujú rozdielne chovanie, najmä čo sa variability týka. Rovnomerne rozložený biely šum nahrádzujú oblasti malých a približne rovnakých zmien, striedajúce sa s momentmi, ktoré sa vyznačujú silne koncentrovanými a veľkými zmenami. Tieto zmeny taktiež nemajú tendenciu sa ustáliť na nejakej konštante, teda hovoríme o nekonečnej variabilite základného súboru.

Kvôli uvedeným skutočnostiam sa bude táto práca zaoberať rozdeleniami, ktoré uvažujú nekonečnú variabilitu zmien a javia sa ako vhodný teoretický model pre empirické rozdelenia niektorých spoločenských javov. Takéto rozdelenia sa nazývajú škálovateľné. Všeobecná charakteristika škálovateľných rozdelení bude uvedená v prvej časti, konkrétnym reprezentantom, L – stabilným rozdelením, sa bude zaoberať časť druhá.

V prvej časti budú uvedené taktiež východiská pre spomenuté škálovateľné rozdelenia a druhá časť ponúkne popri základného opisu L – stabilného rozdelenia v rámci modelu M 1963 aj grafický dôkaz asymptotickej zhodnosti reálnych dát s ich modelovým náprotivkom.

Nakoniec, v tretej časti budú ukázané, resp. načrtnuté niektoré vlastnosti časového radu denných cien ropy, ako reprezentanta náhodných procesov ekonomickej reality, a to nestacionarita a fraktálová štruktúra takéhoto typu časových radov. Táto kapitola si teda kladie za cieľ poukázať na dôležitosť metód, spomenutých čiastočne v prvej a hlavne v druhej kapitole, pri modelovaní vývoja ekonomickej reality.

1 Teória fraktálovej analýzy

Fenomén fraktálov je jednou z viacerých vývinových vetiev tzv. teórie chaosu, ktorá si kladie za cieľ vysvetliť navonok nepredvídateľné, resp. náhodné javy v rôznych vedných disciplínach, ako fyzika (napr. turbulencia), biológia (činnosť srdcového svalu), či meteorológia. Podobne aj fraktálová teória prináša odpovede na určité okruhy problémov, vysvetľuje rozmanité tvary prírodných objektov (oblaky, blesky, rastliny, atď.), ktoré nezodpovedajú ideálnym krivkám klasickej geometrie, skôr spadajú pod úvahy o neceločíselných dimenziách. Taktiež odhaľuje zákonitosti rôznych druhov náhodných procesov (rozdelenia obyvateľov v mestách, usporiadanie ročných zrážok alebo rozdelenie cenových zmien vybraných komodít) skrz fenomén sebakodobnosti a nekonečnej variability. Teória fraktálov je teda nový jazyk, schopný popísať javy, presahujúce hranice pravidelnosti a zákonitosti a aj preto sa stala súčasťou takmer každej vedy, zaoberajúcejmi sa takýmito javmi.

1.1 Fraktál, fraktálová geometria

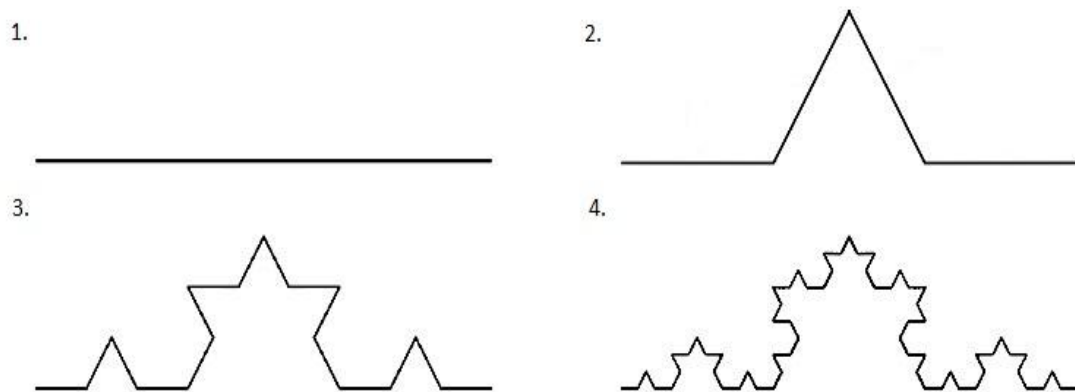
Pojem fraktál zaviedol do matematickej topológie² francúzsky matematik B. Mandelbrot, ktorý ním označoval konštrukty, či už prírodnej alebo umelej (matematickej) povahy, líšiace sa od „hladkých“ a „upravených“ útvarov klasickej geometrie. Ide o zlúčenie dvoch významov anglického slova *fraction* (z latinského *fractus*), ktoré v slovenskom preklade znamená zlomok – matematický termín, ako aj zlomok v zmysle roztrieštenosti, nerovnosti. Fraktálová geometria teda popisuje objekty, ktoré sa vymykajú možnostiam modelovania klasickej geometrie a z dôvodu ich „nedokonalosti“ nepatria do euklidovského priestoru.

Medzi klasické fraktálové útvary zaradujeme napríklad Kochovu krivku, pomenovanú podľa švédskeho matematika Helge von Kocha. Takúto krivku je možno zostrojiť podľa nasledujúceho postupu [1]:

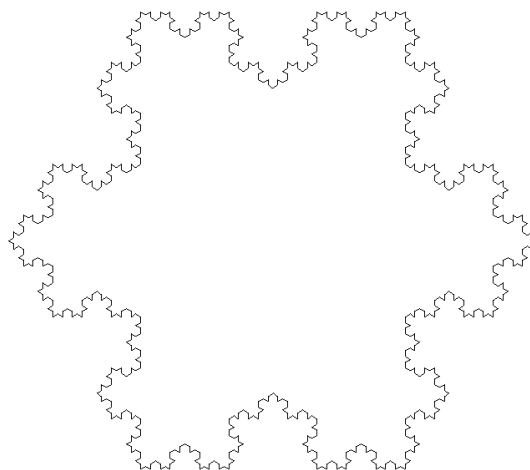
² Topológia je vetva matematiky, zaoberajúca sa zachovaním priestorových vlastností objektov pri ich transformáciách, ako je napr. natiahovanie, stláčanie alebo prekladanie, nie však premeny ako trhanie alebo zliepanie.

- začneme s úsečkou ľubovoľnej veľkosti, nazveme ju ako počiatočný stav
- úsečku rozdelíme na tri rovnaké časti, strednú časť nahradíme rovnostranným trojuholníkom a zároveň odstránime jeho základňu – tento krok nazveme generátorom zmeny stavu (v tomto prípade počiatočného)
- krok č. 2 opakujeme *ad infinitum* pre všetky zostávajúce úsečky

Postup zachytáva aj obrázok Obr.1, kde sú načrtnuté prvé 3 iterácie konštrukcie krivky, výsledok zachytáva obrázok Obr.2 v podobe Kochovej vločky, modifikácie Kochovej krivky. Z obrázkov sú zrejmé isté vlastnosti Kochovej krivky, ktoré môžeme zovšeobecniť pre útvary fraktálovej geometrie. Tieto vlastnosti vysvetľujú zdanlivú zložitosť prírodných objektov a procesov, čoho klasická geometria nie je schopná.



Obr.1 Prvé 3 iterácie konštrukcie Kochovej krivky [11]



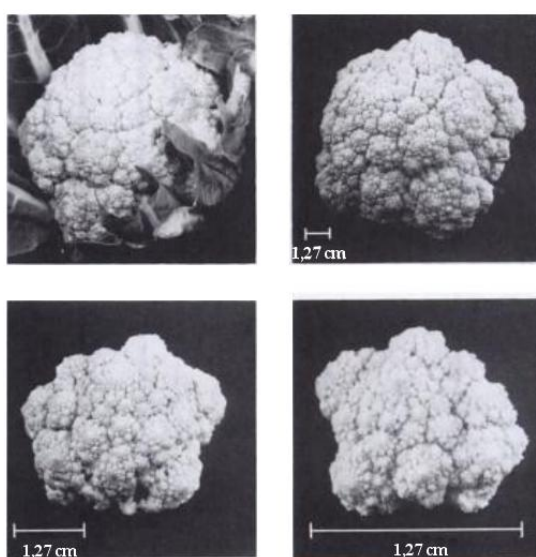
Obr.2 Výsledok aplikácie iteračného procesu na rovnostranný trojuholník, nazývaný tiež Kochova vločka [12]

1.1.1 Sebadpodobnosť, škálová invariantnosť fraktálov

Ambriško [2] ako príklad prírodného fraktálu uvádza strom, poukazujúc tak na odlišnosti medzi euklidovskou a fraktálovou geometriou.

Vo svete dokonalej symetrie by bolo možné aproximovať strom rôznymi geometrickými útvarmi, napríklad ako trojuholník alebo ihlan. Atribút homogénosti týchto útvarov však nedovoľuje verný a pravdivý popis pretože každý element stromu je vo svojej podstate jedinečný, aj keď kvalitatívne podobný s ostatnými časťami (z toho vyplýva, že aj každý strom daného druhu je jedinečný a zároveň podobný – ma druhovú príslušnosť).

Spomínaný strom predstavuje komplex vetiev, odlišných v zmysle zaužívaných atribútov (dĺžka, šírka, výška), ale zároveň vyznačujúcich sa takmer identickou štruktúrou. Preto je možné o nich hovoriť ako o podobných až na merítko, teda malý list sa podobá na veľký, aj keď nie sú identické v rámci priestorových charakteristík. Tento fenomén, obsiahnutý v okolitej prírode, sa nazýva sebadpodobnosť, resp. škálovateľnosť. Popisuje objekty skrz nekonečný počet dimenzií (jeden strom obsahuje niekoľko generácií vetiev), spojených jednotným rámcom, plánom ich vytvárania, pričom jednotlivé detaily sú ponechané na náhodu (každý vie ako strom vo všeobecnosti vyzerá, ale konkrétny strom je v detailoch rozličný od ostatných, je jedinečný). Ide tu teda o kontrolovanú nepravidelnosť. Evidentnú sebadpodobnosť môžeme pozorovať aj na karfirole.



Obr.3 – Ukážka škálovateľnosti prírodných útvarov v prípade karfiolu [1].

1.1.2 Fraktálová dimenzia

Problémom dimenzie sa popri iných kvalitatívnych charakteristikách objektov zaoberá topológia. Ako už bolo spomenuté, topológia nazerá na niektoré operácie (takéto operácie sa nazývajú homeomorfné.) vykonané nad objektmi ako na kvalitatívne invariantné, teda nerozlišuje napr. medzi klasickou priamkou a Kochovou krivkou alebo medzi Kochovou vložkou a kruhom. Z aplikácie takýchto operácií potom vyplýva invariantnosť kvalitatívnych vlastností objektu (a teda aj dimenzie), čiže Kochova krivka by mala oplývať dimenziou 1, tak ako priamka, ale nemusí tomu byť tak.

Tento problém sa objavil s príchodom tzv. priestor vyplňajúcimi krivkami (viď Kochova), ktoré vyplňajú určitý priestor a zároveň sú priamkami, teda nemajú dimenziu ani 1 ani 2 (v klasickej geometrii sa stretávame s nezápornými celočíselnými dimenziami, napr. bod je dimenzie 0, priamka 1, rovina 2 a priestor dimenzie 3.), ale existuje ich zobrazenie z priamky do roviny, z čoho by vyplývalo narušenie topologickej invariantnosti z hľadiska dimenzie, keďže objekt s dimenziou n bol kvalitatívne rovnaký s objektom dimenzie m , pričom $m \neq n$. Riešením tohto problému bolo zavedenie reálnych čísel na hodnotenie dimenzií, ako aj objav nových metód výpočtu dimenzie, čo vyústilo do objavu fraktálnej dimenzie.

Medzi najznámejšie fraktálne dimenzie patrí Hausdorffova, ktorú vypočítame prostredníctvom metódy pokrývania krivky kružnicami o polomere r , kde medzi počtom kružníc n a polomerom r existuje vzťah [2]:

$$n \cdot (2r)^d = 1, \quad (1)$$

kde n – počet kružníc potrebných na pokrytie celej krivky,

r – polomer kružnice,

d – fraktálny rozmer.

Logaritmicou úpravou získame vzťah pre výpočet fraktálovej dimenzie:

$$d = \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{2r} \right)} \quad (2)$$

Hausdorffova dimenzia vyjadruje mieru členitosti objektu, pričom platí, že čím je objekt členitejší, tým je Hausdorffova dimenzia vyššia. Tiež platí, že ak $d > 1$ tak dĺžka

objektu je nekonečná – podobne ak $d < 1$, dĺžka objektu je rovná nule [3]. Aj preto nemožno spomínané priestor vyplňujúce krivky popisovať topologickou dimenziou pretože majú nekonečnú dĺžku a zároveň Hausdorffovu dimenziu 2 (zatiaľ čo topologická by bola rovná 1).

1.2 Fraktály a finančné trhy

Spomenuté vlastnosti fraktálových útvarov sa analogicky objavujú aj v časových radoch, ktoré modelujú vývoj cien na finančných trhoch. Rozdiel spočíva v type nezávislej premennej, teda namiesto priestoru pracujeme s časom, skúmame jeho dimenzie a snažíme sa o nájdenie podobností vo vývoji závislej premennej – ceny.

1.2.1 Hypotéza fraktálového trhu

Finančný trh je určený niektorými základnými zákonitosťami³, ktorých existenciu nemožno spochybniť, sú prítomné v rámci každého systému, ktorý definujeme ako trh, je však možné rôzne interpretovať ich obsah, a z toho vyplývajúcu funkciu v rámci trhu. O takúto interpretáciu sa pokúša aj hypotéza fraktálových trhov, vychádzajúca z nasledovných predpokladov [4]:

- Cena – je nositeľom informácie, ktorá však nemá rovnakú výpovednú hodnotu pre všetkých zúčastnených, každý subjekt vyhodnocuje túto informáciu podľa dĺžky investičného horizontu, v ktorom operuje, teda cena je multidimenzionálnou informáciou. Rozlišujeme hlavne krátkodobé („módne hity“) a dlhodobé (fundamentálne zlomy v ekonomickom prostredí) zmeny, na základe porovnania veľkosti volatility a spoľahlivosti informácií [2].
- Správanie investora – subjekt sa na trhu nemusí správať vyslovene racionálne, čo vyplýva z nedostatku prostriedkov (časových, technických, ale aj interpretačných) na úplne spracovanie dostupných informácií. Logickým dôsledkom je zabudovanie momentu rizika do procesu rozhodovania, čo spätne vytvára náhodnosť na

³ Týmito zákonitosťami rozumieme podľa [4] cenu, chovanie investora, pamäť trhu a pravdepodobnostné rozloženie ceny.

finančných trhoch. Investori sa tiež vyznačujú sklonmi k väčšiemu riziku v stratoch situáciách.

- Pamäť trhu – vypovedá o vzájomnej závislosti medzi predošlým a budúcim vývojom trhu, čím vylučuje čisto náhodný postup v časovej rade (Výlučne náhodný vývoj ceny na trhu predpokladá tzv. hypotéza efektívneho trhu, ktorá zakladá na teórii náhodného postupu (*Random walk theory*), vypracovanú francúzskym matematikom L. Bachelier. V tejto hypotéze nie sú zmeny ceny ovplyvnené predošlým vývojom trhu.) . Jednotliví investori identifikujú postupom času isté zákonitosti vývoja trhu (získavajú skúsenosti), ktoré ich spätne ovplyvňujú pri posudzovaní informácií o cenách a následných rozhodnutiach.
- Rozloženie ceny – zmeny vo vývoji nezodpovedajú normálnemu rozloženiu, resp. nie sú spojité a približne rovnaké, naopak podliehajú silnej koncentrácii v rámci krátkych časových úsekov a taktiež sa vyznačujú cyklickosťou a nespojitou [5]. Na finančných trhoch taktiež pôsobí fenomén kladnej spätnej väzby, umocňujúca jednotlivé zmeny ceny smerom pôvodnej zmeny, čím vznikajú vysoko nepravdepodobné zmeny počas krátkych období.

Mandelbrot rozširuje hypotézu fraktálového trhu o rozlišovanie obchodného a fyzického času (*trading and clock time*). Predpokladá stabilné („chvostové“) rozdelenie pre cenové zmeny počas konštantného intervalu reálneho času, zatiaľ čo zmeny cien medzi nasledovnými transakciami sú väčšinou takmer „zvonovité“, pokiaľ nedochádza k nespojitým fluktuáciám. Interval medzi jednotlivými transakciami majú tendenciu nadobúdať rozličné hodnoty vo veľkej miere, z čoho vyplýva, že obchodný čas je závislý od množstva jednotlivých druhov cenných papierov, ktoré sú predmetom obchodu v určitom čase (*trading volume*) [5].

1.3 Štatistické metódy na fraktálnom prístupe

V časti 1.2.1 sme hovorili o hypotéze fraktálového trhu ako o modeli vhodne zachytávajúcom vzťahy a dynamiku vývoja jednotlivých atribútov finančného trhu. Pozornosť zasluhuje najmä posledne spomínaný fenomén vývoja (zmeny) ceny na trhu, ktorý je určujúcim činiteľom vo vývoji správania sa zúčastnených subjektov. Z toho potom vyplýva fakt, že približného poznanie budúcej trajektórie evolučnej ceny by bolo

nedocniteľnou výhodou nielen pre každého investora na finančnom trhu, ale aj pre kontrolné mechanizmy zabráňujúce krízovým situáciám.

„Predpovedať“ cenu znamená v matematickom jazyku použiť teóriu pravdepodobnosti, schopnú zachytiť moment náhodnosti a následne po zozbieraní určitej vzorky dát zostaviť, resp. identifikovať pravdepodobnostné rozdelenie danej premennej (v našom prípade ceny), ktoré by verne modelovalo jej vývoj. Všeobecne je však známa neschopnosť priameho pozorovania ekonomických veličín, ako je to v prípade prírodných vied, resp. tieto veličiny sú ovplyvňované (transformované) rôznymi manipuláciami pri ich samotnom spracovaní.

Medzi najznámejšie takéto manipulácie patrí:

- Lineárna agregácia alebo jednoduché pridanie viacerých premenných v pôvodnom merítke – Častejšie sa stretávame napr. s rozdelením celkového dôchodku ako s rozdelením dôchodkov podľa veku. Podobne agregátne veličiny (HDP krajiny, celková nezamestnanosť) predstavujú zaujímavejšie veličiny ako výkon konkrétnej firmy alebo nezamestnanosť podľa jednotlivých miest a pod.
- Vážený mix – Môže nastať situácia, kedy nevieme s presnosťou určiť pôvod vstupných dát, javia sa nám ako náhodne vybrané z možných základných rozdelení, a teda pozorované rozdelenie bude akýmsi mixom týchto základných rozdelení. Príkladom môže byť ocenenie nejakej komodity, ktorej kvalitu je nemožno presne určiť (oceniť), takže jej cena sa nám môže javiť ako náhodne determinovaná (umelecké diela napr.).
- Hraničný výber alebo výber maximálneho, resp. minimálneho prvku vzorky – Ide o prípad, kedy máme prístup k dátam, ktoré sú filtrované za nejakým účelom (maximálny zisk, minimálne náklady) alebo sú ovplyvnené historickými udalosťami, resp. pomermi (dejiny píšú víťazi nie porazení).

Uvedené manipulácie nad vstupnými údajmi predstavujú akúsi bariéru pre použitie pravdepodobnostných rozdelení a také rozdelenie, ktoré túto bariéru „prekoná“ (bude invariantné voči všetkým trom zmenám), bude vhodným kandidátom na modelovanie ekonomickej reality. V ďalšom texte ukážem rozdelenie pravdepodobnosti spadajúce do tejto kategórie rozdelení asymptoticky sa zhodujúce s reálnymi dátami.

1.3.1 Škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti

Vychádzajúc z Paretovho pravidla rozdelenia dôchodkov⁴, definuje Mandelbrot škálovateľné rozdelenie nasledovne [5]:

Definícia 1 Nech existuje pravdepodobnosť $P(U \geq u)$, kde u je konkrétna hodnota náhodnej premennej U . Potom ak pre veľké hodnoty u môžeme túto pravdepodobnosť zapísať v tvare

$$P(u) \sim Cu^{-\alpha}, \quad (3)$$

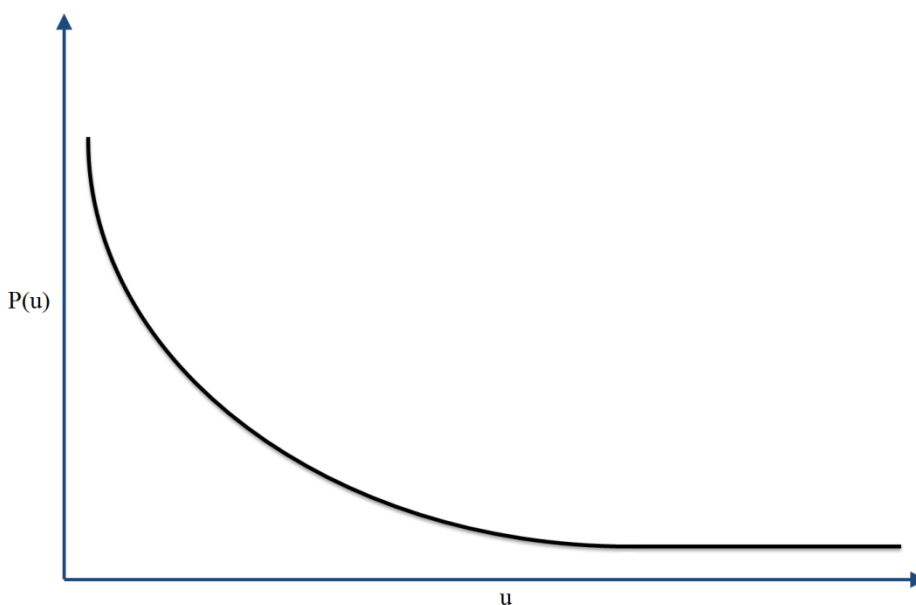
tak náhodná premenná U má škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti pre $\alpha > 0$; $\alpha = k$, kde: α – škálovací exponent,

C – škálovací koeficient,

k – konštanta.

Zjavnými znakmi škálovacieho rozdelenia sú

- tzv. „dlhý chvost“,
- extrémna šikmosť

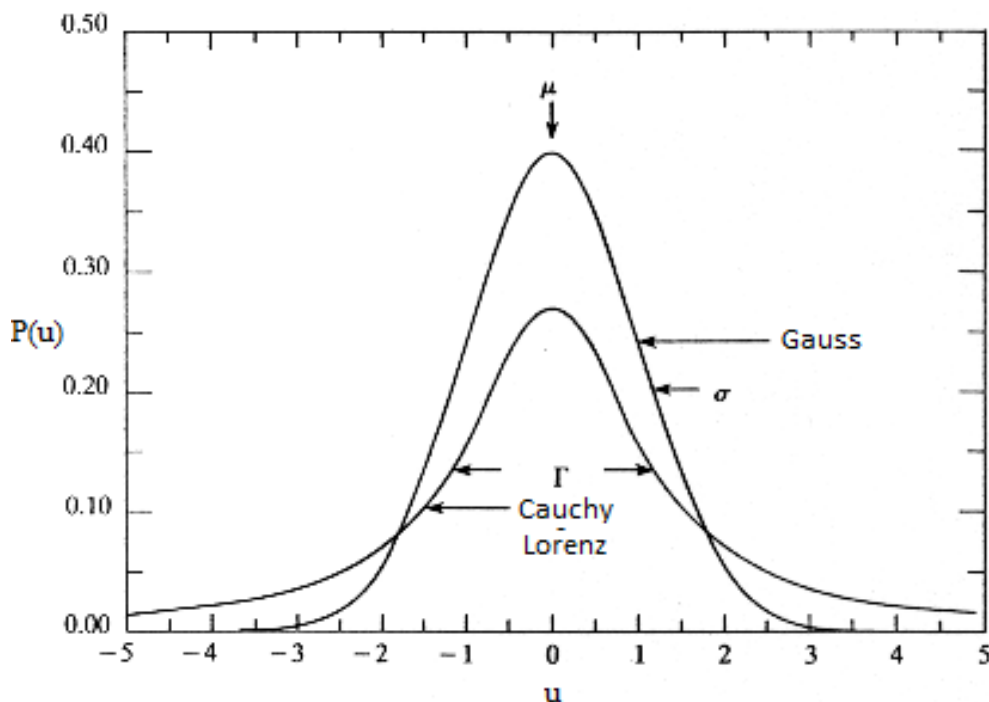


Obr.4 Ukážka škálovateľného rozdelenia pravdepodobnosti pre kladné hodnoty sledovanej náhodnej premennej [13]

⁴ Pareto empiricky zistil, že 80% celkového bohatstva vlastní 20% ľudí, z toho aj Paretovo pravidlo 80:20.

Ak pripustíme aj záporné hodnoty sledovanej náhodnej premennej, vznikne tzv. škálovateľné rozdelenie s dvoma chvostmi.

Dôležitou vlastnosťou takéhoto typu rozdelenia je invariantnosť voči spomínaným manipuláciám ovplyvňujúcim reálne (vstupné) dáta, ktorú možno ukázať na jednej zo spomenutých transformácii ako príklad. Ostatné sú dokázateľné podobným spôsobom.



Obr.5 Ukážka predstaviteľa dvoj-chvostových rozdelení, konkrétne Cauchy – Lorentzovo a jeho porovnanie s normálnym rozdelením [14].

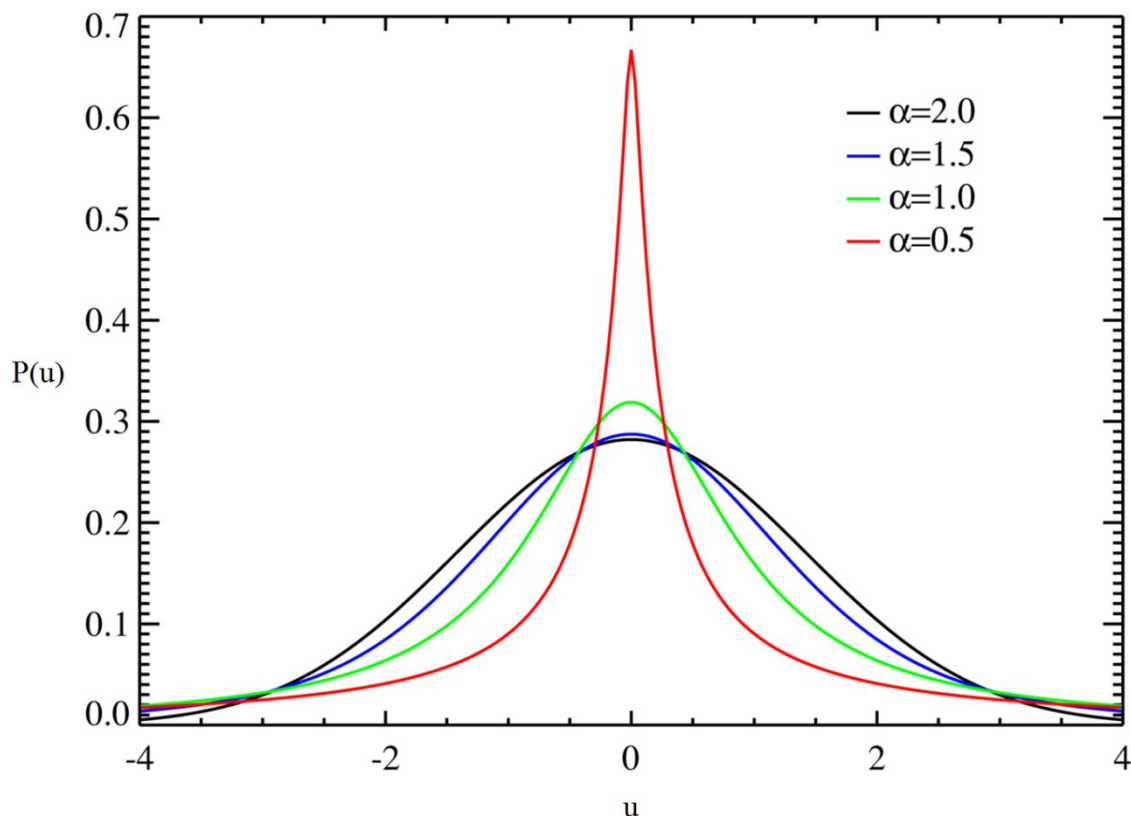
Veta 1 Nech náhodná premenná U_W predstavuje vážený mix možných hodnôt náhodnej premennej U_n , a nech p_n je pravdepodobnosť, že $U_W \equiv U_n$. Potom ak náhodná premenná U_n má škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti, tak premenná U_W má tiež takého rozdelenie so škálovacím parametrom $C_W = \sum p_n C_n$ a s rovnakým škálovacím exponentom.

Dôkaz 1 Uvažujme n nezávislých náhodných premenných U_n , ktoré majú škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti s konštantným exponentom α . Potom pravdepodobnosť náhodnej premennej U_W je daná vzťahom:

$$\Pr(U_W > u) = \sum_{n=1}^n p_n \Pr(U_n > u) \sim \sum_{n=1}^n C_n p_n u_n^{-\alpha} = C_W u^{-\alpha}, \quad (4)$$

teda rozdelenia obidvoch náhodných premenných sú rovnaké, resp. škálovateľné rozdelenie je invariantné voči váženému mixu náhodnej premennej, čo bolo treba dokázať.

Z definície škálovateľného rozdelenia (vzťah (3)) vyplýva, že takéto rozdelenie je vo veľkej miere ovplyvnené charakteristickým exponentom α^5 . V rámci grafickej reprezentácie, parameter α určuje ako veľmi budú zdvihnuté chvosty rozdelenia, resp. koľko pravdepodobnosti bude pridelenej najmenej pravdepodobným udalostiam. Vplyv α na tvar škálovateľného rozdelenia dokumentuje obrázok (6).



Obr.6 Vplyv parametra α na tvar škálovateľného rozdelenia [15]

Dôležitosť parametra α pre škálovateľné rozdelenie vyžaduje jeho spoľahlivý odhad⁶. Existuje viacero metód, ktorými je možné tento parameter spoľahlivo odhadnúť, pre jednoduchosť bude uvedená metóda logaritmických grafov, ktorou budú určené základné podmienky na relevantnosť parametra α .

Uvažujme asymptoticky škálovateľné rozdelenie ako vo vzťahu (3). Po logaritmickej úprave⁷ obidvoch strán je možné dostať

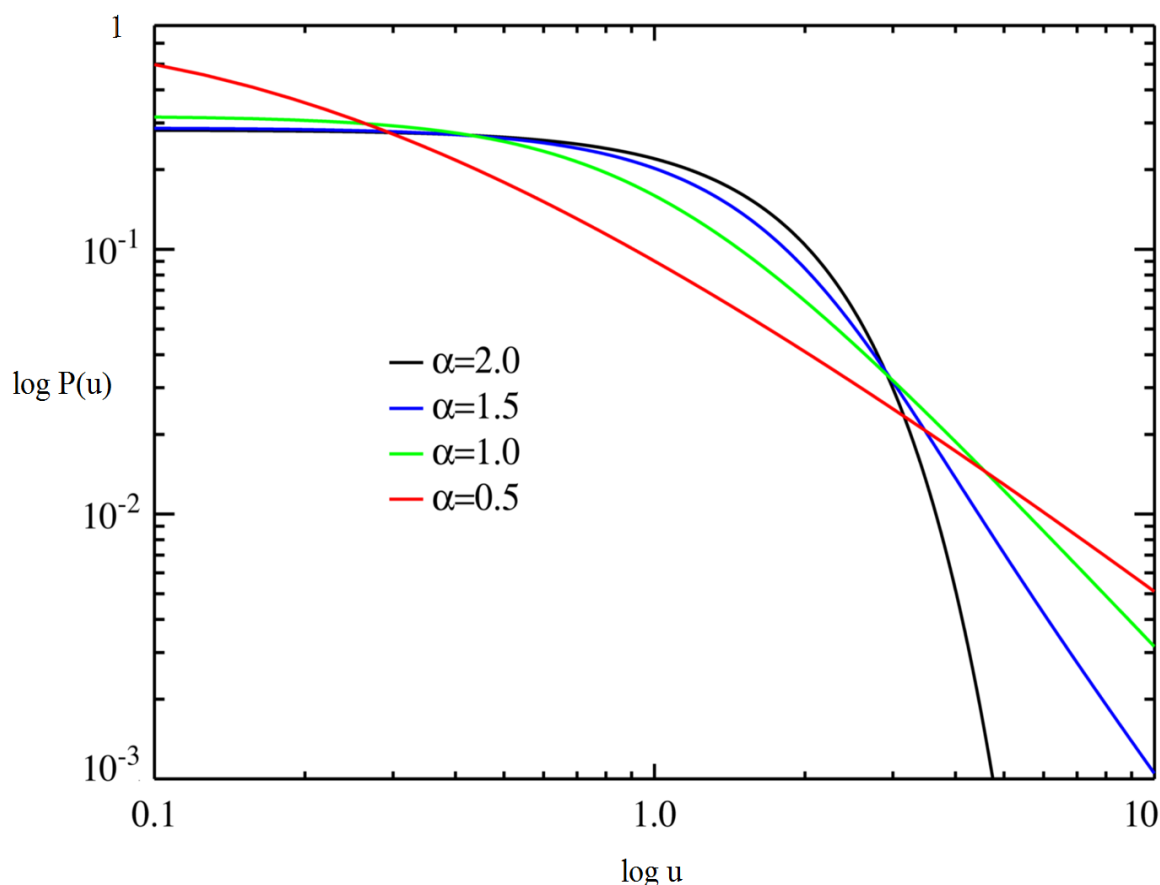
$$\log P(u) \sim -\alpha \log Cu. \quad (5)$$

⁵ V ďalšej časti bude škálovateľné rozdelenie špecifikované aj ďalšími parametrami, avšak škálovací exponent možno považovať za najvýznamnejší (preto aj názov charakteristický exponent).

⁶ Existujú iba 3 typy rozdelení pre ktoré je α explicitne definované, a to normálne, Lévyho a Cauchyho rozdelenie.

⁷ Uvažujeme dekadické logaritmy.

Vizualizácia vzťahu (5) na logaritmickom grafe bude potom vykazovať približnú priamku so sklonom $-\alpha$ pre zvyšujúce sa u . Kvôli obmedzenej početnosti skúmaných vzoriek (tzn. tisíc a menej) možno málokedy pozorovať hodnoty u prekračujúce veľmi nízku pravdepodobnosť výskytu náhodnej premennej (v rámci logaritmického grafu napr. pravdepodobnosť 1000^{-1} a podobne), teda y – ová os obsahuje vo väčšine prípadov maximálne 3 úseky $\log P(u)$. Exponent α možno z praktických skúseností obmedziť ešte vo väčšej miere, a to tak, že Ďalej veľkosť x –ovej osy bude prinajlepšom $3/\alpha$ úsekov $\log u$, a zároveň pre pomerne presný odhad parametra α je potrebné aby bola táto os približne o veľkosti jedného úseku na grafe. (z toho potom $\alpha < 3$). Z uvedeného vyplýva, že dáta, ktoré zodpovedajú rozdeleniu s exponentom väčším ako 3, nie sú dôveryhodné. Stabilné rozdelenia ďalej limitujú škálovací exponent (pri agregácii) číslom 2 vrátane.



Obr.7 Logaritmický graf škálovateľného rozdelenia pre rôzne α [16]

Významnou vlastnosťou škálovateľného rozdelenia je ďalej jeho nekonečný rozptyl hodnôt náhodnej premennej (druhý populačný moment) pri $\alpha < 2$ [5]. Táto vlastnosť je v ostrom kontraste s rozdeleniami blízkymi Gaussovmu rozdeleniu, ktorých rozptyl je

viazaný na strednú hodnotu a nemá tendenciu sa od nej odchyľovať⁸. Je samozrejmé, že sme odkázaní na prácu s obmedzenými zdrojmi údajov (viď manipulácie) a preto všeobecne uvažujeme výberové momenty, ktoré sú konečné (keďže aj veľkosť vzorky je obmedzená), a teda nekonečná variabilita sa nám môže zdať nepotrebná. Nemožno však vylúčiť možnosť konverencie týchto momentov k nekonečnu, v prípade zväčšovania výberového súboru, naopak treba na túto vlastnosť nazerať ako na inšpiráciu, umožňujúcu posúvanie hraníc pozorovania, ktoré sú často obmedzené na dĺžku ľudského života.

Mandelbrot ďalej ukázal, že spomínané výberové momenty v prípade škálovateľných rozdelení nekonvergujú k žiadnemu číslu, ich správanie je skôr nepravidelné a silno podlieha vzorke údajov. (Pre 3 rovnaké škálovateľné náhodné premenné o exponente $\alpha = 1$ pozoroval pri rozdielnom rozložení výberového súboru rozdielne chovanie druhého momentu). Z toho vyplýva neschopnosť odhadu druhého populačného momentu prostredníctvom výberového, aj keď experimenty v niektorých prípadoch ukazujú tendenciu výberového momentu ustáliť sa na určitej limite, ktorá by mohla byť spoľahlivým odhadom populačného momentu. Avšak v prípade zvýšenia rozsahu výberového súboru táto limita podlieha ďalším variáciám, a preto aj najväčší možný výberový súbor je príliš malý na spoľahlivý odhad populačného momentu náhodnej premennej. Ideálny rozsah vzorky by teda bol o hodnote ∞ , čo však v reálnom svete nie je možné uskutočniť, preto je takáto úvaha čisto matematická, štatistik potrebuje ako konečný rozsah súboru, tak aj konečné momenty na praktickú aplikáciu. Predpokladajúc ohraničenosť hodnôt premenných náhodne vybraných do výberového súboru z nekonečnej populácie neohraničených premenných s nekonečným rozptylom možno potom povedať, že zvyšovanie veľkosti výberu nám postupne zúži rozsah odhadovaných hodnôt druhého momentu, teda bude existovať určitá limita, kedy možno považovať moment niektorých premenných za konečný. Naopak pre niektoré premenné je výhodné, aby bola veľkosť výberu menšia ako určitá limita.

Ďalšou zaujímavou črtou je vzťah škálovateľného rozdelenia, konkrétne odchylok, ktoré vytvára (nekonečný druhý populačný moment) a fenoménu kauzality a náhody. V rámci nekonečného rozptylu je lákavé tvrdiť, že náhodný proces opísateľný takýmto rozdelením, bude generovať krivky bez akejkoľvek štruktúry. Avšak výstupom týchto procesov sú práve krivky s vlastnosťami, ktoré často nájdeme v procesoch uvažujúcich kauzálnu závislosť, aj napriek chýbajúcej vnútornej štruktúre zabezpečujúcej tieto

⁸ Konkrétne $D(X) = E[(X - \mu)^2]$, kde $D(X)$ – rozptyl a μ – stredná hodnota rozdelenia.

závislosti. Aj keď vzniknuté štruktúry predstavujú istú organizovanosť, nemožno z nich vychádzať v prípade extrapolácie modelu (Mandelbrot ich nazýva *perceptual illusions*, teda klamlivé vnemy z hľadiska pozorovateľa), pretože ony samotné vznikli náhodným procesom a vznik iných náhodných štruktúr je v budúcnosti vysoko pravdepodobný. Preto je dôležitá schopnosť rozlíšenia vzorov vo vývoji procesov (napr. cyklov) vhodných na uskutočnenie predpovedí a takých, ktoré opisujú predošlý vývoj a teda nie sú ďalej použiteľné. Nekonečná variabilita „nafukuje“ tento problém do extrémnych dimenzií, pretože by sme potrebovali niekoľko miliárd rokov na realizáciu všetkých možností ľubovoľného náhodného javu, teda počas jedného života možno pozorovať jednotlivé varianty (konfigurácie) daného procesu prinajlepšom raz (ak vôbec), a preto stanoviť pravdepodobnosť vzniku danej konfigurácie na základe frekvencie jej výskytu je minimálne trúfalé.

Škálovateľné rozdelenie pravdepodobnosti sa ukázalo vhodným modelom v rôznych vedných disciplínach, ako sociológia (rozdelenie veľkostí miest), psychológia, či fyzika (rozdelenie energií kozmických lúčov), či ekonómia (veľkosti firiem, zmeny cien, resp. rozdelenie dôchodkov). Mandelbrot dokonca naznačuje, že škálovateľný charakter sociálnych javov môže vyplývať z realizácie škálovateľných fyzikálnych javov (spúšťačov), napr. rozdelenie zdrojov nerastných surovín spätne ovplyvňuje obchod s ropou, zlatom a im podobnými komoditami. Podobné spojitosti nájdeme pri rozdelení počasia (zrážok, nečakaných udalostí), na ktorom závisí poistenie proti prírodným katastrofám, či úspešnosť poľnohospodárstva, nadväzujúca na obchod s potravinami. Zo zamerania tejto práce nás bude zaujímať využitie tohto rozdelenia predovšetkým v ekonomickej praxi.

2 M 1963 model

Názov modelu je určený, po prvé, menom autora, v tomto prípade ním francúzsky matematik Benoit Mandelbrot, a po druhé, rokom vzniku, teda rok 1963. Motivácia pre zostrojenie takéhoto modelu spočívala v snahe vylepšiť Bachelierov model Brownovho pohybu, ktorého predpoklad Gaussovho rozdelenia náhodných premenných bol priveľmi špecifický a obmedzujúci na aplikáciu širšieho spektra ekonomických aktivít.

Konkrétne, Bachelierov model predpokladá, že postupné cenové zmeny, dané vzťahom

$$Z(T + t) - Z(t)^9, \quad (6)$$

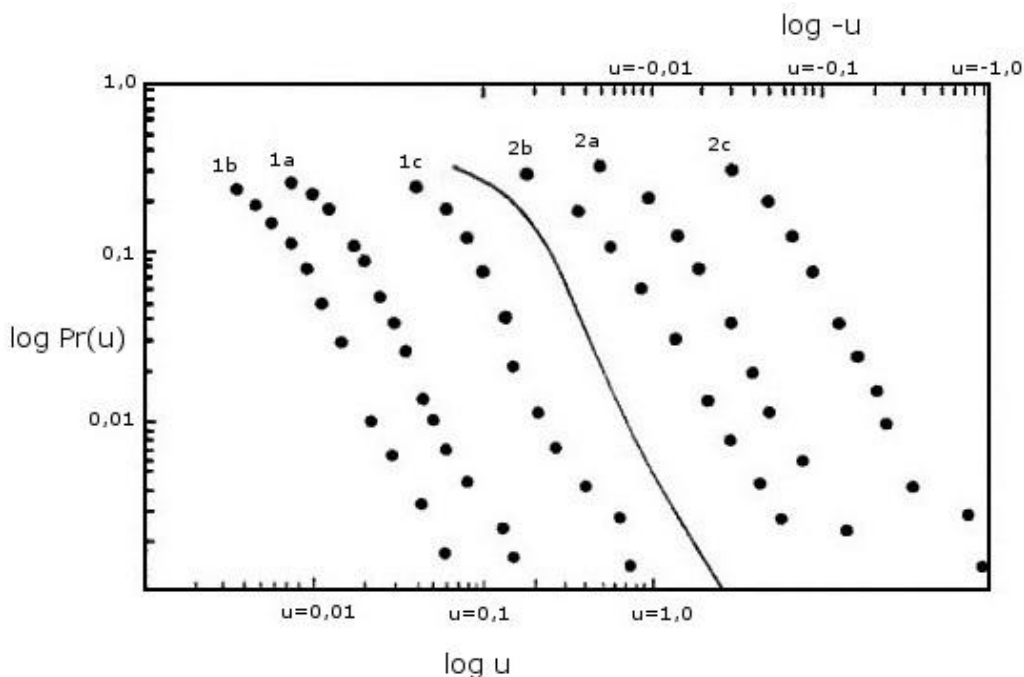
sú nezávislé, rovnako rozložené Gaussove náhodné premenné so stredom o hodnote 0 a so štandardnou odchýlkou, korešpondujúcou s intervalom zmeny. Spojením s vetou o centrálnej limite potom budú zmeny cien normálne rozdelené bez ohľadu na časový interval (deň, týždeň, mesiac atď.), pretože zmeny ceny za dlhšie obdobie budú jednoducho súčtom zmien za kratšie obdobia. Tieto predpoklady však narážajú v praxi minimálne na 4 prekážky:

- Zmeny v cenách sú omnoho väčšie a frekventovanejšie ako predpokladá normálne rozdelenie (nekonečná variabilita v základnom súbore).
- Tieto veľké zmeny sa objavujú dosť často na to, aby boli vysvetliteľné náhodnou chybou, skôr sú charakteru príčinného.
- Jednotlivé cenové zmeny nie sú nezávislé, skôr vykazujú určité trendy, resp. tendencie.
- Cenové záznamy nevykazujú základný štatistický predpoklad, a to stacionaritu, teda štatistické ukazovatele, ako napr. výberový rozptyl, budú nadobúdať rôzne hodnoty v závislosti od času.

Model *M 1963* ponúka riešenia na načrtnuté problémy, s určitou výnimkou druhej odrážky, závislosť premenných rieši len do určitého štádia, aj keď predpokladá, tak ako Bachelier, vzájomnú nezávislosť premenných.

⁹ Neskoršie úpravy vzťahu znamenali logaritmovanie rovnice pri základe čísla e . Tieto logaritmy vyjadrujú totiž závislosť štandardnej odchýlky cenovej zmeny od výšky cenovej hladiny. Aj preto bude v texte ďalej uvedený modifikovaný vzťah (6).

Významným prípadom použitia a zároveň aj otestovania modelu bol Mandelbrotov výskum cenových zmien na trhu s bavlnou, kde boli použité denné a mesačné doby sledovania. Obrázok Obr.8 poukazuje na presnosť odhadu (plná krivka) a taktiež na výraznú podobnosť jednotlivých kriviek, zložených z reálnych dát nezávisle od dĺžky trvania sledovaného intervalu zmeny.



Obr.8 Zoskupenie logaritmickej grafy reálnych cenových zmien bavlny o frekvencii 1 deň (krivky 1b, 2b a 1a, 2a), resp. 1 mesiac (krivky 1c, 2c) za rôzne obdobia. Zároveň krivky označené číslom 1 (1a, 2a, 3a) predstavujú pravdepodobnosť $\log \Pr \{U > u\}$ a k nim párové (2a, 2b, 2c) sú dané $\log \Pr \{U < -u\}$. Obrázok poukazuje na vierohodnosť teoretického odhadu (plná krivka), ktorý je schopný asymptoticky nahradiť hocikáku empirickú krivku na grafe [5].

2.1 Východiská modelu

Mandelbrot koncipuje svoj model ako zovšeobecnenie klasického modelu, preto aj ponecháva vzťah diferencie medzi jednotlivými cenami

$$\log_e Z(t+T) - \log_e Z(t), \quad (7)$$

kde $Z(t+T)$ – cena v nasledujúcom období,

$Z(t)$ – cena v aktuálnom období,

t – aktuálny čas,

T – časový posun.

Druhú stranu rovnice, kde sa v klasickom modeli nachádza Gaussovo rozdelenie, Mandelbrot nahrádza tzv. L – stabilným rozdelením pravdepodobnosti¹⁰, ktoré je konkrétnym prípadom všeobecnej koncepcie škálovateľných rozdelení. Treba však poznamenať, že limitný prípad tohto rozdelenia je Gaussovo normálne rozdelenie, preto Mandelbrotov model chápeme ako generalizáciu Bachelierovho modelu.

Na základe predchádzajúcich úvah možno vzťah (6) doplniť nasledovne:

$$L(t, T) = \log_e Z(t + T) - \log_e Z(t), \quad (8)$$

kde $L(t, T)$ je L – stabilná náhodná premenná.

Potrebu „vylepšenia“ Bachelierovho modelu si uvedomoval už jeho autor, keďže normálne rozdelenie nevie vysvetliť veľké odchýlky cenových zmien, pretože ich jednoducho nepripúšťa, resp. uvažuje iba konečnú a stacionárnu variabilitu vo výberovom súbore, ktorá sa však v skutočnosti mení v čase, čo je spôsobené nekonečnou variabilitou v základnom súbore. Vyriešenie týchto skutočností, ako aj zovšeobecnenie tohto modelu si vyžaduje implementáciu rozšírenej koncepcie stabilných náhodných premenných, kde normálna premenná bude jeden z možných prípadov (a zároveň aj limitným).

2.1.1 L – stabilné zákony pravdepodobnosti

Základný predpoklad klasického modelu cenových zmien (viď začiatok kapitoly) vychádza z nasledovnej vlastnosti normálnych náhodných premenných:

Veta 2 Nech U' a U'' sú dve náhodné normálne a zároveň nezávislé premenné so strednou hodnotou 0¹¹ a rozptylom σ'^2 , resp. σ''^2 . Potom súčtom $U' + U''$ bude normálna premenná U s rozptylom σ^2 , pričom $\sigma^2 = \sigma'^2 + \sigma''^2$. Uvažujme špeciálny prípad, kedy U bude normovaná normálna premenná $X \sim N(0, 1)$. Potom pre takúto premennú platí vzťah

$$s'U + s''U = sU, \quad (9)$$

kde s je dané vzťahom

$$s^2 = s'^2 + s''^2 \quad (10)$$

¹⁰ Takéto rozdelenie ako prvý koncipoval Paul Lévy v roku 1925, z toho potom aj L - stabilné.

¹¹ Ak uvažujeme nenulovú strednú hodnotu, do vzťahu (9) pribudne na pravú stranu posunutie náhodnej premennej o číslo d , dané vzťahom $d = (s' + s'' - s)\mu$, teda výsledná náhodná premenná bude mať rozdelenie $N(s\mu + d, s\sigma^2)$.

a predstavuje tzv. škálovací faktor (taktiež aj s' , resp. s''), vykazujúci určitú podobnosť so štandardnou odchýlkou.

Predchádzajúce úvahy vyjadrujú fakt, že sčítanec dvoch nezávislých rovnako rozdelených normálnych premenných bude znova normálna premenná s rovnakými charakteristikami, okrem variability, ktorá bude sumou škál jednotlivých sčítancov. Premenné s takouto vlastnosťou sa nazývajú stabilné voči agregácii.¹² Najdôležitejšou vlastnosťou, implicitne vyplývajúcou z vlastností stabilných premenných je zachovanie tvaru rozdelenia, teda chovanie náhodnej premennej sa nemení, aj keď škála možných hodnôt, ktoré môže nadobudnúť sa mení v závislosti od počtu sčítancov.

Vzťah (9) teda predstavuje invariantnosť náhodnej premennej voči agregácii, v teórii pravdepodobnosti nazývanej tiež L – stabilita. Normálna normovaná premenná je jediným riešením tohto vzťahu, pre ktorú je druhý moment konečný (je splnený vzťah (9)), preto sa aj považuje za hraničný prípad takejto stability. V prípade nekonečnej variability, spomínaný vzťah môže nadobúdať viacero riešení¹³ a pre škálovací faktor platí nový vzťah

$$s = s' + s'', \quad (11)$$

teda s (tiež s' a s'') nie je definované žiadnym momentom ako v prípade normálneho rozdelenia (rozptyl), pretože všetky populačné momenty sú nekonečné (resp. ich integrály). Všeobecným riešením vzťahu (9) pri nekonečnej variabilite sa úspešne zaoberal P. Lévy. Logaritmus charakteristickej funkcie tohto riešenia je daný ako

$$\log f(t) = \log \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu t) d \Pr\{U < u\} = i\delta t - \gamma |t|^\alpha \left\{ 1 + \frac{i\beta t}{|t|} \tan \frac{\alpha}{2} \right\}. \quad (12)$$

Vzťah (12) definuje stabilné rozdelenia pravdepodobností závislé od 4 parametrov:

- α (index špicatosti) – nadobúda hodnoty z intervalu $(0,2]$ a predstavuje obdobu škálovacieho exponentu. Konkrétnejšie udáva vzdialenosť (výšku) chvostov stabilných rozdelení od horizontálnej osi, teda koľko z celkovej pravdepodobnosti budú obsahovať. Čím vyššia hodnota, tým sú chvosty kratšie, pri $\alpha = 2$ dostávame normálne rozdelenie s definovanou strednou hodnotou a tiež s konečnou

¹² Niekedy sa uvádzajú aj ako *sum stable*, pre zvýraznenie faktu, že ide o sčítanie. Existujú totiž rozdelenia, ktoré sú stabilné voči maximalizácii, resp. minimalizácii a iným transformáciám s dátami.

¹³ Na tento fakt poukázal Cauchy, vychádzajúc z vlastného rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré nemá definovaný žiaden moment.

variabilitou σ^2 . V rámci intervalu $(1, 2)$ sa vyskytujú stabilné rozdelenia s definovaným prvým momentom, avšak s nekonečnými ostatnými momentmi.

- β (index šikmosti) – interval prípustných zmien je rovný $[-1, 1]$, okrem prípadu, kedy je α rovné 1, vtedy $\beta \approx 0$. V prípade, že $\beta = 0$, hustota pravdepodobnosti je symetrická.
- γ – škálovací faktor umocnený na exponent α , predstavuje obdobu rozptylu v prípade Gaussovho rozdelenia (pre $\alpha = 2$), kde pre súčet 2 premenných platí vzťah (8), resp. (9). Všeobecne potom pre každé 2 náhodné normované stabilné premenné U' a U'' s rovnakými parametrami α a β taktiež platí vzťah (7), pričom sa zo všeobecní vzťah (8) na

$$s^\alpha = s'^\alpha + s''^\alpha, \quad (13)$$

kde s^α (resp. s'^α a s''^α) je identické s γ (resp. γ' a γ'').

- δ (parameter polohy) – vzťah (8) vyžaduje, aby $\delta = 0$, z charakteristickej rovnice však môže δ nadobúdať aj iné hodnoty, konkrétne $\delta = E(U)$ ak $1 < \alpha \leq 2$. Pri $\beta = 0$, strednú hodnotu predstavuje medián alebo modus, v prípade, že $0 < \alpha < 1$ a zároveň $\beta \neq 0$, δ nemá interpretáciu.

V nasledujúcom texte bude ukázané, že L – stabilita platí taktiež aj pre súčet viacerých stabilných premenných.

Predpokladajme vzťah

$$S_N = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots + U_N, \quad (14)$$

kde U_n – n nezávislých premenných ($n = 1, 2, \dots, N$) s rovnakými parametrami α , β , γ a δ ,

S_N – súčet premenných U_n . Potom logaritmus charakteristickej rovnice náhodnej premennej S_N bude N – násobkom logaritmu charakteristickej funkcie ľubovoľnej náhodnej premennej U_n v rámci sumy $\sum U_n$, a preto bude S_N stabilnou premennou s rovnakými parametrami α a β , a súčasne s parametrami δ a γ vynásobenými hodnotou N .¹⁴ Z toho vyplýva, že náhodné premenné

$$U_n - \delta = N^{-1/\alpha} \sum_{n=1}^N (U_n - \delta), \quad (15)$$

majú rovnaké vlastnosti, resp. sú identicky rozdelené náhodné premenné.

¹⁴ Konkrétne $N \log f(t) = i\delta Nz - N\gamma|z|^\alpha \left\{ 1 + \frac{i\beta z}{|z|} \tan \frac{\alpha}{2} \right\}$.

Stabilita ďalej platí aj v prípade rôznych parametrov γ a δ jednotlivých sčítancov U_n (miesto vynásobenia charakteristickej funkcie hodnotou N , sa sčítajú funkcie jednotlivých sčítancov, resp. konečné parametre γ a δ budú sumami parametrov každej náhodnej premennej U_n).

Okrem zákona stability, L – stabilné rozdelenia zovšeobecňujú taktiež klasickú vetu o centrálnej limite, ktorá hovorí, že ak U_n sú nezávislé, identicky rozložené náhodné premenné s konečným rozptylom $\sigma^2 = E[U_n - E(U)]^2$, tak potom limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N^{-1/2} \sigma^{-1} \sum_{n=1}^N [U_n - E(U)] \quad (16)$$

je normovanou normálnou premennou s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma = 1$. Inak povedané, existujú dve funkcie, $A(N)$ a $B(N)$, také, že pre $n \rightarrow \infty$ výraz

$$A(N) \sum_{n=1}^N U_n - B(N) \quad (17)$$

má konečnú limitu, ktorá nie je konštantou, ale náhodnou premennou.

V prípade nekonečnej variability sa touto limitou stáva L – stabilná premenná U_n , pričom túto limitu získame už v prípade, kedy $N = 1$, pretože pre agregáciu L – stabilných premenných platí vzťah (15). Navyše všetky stabilné rozdelenia podliehajú asymptotickej forme škálovateľnosti, čo z nich robí jedínú možnú limitu pre sumu nezávislých, identicky rozložených náhodných premenných.

Konkrétne Lévy ukázal, že rozdelenia pravdepodobností všetkých stabilných premenných, sú asymptoticky škálovateľné, resp. existujú také dve konštanty C' a C'' determinované parametrom β

$$\beta = \frac{(C' - C'')}{(C' + C'')}, \quad (18)$$

že pre $n \rightarrow \infty$ platí

$$u^\alpha \Pr\{U > u\} \rightarrow C' = \sigma'^\alpha \text{ a zároveň } u^\alpha \Pr\{U < -u\} \rightarrow C'' = \sigma''^\alpha, \quad (19)$$

kde σ'^α – pozitívna štandardná odchýlka (pre pravý „chvost“ rozdelenia),

σ''^α – negatívna štandardná odchýlka (pre ľavý „chvost“ rozdelenia),

pričom podmienka $\beta \neq 1$ zabezpečuje škálovateľnosť obidvoch chvostov rozdelenia pravdepodobnosti. V prípade, že $\beta = 1$, jedna z odchýlok je rovná nule, čo sa prejaví výrazným skrátením niektorého chvostu na grafe.¹⁵

Uvažujme teraz takú premennú U_n , ktorá je asymptoticky škálovateľná s $0 < \alpha < 2$, ale nie je stabilná. Potom pre takúto premennú taktiež existuje limita (17), ktorá je L – stabilná s rovnakým exponentom α , ak spĺňa tzv. Doblin – Gnedenkove¹⁶ podmienky (ďalej iba $D - G$ podmienky), zovšeobecňujúce asymptotickú škálovateľnosť L – stabilného rozdelenia pravdepodobnosti nasledovne.

Veta 3 Uvažujme takú náhodnú premennú U , že

$$Pr(U > u) = Q'(u)u^{-\alpha}, \text{ resp. } Pr(U < -u) = Q''(u)u^{-\alpha}.^{17} \quad (21)$$

Potom, ak platí

$$\lim_{u \rightarrow \infty} Q'(u) = C', \text{ resp. } \lim_{u \rightarrow \infty} Q''(u) = C'', \quad (22)$$

a zároveň

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Q'(u) + Q''(u)}{Q'(ku) + Q''(ku)} = k^\alpha, \quad (23)$$

pre $\forall k > 0, \forall \alpha > 0$, tak potom premenná U je L – stabilnou náhodnou premennou. Inak povedané, rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá spĺňa $D - G$ podmienky bude podobné Cauchyho rozdeleniu z obrázka Obr.5, teda konce obidvoch chvostov (z podmienky $u \rightarrow \infty$) budú konvergovať k nejakej konštante C' , resp. C'' . Táto požadovaná vlastnosť stability potom zabezpečí invariantnosť voči škálovaniu rozsahu pôvodnej populácie, čo sa charakteru rozdelenia týka. Teda nezáleží akým číslom k budeme zväčšovať (alebo zmenšovať) jednotlivé miery zmeny u (napr. denné merítko na týždenné atď.), vzájomný pomer takéhoto váženého vyústi vždy k rovnakej konštante, o čom hovorí vzťah (23).

Pri platnosti týchto podmienok a ak $\alpha \neq 0$ môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 4 Nech U_n sú nezávislé, identicky rozložené náhodné premenné. Potom nemusia existovať také funkcie $A(N)$ a $B(N)$, že výraz (17) má limitu. Ak však také funkcie existujú, ich limitou bude jedno z riešení vzťahu (9), ktorá bude normálnou premennou, ak

¹⁵ Takéto extrémne prípady sa nazývajú *J-shaped*, podľa „skoseného“ tvaru rozdelenia pravdepodobnosti.

¹⁶ Tieto podmienky boli nezávisle sformulované a dokázané ruskými matematikmi Doblinom a Gnedenkom, preto Doblin – Gnedenkove podmienky.

¹⁷ Ide prakticky o vzťah (19), označenie sa zmenilo pre potreby vety.

existuje konečný rozptyl. Pri nekonečnom rozptyle je touto limitou L – stabilná premenná, a to len vtedy a len vtedy, keď $0 < \alpha < 2$ a zároveň sú splnené $D - G$ podmienky.

Veta 4 rozširuje pôsobnosť vlastností L – stability aj na premenné, ktoré nie sú stabilné (uvažujeme prípady $\alpha < 2$, keďže normálne rozdelenie je vždy stabilné). Z podmienok (22) a (23) vyplýva, že nato, aby ľubovoľná náhodná premenná bola stabilná v zmysle vety (4), stačí aby bola asymptoticky škálovateľná, navyše podľa Famu [5], takéto premenné ako jediné spĺňajú $D - G$ podmienky v rámci úvah o nekonečnej variabilite.

2.1.2 Význam modelu M 1963 v štatistickej indukcii

V úvode tejto kapitoly boli načrtnuté niektoré charakteristiky vývoja cenových hladín, reflektujúcich chovanie jednotlivých subjektov v rámci jednotlivých trhov. Teorém L – stability, vychádzajúci z Bachelierovho modelu náhodného pohybu cenových zmien, predpokladá, že náhle zmeny v chovaní cien sú prirodzené a zároveň frekventovanejšie ako uvažuje hypotéza normality. Inak povedané, zatiaľ čo v normálnej hypotéze sa na veľkej zmene ceny za daný interval podieľa veľké množstvo malých zmien počas menších úsekov v rámci intervalu, na L – stabilnom trhu je možné, aby veľkú zmenu spôsobilo iba niekoľko výkyvov v rámci intervalu zmeny, ktoré budú porovnateľné s celkovou zmenou ceny.

L – stabilita ďalej objasňuje variačný charakter cenových zmien, ktoré sa mnohokrát zdajú byť chaotické. Tento dojem však spôsobuje ich nekonečná variabilita, poskytujúca dostatočne široké spektrum vývoja nato, aby ich bolo možné skúmať a exaktne odhadnúť vo vedeckom slova zmysle, ako je to možné v iných vedeckých disciplínach, hlavne prírodných. Stabilný trh je teda oveľa riskantnejší pre investorov ako jeho normálna alternatíva (kde sa predpokladá konečná variabilita) a zhruba vysvetľuje, prečo mnoho obchodníkov investuje svoje prostriedky do menej riskantnejších komodít.¹⁸

¹⁸ Na normálnom trhu by táto skutočnosť bola irelevantná, pretože veľké zmeny sú postupné a teda aj dobre predvídateľné.

2.2 Niektoré aplikácie modelu M 1963

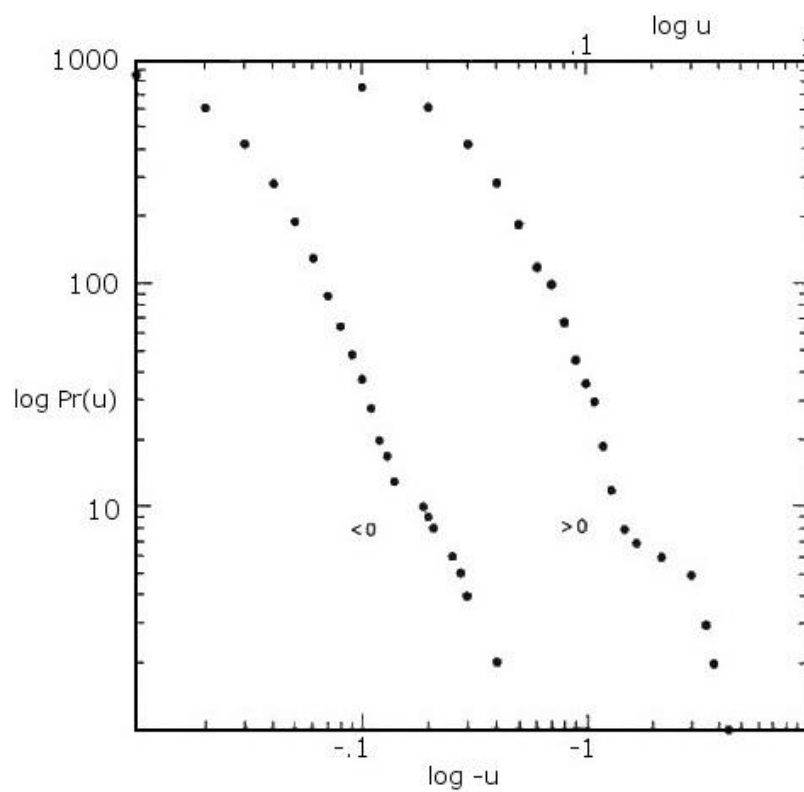
Aplikáciou modelu M 1963 v tejto podkapitole budeme rozumieť empirické overenie jeho teórie, a to pomocou grafických dôkazov zostavených z reálnych dát. Dáta budú takmer výlučne zobrazované prostredníctvom logaritmických grafom pre lepšiu ilustráciu a presvedčivosť záverov modelu M 1963.

2.2.1 Variabilita cien pšenice (Chicago 1883 – 1936)

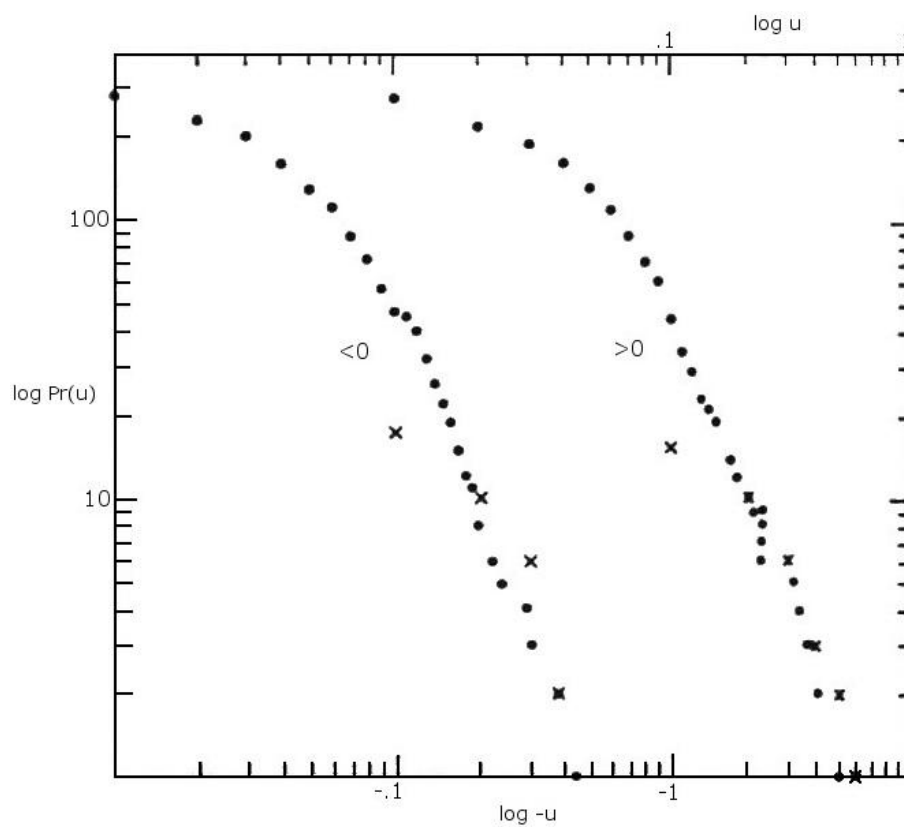
Vo všeobecnosti sa na trhu s obilím stretávame s rôznymi cenami, ktoré sú funkciou kvality (akosti) obilia, preto neexistuje presne stanovená cena obilia v žiadnom momente, hovoríme skôr o intervale hodnôt. Podľa Workinga je preto týždeň limitou rozumnej predpovede ceny obilia [3].

Mandelbrot ukázal, že tieto cenové zmeny (obrázok Obr.11) sú L – stabilné premenné s exponentom približne $\alpha \in (1,7; 2)$ ¹⁹, čo sa prejaví v tvare rozdelenia, ktoré nadobudne charakteristickú S – krivku. Kvôli spomenutým problémom o stanovení presnej ceny a nie veľkému výberovému súboru cenových zmien, model vykazuje isté odchýlky, najmä na začiatku S – krivky, kde hodnoty pravdepodobnosti prevyšujú predpokladanú asymptotu a majú tendenciu sa zvyšovať so zväčšovaním cenovej diferencie (obrázok Obr.9 a Obr.10). Naopak pri menších cenových zmenách sa hodnoty krivky približujú predpokladanej asymptote, kde $\alpha \approx 2$.

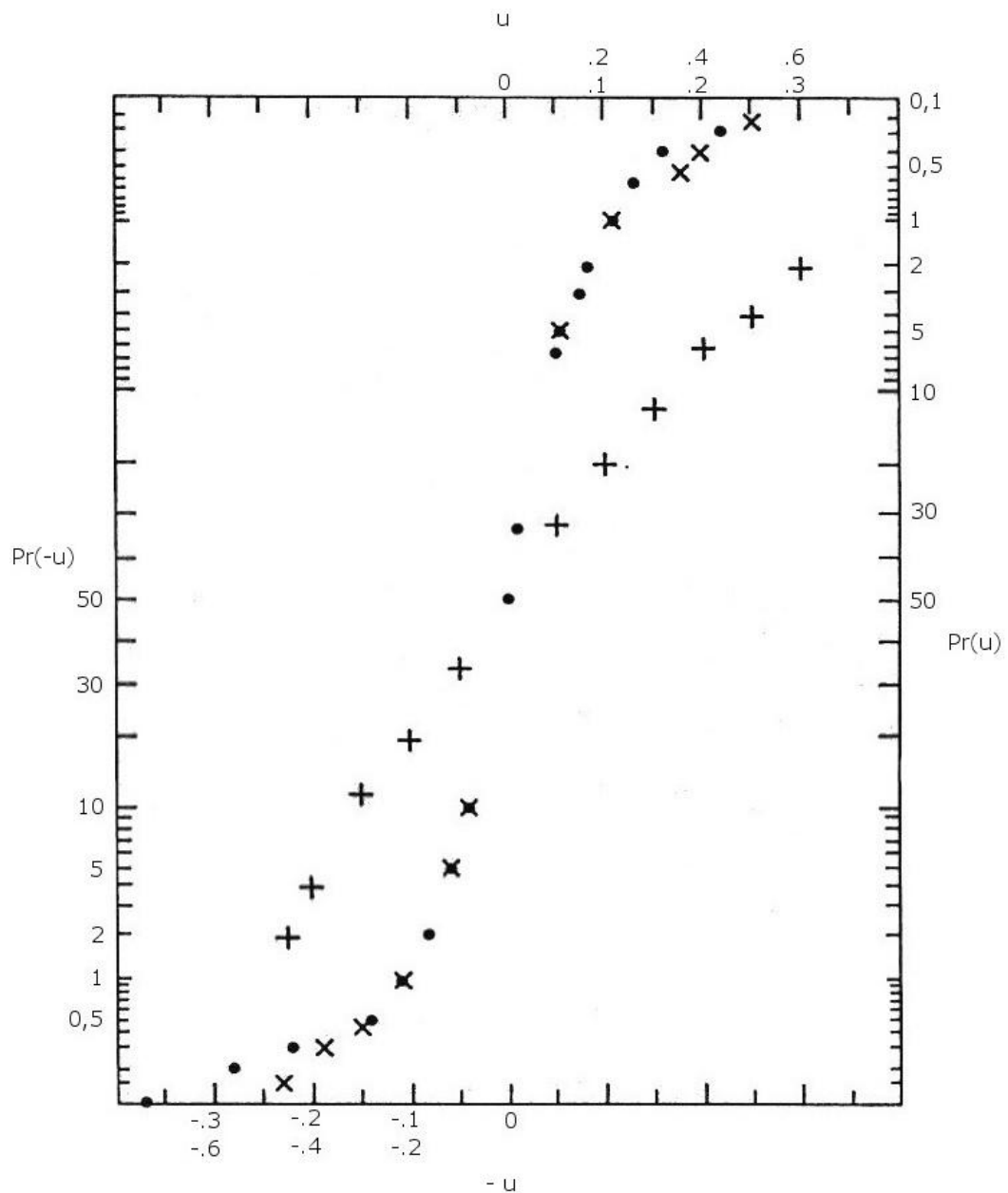
¹⁹ Mandelbrot vychádzal zo štúdií bavlny, kde identifikoval tento exponent ako rovný 1,7 a z Gaussovho rozdelenia ($\alpha = 2$). Grafické dôkazy ukázali, že zmeny cien pšenice neobsahujú až taký flukтуаčný charakter ako cenové rozdiely bavlny (plochejší tvar S – krivky) a zároveň ale nevykazujú uniformné hodnoty, ktoré by sa dali prirovnať k náhodnej chybe u normálneho rozdelenia.



Obr.9 Týždenné zmeny cien pšenice na logaritmickej grafe, pričom vertikálna os predstavuje absolútnu frekvenciu výskytu danej cenovej diferencie. Na horizontálnych osiach sú naznačené veľkosti zmien ceny, pozitívne na hornej, resp. negatívne na dolnej horizontále [5]



Obr.10 Mesačné (bodky) a ročné (krížiky) zmeny cien pšenice [5]

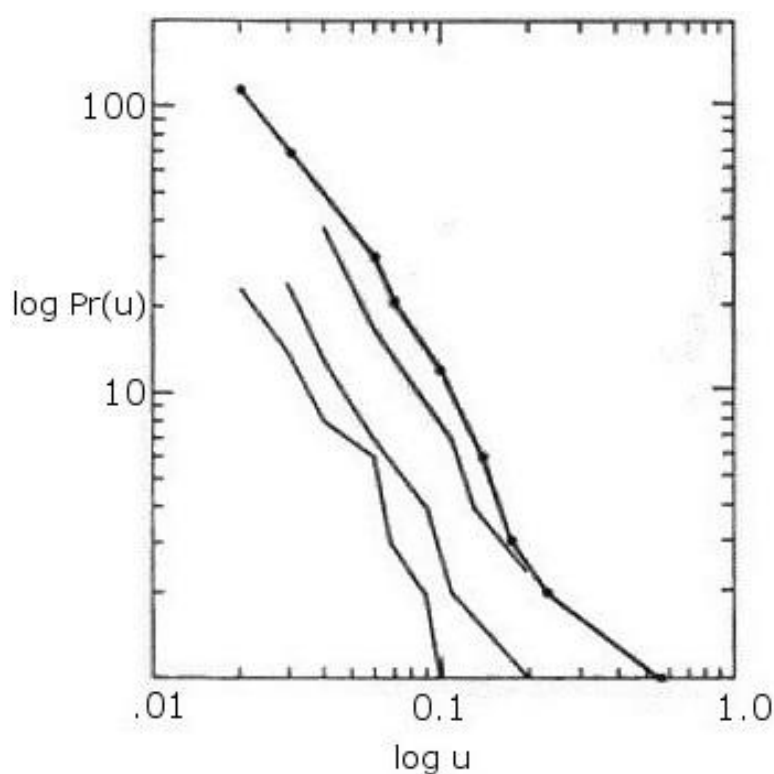


Obr.11 Grafická reprezentácia týždenných (bodky), ročných (znamienko „+“) a mesačných (krížik) zmien v ceny pšenice za obdobie 1883 – 1934. Na vertikálnych osiach sú naznačené pravdepodobnosti výskytu, horizontálne predstavujú zmeny cien (negatívne, resp. pozitívne), pričom pre ročné a týždenné merítka sú použité hodnoty od 0 po 3 a pre mesačné od 0 po 6 [5]

Obrázky Obr.9 a Obr.10 taktiež potvrdzujú platnosť vzťahu (15), teda pravdepodobnosť výskytu týždenných a mesačných zmien je asymptoticky rovnaká, okrem zmeny škály $N^{-1/\alpha}$ (v tomto prípade $N \approx 1/2$, keďže $N = 4$ a $\alpha \approx 2$).

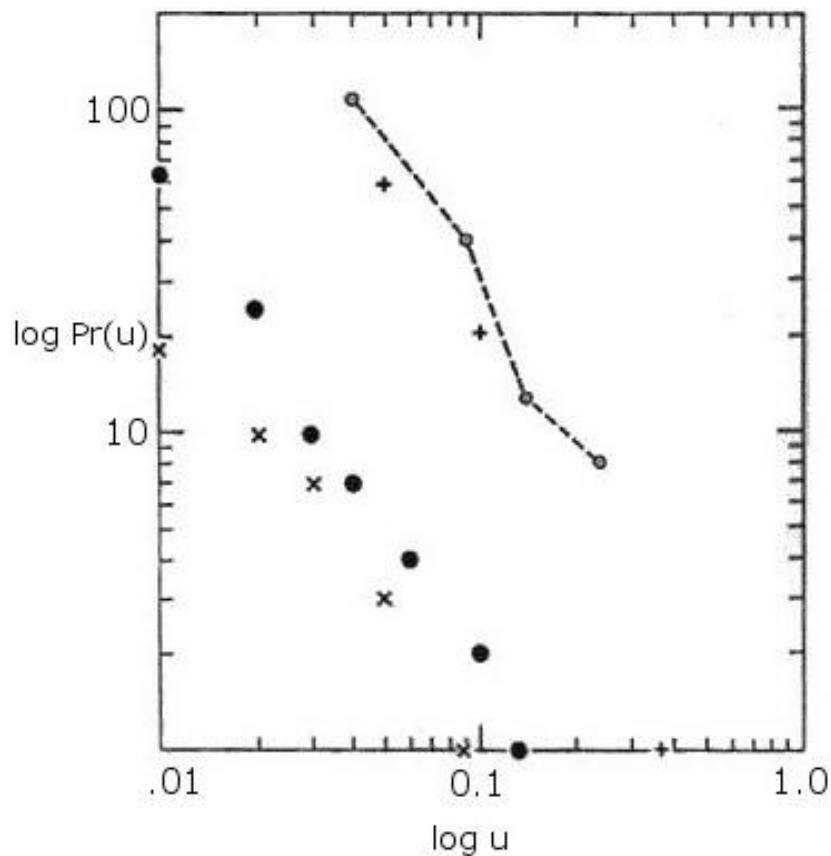
2.2.2 Zmeny cien niektorých úrokových mier a výmenných kurzov

Charakter špekulatívnych trhov zachytávajú úrokové miery tzv. peňazí splatených na požiadanie (angl. *call money*)²⁰, aktuálnu situáciu na medzinárodnom trhu zase výmenné kurzy. Z toho možno očakávať, že tieto „miery zmeny“ budú podliehať podobným tendenciám ako samotné „zmeny“, avšak procesy vytvárajúce jednotlivé zmeny rovnaké nebudú. Pri mierach, resp. kurzoch treba navyše dopredu uvažovať vzájomnú súvislosť medzi jednotlivými zmenami týchto veličín.



Obr.12 Pravdepodobnostné rozdelenia úrokovej miery prevyšujúcej hodnotu 6%. Hrubou čiarou sú naznačené celkové zmeny počas rokov 1857 – 1936, tenšie čiary reprezentujú tri kratšie obdobia (zľava doprava: 1877 – 1897, 1898 – 1936, 1857 – 1876) [5]

²⁰ Takéto peniaze väčšinou poskytujú banky, v súčasnosti však aj iné finančné subjekty ako rôzne fondy, obchodné korporácie, či poisťovne. Pôžička tohto druhu musí byť splatená akonáhle o to požiada veriteľ, teda nie je stanovený fixný termín splatnosti, a aj preto sú tieto pôžičky rizikové. Priemerná dĺžka pôžičky nepresahuje v priemere týždeň.



Obr.13 Rôzne rozdelenia úrokových mier a výmenných kurzov. Pozitívne výmenné kurzy vo vzťahu dolár – libra v 19. Storočí prezentujú prvé dve krivky (krížiky a bodky). Prerušovaná čiara predstavuje úrokové miery z konca každého mesiaca v rokoch 1836 – 1860 pre Boston a New York, resp. ich prekročenie hranice 6% (Bigelow). Nakoniec, desaťnásobky prekročenia 6 percentnej hranice úrokovej miery v textilnom priemysle (Nové Anglicko) podľa Davisa [5]

Obidva obrázky, tak ako aj obrázky z predchádzajúcej časti, poukazujú v prvom rade na asymptotickú invariantnosť niektorých časových radov voči zmenám takmer všetkých parametrov L – stabilného rozdelenia, s výnimkou škálovacieho faktora γ , čím dávajú priestor na zovšeobecňovanie vlastností náhodných procesov, a tým umožňujú identifikovať niektoré zákonitosti vývoja týchto procesov.

3 Niektoré vlastnosti ekonomických veličín z hľadiska fraktálovej analýzy

V priebehu tejto práce sme v súvislosti s ekonomickým dianím hovorili o náhodných procesoch, generujúcich cenové dáta, oplývajúce vlastnosťami, ktoré významne ovplyvňujú spôsoby a metódy ich štatistického spracovania. Inými slovami, štatistik by mal byť schopný tieto zákonitosti zachytiť a spracovávať vývoj ekonomických veličín s ohľadom na ne.

Medzi takéto zákonitosti možno rozhodne zaradiť fenomény stacionarity, resp. nestacionarity a fraktálovej sebakodobnosti, ktoré budú v ďalších častiach tejto kapitoly podrobené analýze v rámci časového radu vývoja denných cien ropy od 5. februára 1991 do 2. februára 1999, prebraných zo štandardu *Brent Crude*.²¹ Cieľom analýzy je poukázanie na nestacionárnosť časových radov, ktoré generujú náhodné procesy, ako aj pokus o načrtnutie prítomnosti fraktálovej štruktúry, a teda aj dôkaz o opodstatnenosti využívania štatistických metód založených na fraktálnom prístupe, ktoré boli spomenuté v predchádzajúcich častiach. Na numerickú analýzu bola použitá metóda relatívnych klzavých priemerov (RMA), a podpora vizualizácie výsledkov bola popri klasickom zobrazení časového radu zabezpečená aj fázovými portrétmi s rôznym odsadením.

3.1 Nestacionarita a fraktálová štruktúra časových radov

Stacionarita časového radu v štatistickom slova zmysle *a priori* predpokladá, že jednotlivé realizácie náhodného procesu (resp. náhodnej premennej) budú spadať pod určitú odchýlku od predpokladanej hodnoty náhodnej premennej, t.j. $E(X)$, v rámci určitého intervalu pozorovania. Inak povedané, ďalší vývoj časového radu možno charakterizovať ako viac alebo menej periodický proces, viazaný na strednú hodnotu, čo umožňuje jeho krátkodobú extrapoláciu.

²¹ Podľa *Brent Crude* sú oceňované až 2 tretiny svetovej produkcie ropy. Existujú taktiež ďalšie známe štandardy, ako *OPEC*, *Dubai Crude* alebo *West Texas Intermediate (WTI)*, ktorých ceny sa veľmi neodlišujú od *Brentu*. V poslednom čase však možno pozorovať narastajúcu divergenciu medzi klasifikáciami, niektoré diferencie naberajú hodnoty aj vyše 10 dolárov za barel.

Analýza časového radu denných cien ropy však poukazuje na neprítomnosť znakov stacionárneho časového radu. Na obrázku Obr.12 môžeme pozorovať vývoj relatívnych kľzavých priemerov denných cien ropy, vypočítaných na základe vzťahu

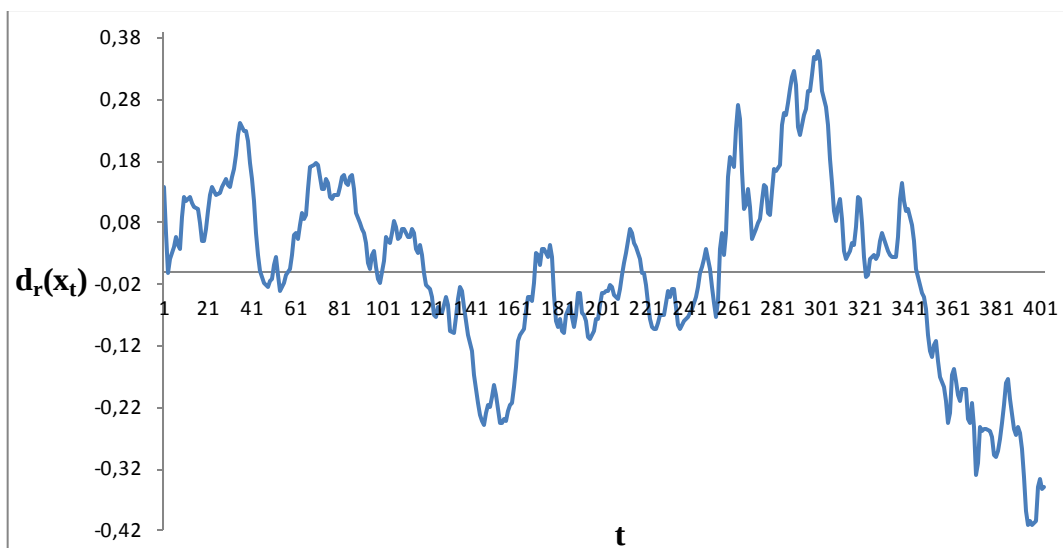
$$d_r(x_i) = \frac{\sum_{k=1}^m \frac{x_{ik}}{m} - E_x}{E_x}, \quad (24)$$

kde m – počet dát v kľzavom priemere (v tomto prípade 10)

i – poradové číslo kľzavého priemeru

E_x – stredná hodnota na celom intervale sledovania.

Na prvý pohľad možno z obrázku vypožorovať čisto náhodný, fluktuačný vývoj cien, resp. ich zmien, pričom nemožno definovať relevantnú strednú hodnotu pre celý interval, čo potvrdzuje predpoklad o nestacionárnosti ekonomických časových radov. Ak však postupné zmeny v cenách neuvažujeme vo vzťahu k očakávanej, resp. strednej hodnote, ľahko zbadáme, že chovanie cien sa v priebehu opakuje, avšak zakaždým v inej mierke. Najvýraznejšie prejavy takéhoto motívu môžeme pozorovať približne na intervale (40;70), ďalej v okolí intervalu (140;160), taktiež v oblasti od $t = 220$ až po $t = 250$, a nakoniec, ako zrkadlový obraz na intervale (280;310). Pri podrobnejšom skúmaní grafu sú k nájdeniu aj iné cyklické motívy, líšiace sa svojim merítkom.



Obr.12 Vývoj relatívnych kľzavých priemerov denných cien ropy za obdobie 5. 2 1991 až 2. 2 1999, pričom priemerovaných bolo 10 hodnôt s krokováním o hodnote 5²².

²² Klasické krokovanie s ofsetom 1 nebolo použité kvôli neprehľadnosti grafických výsledkov, spôsobenej vysokou hustotou údajov.

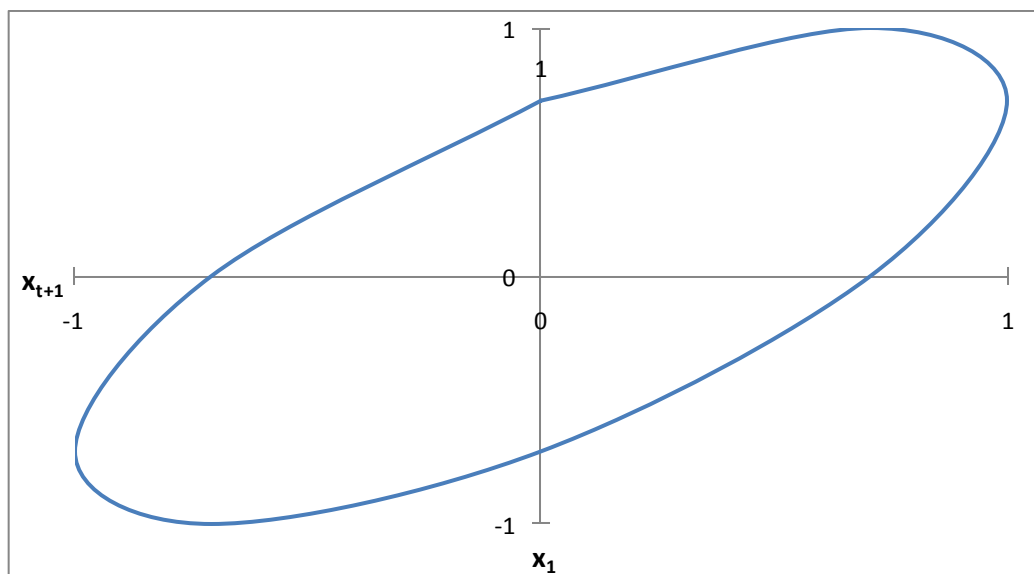
Ďalšou (grafickou) metódou pri ukázaní nestacionarity časového radu boli použité fázové portréty, kde sú jednotlivé hodnoty procesu znázorňované ako dvojica bodov, teda ako

$$[x(t_i); x(t_{i+k})],$$

kde $i = 1, 2, 3, \dots, n$;

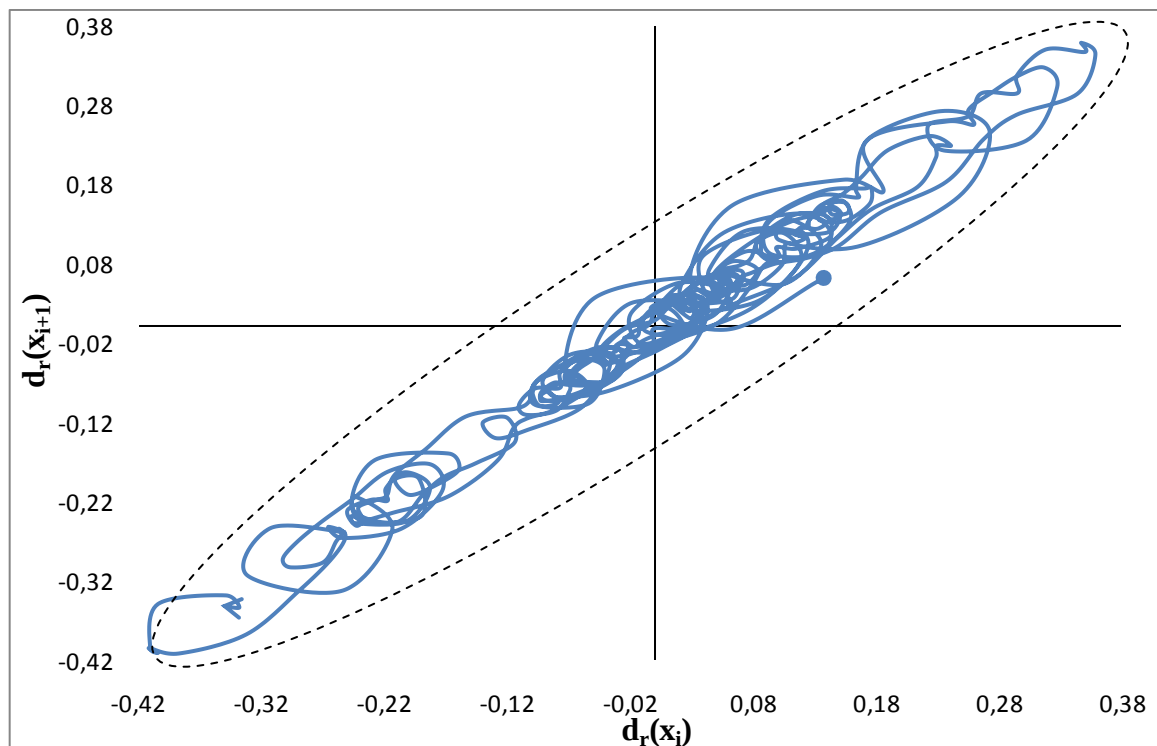
$$k = 1, 2, 3, \dots, m < n.$$

V prípade stacionárneho procesu by mal jeho fázový portrét pripomínať obrázok Obr.13, a to bez rozdielu na zvolený ofset k , pretože hodnota časového radu v čase t_i by nemala byť veľmi odlišná voči hodnote $t_i + k$, ak platí predpoklad stacionarity.



Obr. 13 Fázový portrét periodického procesu (konkrétne priebeh sínusovej funkcie) s ofsetom $k = 1$.

V prípade fázového portréту skúmaných cien ropy však ísť o stacionárny proces nemôže, pretože jeho priebeh, aj keď s náznakom periodickosti, je príliš „neusporiadaný“, aby mohol pripomínať obrázok Obr.13. Konkrétne, v priebehu časového radu sa objavujú jednotlivé hodnoty chaoticky, resp. kvázi „elipsu“ nevytvárajú postupne (kontinuálne). Avšak napriek uvedeným skutočnostiam, priebeh časového radu ako celku pripomína elipsu z predchádzajúceho obrázku. Teda popri nestacionarite vzhľadom na strednú hodnotu, sa daný časový rad „podobá“ na svoj stacionárny náprotivok, aj keď ku konečnému tvaru dospeje iným, na prvý pohľad, chaotickým spôsobom.

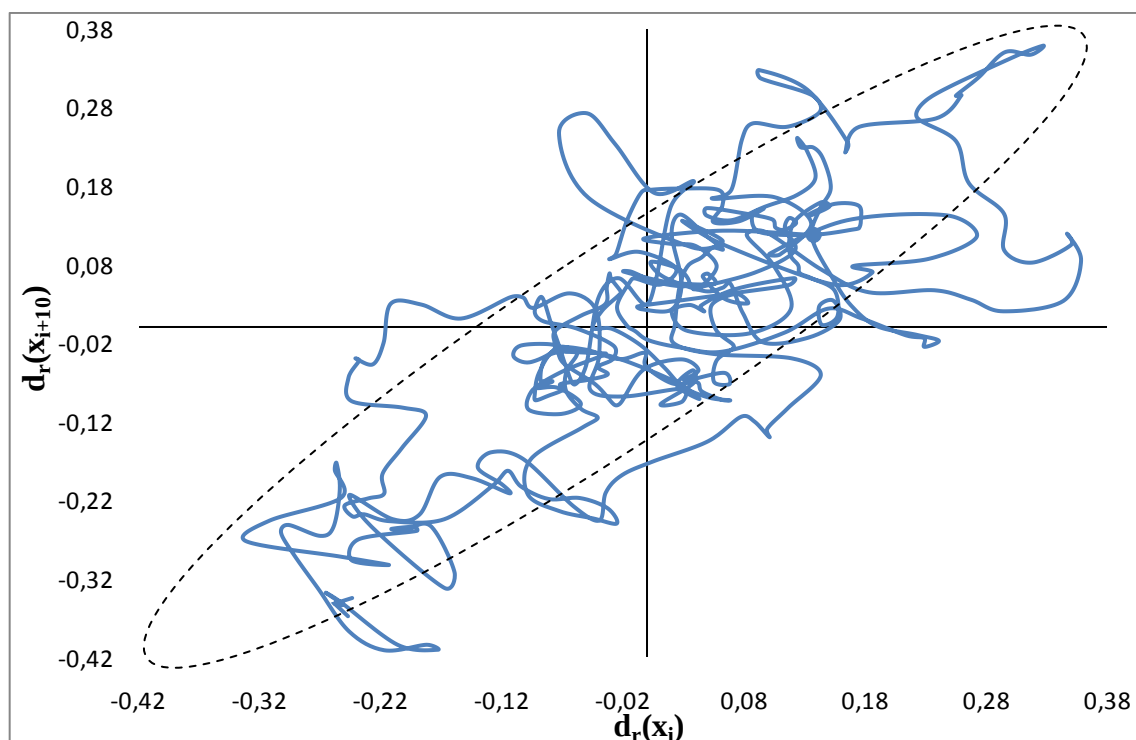


Obr. 14 Fázový portrét relatívnych klzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 1$. Postup výpočtu klzavých priemerov je zhodný s obrázkom Obr. 12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.

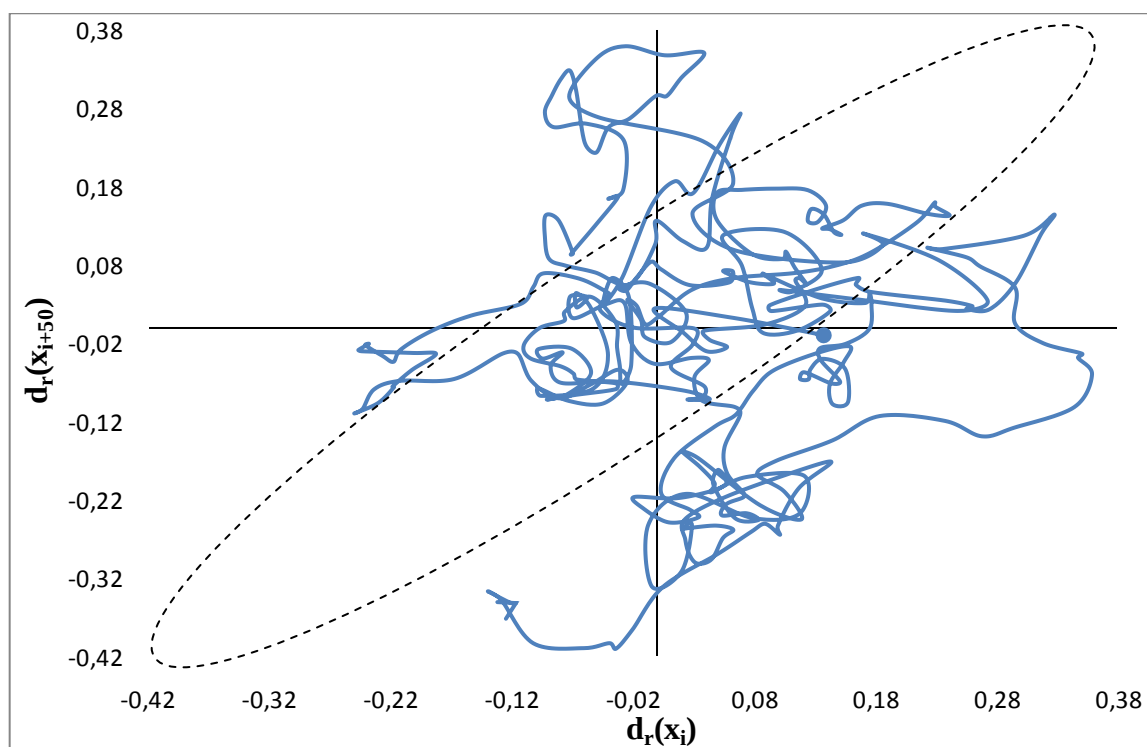
Posledný test stacionarity časového radu je realizovaný prostredníctvom detekcie korelácie (resp. autokorelácie) v štatistickom súbore. Jednotlivé realizácie náhodnej premennej medzi sebou korelujú, ak existuje medzi nimi závislosť, ktorá je vyjadrená korelačnou (autokorelačnou) funkciou. V stacionárnom rade sa takýto jav nevyskytuje, teda hodnota v čase t_{i+k} nie je ovplyvňovaná hodnotou v čase t_i v rámci ľubovoľne zvoleného intervalu k na časovej osi. Inak povedané, hodnota korelačnej funkcie je rovnaká bez ohľadu na to, kde na časovej osi definujeme sledovaný interval k [6].

Na sledovanie korelácie boli použité fázové portréty relatívnych klzavých priemerov s rôznym ofsetom sledovania. Vychádzajúc z predchádzajúceho odseku, jednotlivé grafy s rôzne nastaveným ofsetom by mali byť podobné grafu z obrázku Obr. 14, teda mali by približne vyplňať priestor tej istej elipsy, resp. priestor jej rotácie okolo stredu osí o 90 stupňov.

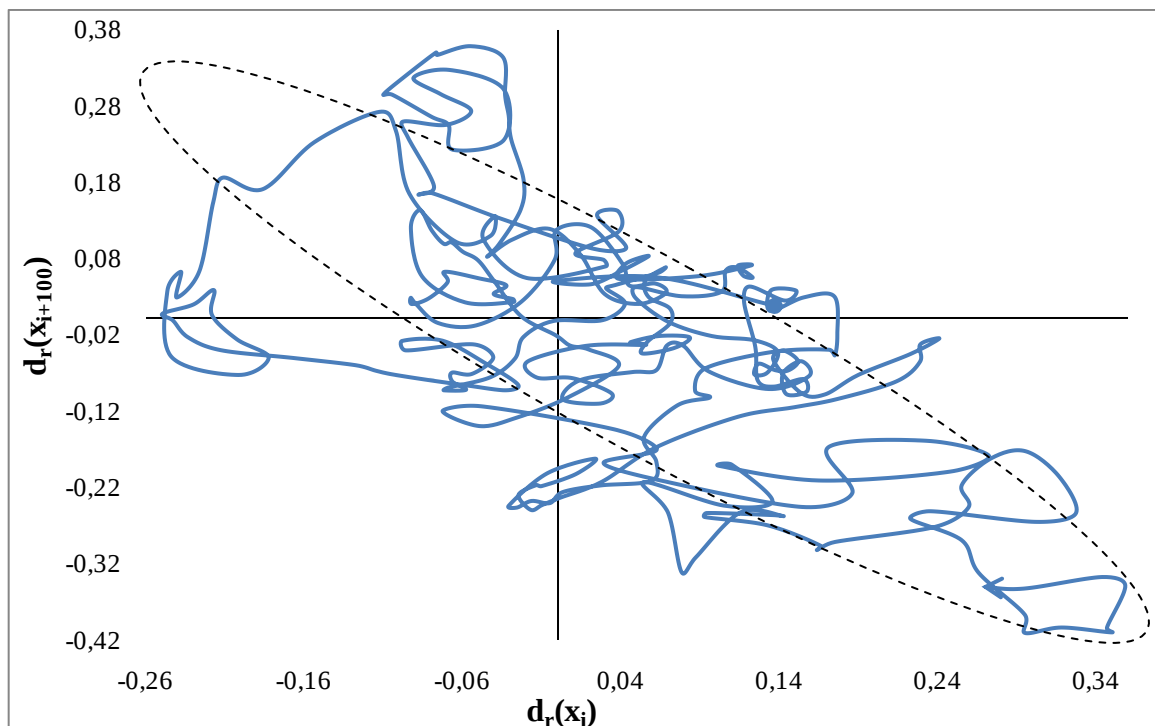
Jednotlivé grafy na obrázkoch Obr. 14 až Obr. 19 však s každým zvoleným ofsetom nadobúdajú iný „geometrický“ tvar, čo jednoznačne vedie k záveru, že rôzne hodnoty na seba vplyvajú nerovnako, resp. $x(t_i)$ voči $x(t_{i+1})$ nie je to isté ako $x(t_i)$ oproti $x(t_{i+10})$ atď., teda primárny časový rad je nestacionárneho charakteru.



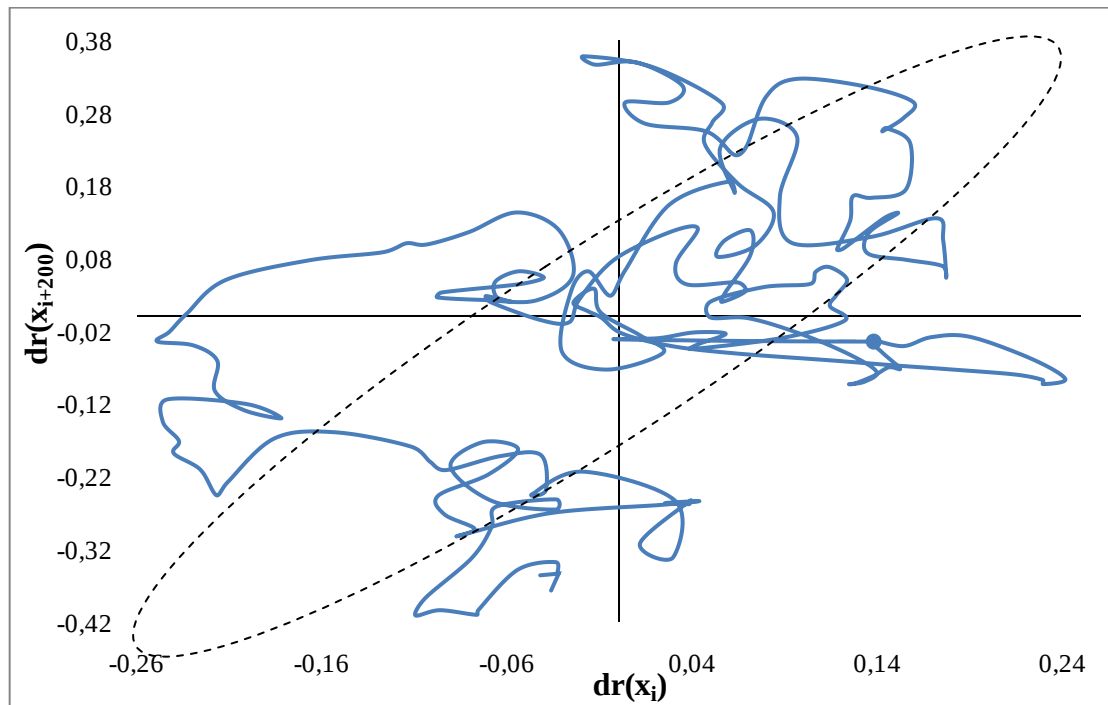
Obr. 15 Fázový portrét relatívnych klzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 10$. Postup výpočtu klzavých priemerov je zhodný s obrázkom Obr. 12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.



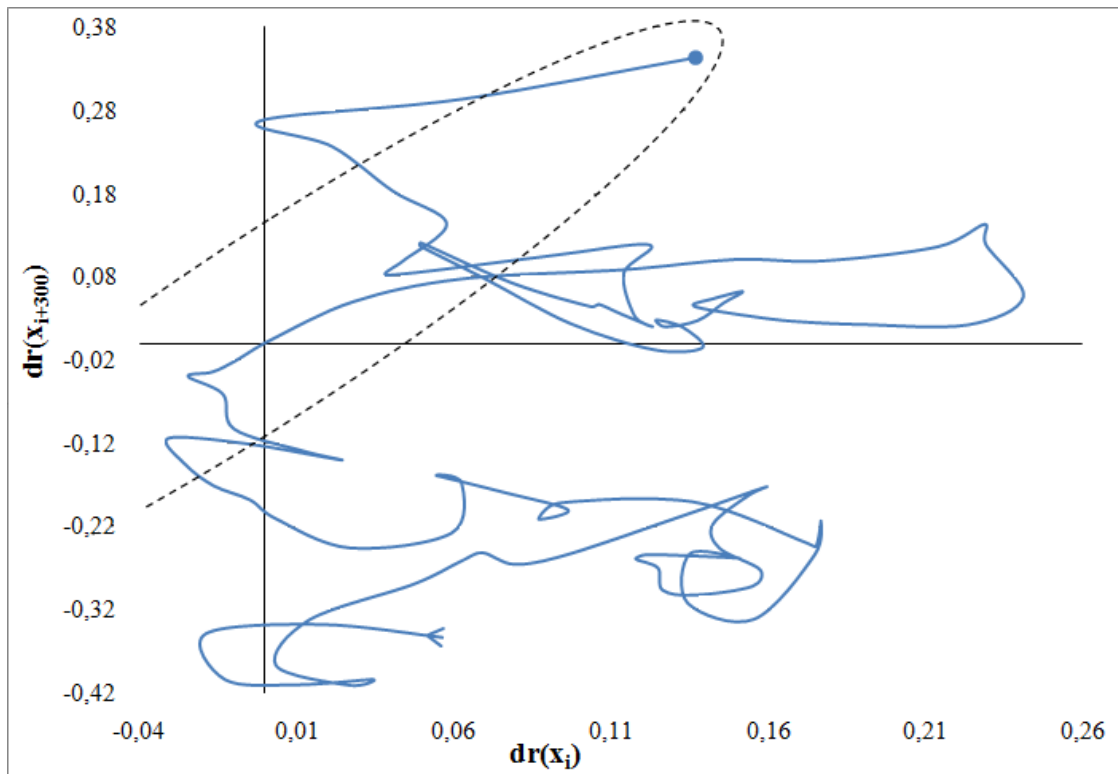
Obr. 16 Fázový portrét relatívnych klzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 50$. Postup výpočtu klzavých priemerov je zhodný s obrázkom Obr. 12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.



Obr.17 Fázový portrét relatívnych klzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 100$. Postup výpočtu klzavých priemerov je zhodný s obrázkom Obr.12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.



Obr.18 Fázový portrét relatívnych klzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 200$. Postup výpočtu klzavých priemerov je zhodný s obrázkom obr.12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.



Obr. 19 Fázový portrét relatívnych kľzavých priemerov denných cien ropy s ofsetom $k = 300$. Postup výpočtu kľzavých priemerov je zhodný s obrázkom Obr. 12. Modrá bodka predstavuje začiatok časového radu, ľavá šípka jeho koniec.

Väčšiu pozornosť ako nestacionarita primárneho časového radu vzbudzuje akási geometrická príbuznosť v rámci fázového portréту, ktorá je najviditeľnejšia na obrázku Obr. 14, kde bol použitý ofset o hodnote 1. Táto geometrická príbuznosť je pozorovateľná v zmysle seapodobnosti jednotlivých útvarov, z ktorých je graf vyskladaný, v tomto prípade sa jedná o kvázi elipsy rôznych merítok tvoriacich hlavnú elipsu, zastrešujúcu celý portrét. Inak povedané, celkový tvar grafu nájdeme niekoľkokrát v jeho menších častiach, ktoré sú opäť tvorené menšími a podobnými časťami. Takouto vlastnosťou disponujú práve fraktálové útvary a preto môžeme s opatrnosťou predpokladať, že pozorovaný časový rad je fraktálovej štruktúry. Nadobudnutie stopercentnej istoty takéhoto tvrdenia vyžaduje pokročilejšie a náročnejšie metódy štatistickej analýzy, aj preto ostávame pri predpoklade, keďže použité metódy sú skôr ilustračného než analytického charakteru.

Záver

Cieľom, a teda aj náplňou tejto práce bolo predstaviť fraktálny prístup pri štatistickom modelovaní ekonomických a sociálnych procesov v rámci jednotlivých trhov. Vzájomné ovplyvňovanie a pôsobenie jednotlivých procesov je syntetizované v atribúte, ktorý obsahuje každý trh danej komodity, a to v cene.

Cena, resp. postupné cenové zmeny odzrkadľujú celkový charakter trhu a sú neodmysliteľnou súčasťou informačného portfólia každého účastníka trhových operácií, pre ktorého je žiaduce včasne a vhodne interpretovať minulé a súčasný vývoj ceny, a taktiež približne správne odhadnúť jeho budúce pokračovanie. Na takéto „modelovanie“ využíva rôzne štatistické metódy, vychádzajúce z pravdepodobnostných hypotéz, z ktorých najznámejšia je azda Gaussova hypotéza alebo hypotéza normality.

V tejto práci bola popísaná jedna z takýchto hypotéz, nazývaná hypotéza L – stability, ako súčasť modelu M 1963, ktorý bol navrhnutý francúzskym matematikom a ekonómom B. Mandelbrotom. Hlavným znakom a zároveň aj prednosťou tejto hypotézy je fakt, že zovšeobecňuje klasickú hypotézu normality a tým umožňuje modelovať procesy, ktoré boli popísané v tretej kapitole. Takéto javy Gaussova hypotéza nepripúšťa, pretože neuvažuje nekonečnú variabilitu v cenových zmenách, tak ako jej stabilný náprotivok. Dôsledkom takeého predpokladu je zvýšená pravdepodobnosť výskytu neočakávaných (zlomových) situácií v rámci vývoja trhovej ceny, ktoré sa v empirických rozdeleniach objavujú často a nie náhodne. Bakalárska práca ponúkla aj niektoré aplikácie modelu M 1963 slúžiace ako dôkaz o vhodnosti použitia L – stabilnej hypotézy pri modelovaní cenového vývoja.

Postupné preferovanie stabilnej hypotézy (a metód z nej vychádzajúcich) pri modelovaní ekonomickej reality štatistickými výskumníkmi poukazuje na jej asymptotickú spoľahlivosť pri analýze charakteru vývoja cien, ktorá je tiež podporená ich očividnou fraktálovou štruktúrou, čo bolo ukázané v tretej kapitole.

Použitá literatúra

1. PEITGEN, H. O. – JÜRGENS, H. – SAUPE, D.: Chaos and Fractals: New Frontiers of Science [online]. Druhé vydanie. New York: Springer – Verlag, 2004. 877 s. [cit. 2011.02.05] Dostupné na internete: http://books.google.sk/books?id=jVpS_u0Lg4gC&printsec=frontcover&dq=Chaos+and+fractals:+new+frontiers+of+science&hl=sk&ei=Ly1QTeLINiDOsn5_DQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q&f=false. ISBN 0-387-20229-3
2. AMBRIŠKO, R.: Aplikácia teórie chaosu na menovom trhu Slovenskej republiky: diplomová práca. Košice: EUBA, 2003. 112 s.
3. <http://pg.kpi.fei.tuke.sk/?q=node/23>
4. DOSTÁL, P. – RAIS, K. – SOJKA, Z.: Pokročilé metódy manažérskeho rozhodovania [online]. Praha: Grada Publishing, 2005. 168 s. [cit. 2011.02.08] Dostupné na internete: http://books.google.sk/books?id=znYY9zC306cC&printsec=frontcover&dq=Pokro%C4%8Dil%C3%A9+met%C3%B3dy+mana%C5%BE%C3%A9rskeho+rozhodov%C3%A1n%C3%AD&hl=sk&ei=8DtWTc2zH8TKsgan35ilCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCkQ6AEwAA#v=onepage&q&f=false >. ISBN 80-247-1338-1
5. MANDELBROT, B.: Fractals and Scaling in Finance. New York: Springer, 1997. ISBN 0-387-98363-5
6. KULTAN, J. – TURŇA, Ľ.: Modelovanie ekonomických veličín. In Ekonomika a Informatika. ISSN 1336-3514, 2005, roč. 3, č. 2, str. 71 – 83. Bratislava
7. NOLAN, J. P.: Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data [online]. Boston: Birkhauser, 2009. Dostupné na internete: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>
8. LISÝ, J. a kol.: Ekonómia v Novej Ekonomike. Druhé vydanie. Bratislava: IURA Edition, 2007
9. DUDINSKÁ, E.: Metodika vypracovania diplomovej práce. Bratislava: Ekonóm, 2002. ISBN 80-225-1498-5

10. <http://www.imho.com/grae/chaos/fraction.html>
11. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Koch_curve_%28L-system_construction%29.jpg
12. http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/vonkoch_snowflake/2.gif
13. <http://www.domesticatingit.com/wp-content/uploads/2010/06/PowerLaw1.png>
14. <http://www.phys.unsw.edu.au/~mgb/pics/gausscauchy.gif>
15. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/01/Levy_distributionPDF.png
16. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4e/Levy_LdistributionPDF.png